Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Programa de Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	7	8	9	NOTA

Exame de Acesso ao Mestrado Acadêmico em Matemática
Teresina 03/11/2015

NOME:____ CPF: ____________________

1. Marque V (Verdadeiro) ou F (Falso), justificando brevemente sua resposta:

   (a) ( ) Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Então $Int(A \cup B) \neq Int(A) \cup Int(B)$ e $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$;

   (b) ( ) Sejam A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Então $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ou $\overline{A \cup B} \neq \overline{A} \cup \overline{B}$;

   (c) ( ) Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, denotamos por X' o conjunto dos seus pontos de acumulação. Se A, B são subconjuntos de $\mathbb{R}$, então $(A \cup B)' = A' \cup B'$ e $\bar{A} = A \cup A'$;

   (d) ( ) Sejam $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ e $a \in I$. Se existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, então f é contínua no ponto a;

   (e) ( ) Sejam $I \subset \mathbb{R}$, um intervalo, e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in Int(I)$, então f não possui ponto de mínimo ou de máximo;

   (f) ( ) Se a sequência de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então f é integrável;

   (g) ( ) Se a sequência de funções $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então (f_n) converge simplesmente para f;

   (h) ( ) Se a sequência de funções $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e cada função f_n é contínua em $x_0 \in [a, b]$, então f é contínua em x_0.

2. Prove os seguintes itens sobre enumerabilidade de conjuntos:

   (a) Seja A um conjunto enumerável e seja B_n o conjunto de todas as n-uplas $(a_1, \ldots, a_n)$, onde $a_k \in A$, $k = 1, \ldots, n$, e os elementos $a_1, \ldots, a_n$ são não necessariamente distintos. Então B_n é enumerável;

   (b) Use o item (a) para mostrar que o conjunto dos números racionais é enumerável.

3. Dizemos que uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é Cesàro-somável quando a sequência de Cesàro médias $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por
$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$$
converge, onde $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

   (a) Prove que toda série convergente é Cesàro-somável. Além disso, prove que se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = L$, então $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = L$;

   (b) Dê um exemplo de uma sequência Cesàro-somável que não converge no sentido usual.

4. Considere o polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, onde n é par. Mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) \leq p(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

5. (a) Dado um número real $0 < r < 1$, defina a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = rx - x^r + 1 - r$. Prove que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 1$;

   (b) Sejam α, β números reais positivos tais $\alpha + \beta = 1$ e sejam a, b números reais positivos tais que $a \neq b$. Prove que $a^\alpha b^\beta \; < \; \alpha\, a + \beta\, b$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + e^x$.

   (a) Mostre que f é bijetiva;

   (b) Seja g a função inversa de f, mostre que g é derivável e calcule $g'(1)$.

7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Defina $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

   para todo $x \in [a, b]$. Prove que F é derivável e que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a, b)$.

8. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_0^1 x^n f(x)dx = 0,$$

   para todo número inteiro $n \geq 0$. Mostre que f é identicamente nula.

9. Mostre que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\,(nx)}{n^{1+\alpha}}$$

   converge uniformemente em $\mathbb{R}$, para todo $\alpha > 0$.

Bom Trabalho!