

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Modelagem logística generalizada das Populações do  
estado do Piauí e da cidade de Teresina**

**Jefferson de Brito Sousa**

**Teresina - 2013**

**Jefferson de Brito Sousa**

**Dissertação de Mestrado:**

**Modelagem logística generalizada das Populações do estado do  
Piauí e da cidade de Teresina**

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Jefferson da Cruz dos Santos  
Leite

**Teresina - 2013**

516.36

S725m Sousa, Jefferson de Brito.

Modelagem logística generalizada das Populações do estado do Piauí e da cidade de Teresina/Jefferson de Brito Sousa – Teresina ,PI: UFPI 2013.

47 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática. Programa de pós-graduação em Matemática - Universidade Federal do Piauí) Orientador: Prof.Dr. Jefferson da Cruz dos Santos Leite.

1.Função logística generalizada. 2. Crescimento Populacional - Teresina. 3. Abordagem Determinística - População - Crescimento 4.Crescimento logístico. I. Leite, Jefferson da Cruz dos Santos .II. Universidade Federal do Piauí. III. Título.

CDD 516.36

*À minha mãe Silvana.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por está comigo em todos os momentos principalmente nas dificuldades ele que é minha fortaleza e o responsável pelo meu sucesso.

Agradeço a minha mãe que faz tudo por mim que me educou e que me ensinou o caminho da retidão, a minha irmã Jéssica e a todos os meus familiares.

Agradeço aos meus amigos da igreja, em especial do EJC que me ajudaram em muitos momentos principalmente nos momentos mais difíceis. E aos amigos do mestrado que forão verdadeiros irmãos, Israel, Mikael, Bernardo, Diego, Edvalter, Valdir, Felipe, Renata, Ailton, Samara, Leonardo, Vitaliano e Baiano por terem dividido o sofrimento e a dureza destes dois anos.

Agradeço a minha namorada Laís que me deu muita força e me aconselhou muito nas decisões que tive que tomar, e suportou a falta de atenção por causa dos meus estudos.

Agradeço a meu orientador professor Jefferson Cruz dos Santos Leite que me deu toda a atenção, que além de professor foi um grande amigo e não me deixou desanimar em nenhum momento e claro pelas dicas que me deu para que eu pudesse concluir este trabalho.

Agradeço aos meus queridos professores de graduação, Gilvan, Paulo Alexandre, Benício, Roger Moura e Mário entre outros. E aos professores do mestrado que me ensinaram muito os professores Marcos Vinicios, Humberto, Jurandir, Barnabé e ao professor Xavier que me incentivou a cursar o mestrado.....

Enfim agradeço (a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI) pelo apoio financeiro.

“Tudo posso naquele que me fortalece”.

Filipenses 4:13.

# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar a curva de crescimento populacional do estado do Piauí e da cidade de Teresina relacionando ambos com o modelo logístico generalizado. Para isso revisitaremos alguns dos principais modelos determinísticos, no contexto histórico, para dinâmica populacional de espécies isoladas e em interação.

Posteriormente faremos o estudo do modelo logístico generalizado, apresentando suas principais características e verificando que todos os outros modelos apresentados são aplicações deste.

Também estudaremos o Problema de Valor Inicial fuzzy, através de alguns resultados fundamentais, para o confronto entre a abordagem determinística e abordagem Fuzzy de crescimento populacional. Em fim, na última parte utilizaremos todos os resultados e conclusões para descrever o crescimento populacional da cidade de Teresina e do Estado do Piauí.

# Abstract

The present work aims to study the population growth curve of the state of Piauí and the city of Teresina relating both to the generalized logistic model. For this we will revisit some of the key deterministic models, in historical context, for the population dynamics of species isolated and in interaction.

Later we will study the generalized logistic model, presenting its main features and checking that all the other models presented are applications of this.

We will also study the fuzzy initial value problem, through some fundamental results for the comparison between the deterministic approach and Fuzzy approach to population growth. In the end, in the last part we use all the results and conclusions to describe the population growth of the city of Teresina and the state of Piauí.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Introdução . . . . .	3
1.2 Dinâmica Populacional para espécie isolada . . . . .	3
1.2.1 Modelo de Malthus . . . . .	5
1.2.2 Modelo de Verhulst . . . . .	6
1.2.3 Modelo de Montroll . . . . .	7
1.2.4 Modelo de Von Bertalanffy . . . . .	8
1.2.5 Modelo de Gompertz . . . . .	9
1.2.6 Modelo de Smith . . . . .	11
1.2.7 Modelo de Blumberg . . . . .	12
<b>2 Modelo logístico generalizado</b>	<b>15</b>
2.1 Definição da função logística generalizada . . . . .	15
2.2 Características do crescimento generalizado . . . . .	15
<b>3 Problema de Valor Inicial Fuzzy</b>	<b>26</b>
3.1 Introdução . . . . .	26
3.1.1 Extensão do campo determinístico . . . . .	29
3.1.2 Extensão do fluxo determinístico . . . . .	32
3.2 Sistemas p-fuzzy . . . . .	37
3.2.1 Introdução . . . . .	37
3.2.2 Sistemas p-fuzzy . . . . .	37

---

3.2.3	Sistema p-fuzzy unidimensional . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>43</b>
4.0.4	Confronto entre a abordagem determinística e abordagem Fuzzy . .	43
4.0.5	Crescimento Logístico generalizado aplicado a população de Teresina	43
4.0.6	Crescimento Logístico generalizado aplicado a população do Piauí .	44

# Introdução

Atualmente os governos estaduais e municipais enfrentam sérios problemas na busca de recursos para melhorar a qualidade de vida da população residente, isso se dá pela dificuldade de descrever os fatores que influenciam o crescimento da população ao longo do tempo. Com a população do Piauí e principalmente a de Teresina não é diferente, já que o governo federal favorece cidades e estados que possuem grandes populações, pois o número de recursos é diretamente proporcional a quantidade de habitantes. Assim Teresina há muito tempo busca ultrapassar o número de 1 milhão de habitantes tornando-se uma metrópole e assim receber mais recursos do governo federal.

Os modelos com crescimento inibido, do ponto de vista de aplicação em biomatemática, são os mais utilizados, esses modelos são caracterizados por possuírem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, isto é, a população em algum momento tende a se estabilizar. Faremos o estudo dos modelos de Malthus, Verhulst, Montroll, Von Bertalanffy, Gompertz, Smith e Blumberg, posteriormente o estudo qualitativo do modelo logístico generalizado, já que este modelo em algumas situações não apresenta solução. Através da escolha dos parâmetros veremos que a equação logística generalizada representa cada um dos modelos citados acima e será feita a análise do crescimento relativo que é uma importante característica desse modelo.

A utilização da teoria de conjuntos Fuzzy é fundamental para a modelagem de fenômenos envolvendo imprecisões e subjetividade, assim faremos o uso desta teoria para a resolução de sistemas de equações diferenciais, em que os parâmetros, a condição inicial ou ambos, são incertos, de tal modo que possam ser modelados por conjuntos Fuzzy.

Todos esses argumentos são fundamentais para o estudo da curva que descreve o crescimento populacional do estado do Piauí e da cidade de Teresina mostrando que esses crescimentos tendem a se estabilizar dificultando a obtenção de mais recursos, para isso escolheremos os parâmetros na equação logística generalizada de tal forma que descreva

---

esse crescimento, obtendo assim conclusões que possam facilitar escolhas de políticas públicas para melhoria da qualidade de vida de seus habitantes.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo abordaremos as definições e os resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes.

### 1.1 Introdução

Uma variedade de curvas de crescimento tem sido desenvolvidas afim de modelar a dinâmica populacional de espécies, tanto isoladas quanto em interação, e mais geralmente o crescimento de sistemas biológicos. A maioria dos modelos preditivos são representações baseadas em variações da equação clássica de crescimento logístico de Verhulst. Neste capítulo vamos rever alguns dos principais modelos determinísticos, no contexto histórico, para dinâmica populacional de espécies isoladas e em interação. Algumas propriedades sobre o comportamento da solução de equações diferenciais e de diferenças também serão apresentadas para auxiliar na análise matemática dos modelos aqui apresentados.

### 1.2 Dinâmica Populacional para espécie isolada

As mudanças quantitativas que ocorrem na população de uma determinada espécie são ocasionadas por três fatores: a natalidade, a mortalidade e a migração. Sendo assim, a variação de uma população  $N = N(t)$  em relação ao tempo  $t$ , é determinada por

$$\frac{dN(t)}{dt} = \text{natalidade} + \text{mortalidade} - \text{migração} \quad (1.1)$$

O processo migratório não é levado em consideração se a população for tratada isoladamente. Se a natalidade e a mortalidade são dadas em função da população  $N$ , então a equação (1.1) pode ser reescrita como uma equação autônoma

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(N) \quad (1.2)$$

onde  $f(N)$  satisfaz  $f(0) = 0$ , ou seja, se não há nenhum elemento na população então esta não varia, pois não pode haver natalidade ou mortalidade em uma população nula. Essa condição é indispensável pois ela coíbe o aparecimento espontâneo de indivíduos.

Se a função  $f(N)$  é suficientemente suave para que possamos expressá-la como uma série polinomial (série de Taylor), então temos

$$f(N) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i N^i \quad (1.3)$$

Porém, como  $f(0) = 0$ , então o primeiro termo da série acima é nulo,  $a_0 = 0$ , o que nos permite reescrever a equação (1.2) como

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(a_1 + a_2 N^1 + a_3 N^2 + \dots) = N\lambda(N) \quad (1.4)$$

A função  $\lambda(N)$  é denominada índice de crescimento relativo uma vez que,

$$\lambda(N) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$$

Considerando que no instante inicial  $t = 0$  o número de indivíduos é  $N(0) = N_0 > 0$ , então temos um problema de valor inicial para a expressão (1.4)

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = N\lambda(N) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Em geral, queremos determinar o comportamento da dinâmica populacional em um período de tempo. Sendo assim, é importante obter o maior número de informações do modelo que descreve a situação como, por exemplo, os estados de equilíbrios.

**Definição 1.2.1.** Dizemos que o ponto  $N^*$  um estado de equilíbrio para a equação (1.2) quando  $N'(t) = f(N^*) = 0$ .

