



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

## **Superfícies Capilares com Bordo Livre em um Wedge**

**Antônio Aguiar Freitas**

**Teresina - 2017**

**Antônio Aguiar Freitas**

**Dissertação de Mestrado:**

**Superfícies Capilares com Bordo Livre em um Wedge**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

**Teresina - 2017**

---

Cópia da folha de rosto assinada pelos membros da banca examinadora.

FICHA CATALOGRÁFICA  
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial do CCN

F866s Freitas, Antonio Aguiar.  
Superfícies capilares com bordo livre em um wedge /  
Antonio Aguiar Freitas. – Teresina, 2017.  
38f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,  
Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em  
Matemática, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

1. Geometria. 2. Superfícies Capilares. 3. Curvatura  
Média Constante. I. Título

CDD 516.362

*Aos meus pais Antídenis e Sónea.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais, Antíldenis e Sónea por todo o amor e apoio que foi dado por eles a mim, em especial à minha mãe que foi a responsável em me acompanhar durante toda a minha vida acadêmica desde o início dos estudos até o dia de hoje o qual concluo a minha dissertação, minhas irmãs Ianna e Ildenise pelo companharismo de toda uma vida . Também agradeço aos meus familiares , em especial minha prima Isabel que me ajudou muito nos primeiros anos de estadia minha em Teresina.

Agradeço a todo departamento de matemática da UFPI, por ter acolhido-me, possibilitando uma rápida adaptação à vida de graduando, em especial agradeço ao meu orientador Paulo Alexandre a quem me acompanha desde a iniciação científica com ensinamentos e conselhos e aos professores Barnabé, João Xavier, Jurandir, Humberto, Juscelino, Newton, Marcondes, Isaias, Kelton e José Francisco por contribuírem de forma direta na minha formação acadêmica.

Gostaria de agradecer a todos as amizades construídas ao longo da minha vida, desde os amigos de infância, aos que pude conhecer na UFPI e na UFC que me acolheram e me trataram como membro de suas famílias. Não citarei nomes para que eu não seja traído pela minha memória, más gostaria de salientar que suas amizades foram vitais para que eu sempre seguisse em frente.

Agradeço aos professores Barnabé Pessoa e Ítalo Dowell por terem aceito o convite da minha banca.

Por fim, agradeço ao CNPQ e a CAPES pelo apoio financeiro.

*“ Não importa o quanto tente, você sozinho não pode mudar o mundo. Mas este é o lado bonito do mundo.”.*

L (Death Note).

# Resumo

Nesta dissertação, apresentaremos alguns resultados obtidos por Rafael López sobre superfícies compactas com curvatura média constante e bordo livre em um wedge. Sob a hipótese que a superfície é mergulhada ou estável, será provado que a superfície é parte de uma esfera centrada no vértice do wedge.

**Palavras-chave:** Superfícies Capilares, Curvatura Média Constante, Wedge.



# Abstract

In this work, we will present some results obtained by Rafael López, on compact surfaces with constant mean curvature and free boundary in a wedge. Under the hypothesis of stability or embeddedness, we prove that the surface is part of a sphere centered at the vertex of the wedge.

**Keywords:** Capilares Surfaces, Constant mean curvature, Wedge.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Noções Básicas de geometria Riemanniana . . . . .	4
1.2 Um pouco de imersões isométricas . . . . .	9
1.3 A fórmula de Reilly . . . . .	12
1.4 Princípio da tangência . . . . .	16
1.5 O Problema Variacional . . . . .	17
<b>2 Estabilidade de superfícies capilares imersas em um wedge</b>	<b>18</b>
2.1 Demonstração do teorema 1 . . . . .	18
2.2 Demonstração do teorema 2 . . . . .	24
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>27</b>

# Introdução

Capilaridade é um importante fenômeno físico, estudado amplamente no passado por nomes como C.F. Gauss, P. Laplace e T. Young, que ocorre quando dois materiais distintos são postos em contato e não se misturam. Dado um recipiente  $W$  com uma gota de um líquido incompressível  $T$ , a interface do líquido e do ar é uma superfície capilar  $M$ . Sob a ausência da gravidade, a interface  $M$  é de curvatura média constante e, além disso, intersecta a fronteira de  $W$  sob um ângulo constante. Convém comparar essa configuração com uma bolha de sabão, onde a superfície não tem fronteira e a curvatura média é constante. As superfícies capilares também podem ser caracterizadas por serem pontos críticos do funcional energia sob algumas restrições. Recomendamos para maiores informações a referência [8].

Alguns exemplos de superfícies capilares podem ser vistos em [15], [2] e [12], no primeiro Ros e Souam fizeram um estudo de superfícies capilares imersas na bola do  $\mathbb{R}^3$ , no segundo Ainouz e Souam trataram de hipersuperfícies capilares imersas no semi-espaco e no slab, já no terceira López e Pyo caracterizam as superfícies capilares imersas no cone.

O problema de Plateau de fronteira livre consiste em encontrar uma superfície compacta, orientável  $M$  com área estacionária imersa em  $W$  e com fronteira em  $\partial W$  que preserva o volume. Nesse caso, a superfície  $M$  possui curvatura média constante e intersecta  $\partial W$  ortogonalmente ao longo de sua fronteira.

Esta dissertação foi baseada, principalmente, no trabalho de Rafael López [13] que trata um caso especial em que a superfície  $M$  imersa em  $W$  tem fronteira livre e o recipiente  $W$  é um wedge no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Um wedge é a região entre dois planos que se intersectam ao longo de uma reta a qual chamaremos de vértice. Assim, estamos interessados em encontrar soluções para o problema de Plateau de fronteira livre no caso em que  $M$  é imersa em um wedge, essa solução será denominada superfície capilar com fronteira livre imersa no wedge  $W$ .

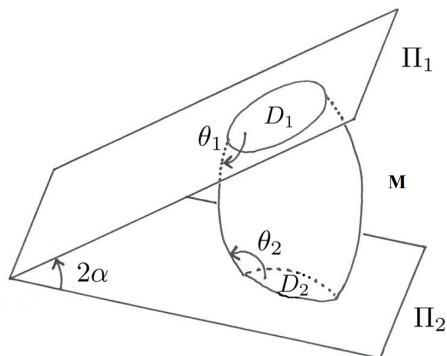


Figura 1: Wedge

Na figura 1 representamos a imersão de uma superfície  $M$  no Wedge  $W$ , no trabalho trataremos o caso em que o ângulo entre  $M$  e o bordo do Wedge representado pelos hiperplanos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  é  $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Pretendemos caracterizar a partir de poucas restrições as superfícies estáveis imersas no wedge, lembrando que uma superfície capilar é chamada estável se a segunda variação da área é não negativa para toda variação preservando o volume. No caso em que  $W$  é uma bola do  $\mathbb{R}^3$ , Ros e Souam [15] provaram que as únicas superfícies capilares estáveis são as calotas esféricas e os discos totalmente geodésicos.

O primeiro caso de superfície capilar com fronteira livre imersa em um wedge é o de um pedaço de uma esfera com centro sobre o vértice de  $W$ . Se deslocarmos a esfera até que seu centro esteja em um ponto equidistante aos dois planos que definem o wedge, teremos um exemplo de superfície capilar  $M$  imersa em  $W$  em que o ângulo entre  $M$  e  $\partial W$  é diferente de  $\frac{\pi}{2}$ . Neste trabalho estudaremos as superfícies capilares com fronteira livre imersa no wedge, sem restrições topológicas e, assumindo que a fronteira possui várias componentes conexas, trataremos dois problemas naturais. O primeiro, a respeito de estabilidade, em que provaremos:

**Teorema 1.** *Seja  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície capilar, compacta, com fronteira livre imersa no wedge  $W$ . Então,  $\phi(M)$  descreve o pedaço de esfera com centro no vértice de  $W$ .*

Esse resultado pode ser observado experimentalmente, ao depositarmos sobre um wedge uma gota de um líquido tocando ambas as partes da  $\partial W$ . Em seguida, notaremos

que o fluído tende ao vértice até que a gota converta-se a uma forma esférica.

O problema de estabilidade de um cilindro infinito imerso no wedge é bem estudado por Vogel em [18]. Relacionando com o **Teorema 1**, se mudarmos o wedge por dois planos paralelos como em [19, 3] obteremos que as únicas superfícies estáveis imersas entre dois planos paralelos serão calotas esféricas e cilindros suficientemente curtos.

O segundo problema consiste em assumirmos que a superfície é mergulhada no  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, a imersão  $\phi$  é um homeomorfismo entre  $M$  e  $\phi(M)$ . Como  $M$  é uma superfície compacta, isso equivale a dizer que  $M$  não possui auto-intersecções e que podemos identificar  $M$  com  $\phi(M)$ .

