Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Programa de Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	NOTA

Exame de Acesso ao Mestrado Acadêmico em Matemática
Teresina 02/02/2018

NOME:____ CPF: ______________________

1. Sejam $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ duas sequências de números reais arbitrárias. Prove que vale a seguinte desigualdade
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$
Tal desigualdade é conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz. Por fim, use isto para provar que, se a, b, c são números positivos, então
$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c\right)^2 \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{6}c^2.$$

2. Considere $A, B \subset \mathbb{R}$ e $A + B$ o subconjunto definido por $A + B = \{a + b \in \mathbb{R} : a \in A,\ b \in B\}$. Prove que se A é compacto e B é fechado, então $A + B$ é fechado.

3. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números inteiros no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Analise a convergência da série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n)^{2018}}{2018^n}.$$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável tal que $f''(x) + f'(x) = 1 + x + x^2$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Mostre que f não possui ponto de máximo.

5. Dada uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, mostre que f é contínua.

6. Sejam $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$ e $a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1} \in \mathbb{R}$. Mostre que equação $e^x = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ possui uma solução real.

7. Mostre que $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

8. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $g = f$, exceto em um conjunto de medida nula. Podemos afirmar que a função g é integrável? Justifique a sua resposta.

9. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e monótona. Mostre que f é integrável.

10. Considere a sequência de funções $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n$. Verifique se a sequência de funções (f_n) converge pontualmente ou uniformemente.

Bom Trabalho!