Se consideramos a dinâmica de uma determinada população modelada conforme (1.2) então, pela fórmula de Taylor, temos que, suficientemente próximo de  $N^*$  vale

$$\frac{dN}{dt} = f(N) \approx f(N^*) + f'(N^*)(N - N^*)$$

logo, como  $f(N^*) = 0$ , separando as variáveis obtemos

$$\frac{dN}{N - N^*} = f'(N^*)dt$$

que por integração no intervalo  $[0, t]$  nos fornece

$$\ln \frac{|N(t) - N^*|}{|N_0 - N^*|} = f'(N^*)t \iff |N(t) - N^*| = |N_0 - N^*| \exp f'(N^*)t$$

Assim, dependendo do sinal de  $f'(N^*)$ , a solução converge para o estado de equilíbrio  $N^*$  ou diverge de  $N^*$ . Dizemos então que o estado de equilíbrio é localmente:

1. assintoticamente estável quando  $f'(N^*) < 0$ ;
2. instável quando  $f'(N^*) > 0$ .

Falando de aplicação em biomatemática, os modelos com crescimento inibido são os mais utilizados. Estes modelos são caracterizados por possuírem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, isto é, a população tende a se estabilizar. Matematicamente, isto significa que existe  $k \neq 0$  tal que  $\lambda(k) = 0$ . Este valor é denominado capacidade suporte.

Os modelos com crescimento populacional inibido têm algumas características básicas:

1. O crescimento relativo  $\lambda(N)$  é decrescente com relação a  $N$  e  $\lambda(N) \rightarrow 0$  quando  $N$  tende a capacidade suporte  $k$ .
2. A variação absoluta é crescente no início e depois decresce tendendo a zero.
3. A variação é negativa se  $N(t) > k$ .

A seguir, apresentaremos a formulação em termos de equações diferenciais e as soluções analíticas de alguns modelos de dinâmica para espécies isoladas. Estes modelos são bem conhecidos na literatura.

### 1.2.1 Modelo de Malthus

Em 1798, o economista inglês T. Malthus publicou um artigo sobre o estudo do crescimento populacional humano que atualmente é conhecido como a primeira proposta de utilização da matemática na tentativa de avaliar a dinâmica populacional. Segundo

Malthus, sob certas condições, a variação populacional ocorre á uma razão geométrica. Embora Malthus não tenha formulado matematicamente, o atualmente conhecido como modelo de Malthus, em termos de equações diferenciais, é dado por:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) \quad (1.6)$$

onde  $\lambda$  é constante.

A equação diferencial (1.6) é um caso particular da equação geral (1.2) estabelecida na seção precedente como modelo de dinâmica populacional sem migração, onde o índice de crescimento relativo permanece constante ao longo do tempo.

Considerando  $N(0) = N_0 > 0$ , então temos um problema de valor inicial determinado pela equação (1.6) cuja solução

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} \quad (1.7)$$

é facilmente determinada por separação de variáveis e integração no intervalo  $[0, t]$ .

Biologicamente, as condições pressupostas neste modelo são ideais, o que não condiz com a realidade. No entanto, tal modelo serve como aproximação para problemas mais elaborados em intervalos de tempo relativamente curtos.

### 1.2.2 Modelo de Verhulst

Em 1838, Pierre F. Verhulst propôs um modelo de dinâmica populacional para uma espécie que leva em consideração a capacidade do ambiente suportar um número máximo de indivíduos, devido às limitações do espaço físico e disponibilidade de alimentos, ou seja, existe uma capacidade suporte para a população.

No modelo de Verhulst, a função de crescimento relativo é linear, decrescente com relação a  $N(t)$  e tendendo a zero quando  $N(t) \rightarrow k$ . Isto é, a variação da população é menor quando o número de indivíduos se aproxima da capacidade suporte. Além disso, a variação populacional atinge seu valor máximo quando a população atinge a metade da capacidade suporte ( $N(t_i) = k/2$ ), como podemos observar na equação (1.8) que é a formulação matemática do modelo de Verhulst.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left( 1 - \frac{N}{k} \right) \quad (1.8)$$

Na equação acima, também conhecida como equação logística, as constantes reais e positivas  $\alpha$  e  $k$  são respectivamente, o índice intrínscio de crescimento e capacidade suporte. A solução analítica para o problema de valor inicial determinado pela equação (1.8) com condição inicial  $N(0) = N_0 > 0$ , é obtida através da separação de variáveis e integração no intervalo  $[0, t]$ , obtendo assim a expressão

$$\ln \left| \frac{N}{N_0} \right| - \ln \left| \frac{N - k}{N_0 - k} \right| = \alpha t$$

o que implica em

$$\ln \left| \frac{N(N_0 - k)}{N_0(N - k)} \right|$$

ou ainda,

$$\left| \frac{N_0(N - k)}{N(N_0 - k)} \right| = e^{-\alpha t} \implies \frac{|N - k|}{|N|} = \frac{|N_0 - k|}{|N_0|} e^{-\alpha t}$$

Isolando  $N(t)$  obtemos

$$N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0) e^{-\alpha t}}$$

Como o termo exponencial no denominador tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ , independentemente da condição inicial  $N(t) \rightarrow k$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja, o estado de estabilidade  $N^* = k$  é assintoticamente estável.

### 1.2.3 Modelo de Montroll

O modelo de Montroll, proposto em 1971, pode ser considerado como a generalização do modelo de Verhulst. Neste modelo, a equação de crescimento relativo é decrescente com relação a  $N(t)$ , porém não necessariamente de forma linear como no modelo de Verhulst. A equação diferencial para o modelo de Montroll é:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left[ 1 - \left( \frac{N}{k} \right)^\beta \right] \quad (1.9)$$

onde  $k > 0$  é a capacidade suporte,  $\alpha$  e  $\beta$  constantes reais positivas. A diferença fundamental entre os modelos de Montroll e Verhulst está na posição do ponto de maior variação populacional. Enquanto na equação logística a variação máxima ocorre quando  $N(t_i) = k/2$ , no modelo de Montroll a variação máxima é atingida quando

$$N(t_i) = k \left( \frac{1}{1 + \beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Dessa forma o ponto de inflexão de  $N(t)$  pode ser alterado de acordo com a necessidade do problema, apenas modificando o valor de  $\beta$ . Para  $\beta = 1$  temos o modelo de Verhulst. O estado de equilíbrio não nulo no modelo de Montrol é  $N^* = k$ . Considerando  $f(N)$  como a expressão á direita do sinal de igualdade na equação (1.9), então temos que

$$\frac{df}{dN}(N^*) = -\alpha\beta < 0$$

Consequentemente, o estado de equilíbrio  $N^* = k$  é assintoticamente estável. Logo, podemos concluir que, independentemente da condição inicial,  $N(t) \rightarrow k$  quando  $t \rightarrow \infty$ . A solução do modelo de Montroll é dada por:

$$N(t) = \frac{N_0 k}{[N_0^\beta + (k^\beta - N_0^\beta)e^{-\beta\alpha t}]^{\frac{1}{\beta}}} \quad (1.10)$$

### 1.2.4 Modelo de Von Bertalanffy

O biólogo australiano von Bertalanffy, no ano de 1938, formulou um modelo matemático para analisar o aumento em peso de peixes. Seu modelo pode ser considerado uma alteração da curva de crescimento logístico com a finalidade de acomodar características metabólicas baseadas em argumentações fisiológicas:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = \alpha N^{\frac{2}{3}} - \beta N \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

onde  $N = N(t)$  é a massa do peixe em função do tempo  $t$ ,  $N_0$  é a massa inicial,  $\alpha$  é a constante de anabolismo (representando a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal) e  $\beta$  é a constante de catabolismo (que representa a taxa de diminuição da massa por unidade de massa). O termo  $N^{\frac{2}{3}}$  é proveniente da relação alométrica do peso com a área corporal do peixe. A equação (1.11) é não linear, trata-se de uma Equação diferencial do tipo Bernoulli e com uma simples substituição de variáveis nos conduz à uma equação linear. Tomando  $z = N^{\frac{1}{3}}$ , segue que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3} N^{-\frac{2}{3}} \frac{dN}{dt}$$

Substituindo em (1.10), temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3} N^{-\frac{2}{3}} (\alpha N^{\frac{2}{3}} - \beta N) = \frac{1}{3} (\alpha - \beta z)$$

cuja solução é dada por

$$z = \frac{\alpha}{\beta} + K e^{\frac{\beta t}{3}}$$

Agora usando a condição inicial  $N(0) = N_0$  e  $z = N^{\frac{1}{3}}$ , obtemos

$$N(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{3}}\right)^3 \quad \text{se} \quad N(0) \cong N_0$$

ou

$$N(t) = \left[ \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{3}}\right) + N_0^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{\beta t}{3}} \right]^3 \quad \text{se} \quad N(0) \neq N_0 \quad (1.12)$$

Quando  $t$  cresce  $N$  tende a  $N_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$

Consideremos  $N(0) = 0$ . Tomando  $K = \frac{\beta}{3}$  e substituindo em (1.11), temos a solução de (1.10) dada por:

$$N(t) = N_\infty (1 - e^{-Kt})^3 \quad (1.13)$$

onde  $N_\infty$  é o valor máximo do peso dos peixe.

Neste modelo o ponto de inflexão é dado por:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{2}{3} \alpha N^{-\frac{1}{3}} \frac{dp}{dt} - \beta \frac{dp}{dt} = 0 \iff \frac{2}{3} \alpha N^{-\frac{1}{3}} - \beta = 0 \iff N^{-\frac{1}{3}} = \frac{3\beta}{2\alpha}$$

$$\implies N^* = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 N_\infty = 0.2963 N_\infty$$

### 1.2.5 Modelo de Gompertz

O modelo de Gompertz, proposto em 1825, utiliza a taxa de inibição proporcional ao logaritmo desta variável. Ou seja, a taxa de crescimento é grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento. É um modelo bastante adequado para traduzir crescimentos celulares, sendo que, no início todas as células são meristemáticas, perdendo esta propriedade num intervalo de tempo relativamente pequeno.