**Teorema 2.** *Seja  $M$  uma superfície capilar, compacta com fronteira livre mergulhada no wedge  $W$ . Então,  $M$  é um pedaço de uma esfera com centro sobre o vértice do wedge.*

É importante ressaltarmos que em ambos os teoremas e nos resultados preliminares de estabilidade de superfícies capilares imersas em um wedge há uma certa analogia à teoremas clássicos que caracterizam a esfera na família de superfícies fechadas do  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média constante. Com efeito, o **Teorema 1** corresponde ao Teorema de Barbosa-Do Carmo sobre a estabilidade de uma esfera redonda [4], já o **Teorema 2** corresponde ao Teorema de Alexandrov assumindo que a superfície é um mergulho [1].

Veremos detalhadamente a demonstração dos dois teoremas no capítulo 2. No capítulo 1 apresentaremos algumas definições e alguns resultados preliminares que serão utilizados na demonstração dos teoremas.

# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos definições e resultados básicos que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho. Boa parte deste capítulo pode ser encontrada em [6]. Denotaremos por  $M^n$  (ou simplesmente por  $M$ ) uma variedade  $n$ -dimensional orientável com bordo, o qual denotaremos por  $\partial M^{n-1}$  (ou simplesmente por  $\partial M$ ). Denotaremos por  $\mathcal{X}(M)$  o espaço dos campos de vetores diferenciáveis tangentes em  $M$ . Quando se fizer necessário denotaremos por  $T_p M$  ao espaço vetorial tangente à variedade  $M$  no ponto  $p \in M$ . Convém ressaltarmos que nos resultados principais desta dissertação estaremos interessados em um caso particular de uma variedade, que são as superfícies de dimensão 2, sendo assim, todas as definições, proposições e teoremas a seguir serão aplicáveis a esse caso particular.

### 1.1 Noções Básicas de geometria Riemanniana

**Definição 1.** *Definimos por conexão afim e denotamos por  $D$  a aplicação:*

$$D : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow D_X Y$$

*Satisfazendo as seguintes propriedades:*

1.  $D_{fX+gY} Z = fD_X Z + gD_Y Z$
2.  $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$

$$3. D_X(fY) = fD_XY + X(f)Y$$

Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) é uma correspondência que a cada ponto  $\mathbf{p} \in M$  associa um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $T_{\mathbf{p}}M$  que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se  $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $\mathbf{p}$  com  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{q} \in \phi(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i} = d\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{e}_i)$ , então  $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U$ . Vamos supor, daqui para frente, que  $M$  é uma variedade Riemanniana, ou seja,  $M$  é uma variedade equipada com uma métrica Riemanniana.

Um resultado clássico de geometria Riemanniana, devido a Levi-Civita, garante que existe uma única conexão afim  $D$  em  $M$ , chamada conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana que satisfaz:

1.  $D$  é simétrica, ou seja,  $[X, Y] = D_XY - D_YX$  para quaisquer campos  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , onde  $[X, Y]$  denota o colchete de Lie dos campos  $X$  e  $Y$  definido por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

2.  $D$  é compatível com a métrica, isto é,  $X\langle Y, Z \rangle = \langle D_XY, Z \rangle + \langle Y, D_XZ \rangle$  para quaisquer campos  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ .

Ao longo desse trabalho, vamos denotar por  $D$  a conexão Riemanniana de  $M$ .

**Definição 2.** A curvatura de Riemann  $R$  de  $M$  é uma correspondência que a cada par de vetores  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  associa a aplicação:

$$R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$R(X, Y)Z = D_YD_XZ - D_XD_YZ + D_{[X, Y]}Z,$$

$$\forall Z \in \mathcal{X}(M).$$

Em particular, denotando  $R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$  segue da definição de curvatura e da conexão as seguintes propriedades:

1.  $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$
2.  $R(X, Y, Z, W) = R(Y, X, W, Z)$
3.  $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$

**Definição 3.** O tensor de Ricci de  $M$  em  $p \in M$  é definido por

$$\text{Ric}(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(X, e_i)X, e_i \rangle,$$

onde  $X \in \mathcal{X}(M)$  e  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  é uma base qualquer do complemento ortogonal do subespaço gerado por  $X$ .

**Definição 4.** Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. O gradiente de  $f$  é o único campo vetorial suave  $\nabla f$ , definido sobre  $M$  que satisfaz a seguinte condição:

$$X(f) = \langle \nabla f, X \rangle,$$

para todo campo de vetores  $X \in \mathcal{X}(M)$ .

Decorre da definição que, se  $f$  e  $g$  são funções suaves, então:

1.  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$ ;
2.  $\nabla(f \cdot g) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$ .

**Definição 5.** Seja  $X$  um campo vetorial  $C^k$ . A divergência de  $X$  é a função suave  $\text{Div } X : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\text{Div } X(p) = \text{tr} \{v \mapsto D_v X\},$$

onde  $v \in T_p M$  e  $\text{tr}$  indica o traço do operador.

Decorre da definição, que se  $X$  e  $Y$  são campos de vetores de classe  $C^k$  e  $f$  uma função suave, então:

1.  $\text{Div}(X + Y) = \text{Div } X + \text{Div } Y$ ;
2.  $\text{Div}(f \cdot X) = f \cdot \text{Div } X + \langle \nabla f, X \rangle$ .

**Definição 6.** Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. O Laplaciano de  $f$  é a função suave  $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\Delta f = \text{Div}(\nabla f).$$

Das propriedades do gradiente e do divergente segue que se  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves, então:



1.  $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$ ;
2.  $\Delta(f \cdot g) = g \cdot \Delta f + f \cdot \Delta g + 2 \cdot \langle \nabla f, \nabla g \rangle$ .

**Teorema 3** (Divergência). *Sejam  $M$  uma variedade compacta orientável do  $\mathbb{R}^n$  com bordo  $\partial M$  e  $X$  um campo  $C^k$ . Então*

$$\int_M \text{Div } X dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle dS,$$

onde  $\nu$  é um campo unitário normal à  $\partial M$  apontando para fora de  $M$ .

Esse teorema é uma consequência imediata do Teorema de Stokes para variedades. A demonstração do Teorema de Stokes pode ser encontrada no capítulo 10 de [17].

**Corolário 1** (1º Fórmula de Green). *Sejam  $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$ , funções de classe  $C^k$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Seja  $M \subset U$  uma variedade orientável, compacta com bordo suave  $\partial M$ . Então :*

$$\int_M u \cdot \Delta v + \langle \nabla u, \nabla v \rangle dM = \int_{\partial M} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} dS.$$

Segue diretamente do Teorema da divergência e da definição do  $\text{Div}$  considerando o seguinte campo  $X = u \cdot \text{grad}(v)$ .

**Definição 7.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. O hessiano de  $f$  no ponto  $p$  é o operador linear  $\text{Hess}_p f : T_p M \rightarrow T_p M$ , definido por:*

$$\text{Hess}_p f(\nu) = D_\nu \nabla f.$$

**Proposição 1.** *Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, então o hessiano de  $f$  no ponto  $p$  é um operador linear auto-adjunto.*

*Demonstração.* Dados  $x, y \in T_p M$  sejam  $X, Y$  extensões locais de  $x$  e  $y$  em uma vizinhança de  $p$ . Então:

$$\begin{aligned} \langle \text{Hess}_p f(x), y \rangle &= \langle D_X \nabla f, Y \rangle_p = X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, D_Y X \rangle \\ &= X(Y(f)) - \langle \nabla f, D_X Y - [X, Y] \rangle \\ &= Y(X(f)) - [X, Y](f) - \langle \nabla f, D_X Y \rangle + [X, Y](f) \\ &= \langle x, \text{Hess}_p f(y) \rangle. \end{aligned}$$

□

**Definição 8.** Diz-se que um referencial ortornormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em um aberto  $U \subset M$  é geodésico em  $p$  se  $D_{e_i} e_j = 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Proposição 2.** Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, então para todo  $p \in M$  vale a igualdade:

$$\Delta f(p) = \text{tr}(\text{Hess} f_p).$$

*Demonstração.* Dada uma base ortonormal do  $T_p M$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , temos que

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Hess} f_p) &= \sum_i \langle \text{Hess} f_p(e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_i \langle D_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = \text{div}(\nabla f_p) \\ &= \Delta f_p. \end{aligned}$$

□

## 1.2 Um pouco de imersões isométricas

Nesta secção vamos considerar uma variedade Riemanniana  $M^n$  imersa num espaço euclidiano  $\mathbb{R}^N$ , cuja conexão riemanniana será denotada por  $\overline{D}$ . Neste caso, denotaremos por  $\mathcal{X}^\perp(M)$  o espaço dos campos de vetores diferenciáveis normais à  $M$ .

