Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza
Programa Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	NOTA

Exame de Seleção - Mestrado Acadêmico
Teresina 06/02/2017

NOME:______________________________ INSCRIÇÃO:____________

1. (A) Mostre que em todo intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ existem números racionais e números irracionais.

   (B) Mostre que, dada qualquer família (finita ou infinita) de intervalos abertos disjuntos então, necessariamente esta família é enumerável.

   (C) Se é dada uma família de intervalos disjuntos da forma $[a, b)$ pode ocorrer desta família ser não enumerável?

2. Mostre que, se uma sequência de números reais $(a_n)_n$ possui apenas um número finito de termos positivos e a série $\sum a_n$ converge, então esta série também é absolutamente convergente

3. Escolha um dos itens seguintes e o resolva:

   (A) Seja $b_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Mostre que a série $\sum \frac{b_k}{6^k}$ converge

   (B) Mostre que a série $\sum \frac{cos(n).sen(n^2).cos(n^3)}{n^2}$ é convergente

4. A sequência (x_n) definida como segue

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,1 \\
x_2 &= 0,1001 \\
x_3 &= 0,10010001 \\
x_4 &= 0,1001000100001 \\
\dots & \\
x_n &= 0,1001000100001000001.......100...001
\end{aligned}
$$

   em que, entre o penúltimo e o último algarismos 1 encontram-se n-zeros, é uma sequência convergente. Por que? Esta converge para um número racional ou irracional. Justifique sua resposta.

5. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$.

   (a) Prove que se X é não enumerável, então $X \cap X' \neq \emptyset$.

   (b) Se $X \cap X' \neq \emptyset$, então X é não enumerável? Justifique sua resposta.

6. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$. Suponha que existam $a_i \in [a,b]$ com $i = 1, 2, \cdots, n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} f(a_i) = 0$. Então existe $c \in \ [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

7. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Suponha que $\dfrac{f(a)}{f(b)} = \dfrac{b}{a}$. Então existe $c \in (a,b)$ tal que $cf'(c) + f(c) = 0$.

8. Considere uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada tal que $f(x) = 0$ exceto por uma quantidade finita de pontos em $[a,b]$. Prove que f é integrável e calcule o valor da integral.

9. Sejam K compacto, U aberto e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(K) \subset U$. Se uma sequência de funções $f_n : K \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para f. Prove que existe n_0 tal que $f_n(K) \subset U$ para $n \geq n_0$.

10. Mostre que a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$ converge, porém não uniformemente. Mostre que, apesar disso, vale

$$\int_0^1 (\lim_n f_n) = \lim_n \int_0^1 f_n.$$