O modelo de Gompertz é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx \ln x = x(a - \ln x) \\ x(0) = x_0 \quad \text{com} \quad a > 0 \quad e \quad b > 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

A taxa de crescimento relativo  $r(x) = a - b \ln x > 0$ , decresce com  $x$  e o valor de estabilidade de  $x$  é obtido considerando-se  $r(x) = 0$ , isto é,

$$\frac{dx}{dt} = 0 \iff (a - b \ln x) = 0 \iff x_\infty = e^{\frac{a}{b}}, \quad \text{com} \quad x > 0$$

Observemos que quando  $x$  é muito pequeno,  $r(x)$  é muito grande pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x) = +\infty$$

Agora, como  $0 = a - b \ln x_\infty$ , podemos tomar  $a = b \ln x_\infty$  na equação (1.14) e reescrevê-la como

$$\frac{dx}{dt} = bx \ln x_\infty - b \ln x = bx \ln \left( \frac{x_\infty}{x} \right) = x \ln \left( \frac{x_\infty}{x} \right)^b$$

e neste caso,  $r(x) = \ln \left( \frac{x_\infty}{x} \right)^b$

A solução de (1.14) é obtida considerando-se a mudança de variável  $z = \ln x$ :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a - bz$$

Integrando,

$$\int \frac{dz}{a - bz} = \int dt \iff -\frac{1}{b} \ln |a - bz| = t + c$$

Para  $t = 0$  obtemos  $c = -\frac{1}{b} \ln |a - b \ln x_0|$

Portanto,  $\ln |a - bz| = -bt + \ln |a - b \ln x_0|$ ,

$$a - bz = (a - b \ln x_0) e^{-bt} \iff z(t) = \frac{1}{b} [a - (a - b \ln x_0) e^{-bt}].$$

Voltando a variável  $x = e^z$ , obtemos

$$x(t) = e^{\frac{a}{b}} \exp \left[ - \left( \frac{a}{b} - \ln x_0 \right) e^{-bt} \right]$$

A curva  $x(t)$  tem um ponto de inflexão quando

$$t = t_m = \frac{1}{b} \ln \left( \frac{a}{b} - \ln x_0 \right)$$

### 1.2.6 Modelo de Smith

Smith, em 1963, relatou que a equação logística do crescimento de Verhulst não aplica satisfatoriamente os dados experimentais devido aos problemas associados com as retardações de tempo. As retardações de tempo nos efeitos da densidade sobre a natalidade e mortalidade distorcem a forma da curva do crescimento da população. De acordo com Smith, o principal problema em aplicar a curva logística aos dados, concerne num retrato apurado da porção dos fatores limitantes ainda inutilizados, isto é,  $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ . Foi questionado então que para uma população com limite de alimento o termo  $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$  deveria ser substituído por um termo que representa a proporção da taxa da fonte de alimento atualmente inutilizada pela população. Se  $F$  for a taxa em que uma população do tamanho  $N$  usa o alimento e  $T$  for a taxa correspondente ao nível de saturação, então

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \left( 1 - \frac{F}{T} \right)$$

onde  $\frac{F}{T} > \frac{N}{K}$  desde que uma população em crescimento usará o alimento mais rapidamente do que uma população saturada.  $F$  deve depender de  $N$  e de  $\frac{dN}{dt}$  e a relação mais simples será linear

$$F = aN + b \frac{dN}{dt}, a > 0, b > 0$$

Na saturação  $F = T$ ,  $N = K$ ,  $\frac{dN}{dt} = 0$ , conseqüentemente  $T = aK$ , e como resultado da equação de crescimento modificado temos

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( \frac{1 - \frac{N}{K}}{1 + c \frac{N}{K}} \right) \tag{1.15}$$

onde  $c = r \frac{b}{a}$ . A equação diferencial (1.14) é o crescimento logístico de Verhulst escalado pelo fator de "atraso"  $\left(1 + c \frac{N}{K}\right)^{-1}$  e não admite uma solução analítica para  $N$  em função de  $t$ , mas ao contrário

$$t = \frac{1}{r} \ln \left[ \frac{(K - N_0)^{1+c}}{N_0} \right] + \frac{1}{r} \ln \left[ \frac{N}{(K - N)^{1+c}} \right]. \tag{1.16}$$

O valor de inflexão para a equação de Smith é

$$N_{inf} = \frac{K}{1 + \sqrt{1 + c}} \quad (1.17)$$

Para  $c = 0$  a forma de Smith reduz-se à forma de crescimento logístico de Verhulst com  $N_{inf} = \frac{K}{2}$ , enquanto que para  $c > 0$ ,  $N_{inf} < \frac{K}{2}$  e para  $c < 0$ ,  $N_{inf} > \frac{K}{2}$ . Para  $c = -1$ , o crescimento é exponencial,  $\frac{dN}{dt} = rN$ , e não há nenhum ponto de inflexão.

A taxa de crescimento máximo, quando  $c \neq -1$ , é dada por

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{max} = \frac{rK}{(1 + \sqrt{c + 1})^2}. \quad (1.18)$$

A taxa relativa de crescimento,  $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ , decresce não linearmente com aumento  $N$  para  $c < -1$ , com taxa de decrescimento sendo regulada pelo parâmetro  $c$ .

### 1.2.7 Modelo de Blumberg

Em 1968, Blumberg introduziu outra equação de crescimento baseado na modificação da equação de crescimento logístico de Verhulst para modelar dinâmica populacional ou evolução do tamanho de um órgão. Blumberg observou que a maior limitação da curva logística era a inflexibilidade do ponto de inflexão. Além disso, ele observou que tentativas de modificar o termo intrínseco constante da taxa decrescimento,  $r$ , tratando-o como um polinômio tempo-dependente para superar esta limitação, conduzem frequentemente à uma estimacão inferior dos valores futuros.

Por conseguinte, Blumberg introduziu o que se chamou de função hiperlogística,

$$\frac{dN}{dt} = rN^\alpha \left(1 - \frac{N}{K}\right)^\gamma. \quad (1.19)$$

A equação (1.19) pode ser reformulada como uma equação integral

$$\int_{N_0/K}^{N(t)/K} x^{-\alpha}(1-x)^{-\gamma} dx = rK^{\alpha-1}t$$

Esta reformulação nem sempre permite uma forma fechada de solução analítica. Por essa razão, Blumberg catalogou expressões analíticas (quando uma integração explícita puder ser realizada) da função de crescimento  $N(t)$  para vários valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$ .

A população no ponto de inflexão,  $N_{inf}$ , é dada por

$$N_{inf} = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} K.$$

A mesma expressão de  $N_{inf}$  é obtida para a equação logística de Verhulst quando  $\alpha = \gamma$ . Para  $\alpha \ll \gamma$ ,  $N_{inf}$  aproxima-se de 0 e a inflexão ocorre somente se  $N_0 < N_{inf}$ .

A taxa de crescimento máximo é dada por:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{max} = rK^\alpha \frac{\alpha^\alpha \gamma^\gamma}{(\alpha + \gamma)^{\alpha + \gamma}}$$

A taxa de crescimento relativo atinge seu máximo valor em

$$\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right)_{max} = rK^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha - 1 + \gamma}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha - 1 + \gamma}\right)^\gamma$$

em

$$N^* = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1 + \gamma} K$$

contanto que  $\alpha > 1$  e  $N^* > N_0$ , caso contrário declina não linearmente com o aumento de  $N$ .

A forma de crescimento do tipo de Blumberg é a forma hiperbólica para crescimento regenerativo. É representada pela curva sigmoideal

$$N(t) = \frac{K(t+a)^n}{b+(t+a)^n} \tag{1.20}$$

onde  $N(t)$  é o peso ou quantidade,  $K$  é o valor final, e  $a, b, n$  são parâmetros positivos da equação. A equação (1.20) tem forma diferencial

$$\frac{dN}{dt} = rN^{1-(1/n)} \left(1 - \frac{N}{K}\right)^{1+(1/n)}$$

onde  $r = n(K/b)^{\frac{1}{n}}$

O valor de inflexão é identificado por

$$N_{inf} = \frac{(n-1)}{2n} K$$

quando  $n > 1$ , e o tempo de inflexão por

$$t_{inf} = b^{\frac{1}{n}} \left[ \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)^{\frac{1}{n}} \right]$$

, onde  $N_0 = Ka^n/(b + a^n)$ .

A taxa de crescimento relativo decresce não-linearmente com o aumento de  $N$  desde que  $N^* = -n < 0$  é indefinido.

# Capítulo 2

## Modelo logístico generalizado

### 2.1 Definição da função logística generalizada

Apresentaremos agora o modelo logístico generalizado que foi proposto por Tsoularis e Wallace, em 2002, através da chamada equação logística generalizada, apresentando suas propriedades e observando que todos os modelos apresentados no capítulo anterior podem ser derivados deste, considerando assim os modelos anteriores como casos especiais do modelo logístico generalizado. A equação logística generalizada é dada por:

$$\frac{dN}{dt} = rN^\alpha \left[ 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^\beta \right]^\gamma \quad (2.1)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são números reais positivos. Vamos considerar somente valores positivos para estes parâmetros, uma vez que expoentes negativos nem sempre fornecem um modelo plausível do ponto de vista biológico. Observe que se  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  temos o modelo logístico clássico.

### 2.2 Características do crescimento generalizado

As três principais características do crescimento logístico generalizado são:

- (i)  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$ , ou seja, a população converge para sua capacidade de suporte.
- (ii) A taxa de crescimento relativo,  $\left( \frac{1}{N} \right) \left( \frac{dN}{dt} \right)$  atinge seu valor máximo no

$$N_* = \left( 1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha - 1} \right)^{-(1/\beta)} K$$

fornecido,  $N^*$  é real e maior que  $N_0$  caso contrário declina não linearmente atingindo o seu valor mínimo zero no  $N = K$ .

iii) A população no ponto de inflexão (onde a taxa de crescimento é máxima) é dada por:

$$N_{inf} = \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-\left(\frac{1}{\beta}\right)} K$$

**Lema 2.2.1.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , localmente Lipschitz e  $K \in \mathbb{R}$  o único ponto que satisfaz  $f(K) = 0$ , então vale o seguinte resultado para a solução  $\varphi_{N_0}(t)$  do PVI:*

$$\begin{cases} N'(t) = f(N) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

1. Se  $\varphi_{N_0}(0) < K$ , então  $\varphi_{N_0}(t) < K$  para todo  $t \in J^*$ ;
2. Se  $f(N_0) > 0$  então  $\varphi_{N_0}(t)$  é estritamente crescente para todo  $t \in J^*$ ;

*Demonstração.* (1) Suponha que  $\varphi_{N_0}(0) < K < \varphi_{N_0}(t)$ , como  $\varphi_{N_0}$  é solução do P.V.I então  $\varphi_{N_0}$  é contínua, assim pelo teorema do valor intermediário  $\exists t_0 \in (0, t)$  tal que  $\varphi_{N_0}(t_0) = K$ . Agora veja que  $\varphi_{N_0}(0)$  é solução do P.V.I,  $N' = f(N)$ ;  $N(t_0) = K$ . Por outro lado  $N(t) \equiv K$  também é solução do P.V.I,  $N' = f(N)$ ;  $N(0) = K$ , absurdo pois  $K$  é o único ponto que satisfaz  $f(K) = 0$ .