Sejam  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  e  $\overline{X}, \overline{Y}$  extensões locais no  $\mathbb{R}^N$  de  $X$  e de  $Y$ , então definimos

$$D_X Y = (\overline{D}_{\overline{X}} \overline{Y})^\dagger.$$

Verifica-se com certa facilidade que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida por  $\phi$ . Note que esta conexão nada mais é que a projeção da conexão Riemanniana do  $\mathbb{R}^N$  sobre o espaço tangente de  $M$ . Note também que caso substituirmos o espaço  $\mathbb{R}^N$  por qualquer outra variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $\overline{M}^N$  obtemos naturalmente uma conexão Riemanniana dada pela projeção da conexão de  $\overline{M}$  sobre o espaço tangente de  $M$ . Gostaríamos de definir a segunda forma fundamental da imersão  $\phi$ , usando a definição de conexão riemanniana obtemos que a aplicação  $B(X, Y) = \overline{D}_{\overline{X}} \overline{Y} - D_X Y$  está bem definida, ou seja, independe da extensão local de  $X$  e de  $Y$ .

**Proposição 3.** *Se  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , a aplicação  $B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)^\perp$  dada por*

$$B(X, Y) = \overline{D}_{\overline{X}} \overline{Y} - D_X Y$$

*é bilinear e simétrica.*

A prova dessa proposição pode ser facilmente obtida em [6]

**Definição 9.** *A forma quadrática  $\Pi_\eta$  definida em  $T_p M$  por  $\Pi_\eta(X) = H_\eta(X, X)$  é chamada a segunda forma fundamental de  $\phi$  em  $p$  segundo o vetor normal  $\eta$ .*

Associada à aplicação  $H_\eta$  temos a aplicação linear auto-adjunta  $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  definida por:

$$\langle A_\eta(X), Y \rangle = H_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle.$$

**Proposição 4.** *Dados  $p \in M$ ,  $x \in T_p M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Seja  $N \in \mathcal{X}^\perp(M)$  uma extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ , então:*

$$A_\eta(x) = -(\overline{D}_x N)^\dagger.$$

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{y} \in T_p M$  e  $X, Y$  extensões locais de  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  tangentes a  $M$ . Então,  $\langle \mathbf{N}, Y \rangle = 0$ , e portanto

$$\begin{aligned} \langle A_\eta(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= \langle B(X, Y)(p), \mathbf{N} \rangle = \langle \overline{D}_X Y - D_X Y, \mathbf{N} \rangle(p) \\ &= \langle \overline{D}_X Y, \mathbf{N} \rangle(p) \\ &= -\langle Y, \overline{D}_X \mathbf{N} \rangle \\ &= \langle -\overline{D}_X \mathbf{N}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{y} \in T_p M$  □

**Definição 10.** Dada uma imersão  $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , definimos a sua curvatura média por

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}(A_\eta)$$

onde  $\text{tr}(A_\eta)$  significa o traço da aplicação  $A_\eta$ .

**Definição 11.** Dada uma imersão  $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , dado um campo de vetores  $\eta$  normais à  $M$  definimos o vetor curvatura média da imersão por  $\vec{H} = H \cdot \eta$ , ou ainda

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \text{tr}(A_\eta) \cdot \eta$$

**Definição 12.** Dada uma imersão  $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , denotando por  $A_\eta^t$  a transposta do operador de weingarten  $A_\eta$ , definimos a norma da segunda forma fundamental por

$$|\sigma|^2 = \text{tr}(A_\eta A_\eta^t).$$

Considere  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $\mathcal{X}(M)$  de tal forma que diagonalize a matriz da aplicação  $A_\eta$ . Chamaremos as curvaturas principais de  $\phi$  os números  $k_1, \dots, k_n$  tais que  $A_\eta(e_i) = k_i e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Nessas condições, temos que a curvatura média é dada por  $H = \frac{k_1 + \dots + k_n}{n}$  e a norma da segunda forma fundamental  $|\sigma|^2 = \sum_i |A_\eta(e_i)|^2 = k_1^2 + \dots + k_n^2$ .

**Proposição 5.** Seja  $H$  a curvatura média de uma imersão  $\phi$  e  $\sigma$  a sua segunda forma fundamental. Então,  $|\sigma|^2 \geq nH^2$  e a igualdade ocorre se e somente se  $\phi$  é umbilical.

*Demonstração.* Sejam  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $X(M)$  que diagonalize a matriz da aplicação  $A_\eta$ . Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que:

$$\begin{aligned} |\sigma|^2 &= \sum_i |A_\eta(e_i)|^2 = \sum_i k_i^2 \geq \frac{1}{n} \left( \sum_i k_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} (\text{tr}(\sigma))^2 \\ &= \frac{1}{n} (n \cdot H)^2 \\ &= nH^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente, se  $k_1 = \dots = k_n$ . Ou seja, se e somente se,  $\phi$  é umbilical.  $\square$

Agora apresentaremos uma proposição que será importante na demonstração da fórmula de Reilly.

**Proposição 6.** *Sejam  $\psi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  uma imersão isométrica e  $f : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$  função suave, então:*

$$\Delta_{\bar{M}}f = \Delta_M f - nH(f) + (\text{Hess}_{\bar{M}}f)(N, N)$$

em cada  $p \in M$ , onde  $H$  é o vetor curvatura média da imersão e  $N$  campo unitário normal à  $M$  em uma vizinhança de  $p$ .

*Demonstração.* Denotando  $D$  e  $\bar{D}$  as conexões de  $M$  e  $\bar{M}$  respectivamente,  $\Pi$  a segunda forma fundamental de  $\psi$ . Sendo  $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = N\}$  referencial geodésico em uma vizinhança de  $p \in M$  em  $\bar{M}$ , temos que em  $p$  vale:

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{M}}f &= \text{tr}(\text{Hess}_{\bar{M}}f) = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \bar{D}_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} (e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \bar{D}_{e_i} e_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, D_{e_i} e_i + B(e_i, e_i) \rangle) \\ &\quad + N \langle \nabla f, N \rangle - \langle \nabla f, \bar{D}_N N \rangle \\ &= \Delta_M f - \sum_{i=1}^n \langle \nabla f, B(e_i, e_i) \rangle + \text{Hess}_{\bar{M}}f(N, N) \\ &= \Delta_M f - n \langle H, \nabla f \rangle + \text{Hess}_{\bar{M}}f(N, N). \end{aligned} \tag{1.2}$$

$\square$

### 1.3 A fórmula de Reilly

Nessa seção apresentaremos a fórmula de Reilly, esta que será utilizada para demonstrar o Teorema 2. Sejam  $(\overline{M}^{n+1}, \overline{D})$  uma variedade riemanniana compacta orientada, o bordo de  $\overline{M}$  é a variedade riemanniana  $\partial\overline{M} = M^n$ , consideremos  $M$  munido com a métrica e orientação induzida de  $\overline{M}$ ,  $\nu$  campo unitário normal exterior à  $\partial\overline{M}$  ao longo de  $M$  e  $H$  curvatura média de  $\overline{M}$ . No Teorema a seguir apresentaremos uma fórmula devido a Reilly, sendo conhecida na literatura como fórmula de Reilly, mas antes apresentaremos no próximo lema outro resultado clássico da geometria que é a fórmula de Bochner. A fórmula de Reilly será obtida basicamente mediante a integração da fórmula de Bochner.

**Lema 1** (Fórmula de Bochner). *Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana, e considere  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  suave. Então:*

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = \text{Ric}(\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + |\text{Hess } f|^2.$$

*Demonstração.* Com o intuito de simplificar notação consideraremos um sistema de coordenadas normais  $(x, V)$ , onde  $V$  é a vizinhança normal de um dado  $p \in M$ . Esse sistema goza de uma série de propriedades, dentre elas:  $D_{e_i} e_j = 0$  e  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é a base de  $\mathcal{X}(M)$  nesse sistema de coordenadas. Para mais informações sobre tal sistema indicamos [10].