(2) Se  $f(N_0) > 0 \implies f(\varphi_{N_0}(0)) > 0$ , mas  $f(\varphi_{N_0}(0)) = \varphi'_{N_0}(0) \implies \varphi'_{N_0}(0) > 0$ , como  $f$  é localmente Lipschitz existe uma vizinhança  $J^*$  de zero tal que  $f(\varphi_{N_0}(t)) > 0 \implies \varphi'_{N_0}(t) > 0$ , para todo  $t \in J^*$

Assim considerando o P.V.I (2.1) e pondo,

$$f(N) = rN^\alpha \left[1 - \left(\frac{N}{K}\right)^\beta\right]^\gamma$$

temos que  $f(N)$ , é localmente Lipschitz e  $K$  é o único ponto que satisfaz  $f(K) = 0$ , assim a solução  $N(t)$  satisfaz, pelo lema acima, as seguintes propriedades:

1. Se  $N(0) < K$ , então  $N(t) < K$  para todo  $t \in J^*$ ;

2. Se  $f(N) > 0$  então  $N(t)$  é estritamente crescente para todo  $t \in J^*$ ;

Portanto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$ .

Agora vamos verificar a segunda característica do crescimento logístico generalizado:

$$\frac{dN}{dt} \left( \frac{1}{N} \right) = rN^\alpha \left[ 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^\beta \right]^\gamma \left( \frac{1}{N} \right) = r \frac{N^\alpha}{K^{\beta\gamma}} [K^\beta - N^\beta]^\gamma \frac{1}{N} = \frac{r}{K^{\beta\gamma}} N^{\alpha-1} [K^\beta - N^\beta]^\gamma$$

pondo  $C = \frac{r}{K^{\beta\gamma}}$  temos que

$$\frac{dN}{dt} \left( \frac{1}{N} \right) = CN^{\alpha-1} [K^\beta - N^\beta]^\gamma$$

Prosseguindo vamos obter o seguinte:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dN}{dt} \left( \frac{1}{N} \right) \right]' &= C(\alpha - 1)N^{\alpha-2}N'[K^\beta - N^\beta]^\gamma + CN^{\alpha-1}\gamma(K^\beta - N^\beta)^{\gamma-1}[K^\beta - N^\beta]' \\ &= C(\alpha - 1)N^{\alpha-2}CN^\alpha [K^\beta - N^\beta]^\gamma [K^\beta - N^\beta]^\gamma + CN^{\alpha-1}\gamma(K^\beta - N^\beta)^{\gamma-1}[-\beta N^{\beta-1}N'] \\ &= C^2(\alpha - 1)N^{2\alpha-2}[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma} + CN^{\alpha-1}\gamma(K^\beta - N^\beta)^{\gamma-1}[-\beta N^{\beta-1}(CN^\alpha[K^\beta - N^\beta]^\gamma)] \\ &= C^2(\alpha - 1)N^{2\alpha-2}[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma} - CN^{\alpha-1}\gamma(K^\beta - N^\beta)^{\gamma-1}\beta N^{\beta-1}CN^\alpha[K^\beta - N^\beta]^\gamma \\ &= C^2(\alpha - 1)N^{2\alpha-2}[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma} - C^2N^{2\alpha+\beta-2}\gamma[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma-1}\beta \\ &\implies \left[ \frac{dN}{dt} \left( \frac{1}{N} \right) \right]' = C^2 [(\alpha - 1)N^{2\alpha-2}[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma} - \gamma\beta N^{2\alpha+\beta-2}[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma-1}] \end{aligned}$$

Assim fazendo

$$\left[ \frac{dN}{dt} \left( \frac{1}{N} \right) \right]' = 0$$

temos que:

$$(\alpha - 1)N^{2\alpha-2}[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma} = \gamma\beta N^{2\alpha+\beta-2}[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma-1}$$

pois  $C = \frac{r}{K^{\beta\gamma}} \neq 0$ . Agora veja que,

$$\begin{aligned} \frac{N^{2\alpha-2}}{N^{2\alpha+\beta-2}} &= \frac{\gamma\beta}{\alpha - 1} \frac{[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma-1}}{[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma}} \\ \implies \frac{1}{N^\beta} &= \frac{\gamma\beta}{\alpha - 1} [K^\beta - N^\beta]^{-1} \implies \frac{K^\beta - N^\beta}{N^\beta} = \frac{\gamma\beta}{\alpha - 1} \\ \implies \left( \frac{K}{N} \right)^\beta - 1 &= \frac{\gamma\beta}{\alpha - 1} \implies \frac{N}{K} = \left( 1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha - 1} \right)^{-(1/\beta)} \end{aligned}$$

$$\implies N = \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha - 1}\right)^{-(1/\beta)} K$$

Portanto  $N^* = \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha - 1}\right)^{-(1/\beta)} K$  é ponto crítico de  $\left[\frac{dN}{dt} \left(\frac{1}{N}\right)\right]$ .

Agora mostraremos que  $N^*$  é de fato, ponto de máximo de  $\left[\frac{dN}{dt} \left(\frac{1}{N}\right)\right]$ . Mas já sabemos que,

$$\left[\frac{dN}{dt} \left(\frac{1}{N}\right)\right]' = C^2 [(\alpha - 1)N^{2\alpha-2}[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma} - \gamma\beta N^{2\alpha+\beta-2}[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma-1}]$$

daí temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN}{dt} \frac{1}{N}\right)'' &= C^2 [ (2\alpha - 2)(\alpha - 1)N^{2\alpha-3}CN^\alpha(K^\beta - N^\beta)^\gamma[K^\beta - N^\beta]^{2\gamma} \\ &\quad + (\alpha - 1)N^{2\alpha-2}2\gamma(K^\beta - N^\beta)^{2\gamma-1} (-\beta N^{\beta-1}CN^\alpha(K^\beta - N^\beta)^\gamma) \\ &\quad - \gamma\beta(2\alpha + \beta - 2)^{2\alpha+\beta-3}CN^\alpha(K^\beta - N^\beta)^\gamma(K^\beta - N^\beta)^{2\gamma-1} \\ &\quad - \gamma\beta N^{2\alpha+\beta-2}(2\gamma - 1)(K^\beta - N^\beta)^{2\gamma-2}(-\beta N^{\beta-1}CN^\alpha(K^\beta - N^\beta)^\gamma) ] \\ &= C^2 [ C(2\alpha - 2)(\alpha - 1)N^{3\alpha-3}(K^\beta - N^\beta)^{3\gamma} \\ &\quad - 2C\beta\gamma(\alpha - 1)N^{3\alpha+\beta-3}(K^\beta - N^\beta)^{3\gamma-1} \\ &\quad - \gamma\beta C(2\alpha + \beta - 2)N^{3\alpha+\beta-3}(K^\beta - N^\beta)^{3\gamma-1} \\ &\quad + \gamma\beta^2 C(2\gamma - 1)N^{3\alpha+2\beta-3}(K^\beta - N^\beta)^{3\gamma-2} ] \\ &= C^3 N^{3\alpha-3}(K^\beta - N^\beta)^{3\gamma} [ 2(\alpha - 1)^2 - 2\beta\gamma(\alpha - 1)N^\beta(K^\beta - N^\beta)^{-1} \\ &\quad - \gamma\beta(2\alpha + \beta - 2)N^\beta(K^\beta - N^\beta)^{-1} + \gamma\beta^2(2\gamma - 1)N^{2\beta}(K^\beta - N^\beta)^{-2} ] \\ &= C^3 N^{3\alpha-3}(K^\beta - N^\beta)^{3\gamma} [ 2(\alpha - 1)^2 - 4\beta\gamma(\alpha - 1)N^\beta(K^\beta - N^\beta)^{-1} \\ &\quad - \gamma\beta^2 N^\beta(K^\beta - N^\beta)^{-1} + \gamma\beta^2(2\gamma - 1)N^{2\beta}(K^\beta - N^\beta)^{-2} ] \\ &= C^3 N^{3\alpha-3}(K^\beta - N^\beta)^{3\gamma} [ 2[(\alpha - 1) - \beta\gamma N^\beta(K^\beta - N^\beta)^{-1}]^2 \\ &\quad - [\gamma\beta^2 N^\beta(K^\beta - N^\beta)^{-1} + \gamma\beta^2 N^{2\beta}(K^\beta - N^\beta)^{-2}] ] \\ &= C^3 N^{3\alpha-3}(K^\beta - N^\beta)^{3\gamma} [ 2[(\alpha - 1) - \beta\gamma N^\beta(K^\beta - N^\beta)^{-1}]^2 \\ &\quad - \gamma\beta^2 [N^\beta(K^\beta - N^\beta)^{-1} + N^{2\beta}(K^\beta - N^\beta)^{-2}] ] \end{aligned}$$