No sistema de coordenadas descrito acima, podemos escrever  $\nabla f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$  onde  $f_i = e_i(f) = \langle \nabla f, e_i \rangle$ . Logo,  $|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2$  e derivando em  $j$  obtemos:

$$\frac{1}{2}(|\nabla f|^2)_j = \sum_{i=1}^n f_i f_{ij}.$$

Novamente derivando em  $j$  obtemos:

$$\frac{1}{2}(|\nabla f|^2)_{jj} = \sum_{i=1}^n ((f_{ij})^2 + f_i f_{ijj}).$$

Somando em  $j$  temos

$$\Delta\left(\frac{1}{2}|\nabla f|^2\right) = \sum_j \left(\frac{1}{2}(|\nabla f|^2)_{jj}\right) = \sum_{i,j} (f_{ij})^2 + \sum_{i,j} f_i f_{ijj},$$

Para calcular  $f_{ijj}$ , notemos que  $f_i = \langle \nabla f, e_i \rangle$ , dessa forma:

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \langle D_{e_j} \nabla f, e_i \rangle = \text{Hess } f(e_j, e_i) \\ &= \text{Hess } f(e_i, e_j) \\ &= \langle D_{e_i} \nabla f, e_j \rangle. \end{aligned}$$

E, assim, derivando novamente em  $j$  temos:

$$\begin{aligned} f_{ijj} &= \langle D_{e_j} D_{e_i} \nabla f, e_j \rangle = \langle R(e_i, e_j) \nabla f, e_j \rangle + \langle D_{e_i} D_{e_j} \nabla f, e_j \rangle \\ &= \langle R(e_i, e_j) \nabla f, e_j \rangle + e_i \langle D_{e_j} \nabla f, e_j \rangle. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Assim, denotando  $e_i \langle D_{e_j} \nabla f, e_j \rangle = \langle D_{e_j} \nabla f, e_j \rangle_i$  temos a fórmula de Ricci:

$$f_{ijj} = -\langle R(e_i, e_j) e_j, \nabla f \rangle + \langle D_{e_j} \nabla f, e_j \rangle_i.$$

Portanto,

$$\Delta\left(\frac{1}{2}|\nabla f|^2\right) = \sum_{i,j} \langle D_{e_i} \nabla f, e_j \rangle^2 - \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j) e_j, \nabla f \rangle f_i + \sum_{i,j} f_i \langle D_{e_j} \nabla f, e_j \rangle_i.$$

Agora, calculemos em separado cada um dos membros da equação :

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{2}|\nabla f|^2\right) &= \sum_{i,j} \langle D_{e_i} \nabla f, e_j \rangle^2 - \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j) e_j, \nabla f \rangle f_i + \sum_{i,j} f_i \langle D_{e_j} \nabla f, e_j \rangle_i \\ &= \sum_i \langle D_{e_i} \nabla f, \sum_j \langle D_{e_i} \nabla f, e_j \rangle e_j \rangle + \sum_j \langle R(\sum_i f_i e_i, e_j) \nabla f, e_j \rangle \\ &\quad + \sum_i f_i \left( \sum_j \langle D_{e_j} \nabla f, e_j \rangle \right)_i \\ &= \sum_{i,j} \langle D_{e_i} \nabla f, D_{e_i} \nabla f \rangle + \sum_j \langle R(\nabla f, e_j) \nabla f, e_j \rangle + \sum_i f_i (\Delta f)_i \\ &= \sum_i |D_{e_i} \nabla f|^2 + \text{Ric}(\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle \\ &= |\text{Hess } f|^2 + \text{Ric}(\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle. \end{aligned}$$

E assim, finalmente, obtemos a fórmula de Bochner:

$$\frac{1}{2} \Delta(|\nabla f|^2) = |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

□

**Teorema 4** (Fórmula de Relly). *Nas notações acima, se  $f : \overline{M}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave então*

$$\int_{\overline{M}} \left( (\overline{\Delta} f)^2 - |\text{Hess}_{\overline{M}} f|^2 - \text{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) \right) d\overline{M} = \int_M \left( \left( 2\Delta f - nH \cdot f_{\nu} \right) \cdot f_{\nu} - \Pi(\nabla f, \nabla f) \right) dM,$$

onde barra superior indica que o cálculo é feito em  $\overline{M}^{n+1}$ ,  $f_{\nu} = \langle \nabla f, \nu \rangle = \frac{\partial f}{\partial \nu}$ ,  $\Pi$  representa a segunda forma fundamental da inclusão  $i : M \rightarrow \overline{M}$  e  $H$  a curvatura média.

*Demonstração.* Integrando a fórmula de Bochner, obtemos que:

$$\frac{1}{2} \int_{\overline{M}} \overline{\Delta}(|\nabla f|^2) d\overline{M} = \int_{\overline{M}} (|\text{Hess}_{\overline{M}} f|^2 + \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f) \rangle + \text{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)) d\overline{M}.$$

Pelo Teorema da Divergência temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\overline{M}} \overline{\Delta}(|\overline{\nabla} f|^2) d\overline{M} &= \frac{1}{2} \int_{\overline{M}} \text{div}_{\overline{M}} \left( \overline{\nabla}(|\overline{\nabla} f|^2) \right) d\overline{M} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \langle \nu, \overline{\nabla}(|\overline{\nabla} f|^2) \rangle d\mathcal{M} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \nu(|\overline{\nabla} f|^2) d\mathcal{M} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \langle \overline{D}_{\nu} \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f \rangle d\mathcal{M} \\ &= \int_{\mathcal{M}} (\text{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \overline{\nabla} f) d\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Por outro lado, desde que  $\text{div}_{\overline{M}}((\overline{\Delta} f) \cdot \overline{\nabla} f) = \langle \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f), \overline{\nabla} f \rangle + (\overline{\Delta} f)^2$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\overline{M}} \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f) \rangle d\overline{M} &= \int_{\overline{M}} \text{div}_{\overline{M}}((\overline{\Delta} f) \cdot \overline{\nabla} f) d\overline{M} - \int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 d\overline{M} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \langle (\overline{\Delta} f) \overline{\nabla} f, \nu \rangle d\mathcal{M} - \int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 d\overline{M} \\ &= \int_{\mathcal{M}} f_{\nu}(\overline{\Delta} f) d\mathcal{M} - \int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 d\overline{M}. \end{aligned}$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 d\overline{M} &= \int_{\overline{M}} (|\text{Hess}_{\overline{M}} f|^2 + \text{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)) d\overline{M} \\ &\quad - \int_{\mathcal{M}} (\text{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \overline{\nabla} f) d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} f_{\nu}(\overline{\Delta} f) d\mathcal{M} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Assim, pela Proposição 6 temos

$$\begin{aligned} f_{\nu} \overline{\Delta} f &= f_{\nu} (\Delta_{\mathcal{M}} f - \langle \mathbf{n} H \nu, \nabla f \rangle + \text{Hess}_{\overline{M}} f(\nu, \nu)) \\ &= f_{\nu} \Delta f - \mathbf{n} H f_{\nu}^2 + f_{\nu} (\text{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \nu), \end{aligned}$$

como  $\nabla f = (\overline{\nabla} f)^{\dagger}$ , podemos escrever  $\nabla f = (\overline{\nabla} f) - \langle \overline{\nabla} f, \nu \rangle \nu$  e assim:  $\overline{\nabla} f = \nabla f + f_{\nu} \nu$ .



Usando o fato que  $\text{Hess}f$  é bilinear e simétrico, temos

$$\begin{aligned}
 \text{Hess}_{\overline{M}}(\nu, \overline{\nabla}f) &= \text{Hess}_{\overline{M}}f(\nu, f_\nu\nu + \nabla f) \\
 &= f_\nu(\text{Hess}_{\overline{M}}f)(\nu, \nu) + (\text{Hess}_{\overline{M}}f)(\nabla f, \nu) \\
 &= f_\nu(\text{Hess}_{\overline{M}}f)(\nu, \nu) + \langle \overline{D}_{\nabla f} \overline{\nabla}f, \nu \rangle \\
 &= f_\nu(\text{Hess}_{\overline{M}}f)(\nu, \nu) + \langle \overline{D}_{\nabla f} \nabla f, \nu \rangle \\
 &\quad + f_\nu \langle \overline{D}_{\nabla f} \nu, \nu \rangle + \langle \nabla f(f_\nu)\nu, \nu \rangle \\
 &= f_\nu(\text{Hess}_{\overline{M}}f)(\nu, \nu) + \langle \overline{D}_{\nabla f} \nabla f, \nu \rangle \\
 &\quad + f_\nu \frac{1}{2} \nabla f \langle \nu, \nu \rangle + \langle \nabla f, \nabla(f_\nu) \rangle \\
 &= f_\nu(\text{Hess}_{\overline{M}}f)(\nu, \nu) + \langle B(\nabla f, \nabla f), \nu \rangle + \langle \nabla f, \nabla(f_\nu) \rangle.
 \end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned}
 f_\nu(\overline{\Delta}f) - (\text{Hess}_{\overline{M}}f)(\nu, \overline{\nabla}f) &= f_\nu \Delta f - n \text{H}f_\nu^2 + f_\nu(\text{Hess}_{\overline{M}}f)(\nu, \nu) \\
 &\quad - f_\nu(\text{Hess}_{\overline{M}}f)(\nu, \nu) - \langle B(\nabla f, \nabla f), \nu \rangle \\
 &\quad - \langle \nabla f, \nabla(f_\nu) \rangle \\
 &= f_\nu \Delta f - n \text{H}f_\nu^2 - \langle \nabla f, \nabla(f_\nu) \rangle - \langle B(\nabla f, \nabla f), \nu \rangle.
 \end{aligned}$$