Agora veja que:

$$\left(\frac{dN}{dt} \frac{1}{N}\right)'' (N^*)$$

$$\begin{aligned}
 &= C^3 \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-\left(\frac{3\alpha-3}{\beta}\right)} K^{3\alpha-3} \left(K^\beta - \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-1} K^\beta\right)^{3\gamma} \\
 &\quad \left[2 \left((\alpha-1) - \beta\gamma \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha-1}\right)^{-1} K^\beta \left(K^\beta - \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-1}\right)\right)^2\right] \\
 &- \gamma\beta^2 \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-1} K^\beta \left(K^\beta - \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-1} K^\beta\right)^{-1} \\
 &+ \left[\left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-1} K^\beta \left(K^\beta - \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-1} K^\beta\right)^{-1}\right]^2 \\
 &= C^3 \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^{\frac{3\alpha-3}{\beta}} K^{3\alpha-3} \left(\frac{(\alpha-1+\gamma\beta)K^\beta - (\alpha-1)K^\beta}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^{3\gamma} \\
 &\quad \left[2 \left((\alpha-1) - \beta\gamma \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma\beta}\right) K^\beta \left(\frac{\gamma\beta K^\beta + (\alpha-1)K^\beta - (\alpha-1)K^\beta}{\gamma\beta + \alpha-1}\right)^{-1}\right)^2\right] \\
 &- \gamma\beta^2 \left[\frac{\alpha-1}{\gamma\beta} + \left(\frac{\alpha-1}{\gamma\beta}\right)^2\right] \\
 &= C^3 \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^{\frac{3\alpha-3}{\beta}} K^{3\alpha-3} \left(\frac{(\alpha-1)K^\beta}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^{3\gamma} \left(-\gamma\beta^2 \left[\frac{\gamma\beta(\alpha-1) + (\alpha-1)^2}{(\gamma\beta)^2}\right]\right) \\
 &= C^3 \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^{\frac{3\alpha-3}{\beta}} K^{3\alpha-3} \left(\frac{(\alpha-1)K^\beta}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^{3\gamma} (-\gamma\beta(\alpha-1) - (\alpha-1)^2) \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

Portanto  $N^*$  é ponto de máximo de  $\left(\frac{dN}{dt} \frac{1}{N}\right)''(N^*)$

E claramente  $N^*$  é real já que  $\alpha, \beta, \gamma, C$  e  $K$  são todos reais. E pelo item (2)  $N^* > N_0$ .

A taxa de crescimento máximo relativo é dada por:

$$\left(\frac{dN}{dt} \frac{1}{N}\right)_{max} = r(N^*)^{\alpha-1} \left(1 + \left(\frac{N^*}{K}\right)^\beta\right)^\gamma = r \frac{(N^*)^\alpha}{K^{\beta\gamma}} [K^\beta - (N^*)^\beta]^\gamma$$

Mais uma vez pondo  $C = \frac{r}{K^{\beta\gamma}}$  temos que:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right)_{max} &= C \left[ \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-\left(\frac{1}{\beta}\right)} K \right]^{\alpha-1} \left[ K^\beta - \left( \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-\left(\frac{1}{\beta}\right)} K \right)^\beta \right]^\gamma \\
 &= C \left[ \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta}} K^{\alpha-1} \right] \left[ K^\beta - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma\beta}\right) K^\beta \right]^\gamma \\
 &= CK^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta}} \left(\frac{(\alpha-1)K^\beta + \gamma\beta K^\beta - (\alpha-1)K^\beta}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^\gamma \\
 &= CK^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta}} \left(\frac{\gamma\beta K^\beta}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^\gamma \\
 &= rK^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta}} \left(\frac{\gamma\beta}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^\gamma
 \end{aligned}$$

Os valores limites importantes de  $N^*$  são:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow 0} N^* &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-\left(\frac{1}{\beta}\right)} K \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma\beta}\right)^{\left(\frac{1}{\beta}\right)} K \\
 &= \left(\frac{1}{1-\gamma\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} K
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\beta \rightarrow 0} N^* &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-\left(\frac{1}{\beta}\right)} K \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{\gamma x}{(\alpha-1)x}} K \\
 &= e^{\frac{\gamma}{(1-\alpha)}} K
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\gamma \rightarrow 0} N^* &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha-1}\right)^{-\left(\frac{1}{\beta}\right)} K \\
 &= (1)^{-\frac{1}{\beta}} K \\
 &= K\sqrt{1} \\
 &= K
 \end{aligned}$$

Em fim, a população no ponto de inflexão é dada por:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dN}{dt}\right) &= rN^\alpha \left[1 - \left(\frac{N}{K}\right)^\beta\right]^\gamma = r\frac{N^\alpha}{K^{\beta\gamma}} [K^\beta - N^\beta]^\gamma = \frac{r}{K^{\beta\gamma}} N^\alpha [K^\beta - N^\beta]^\gamma \\
 \implies \left(\frac{dN}{dt}\right)' &= \frac{r}{K^{\beta\gamma}} \alpha N^{\alpha-1} N' (K^\beta - N^\beta)^\gamma + \frac{r}{K^{\beta\gamma}} N^\alpha \gamma (K^\beta - N^\beta)^{\gamma-1} (-\beta N^{\beta-1} N')
 \end{aligned}$$

assim pondo  $C = \frac{r}{K^{\beta\gamma}}$  e substituindo  $N' = CN^\alpha (K^\beta - N^\beta)^\gamma$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dN}{dt}\right)' &= C\alpha N^{\alpha-1}CN\alpha(K^\beta - N^\beta)^\gamma(K^\beta - N^\beta)^\gamma \\
 &+ CN^\alpha\gamma(K^\beta - N^\beta)^{\gamma-1}(-\beta N^{\beta-1}CN^\alpha(K^\beta - N^\beta)^\gamma) \\
 &= C^2\alpha N^{2\alpha-1}(K^\beta - N^\beta)^{2\gamma} - \beta C^2\gamma N^{2\alpha+\beta-1}(K^\beta - N^\beta)^{2\gamma-1} \\
 &= C^2N^{2\alpha-1}(K^\beta - N^\beta)^{2\gamma}[\alpha - \beta\gamma N^\beta(K^\beta - N^\beta)^{-1}]
 \end{aligned}$$

Agora veja o seguinte,

$$\begin{aligned}
 \alpha - \beta\gamma N^\beta(K^\beta - N^\beta)^{-1} = 0 &\implies \alpha = \beta\gamma N^\beta(K^\beta - N^\beta)^{-1} \implies \left(\frac{K^\beta - N^\beta}{N^\beta}\right) = \frac{\beta\gamma}{\alpha} \\
 &\implies \left(\frac{K}{N}\right)^\beta - 1 = \frac{\beta\gamma}{\alpha} \implies \left(\frac{K}{N}\right)^\beta = 1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha} \\
 &\implies \left(\frac{N}{K}\right) = \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-\left(\frac{1}{\beta}\right)} \\
 &\implies N_{inf} = \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-\left(\frac{1}{\beta}\right)} K
 \end{aligned}$$

Claramente, se  $N_{inf} < N_0$ , não é possível inflexão uma vez que a população terá iniciado com o valor  $N_0$  e com uma taxa de crescimento positivo por habitante, assegurando assim que  $N_{inf}$  não será alcançado. A taxa de crescimento relativo em  $N_{inf}$  é novamente dada por ( ) com a substituição de  $K$  por  $K - 1$  (somente na expressão entre parênteses). A taxa de crescimento máxima é dada por:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{max} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{inf} = rK^\alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta\gamma}\right)^\gamma$$

Mas já sabemos que,

$$\left(\frac{dN}{dt}\right) = rN^\alpha \left[1 - \left(\frac{N}{K}\right)^\beta\right]^\gamma = r\frac{N^\alpha}{K^{\beta\gamma}} [K^\beta - N^\beta]^\gamma$$

Assim aplicando  $N_{inf} = \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}} K > N^*$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dN}{dt}\right)_{inf} &= \frac{r}{K^{\beta\gamma}} \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} K^\alpha \left[ K^\beta - \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-1} K^\beta \right]^\gamma \\
 &= \frac{rK^\beta}{K^{\gamma\beta}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \left[ K^\beta - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta\gamma}\right) K^\beta \right]^\gamma \\
 &= \frac{rK^\beta}{K^{\gamma\beta}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\frac{\beta\gamma K^\beta}{\alpha + \beta\gamma}\right)^\gamma \\
 &= K^\alpha r \frac{K^{\beta\gamma}}{K^{\beta\gamma}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta\gamma}\right)^\gamma \\
 &= rK^\alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta\gamma}\right)^\gamma
 \end{aligned}$$

Os valores limites importantes de  $N_{inf}$ , são:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} N_{inf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} K \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} K \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} N_{inf}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} N_{inf} = \lim_{\beta \rightarrow 0} K \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}} = \lim_{x \rightarrow \infty} K \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-\left(\frac{\gamma x}{\alpha}\right)} = Ke^{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} N_{inf} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} K \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}} = \lim_{x \rightarrow \infty} K \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-\left(\frac{\gamma x}{\alpha}\right)} = Ke^{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

O valor de inflexão é mesmo obtido para uma infinidade de formas generalizadas logísticas quando  $\alpha, \beta$ , são escolhidos para variar desde que a relação  $\gamma/\alpha$  e  $\beta$  permaneçam constante.