E como  $\text{div}_M(f_\nu \nabla f) = \langle \nabla f, \nabla(f_\nu) \rangle + f_\nu \Delta f$ , obtemos que

$$f_\nu(\overline{\nabla}f) - (\text{Hess}_{\overline{M}}f)(\nu, \overline{\nabla}f) = 2f_\nu \Delta f - \text{div}_M(f_\nu \nabla f) - n \text{H}f_\nu^2 - \langle B(\nabla f, \nabla f), \nu \rangle.$$

Além disso, desde que  $\partial M = \emptyset$ , temos  $\int_M \text{div}_M(f_\nu \nabla f) dM = 0$ . Agora, usando que  $\langle B(\nabla f, \nabla f), \nu \rangle = \Pi(\nabla f, \nabla f)$ , obtemos a fórmula de Reilly:

$$\int_{\overline{M}} \left( (\overline{\Delta}f)^2 - |\text{Hess}_{\overline{M}}f|^2 - \text{Ric}(\overline{\nabla}f, \overline{\nabla}f) \right) d\overline{M} = \int_M \left( (2\Delta f - n \text{H} \cdot f_\nu) \cdot f_\nu - \Pi(\nabla f, \nabla f) \right) dM.$$

□

## 1.4 Princípio da tangência

Nesta seção, apresentaremos dois resultados que serão utilizados na demonstração do Teorema 2. Omitiremos as respectivas demonstrações por achar que o nosso foco da dissertação é outro, porém indico [9] para encontrar tais demonstrações. O primeiro teorema refere-se ao princípio do máximo para a curvatura média, válido para superfícies que se tangenciam e o primeiro ponto de contato ocorre em um ponto interior a ambas, já o segundo refere-se ao princípio do máximo para a curvatura média, no caso em que o primeiro ponto de contato ocorre na fronteira das superfícies.

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  superfícies conexas no  $\mathbb{R}^3$  que são tangentes em  $\mathbf{p} \in M_1 \cap M_2$  e possuem o mesmo vetor normal no ponto de tangência. Numa vizinhança de  $\mathbf{p}$ ,  $M_1$  e  $M_2$  são gráficos horizontais de funções  $f_1$  e  $f_2$ , respectivamente, onde  $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\Omega$  um conjunto aberto do plano tangente comum a ambas superfícies.

**Definição 13.** *Com as notações anteriores, dizemos que  $M_1$  está sobre  $M_2$  na vizinhança de  $\mathbf{p}$ , se  $f_1 \geq f_2$  nesta vizinhança. Denotamos isso por  $M_1 \geq M_2$ .*

**Teorema 5** (Princípio do máximo no interior). *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  superfícies no  $\mathbb{R}^3$  com curvaturas médias  $H_1$  e  $H_2$  e  $\mathbf{p} \in M_1 \cap M_2$  um ponto interior comum a ambas superfícies. Suponhamos que  $M_1$  e  $M_2$  são tangentes em  $\mathbf{p}$  e que, localmente em torno de  $\mathbf{p}$ , elas são orientadas por campos de vetores normais que coincidem em  $\mathbf{p}$ . Se numa vizinhança de  $\mathbf{p}$ , tivermos que  $M_1 \geq M_2$  e  $H_1 \leq H_2$ , então  $M_1 = M_2$  numa vizinhança de  $\mathbf{p}$ .*

**Teorema 6** (Princípio do máximo na fronteira). *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  superfícies no  $\mathbb{R}^3$  com fronteiras diferenciáveis e seja  $\mathbf{p} \in \partial M_1 \cap \partial M_2$ . Suponhamos que  $\partial M_1$  e  $\partial M_2$  são tangentes em  $\mathbf{p}$  e que, localmente em torno de  $\mathbf{p}$ ,  $M_1$  e  $M_2$  estejam orientadas por campos de vetores normais que coincidem em  $\mathbf{p}$ . Suponha também que os campos de vetores unitários conormais interiores às fronteiras coincidam em  $\mathbf{p}$ . Sejam  $H_1$  e  $H_2$  as curvaturas médias de  $M_1$  e  $M_2$  com relação a tais campos. Se numa vizinhança de  $\mathbf{p}$ , tivermos que  $M_1 \geq M_2$  e  $H_1 \leq H_2$ , então  $M_1 = M_2$  numa vizinhança de  $\mathbf{p}$ .*

## 1.5 O Problema Variacional

Introduziremos agora, de forma sucinta o problema variacional, para maiores detalhes veja [4, 13, 16]. Sejam  $W$  um domínio do  $\mathbb{R}^3$  e  $M$  uma superfície compacta (conexa), orientável com fronteira  $\partial M$ . Seja  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão tal que  $\phi(M) \subset W$  e  $\phi(\partial M) \subset \partial W$  intersectando ortogonalmente (diz-se que  $M$  tem bordo livre). Uma variação de  $\phi$  é uma aplicação diferenciável  $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com  $\Phi(p, 0) = \phi(p)$  e  $\Phi_t(\cdot) = \Phi(\cdot, t)$  é uma imersão para cada  $t$  real. Sabemos que  $\Phi$  é admissível se  $\Phi_t(\text{int } M) \subset \text{int } W$  e  $\Phi_t(\partial M) \subset \partial W$  e a variação é chamada normal se  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0}$  é um campo de vetores normal à  $M$ . Definimos o funcional área por:

$$A(t) = \int_M dA_t$$

onde  $dA_t$  é o elemento de área de  $M$  com a métrica induzida por  $\Phi_t$ , e funcional volume é dado por

$$V(t) = \int_M \langle N_t, \Phi_t \rangle dA_t,$$

onde  $N_t$  é a aplicação de Gauss de  $\Phi_t$ . Aqui  $V(t)$  representa o volume de um cone orientado sobre  $\Phi_t(M)$  com respeito a origem do  $\mathbb{R}^3$ . A variação  $\Phi$  preserva volume se  $V(t) = V(0)$  para todo  $t$ .

Temos que a imersão  $\phi$  é uma superfície capilar com fronteira livre, se  $A'(0) = 0$  para toda variação admissível de  $\phi$  preservando o volume. Temos ainda que uma imersão  $\phi$  é dita estacionária se  $\phi$  possui curvatura média constante e  $\phi(M)$  intersecta  $\partial W$  ortogonalmente. Essa imersão é estável se  $A''(0) \geq 0$  para toda variação normal admissível de  $\phi$  preservando o volume. A fórmula da segunda variação da área é dada por:

$$A''(0) = - \int_M (f\Delta f + |\sigma|^2 f^2) dM - \int_{\partial M} \left( f \frac{\partial f}{\partial \nu} + \Pi(N, N) f^2 \right) ds \quad (1.5)$$

para toda função suave  $f$  em  $M$  com  $\int_M f dM = 0$ , onde  $\sigma$  é a segunda forma fundamental de  $\phi$ ,  $\Delta$  é o laplaciano com a métrica induzida em  $M$  por  $\phi$ ,  $\Pi$  é a segunda forma fundamental de  $\partial W$  em  $W$ ,  $\nu$  é o vetor conormal unitário apontando para dentro ao longo da  $\partial M$  e  $\frac{\partial f}{\partial \nu}$  é a derivada parcial de  $f$  com respeito à  $\nu$ .

# Capítulo 2

## Estabilidade de superfícies capilares imersas em um wedge

### 2.1 Demonstração do teorema 1

Nessa seção provaremos o Teorema 1, para isso faremos o uso de alguns lemas.