Introduzindo a variável auxiliar  $x = \left(\frac{N}{K}\right)^\beta$  podemos transformar a equação diferencial autônoma:

$$\frac{dN}{dt} = rN^\alpha \left[ 1 - \left(\frac{N}{K}\right)^\beta \right]^\gamma$$

em:

$$\frac{dx}{dt} = \beta r K^{\alpha-1} x^{\left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)+1} (1-x)^\gamma$$

Agora veja que  $x = \left(\frac{N}{K}\right)^\beta$  implica que  $N = Kx^{\frac{1}{\beta}}$ . Assim temos que:

$$\frac{dN}{dt} = K \frac{1}{\beta} x^{(\frac{1}{\beta}-1)} \frac{dx}{dt}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = K \frac{1}{\beta} x^{(\frac{1}{\beta}-1)} \frac{dx}{dt} &= r(Kx^{\frac{1}{\beta}})^{\alpha} (1-x)^{\gamma} \\ \implies \frac{dx}{dt} &= r\beta K^{\alpha-1} x^{(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}+1)} (1-x)^{\gamma} \\ \implies \frac{dx}{dt} &= r\beta K^{\alpha-1} x^{(\frac{\alpha-1}{\beta}+1)} (1-x)^{\gamma} \end{aligned}$$

e após separação de variáveis e integração subsequente de 0 a  $t$ , temos

$$\int_{(N_0/K)^{\beta}}^{(N(t)/K)^{\beta}} x^{((1-\alpha)/\beta)-1} (1-x)^{-\gamma} dx = \beta r K^{\alpha-1} t \quad (2.3)$$

A integral em (2.3) pode ser calculada, no caso em que os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  podem tomar quaisquer valores numéricos, expandindo binomialmente  $(1-x)^{-\gamma}$  e subsequentemente, integrando a série resultante termo a termo. Quando

$$p = (1-\alpha)/\beta > 0 \quad , \quad q = 1-\gamma > 0$$

a integral

$$\int_{x_0}^{x_1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

onde  $x_1 = (N(t)/K)^{\beta}$ ,  $x_0 = (N_0/K)^{\beta}$ , é a diferença entre as duas funções betas incompletas  $B_{x_1}(p, q)$  e  $B_{x_0}(p, q)$ . A função beta incompleta é definida assim

$$B_{x_1}(p, q) = \int_0^{x_1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

Por isso,

$$B_{x_1}(p, q) - B_{x_0}(p, q) = \int_{x_0}^{x_1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \beta r K^{\alpha-1} t \quad (2.4)$$

A partir das restrições  $p > 0$ ,  $q > 0$ , duas possíveis faixas de valores para  $\alpha$  e  $\beta$  são aceitáveis,

$$\alpha < 1, \beta > 0, \gamma < 1$$

$$\alpha > 1, \beta < 0, \gamma < 1$$

A integral em (2.4) pode ser expressa como uma diferença de duas expansão de séries, de  $0 < x_0 < 1$  e  $0 < x_1 < 1$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx &= \frac{x_1^p(1-x_1)^q}{p} \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(p+1, n+1)}{B(p+q, n+1)} x_1^{n+1} \right] \\ &- \frac{x_0^p(1-x_0)^q}{p} \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(p+1, n+1)}{B(p+q, n+1)} x_0^{n+1} \right] = \beta r K^{\alpha-1} t \end{aligned} \quad (2.5)$$

A equação (2.5) contém uma série infinita em termos da função beta, que por sua vez pode ser expressa em termos da função gama. A forma logística (2.1) em geral não admite solução analítica  $N(t)$  mas  $t$  como função de  $N$ . O integrando em (2.4) pode ser expandido binomialmente para fornecer, no caso geral, a expressão para o momento de inflexão,  $t_{inf}$  :

$$\begin{aligned} &\int_{\left(\frac{N_0}{K}\right)^\beta}^{\left(\frac{N}{K}\right)^\beta} x^{p-1} + x^{p(q-1)} + \frac{(q-1)(q-2)}{2!} x^{p+1} + \dots + x^{p+q-2} = \beta r K^{\alpha-1} t \\ &= \frac{x^p}{p} + (q-1) \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{(q-1)(q-2)}{2!} \frac{x^{p+2}}{p+2} + \dots + \frac{x^{p+q-1}}{p+q-1} \Big|_{\left(\frac{N_0}{K}\right)^\beta}^{\left(\frac{N}{K}\right)^\beta} = \beta r K^{\alpha-1} t \\ \implies t_{inf} &= \frac{1}{\beta r K^{\alpha-1}} \left[ \frac{x^p}{p} + (q-1) \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{(q-1)(q-2)}{2!} \frac{x^{p+2}}{p+2} + \dots + \frac{x^{p+q-1}}{p+q-1} \Big|_{\left(\frac{N_0}{K}\right)^\beta}^{\left(\frac{N}{K}\right)^\beta} \right] \\ \implies t_{inf} &= \frac{1}{\beta r K^{\alpha-1}} \left[ \frac{[(N_{inf})^\beta]^{\frac{1-\alpha}{\beta}}}{\frac{1-\alpha}{\beta} K^{1-\alpha}} + (-\gamma) \frac{[(N_{inf})^\beta]^{\frac{1-\alpha+\beta}{\beta}}}{\left(\frac{1-\alpha}{\beta} + 1\right) K^{1-\alpha+\beta}} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!} \right. \\ &\left. \frac{[(N_{inf})^\beta]^{\frac{\alpha-1-2\beta}{\beta}}}{\left(\frac{1-\alpha}{\beta} + 2\right) K^{\alpha-1-2\beta}} + \dots \right] - \frac{1}{\beta r K^{\alpha-1}} \left[ \frac{[(N_0)^\beta]^{\frac{1-\alpha}{\beta}}}{\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right) K^{1-\alpha}} + \gamma \frac{[(N_0)^\beta]^{\frac{1-\alpha+\beta}{\beta}}}{\left(\frac{1-\alpha}{\beta} + 1\right) K^{1-\alpha+\beta}} \right. \\ &\left. + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!} \frac{[(N_0)^\beta]^{\frac{1-\alpha+2\beta}{\beta}}}{\left(\frac{1-\alpha}{\beta} + 2\right) K^{\frac{1-\alpha}{\beta}+2}} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t_{inf} &= \frac{1}{rK^{\alpha-1}} \left[ \frac{\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta}}}{1-\alpha} + \gamma \frac{\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{1-\alpha+\beta}}{1-\alpha+\beta} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!} \frac{\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha-1-2\beta}}{1-\alpha+2\beta} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[ \frac{N_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma \frac{N_0^{1-\alpha+\beta}}{K^\beta(1-\alpha+\beta)} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!} \frac{N_0^{1-\alpha+2\beta}}{K^{2\beta}(1-\alpha+2\beta)} + \dots \right], \alpha \neq 1. \end{aligned}$$

Apresentadas as principais propriedades do modelo logístico generalizado, podemos encontrar os modelos citados no primeiro capítulo, através da atribuição de valores aos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , encontrando assim pontos de equilíbrio, pontos de inflexão, taxa de crescimento máximo, taxa de crescimento máximo relativo entre outras características fundamentais para a modelagem de crescimento populacional de uma espécie.

# Capítulo 3

## Problema de Valor Inicial Fuzzy

### 3.1 Introdução

Como vimos no capítulo anterior, os modelos de dinâmica populacional envolvem parâmetros que determinam as características ambientais, da espécie e até mesmo da interação, como por exemplo a capacidade suporte e o índice de crescimento relativo. De modo geral, estes parâmetros são obtidos através de observações e experimentos e portanto, estão sujeitos a imprecisões. A principal característica dos sistemas determinísticos é a precisão obtida pela solução. No entanto, esta precisão está comprometida quando os parâmetros envolvidos na fórmulação não são precisos o que, em geral, é o caso dos modelos para dinâmica populacional. Quando a subjetividade está na condição inicial, denominamos fuzziness demográfica, se a incerteza está nos parâmetros chamamos de fuzziness ambiental. Sendo assim, ferramentas que incorporam informações imprecisas são fundamentais para a modelagem. Em particular, a teoria dos conjuntos fuzzy é uma ferramenta que pode ser usada para modelagem de fenômenos envolvendo imprecisões e subjetividade.

Nesta seção, vamos fazer uso desta teoria para resolução de sistemas de equações diferenciais em que os parâmetros, a condição inicial ou ambos são incertos de tal modo que possam ser modelados por conjuntos fuzzy. Para isso, consideremos um sistema autônomo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

onde a condição inicial é imprecisa, isto é,  $x_o \in \mathbb{E}^n$ . Vamos abordar o sistema acima de duas maneiras distintas. Uma delas, proposta por Seikkala ([8]), consiste em aplicar o princípio da extensão de Zadeh ao campo determinístico determinado por  $f$ , obtendo assim um campo fuzzy a partir do qual são usados conceitos como a derivada de Hukuhara. A segunda, consiste em determinar primeiramente a solução determinística  $\varphi_t(x_0)$  e então, aplicar o princípio da extensão de Zadeh, obtendo uma solução fuzzy  $\varphi_t(x_0)$ . Informalmente, na primeira abordagem primeiramente fuzzificamos o problema e, então, encontramos a solução, enquanto no segundo método, primeiramente a solução clássica é determinada e, então, fuzzificamos esta solução. Como pré-requisito para as próximas seções deste capítulo, em que apresentaremos cada uma das abordagens acima citadas, vamos definir os conceitos de conjuntos fuzzy e números fuzzy bem como alguns resultados que utilizaremos posteriormente.

**Definição 3.1.1.** *Um subconjunto fuzzy  $F$  em  $X$  é caracterizado por uma função  $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$ , chamada função de pertinência do conjunto  $F$ , onde  $\mu_F(x) = 1$  e  $\mu_F = 0$  indicam, respectivamente, a pertinência e não pertinência do elemento  $x$  em  $F$ .*

Segundo esta definição cada subconjunto clássico de  $X$  é um subconjunto fuzzy em  $X$ , onde a função de pertinência é a função característica do subconjunto.

Usaremos a notação  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  para a família de subconjuntos fuzzy de  $\mathbb{R}^n$ , onde os  $\alpha$ -níveis são dados por:

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n / \mu_a(x) \geq \alpha\} \text{ para todo } \alpha \in [0, 1] \text{ e}$$

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}A}$$

**Definição 3.1.2.** *Seja  $X = \mathbb{R}$ . Dizemos que um subconjunto fuzzy  $A \in \mathbb{R}$  é um número fuzzy quando:*

1. existe  $x_0$  tal que  $\mu_A(x_0) = 1$
2. o suporte  $\{x : \mu_A(x) = 1\}$  é limitado
3. os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são intervalos fechados

O conjunto fuzzy definido pela função de pertinência

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } x < b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

satisfaz as propriedades de um número fuzzy e é denominado número fuzzy triangular (figura 3.1). Usaremos a notação  $A = (a/b/c)$  para representar um número fuzzy triangular onde  $\mu_A(a) = \mu_A(c) = 0$  e  $\mu_A(b) = 1$ .