**Lema 2** (Joachimstahl). *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares do  $\mathbb{R}^3$  que se intersectam ao longo de uma curva regular  $C$  e fazem um ângulo  $\theta(\mathbf{p})$ ,  $\mathbf{p} \in C$ . Suponha que  $C$  é uma linha de curvatura de  $S_1$ . Então,  $\theta(\mathbf{p})$  é constante se, e somente se,  $C$  é uma linha de curvatura de  $S_2$ .*

*Demonstração.* Consideremos  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1 \cap S_2$  parametrização da curva  $C$ . Suponhamos que  $\alpha$  seja uma linha de curvatura de  $S_1$ , ou seja  $dN_1(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$ , com  $\alpha(0) = \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p} \in C$ . Temos que  $\cos(\theta(\mathbf{p})) = \langle N_1(\mathbf{p}), N_2(\mathbf{p}) \rangle$ , onde  $N_1(\mathbf{p})$  e  $N_2(\mathbf{p})$  são os vetores normais de  $S_1$  e  $S_2$ . Suponha  $\theta(\mathbf{p}) = \text{c.t.e}$ , devemos mostrar que  $C$  é uma linha de curvatura de  $S_2$ . De fato,

$$\begin{aligned} (\cos(\theta(\alpha(t))))' &= (\langle N_1(\alpha(t)), N_2(\alpha(t)) \rangle)' = \langle dN_1(\alpha'(t)), N_2(\alpha(t)) \rangle + \\ &\quad \langle N_1(\alpha(t)), dN_2(\alpha'(t)) \rangle \\ &= \langle N_1(\alpha(t)), dN_2(\alpha'(t)) \rangle \end{aligned}$$

pois  $\langle N_2(\alpha(t)), dN_1(\alpha(t)) \rangle = 0$ . Portanto,  $\langle N_1(\alpha(t)), dN_2(\alpha(t)) \rangle = 0$ . Além disso, temos que  $\langle N_2(\alpha(t)), dN_2(\alpha(t)) \rangle = 0$ . Agora analisaremos dois casos: o primeiro é  $\cos \theta \neq \pm 1$ , neste caso obtemos que  $dN_2(\alpha(t))$  é paralelo a  $\alpha'(t)$  implicando que  $C$  será uma linha

de curvatura de  $S_2$ ; o segundo caso é  $\cos \theta = \pm 1$ , donde obtemos  $N_1(\alpha(t)) = \pm N_2(\alpha(t))$  o que implica  $dN_2(\alpha'(t)) \parallel dN_1(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$ . Nos dois casos temos que  $C$  é uma linha de curvatura de  $S_2$ .

Reciprocamente, suponha que  $C$  seja uma linha de curvatura de  $S_2$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} (\cos(\theta(\alpha(t))))' &= \langle dN_1(\alpha'(t)), N_2(\alpha(t)) \rangle + \langle N_1(\alpha(t)), dN_2(\alpha'(t)) \rangle \\ &= \langle \lambda_1(t)\alpha'(t), N_2(\alpha(t)) \rangle + \langle N_1(\alpha(t)), \lambda_2(t)\alpha'(t) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por conexidade segue que  $\cos(\theta(t))$  é constante em  $C$ , logo  $\theta(t)$  também será constante.  $\square$

**Lema 3.** *Sejam  $M$  uma superfície e  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão com curvatura média constante  $H$ . Seja  $N$  o campo vetorial normal à imersão  $\phi$ , então o laplaciano da função suporte  $\langle \phi, N \rangle$  é*

$$\Delta \langle N, \Phi \rangle = -2H - |\sigma|^2 \langle N, \Phi \rangle,$$

onde  $|\sigma|^2$  é a norma da segunda forma fundamental.

*Demonstração.* Consideremos em  $M^2$  um referencial geodésico  $\{e_1, e_2\}$ , derivando a igualdade  $\langle N, N \rangle = 1$  obtemos  $\langle \bar{D}_{e_i} N, N \rangle = 0$ . Derivando pela segunda vez temos que  $\langle \bar{D}_{e_i} \bar{D}_{e_i} N, N \rangle = -\langle \bar{D}_{e_i} N, \bar{D}_{e_i} N \rangle$ . Dessa forma

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \langle \bar{D}_{e_i} \bar{D}_{e_i} N, N \rangle &= - \sum_{i=1}^2 \langle \bar{D}_{e_i} N, \bar{D}_{e_i} N \rangle = - \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{k,j=1}^2 \langle \bar{D}_{e_i} N, e_k \rangle \langle \bar{D}_{e_i} N, e_j \rangle \langle e_k, e_j \rangle \right) \\ &= - \sum_{i,j=1}^2 \langle \bar{D}_{e_i} N, e_j \rangle \langle \bar{D}_{e_i} N, e_j \rangle \\ &= - \sum_{i,j=1}^2 \langle \bar{D}_{e_i} N, e_j \rangle \langle -A_N(e_i), e_j \rangle \\ &= - \sum_{i,j=1}^2 \langle \bar{D}_{e_i} N, e_j \rangle \langle -A_N(e_j), e_i \rangle \\ &= - \sum_{i,j=1}^2 \langle \bar{D}_{e_i} N, e_j \rangle \langle \bar{D}_{e_j} N, e_i \rangle \\ &= -|\sigma|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_k \rangle &= e_i \langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_k \rangle - \langle \overline{D}_{e_i} \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_k \rangle = e_i \langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_k \rangle \\
 &= e_i \langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_k} \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= \langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \overline{D}_{e_k} \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= \langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_k} \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_i \rangle. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Notemos também que como  $\langle \mathbf{N}, \mathbf{e}_k \rangle = 0$ , temos que  $\langle \overline{D}_{e_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_k \rangle = -\langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_k \rangle$ . Derivando novamente obtemos que:

$$\langle \overline{D}_{e_i} \overline{D}_{e_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_k \rangle + \langle \overline{D}_{e_i} \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_k \rangle = -\langle \overline{D}_{e_i} \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_k \rangle - \langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_k \rangle.$$

Logo,  $\langle \overline{D}_{e_i} \overline{D}_{e_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_k \rangle = -\langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_k \rangle$ . E assim, usando que a curvatura média  $H$  é constante, temos que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^2 \langle \overline{D}_{e_i} \overline{D}_{e_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_k \rangle &= -\sum_{i=1}^2 \langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_k} \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_i \rangle = -\sum_{i=1}^2 e_k \langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_i \rangle + \sum_{i=1}^2 \langle \overline{D}_{e_k} \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= -e_k \left( \sum_{i=1}^2 \langle \mathbf{N}, \overline{D}_{e_i} \mathbf{e}_i \rangle \right) \\
 &= -e_k (nH) = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto  $\sum_{i=1}^2 \overline{D}_{e_i} \overline{D}_{e_i} \mathbf{N} = -|\sigma|^2 \mathbf{N}$ . Podemos então calcular o laplaciano da função suporte:

$$\begin{aligned}
 \Delta \langle \phi, \mathbf{N} \rangle &= \sum_{i=1}^2 e_i (e_i (\langle \phi, \mathbf{N} \rangle)) = \sum_{i=1}^2 e_i (\langle e_i, \mathbf{N} \rangle + \langle \phi, \overline{D}_{e_i} \mathbf{N} \rangle) \\
 &= \sum_{i=1}^2 e_i \langle \phi, \overline{D}_{e_i} \mathbf{N} \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^2 \langle e_i, \overline{D}_{e_i} \mathbf{N} \rangle + \sum_{i=1}^2 \langle \phi, \overline{D}_{e_i} \overline{D}_{e_i} \mathbf{N} \rangle \\
 &= -\sum_{i=1}^2 \langle e_i, A_N(e_i) \rangle - |\sigma|^2 \langle \phi, \mathbf{N} \rangle \\
 &= -nH - |\sigma|^2 \langle \phi, \mathbf{N} \rangle. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

□

**Lema 4.** *Nas mesmas condições do Lema 3, tem-se que:*

$$\Delta |\phi|^2 = 4 + 4H \langle \mathbf{N}, \phi \rangle.$$

*Demonstração.* Consideremos em  $M^2$  um referencial geodésico  $\{e_1, e_2\}$ . Primeiro calcularemos o gradiente de  $|\phi|^2$ . Para isto, se  $X \in \mathcal{X}(M)$  segue pela definição de gradiente que

$$\langle \text{grad}(|\phi|^2), X \rangle = X(|\phi|^2) = 2\langle \phi, X \rangle.$$

Dessa forma,  $\text{grad}(|\phi|^2) = 2(\phi)^t = 2(\phi - \langle \phi, N \rangle N)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \Delta|\phi|^2 &= \sum_{i=1}^2 \langle \bar{D}_{e_i} \text{grad}|\phi|^2, e_i \rangle = 2 \left( \sum_{i=1}^2 \langle \bar{D}_{e_i} (\phi - \langle \phi, N \rangle N), e_i \rangle \right) \\ &= 2 \left( \sum_{i=1}^2 \langle e_i, e_i \rangle - \sum_{i=1}^2 \langle e_i, N \rangle^2 - \sum_{i=1}^2 \langle \phi, \bar{D}_{e_i} N \rangle \langle N, e_i \rangle \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^2 \langle \phi, N \rangle \langle \bar{D}_{e_i} N, e_i \rangle \right) \\ &= 2 \left( \sum_{i=1}^2 \langle e_i, e_i \rangle + \sum_{i=1}^2 \langle \phi, N \rangle \langle A_N(e_i), e_i \rangle \right) \\ &= 2(2 + \langle \phi, N \rangle 2H) \\ &= 4 + 4H\langle \phi, N \rangle. \end{aligned}$$

□

**Lema 5.** *Nas mesmas condições do Lema 3, obtemos a primeira fórmula de Minkowski*

$$\int_M \left( 1 + H\langle N, \Phi \rangle \right) dM = \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \nu, \Phi \rangle dS,$$

onde  $\nu$  é um campo vetorial unitário da  $\partial M$  apontando para fora de  $M$ .