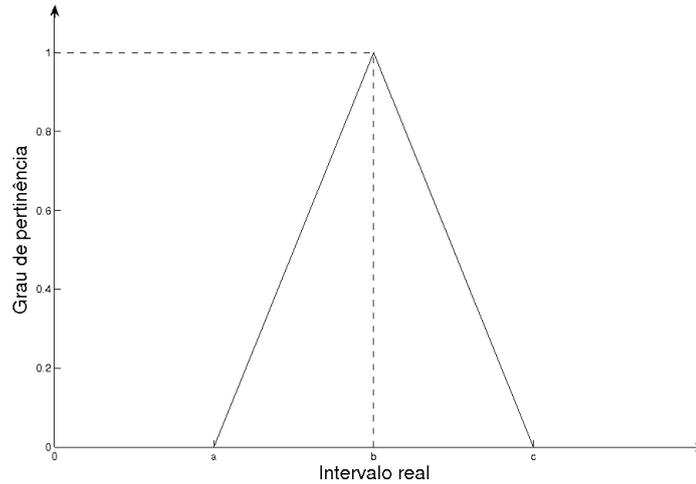


Figura 3.1: Número Fuzzy triangular (a/b/c)

Observemos que se o domínio de  $\mu_a : [a, c] \rightarrow [0, 1]$  é multiplicado por uma constante  $\lambda$ , então obtemos um número fuzzy triangular  $\lambda A = (\lambda a / \lambda b / \lambda c)$  onde  $\mu_{\lambda A}(\lambda x) = \mu_A(x)$  para todo  $x \in [a, c]$  Esta propriedade não é um caso particular somente dos números fuzzy triangulares.

O lema a seguir caracteriza um elemento em  $E$  através dos seus  $\alpha$ -níveis.

**Lema 3.1.1.** *Seja  $[a_1^\alpha, a_2^\alpha], 0 < \alpha \leq 1$  uma família de intervalos não vazios. Se*

1.  $[a_1^\alpha, a_2^\alpha] \supset [a_1^\beta, a_2^\beta]$  para todo  $0 < \alpha \leq \beta$
2.  $[\lim_{k \rightarrow \infty} a_1^{a_k}, \lim_{k \rightarrow \infty} a_2^{a_k}] = [a_1, a_2]$

onde  $a_k$  é uma sequência não decrescente convergindo para  $\alpha \in (0, 1]$ , então a família  $[a_1^\alpha, a_2^\alpha], 0 < \alpha \leq 1$  representa os  $\alpha$ -níveis de um elemento  $E$ . Por outro lado se  $[a_1^\alpha, a_2^\alpha], 0 < \alpha \leq 1$  representa os  $\alpha$ -níveis de um elemento  $E$  então são válidas as condições 1) e 2).

**Definição 3.1.3.** A extensão de Zadeh de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função  $\hat{f}$  tal que,

$$\mu_{\hat{f}(U)}(x) = \begin{cases} \sup \mu_U(\tau)_{\tau \in f^{-1}(x)} & \text{se } f^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(x) = \emptyset \end{cases}$$

onde  $U$  é um subconjunto fuzzy com suporte em  $\mathbb{R}$ .

A demonstração do teorema abaixo pode ser encontrada em [2].

**Teorema 3.1.1.** Se  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua então a extensão de Zadeh  $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  está bem definida e

$$[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$

Aplicando o teorema 2.1.1 a função  $\hat{f}(U) = \lambda U$  então obtemos  $[\hat{f}(u)]^\alpha = [\lambda A]^\alpha = \lambda [A]^\alpha$  de modo que multiplicar um número fuzzy  $A$  por um escalar  $\lambda$ , é equivalente a multiplicar todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  por  $\lambda$ . Portanto, temos que:  $x \in [A]^\alpha$  se, e somente se  $\lambda x \in [\lambda A]^\alpha$  ou equivalentemente  $\mu_A(x) = \mu_{\lambda A}(\lambda x)$

### 3.1.1 Extensão do campo determinístico

Considere a seguinte equação autônoma

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

com  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Supondo que a variável de estado seja incerta, a idéia proposta por Seikkala ([8]), consiste em aplicar o princípio da extensão de Zadeh ao campo determinístico  $f$  obtendo assim um problema de valor inicial fuzzy proveniente do sistema (3.1)

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = \hat{f}(x(t)) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

com  $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  e  $x_0$  subconjunto fuzzy de  $E$ .

Como a função  $f$  é contínua, o teorema 3.1.1 garante que os  $\alpha$ -níveis do campo fuzzy  $f$  satisfazem

$$[\hat{f}(\hat{x})]^\alpha = f([\hat{x}]^\alpha) = [f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha), f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha)]$$

onde

$$\begin{cases} f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = \min\{f(x) : x \in [\hat{x}(t)]^\alpha = [x_1^\alpha, x_2^\alpha]\} \\ f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = \max\{f(x) : x \in [\hat{x}(t)]^\alpha = [x_1^\alpha, x_2^\alpha]\} \end{cases} \quad (3.3)$$

Uma função  $\hat{x}(t)$  que associa à cada  $t \in [0, T]$  um subconjunto fuzzy em  $E$ , está bem definida se existem funções  $x_1^\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_2^\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que para todo  $\alpha \in [0, 1]$

$$[\hat{x}(t)]^\alpha = [x_1^\alpha(t), x_2^\alpha(t)].$$

Se a função  $\hat{x} : [0, T] \rightarrow E$  for diferenciável no sentido de Hukuhara (2 e 4), então a derivada de  $\hat{x}(t)$  pode ser definida como a função  $\hat{x}' : [0, T] \rightarrow E$  cujos  $\alpha$ -níveis satisfazem

$$[\hat{x}'(t)]^\alpha = [(x_1^\alpha)'(t), (x_2^\alpha)'(t)].$$

Pelas igualdades acima, o sistema associado (3.2) pode então ser reformulado em um sistema bidimensional determinístico

$$\begin{cases} (x_1^\alpha)'(t) = f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha), & x_1^\alpha(0) = x_{01}^\alpha \\ (x_2^\alpha)'(t) = f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha), & x_2^\alpha(0) = x_{02}^\alpha \end{cases} \quad (3.4)$$

de modo que para cada  $\alpha \in [0, 1]$  as funções  $x_1^\alpha$  e  $x_2^\alpha$  determinam os  $\alpha$ -níveis de  $\hat{x}(t)$ .

A existência de solução única para o sistema (3.2) é garantida pelo teorema abaixo devido à Seikkala.

**Teorema 3.1.2.** *Suponha que  $f$  satisfaça*

$$|f(x, t) - f(t, \bar{x})| \leq g(t, |x - \bar{x}|), \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R}$$

onde  $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  e contínua tal que  $r \rightarrow g(t, r)$  é não decrescente e o problema de valor inicial

$$u'(t) = g(t, u(t)), \quad u(0) = u_0 \quad (3.5)$$

tem uma solução em  $\mathbb{R}_+$  para  $u_0 > 0$  e que  $u(t) \equiv 0$  é a única solução de (3.5) para  $u_0 = 0$ . Então o problema de valor inicial(3.2) tem solução fuzzy única.

**Exemplo 3.1.1.** *Consideremos a equação diferencial fuzzy*

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = -\hat{x}(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

que é a extensão de Zadeh do modelo de Malthus. Para este problema tomando a função  $g(t, r) = r$ , as condições do teorema (3.1.2) são satisfeitas. A solução única é determinada pelo sistema determinístico bidimensional

$$\begin{cases} (x_1^\alpha)'(t) = -x_2^\alpha(t), & x_1^\alpha(0) = x_{01}^\alpha \\ (x_2^\alpha)'(t) = -x_1^\alpha(t), & x_2^\alpha(0) = x_{02}^\alpha \end{cases} \quad (3.7)$$

cujas soluções

$$x_1^\alpha(t) = \frac{\hat{x}_{01}^\alpha - \hat{x}_{02}^\alpha}{2} e^t + \frac{\hat{x}_{01}^\alpha + \hat{x}_{02}^\alpha}{2} e^{-t}$$

são os  $\alpha$ -níveis de  $\hat{x}(t)$ .

Na figura (3.2) temos o gráfico da solução fuzzy  $\hat{x}(t)$  do sistema com condição inicial sendo o número fuzzy triangular  $\hat{x}_0 = (595, 600, 605)$ .

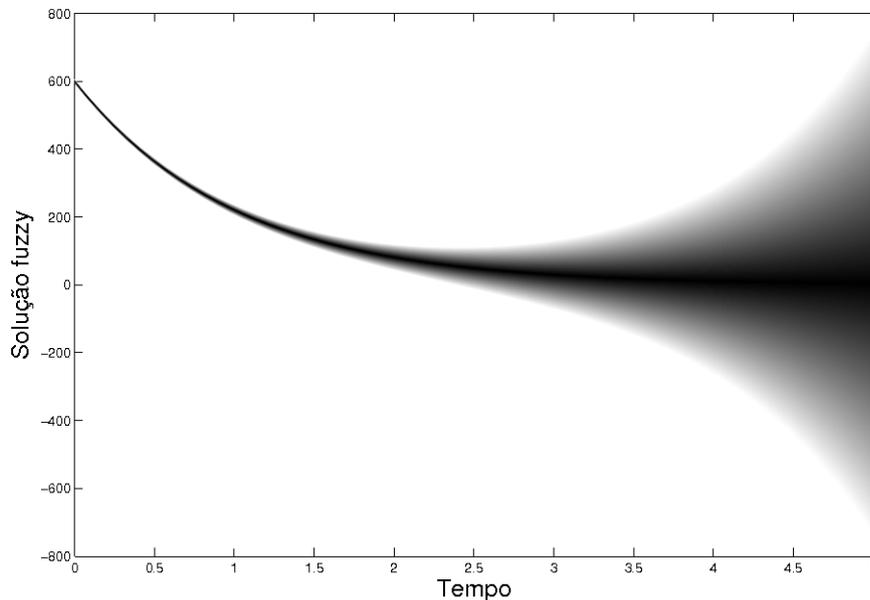


Figura 3.2: Solução do sistema fuzzy (3.6) com  $\text{supp}\hat{x}_0 = (595, 605)$ .

É importante observar que o comprimento do suporte de  $\hat{x}(t)$  é crescente em relação ao tempo, uma vez que,  $x_1^\alpha(t)$  é decrescente e  $x_2^\alpha(t)$  é crescente para todo  $0 \leq \alpha < 1$  a

partir de um determinado  $t_1$ . Portanto, conceitos relacionados aos estados de equilíbrio do sistema associado não estão bem definidos. O fato do suporte da solução fuzzy  $\hat{x}(t)$  ser crescente com relação à  $t$  não é um caso particular do exemplo acima segundo Kaleva [4].