*Demonstração.* Pelo Lema anterior temos que  $\Delta|\phi|^2 = 4 + 4H\langle N, \Phi \rangle$ , integrando obtemos

$$\int_M \left( 4 + 4H\langle N, \Phi \rangle \right) dM = \int_M \Delta|\phi|^2 dM.$$

Pela 1ª Fórmula de Green, temos que:

$$\int_M \Delta|\phi|^2 dM = \int_{\partial M} \frac{\partial|\phi|^2}{\partial \nu} ds = 2 \int_{\partial M} \langle \phi, \nu \rangle ds.$$

Logo,

$$4 \int_M \left( 1 + H\langle N, \Phi \rangle \right) dM = 2 \int_{\partial M} \langle \phi, \nu \rangle ds.$$

Completando a prova do lema.

□

Apartir de agora já estamos em posição para demonstrar o Teorema 1. Consideremos  $W$  um wedge a qual sem perda de generalidade suponhamos que seu vértice esteja na origem  $\mathbb{R}^3$  (caso não esteja basta, uma translação até a origem). Seja  $\phi$  uma imersão satisfazendo as hipóteses do teorema. Pelo fato de  $\phi$  ser uma superfície com fronteira livre, temos que  $\phi(M)$  intersecta os planos  $\partial W$  ortogonalmente, logo o campo de vetores conormal  $\nu$  da  $\partial M$  em  $M$  é ortogonal à  $\partial W$ . Assim, pelo Lema 5, temos que

$$\int_M \left( 1 + H\langle N, \Phi \rangle \right) dM = 0.$$

Dessa forma, a função  $f = 1 + H\langle N, \Phi \rangle$  é uma candidata à função teste em (1.5). Por outro lado, de acordo com o Teorema 2, como  $\phi(\partial M) \subset \partial W$  e  $\phi(\partial M)$  é uma linha de curvatura na  $\partial W$ , segue que  $\phi(\partial M)$  é uma linha de curvatura em  $M$ . Ou seja,  $\sigma(\alpha'(s), \nu(s)) = 0$  ao longo de  $\partial M$  onde  $\alpha(s)$  é a parametrização da  $\partial M$ . Usando essa informação, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = H\langle dN(\nu), \alpha \rangle = -H(\sigma(\alpha', \nu)\langle \alpha', \phi \rangle + \sigma(\nu, \nu)\langle \nu, \alpha \rangle) = 0. \quad (2.3)$$

Assim, segue de (1.5) que

$$A''(0) = - \int_M (f\Delta f + |\sigma|^2 f^2) dM - \int_{\partial M} \left( f \frac{\partial f}{\partial \nu} + \Pi(N, N) f^2 \right) ds.$$

Usando o fato de que  $\Pi = 0$  e a igualdade (2.3), obtemos

$$A''(0) = - \int_M (f\Delta f + |\sigma|^2 f^2) dM. \quad (2.4)$$

Finalmente do Lema 3, temos que  $\Delta\langle N, \Phi \rangle = -2H - |\sigma|^2\langle N, \Phi \rangle$  e assim

$$\int_M \Delta\langle N, \phi \rangle dM = \int_M -2H - |\sigma|^2\Delta\langle N, \phi \rangle dM. \quad (2.5)$$

Pelo Primeira Identidade de Green e usando o fato de que  $\langle DN(\nu), \phi \rangle = 0$  ao longo da  $\partial M$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \Delta\langle N, \phi \rangle dM &= \int_{\partial M} \frac{\partial\langle N, \phi \rangle}{\partial \nu} ds = \int_{\partial M} \langle DN(\nu), \phi \rangle + \langle D\phi(\nu), N \rangle ds \\ &= \int_{\partial M} \langle DN(\nu), \phi \rangle + \langle \nu, N \rangle ds = 0. \end{aligned}$$

Assim de (2.5), obtemos que

$$- \int_M 2H dM = \int_M |\sigma|^2 \Delta\langle N, \phi \rangle dM. \quad (2.6)$$



Novamente usando o Lema 3 obtemos

$$\begin{aligned}
 f\Delta f + |\sigma|^2 f^2 &= .H.(1 + H\langle N, \phi \rangle)\Delta\langle N, \phi \rangle + |\sigma|^2.(1 + H\langle N, \phi \rangle) \\
 &= (1 + H\langle N, \phi \rangle).H.(-2H - |\sigma|^2\langle N, \phi \rangle) \\
 &\quad + |\sigma|^2(1 + 2H\langle N, \phi \rangle + H^2\langle N, \phi \rangle^2) \\
 &= -2H^2 - 2H^3\langle N, \phi \rangle + |\sigma|^2 + H|\sigma|^2\langle N, \phi \rangle \\
 &= |\sigma|^2 - 2H^2 - H(2H^2\langle N, \phi \rangle - |\sigma|^2\langle N, \phi \rangle). \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Usando (2.4) e que  $M$  é estável, obtemos

$$\begin{aligned}
 0 \leq A''(0) &= \int_M (2H^2 - |\sigma|^2) dM + 2H^3 \int_M \langle N, \phi \rangle dM - \int_M |\sigma|^2 \langle N, \phi \rangle dM \\
 &= \int_M (2H^2 - |\sigma|^2) + 2H^3 \int_M \langle N, \phi \rangle dM + \int_M 2H^2 dM \\
 &= \int_M (2H^2 - |\sigma|^2) + 2H^2 \int_M (1 + H\langle N, \phi \rangle) dM \\
 &= \int_M (2H^2 - |\sigma|^2). \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Proposição 1.2 temos que  $|\sigma|^2 \geq 2H^2$  e assim de (2.8) tem-se que  $2H^2 = |\sigma|^2$  e segue que  $\phi$  é uma imersão umbilical. Dessa forma  $\phi(M)$  ou é um aberto da esfera ou de uma plano. Assim, nos resta uma única possibilidade para uma superfície compacta com fronteira livre imersa em um wedge,  $\phi(M)$  é uma esfera com centro no vértice.

## 2.2 Demonstração do teorema 2

No Lema a seguir procederemos como J.Choe e S.-H.Park [5], faremos uma breve descrição do método utilizado.

**Lema 6.** *Seja  $M$  uma superfície compacta mergulhada em um wedge  $W$  intersectando ortogonalmente  $\partial W$ . Denotando  $V$  o volume de um domínio  $\Omega$  limitado por  $M$  e  $W$ . Assumindo que a curvatura média  $H$  de  $M$  é positiva, temos*

$$\int_M \frac{1}{H} dM \geq 3V.$$

*E a igualdade ocorre se e somente se  $M$  é um pedaço de uma esfera.*

*Demonstração.* Seja  $D$  um domínio com fronteira suave contido em  $\Omega$  a uma distância  $\epsilon > 0$  da  $\partial M$ . Relembremos que a formula de Reilly para um domínio compacto  $D \subset \mathbb{R}^3$  visto no Teorema 4 é dado por

$$\int_D \left( (\overline{\Delta u})^2 - |\text{Hess}_{\overline{M}} u|^2 \right) = \int_{\partial D} \left( \left( -2\Delta u + 2H \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \Pi(\nabla u, \nabla u) \right),$$

onde a barra superior indica que o cálculo é feito no  $\mathbb{R}^3$ . Agora consideremos a função suave  $u$ , solução para o problema misto:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta u} &= 1, \text{ em } D \\ u &= 0, \text{ em } \partial D \setminus \partial W \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \text{ em } \partial D \cap \partial W. \end{aligned}$$

Calculando o volume de  $D$  usando a fórmula de Relly, o fato de que  $\Pi = 0$  em  $\partial W$  e as hipóteses do problema misto, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \int_M 1 = \int_D (\overline{\Delta u})^2 = \int_M |\text{Hess}_{\overline{M}} u|^2 + \int_{\partial D \setminus \partial W} \left( -\Delta u + 2H \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \Pi(\Delta u, \Delta u) \\ &= \int_M |\text{Hess}_{\overline{M}} u|^2 + 2 \int_{\partial D \setminus \partial W} H \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2. \end{aligned}$$

Observe que  $1 = (\overline{\Delta u})^2 \leq 3|\text{Hess}_{\overline{M}} u|^2$ . De fato, se  $\text{Hess } f = (a_{ij})_{3 \times 3}$  como o laplaciano é o traço da matriz hessiana, e usando a desigualdade entre a média aritmética e a quadrática, obtemos

$$(\overline{\Delta u})^2 = (a_{11} + a_{22} + a_{33})^2 \leq 3(a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2) \leq 3|\text{Hess}_{\overline{M}} u|^2.$$

E assim,

$$\text{Vol}(\mathbf{D}) \geq \frac{\text{Vol}(\mathbf{D})}{3} + 2 \int_{\partial \mathbf{D} \setminus \partial \mathbf{W}} \mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \right)^2.$$

Portanto,

$$\text{Vol}(\mathbf{D}) \geq 3 \int_{\partial \mathbf{D} \setminus \partial \mathbf{W}} \mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \right)^2. \quad (2.9)$$

Por outro lado, temos que

$$\text{Vol}(\mathbf{D})^2 = \left( \int_{\mathbf{D}} \bar{\Delta} \mathbf{u} \right)^2 = \left( \int_{\partial \mathbf{D} \setminus \partial \mathbf{W}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \right)^2 \leq \int_{\partial \mathbf{D} \setminus \partial \mathbf{W}} \mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \right)^2 \int_{\partial \mathbf{D} \setminus \partial \mathbf{W}} \frac{1}{\mathbf{H}}. \quad (2.10)$$

Onde na segunda igualdade usamos a primeira fórmula de Green e para obter a desigualdade aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais. Dessa forma, segue de (2.9) e (2.10) que

$$3\text{Vol}(\mathbf{D})^2 \leq 3 \int_{\partial \mathbf{D} \setminus \partial \mathbf{W}} \mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \right)^2 \int_{\partial \mathbf{D} \setminus \partial \mathbf{W}} \frac{1}{\mathbf{H}} \leq \text{Vol}(\mathbf{D}) \int_{\partial \mathbf{D} \setminus \partial \mathbf{W}} \frac{1}{\mathbf{H}}.$$

Donde obtemos  $3\text{Vol}(\mathbf{D}) \leq \int_{\partial \mathbf{D} \setminus \partial \mathbf{W}} \frac{1}{\mathbf{H}}$ . Agora, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  temos  $\text{Vol}(\mathbf{D}) \rightarrow V$  e assim obtemos que

$$3V \leq \int_{\mathbf{M}} \frac{1}{\mathbf{H}}.$$

Se ocorresse a igualdade deveríamos ter que  $1 = (\bar{\Delta} \mathbf{u})^2 = 3|\text{Hess}_{\bar{\mathbf{M}}} \mathbf{u}|^2$  e assim  $\text{Hess}_{\bar{\mathbf{M}}} \mathbf{u} = \frac{1}{3} \mathbf{I}_3$ , onde  $\mathbf{I}_3$  é a matriz identidade. Então,  $\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \frac{|\mathbf{p}|^2 - \mathbf{a}^2}{6}$  para alguma constante  $\mathbf{a}$ . Assim, desde que  $\mathbf{u} = 0$  em  $\mathbf{M}$  segue que  $\mathbf{M}$  é um pedaço de uma esfera.  $\square$

Uma vez provada a desigualdade do Lema 6, temos as ferramentas necessárias para provar Teorema 2. Consideremos  $\mathbf{M}$  satisfazendo as hipóteses do teorema e seja  $\Omega$  o domínio limitado por  $\mathbf{M}$  e  $\partial \mathbf{W}$ , onde  $\mathbf{W}$  é um wedge o qual o vértice contém a origem do  $\mathbb{R}^3$ . Como o vetor unitário normal à  $\partial \Omega \cap \partial \mathbf{W}$  é ortogonal ao vetor posição, usando o Teorema da divergência, temos que:

$$\int_{\Omega} \text{Div}(\phi) d\Omega = - \int_{\mathbf{M}} \langle \phi, \mathbf{N} \rangle d\mathbf{M} + \int_{\Omega \cap \partial \mathbf{W}} \langle \phi, \mathbf{N} \rangle = - \int_{\mathbf{M}} \langle \phi, \mathbf{N} \rangle d\mathbf{M}.$$

E assim,

$$3V = \int_{\Omega} \text{Div}(\phi) d\Omega = - \int_{\mathbf{M}} \langle \phi, \mathbf{N} \rangle d\mathbf{M}.$$

Logo o volume de  $\Omega$  será  $V = -\frac{1}{3} \int_{\mathbf{M}} \langle \phi, \mathbf{N} \rangle d\mathbf{M}$ , onde  $\mathbf{N}$  é a aplicação normal de Gauss em  $\mathbf{M}$  apontando para fora de  $\Omega$ .

Afirmamos que a curvatura média  $H$  de  $M$  é positiva. De fato, seja  $p_0 \in \partial M$  o ponto de máximo da distância entre o vértice de  $W$  e a  $\partial M$ . Consideremos o plano  $P$  paralelo ao vértice de  $W$  ortogonal ao plano  $\partial W$  que contém  $p_0$  no ponto  $p_0$ . Desloquemos o plano  $P$  suficientemente distante do vértice de  $W$  até uma posição em que  $P$  não toque em  $M$ , agora retornemos  $P$  à posição inicial até o ponto em que  $P$  toque novamente em  $M$ . Pela definição do ponto  $p_0$  e do plano  $P$ , isto deve ocorrer em algum ponto interior à  $M$  ou mesmo no ponto  $p_0$ , onde  $P$  e  $M$  são tangentes, devido ao fato de que  $M$  é ortogonal à  $\partial W$ . Em ambos os casos usando o princípio do máximo para superfícies de curvatura média constante em sua versão no interior e na fronteira, obtemos que  $H > 0$ , pois caso contrário teríamos que  $M = P$  numa vizinhança do ponto de interseção entre  $P$  e  $M$ , o que é um absurdo pois como  $H$  é constante deveríamos ter que  $H = 0$ , já que a curvatura do plano é nula. E usando a fórmula de Minkowski obteríamos que a área de  $M$  seria nula. Concluindo assim a afirmação. Por outro lado, temos que

$$A - 3HV = A + H \int_M \langle N, \phi \rangle dM = \int_M (1 + H \langle N, \phi \rangle) dM.$$

Assim usando novamente a fórmula de Minkowski obtemos que  $A - 3HV = \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \phi, \nu \rangle$ , como o campo de vetores conormal  $\nu$  da  $\partial M$  em  $M$  é ortogonal à  $\partial M$  concluímos que  $A - 3HV = 0$ . E assim, como  $H$  é constante, temos que  $\int_M \frac{1}{H} = 3V$ . Portanto, pelo Lema 6 segue que  $M$  é uma parte de uma esfera, e como  $M$  deve intersectar ortogonalmente a  $\partial W$  devemos ter que o centro da esfera deve estar no vértice da wedge  $W$ . O que prova o teorema 2.

# Referências Bibliográficas

- [1] Alexandrov, A.D. Uniqueness theorems for surface in the large I. Vestnik Leningrand Univ. Math. 11(1956)5-17.
- [2] Ainouz, A., Souam, R. Stable capillary hypersurfaces in a half-space or a slab. Mathematics Subject Classification (2010).
- [3] Athanassenas, M. A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary. J. Reine Angew. Math. 377(1987)97-107.
- [4] Barbosa, J.L., Carmo, M. Stability of surfaces with constant mean curvature. Math. Z. 185( 1984 ) 339-353.
- [5] Choe, J., Park, S.-H. Capillary surfaces in a convex cone. Math. Z. 267 (2011) 875-886
- [6] Do Carmo, M. Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, terceira edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [7] Fakhri, S., Pacard, F. *Existence result for minimal hypersurfaces with a prescribed finite number of planar ends*. Manuscripta Math., 103 (4). 465–512, 2000.
- [8] Finn, R. Equilibrium Capillary Surfaces, Springer-Verlag . New York, 1986.
- [9] Leão, K.F. O Princípio da Tangência e Aplicações, Informes de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1983.
- [10] Lee, John M. Riemannian manifolds : an introduction to curvature, Springer-Verlag. New York, 1997.
- [11] López, R. Capillary surfaces with free boundary in a wedge .Advances in Math. 262(2014), 476-483.

- 
- [12] López, R., Pyo, J. Capillary surfaces in a cone. *Journal of Geometry and Physics* 76(2014)256-262.
- [13] López, R. *Constant Mean Curvature Surfaces With Boundary*, Springer-Verlag, New York, 2013.
- [14] Rely, R. Applications of the hessian operator in a Riemannian manifold, *Indiana Univ. Math. J.* 26(1977) 459-472.
- [15] Ros, A., Souam, R. On stability of capillary surfaces in a ball. *Pacific Journal of Mathematics*. Vol 178, No. 2 (1997) 345-361.
- [16] Ros, A., Vesgata, E. Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary. *Geom. Dedicata* 56(1995)19-33.
- [17] Spivak, Michael. *Calculus on manifolds*. W.A. Benjamin, Inc., New York, 1965.
- [18] Vogel, T.I. Stability and bifurcation of a constant mean curvature in a wedge. *Indiana Univ. Math. J.* 41(1992) 625-648.
- [19] Vogel, T.I. Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes. *SIAM J. Appl. Math.* 47(1987) 516-525.