**Proposição 3.1.1.** *Se  $\hat{x} : I \rightarrow E^n$  é diferenciável em  $I = [0, T]$ , então para cada  $\alpha \in [0, 1]$  a função  $t \rightarrow \text{diam}[\hat{x}(t)]^\alpha$  é não decrescente em  $I$*

### 3.1.2 Extensão do fluxo determinístico

Consideremos o sistema de equações autônomas

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = \hat{f}(x(t)) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Vamos supor que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , satisfaça algum critério que garanta existência e unicidade de solução. Neste caso, a solução  $x(t)$  do sistema (3.8) é unicamente determinada pela condição inicial e o tempo  $t$  ([5]). Para enfatizar isto, vamos representar tal solução por

$$\varphi_t(x_0) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ou seja,  $\varphi_0(x_0)$  e  $\varphi'_t(x_0) = f(\varphi_t(x_0))$ ; a solução  $\varphi_t(x_0)$  é denominada fluxo gerado pelo campo vetorial  $f$ . Admitindo que a condição inicial seja incerta, ou seja,  $x(0) = \hat{x}_0 \in E^n$ , então temos um sistema fuzzy associado

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = \hat{f}(x(t)) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Neste caso, a solução depende de uma condição inicial fuzzy. A solução para o sistema associado (3.9) por esta abordagem é definida como sendo a função obtida pela aplicação do princípio da extensão de Zadeh ao fluxo determinístico  $\varphi_t(x_0)$  obtendo assim

$$\hat{\varphi}_t(\hat{x}_0) : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n).$$

Pela continuidade de  $\varphi_t(x_0)$  com relação a condição inicial  $x_0$  ([5]), a igualdade

$$[\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)]^\alpha = \varphi_t([\widehat{x}_0]^\alpha) \quad (3.10)$$

é satisfeita para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Portanto, a trajetória determinada por  $\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)$  consiste de uma família de trajetórias determinísticas dadas por  $\varphi_t$ . Para cada  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , o grau de pertinência da trajetória  $\varphi_t(\bar{x})$  em  $\varphi_t(\widehat{x}_0)$  é igual ao grau de pertinência de  $\bar{x}$  em  $\widehat{x}_0$  pois pelo princípio da extensão de Zadeh

$$\mu_{\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)}(\varphi_t(\bar{x})) = \sup\{\mu_{\widehat{x}_0}(\tau) : \varphi_t(\tau) = \varphi_t(\bar{x})\}.$$

A igualdade  $\varphi_t(\bar{x})$  vale, em particular para  $t = 0$ , ou seja,  $\tau = \bar{x}$ . Logo, o supremo é tomado em um conjunto unitário, portanto

$$\mu_{\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)}(\varphi_t(\bar{x})) = \mu_{\widehat{x}_0}(\bar{x}).$$

Para o caso em que  $\widehat{x}_0$  é um subconjunto fuzzy de  $E^n$ , então temos os  $\alpha$ -níveis de  $\widehat{x}_0$  convexos e compactos e, como consequência,  $\varphi_t([\widehat{x}_0]^\alpha)$  também é convexo e compacto para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Sendo assim,  $\varphi_t(\bar{x}_0)$  é um subconjunto fuzzy de  $E^n$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Se considerarmos o caso em que a subjetividade aparece nos parâmetros da função  $f$ , então precisamos aplicar a extensão de Zadeh ao fluxo do sistema determinístico

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), b) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.11)$$

onde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de parâmetros para  $f$ . Portanto, adicionando ao sistema acima as equações

$$\begin{cases} b'_1 = 0 \\ b'_2 = 0 \\ \vdots \\ b'_m = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

temos um novo sistema de dimensão  $n + m$

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ b'(t) = 0 \\ x(0) = (x_0, b) \end{cases} \quad (3.13)$$

onde o vetor de parâmetro  $b$  aparece agora na condição inicial. Dessa forma, voltamos ao caso descrito acima onde somente a condição inicial é fuzzy  $\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)$ . A definição de estados de equilíbrio e estabilidade dada em ([7]) é análogo ao caso clássico, porém como estamos sobre espaços dos números fuzzy, a métrica utilizada é a de Hausdorff ([2]), isto é, dados conjuntos  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^n$ , a distância entre  $A$  e  $B$  é dada por:

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{y \in A} \inf_{x \in B} \|x - y\|, \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} \|x - y\|\right\}.$$

**Proposição 3.1.2.** *Se  $x^*$  é um estado de equilíbrio para (3.8) então  $\mathcal{X}_{\{x^*\}}$  é um estado de equilíbrio para (3.9). Além disso:*

1.  $\mathcal{X}_{\{x^*\}}$  é estável para o sistema (3.9) se, e somente se,  $x^*$  é estável para (3.8);
2.  $\mathcal{X}_{\{x^*\}}$  é assintoticamente estável para (3.9) se, e somente se,  $x^*$  é assintoticamente estável para (3.8);
3.  $\mathcal{X}_{\{x^*\}}$  é instável para (3.9) se, e somente se,  $x^*$  é instável para (3.8)

**Demonstração:** Consulte [(7)] ■

O item 2 da proposição acima pode ser reformulado em termos do suporte da solução fuzzy  $\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)$ , conforme veremos na proposição abaixo. Antes porém, vamos enunciar e demonstrar um resultado meramente técnico.

**Lema 3.1.2.** *Sejam  $K \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto,  $f : \mathbb{R}_+ \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, x) = x^*$  para todo  $x \in K$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $T > 0$  tal que, para todo  $t \geq T$ , temos  $|f(t, x) - x^*| < \epsilon$  para todo  $x \in K$ .*

*Demonstração.* Do contrário existiria  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $T > 0$ , existiriam  $t > T$  e  $x \in K$  tal que  $|f(t, x) - x^*| \geq \epsilon$ . Em particular esta propriedade seria válida para  $T_n = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Isto é, existiriam  $t_n \geq T_n$  e  $x_n \in K$  de modo que  $|f(t_n, x_n) - x^*| \geq \epsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Porém, como  $K$  é compacto, então, passando a uma subsequência se necessário, temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Da continuidade da  $f(t, x)$  teríamos que

$\epsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f(t_n, x_n) - x^*| = |f(x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n) - x^*| = 0$ , de modo que chegaríamos num absurdo.

**Proposição 3.1.3.** *Seja  $x^* \in \mathbb{R}^n$  o único estado de equilíbrio globalmente assintoticamente estável em alguma região  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $x^*$  não depende de parâmetros fuzzy para o fluxo  $\varphi_t(x_0)$ . Se  $[\widehat{x}_0]^\alpha \subset D$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$  então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{supp}(\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)) = \{x^*\}.$$

*Demonstração.* Pelo teorema (3.1.1) temos que  $[\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)]^0 = \varphi_t([\widehat{x}]^0)$ . Para demonstrar a afirmação, precisamos mostrar que para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $t_0 > 0$  a partir do qual, a distância, pela métrica de Hausdorff, do conjunto  $S_{t_0} = \varphi_t([\widehat{x}_0]^0) = \{\varphi_{t_0}(x) : x \in [\widehat{x}_0]^0\}$  ao conjunto  $\{x^*\}$  é menor do que  $\epsilon$ . O lema (3.1.2) assegura que, existe  $T > 0$  tal que para todo  $t \geq T$  temos  $|\varphi_t(x) - x^*| < \frac{\epsilon}{2}$ , para todo  $x \in [\widehat{x}_0]^0$ . Logo, tomando  $t_0 > T$ , temos que:

$$\begin{aligned} d_H(S_{t_0}, \{x^*\}) &= \max \left\{ \sup_{y \in S_{t_0}} \inf_{x \in \{x^*\}} \|x - y\|, \sup_{x \in \{x^*\}} \inf_{y \in S_{t_0}} \|x - y\| \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{y \in S_{t_0}} \|y - x^*\|, \inf_{y \in S_{t_0}} \|y - x^*\| \right\} \\ &= \sup_{y \in S_{t_0}} \|y - x^*\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

**Proposição 3.1.4.** *Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Suponhamos que  $\varphi_t(x_0)$  admita um ciclo limite  $\varphi$  assintoticamente estável em  $D$  não dependente de parâmetros fuzzy. Se  $[\widehat{x}_0]^\alpha \subset D$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$  então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{supp}(\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)) = \{\varphi\}.$$

*Demonstração.* Pelo teorema (3.1.1) temos que  $[\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)]^0 = \varphi_t([\widehat{x}]^0)$ . Por definição, se  $y \in \{\varphi\}$ , então existe uma sequência  $t_n(y) \rightarrow \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n(y)}(x) = y$  para todo  $x \in [\widehat{x}_0]^0$ . Dado  $\epsilon > 0$ , consideremos o conjunto  $S_k = \{\varphi_{t_k(y)} : x \in [\widehat{x}_0]^0, y \in \{\varphi\}\}$  onde  $k \in \mathbb{N}$  é tal que  $|\varphi_{t_k(y)}(x) - y| < \frac{\epsilon}{2}$ . Tal  $k$  existe pois, caso contrário, poderíamos construir sequências  $t_n \rightarrow \infty$  e  $x_n \rightarrow x_0$  tal que  $|\varphi_{t_n}(x_n) - y| \geq \frac{\epsilon}{2}$ . Para todo  $y \in \{\varphi\}$ , o que seria um absurdo pois,  $\varphi$  é ciclo limite para fluxo determinístico  $\varphi_t(x)$ . Logo, temos que:

$$d_H(S_k, \{\varphi\}) = \max \left\{ \sup_{y \in \{\varphi\}} \inf_{x \in S_k} \|x - y\|, \sup_{x \in S_k} \inf_{y \in \{\varphi\}} \|x - y\| \right\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

o que prova a afirmação.

Das proposições 3.1.3 e 3.1.4 concluímos que quando  $t \rightarrow \infty$ , a subjetividade das soluções desaparecem se a solução admitir um ponto de equilíbrio assintoticamente estável ou quando a solução é limitada.

**Exemplo 3.1.2.** *Consideremos a equação fuzzy proveniente do modelo de Malthus*

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x \\ x(0) = \hat{x}_0. \end{cases}$$

O estado de equilíbrio para esse sistema é  $x^* = 0$  que satisfaz as condições da proposição (3.1.3) quando  $\lambda < 0$ . Portanto, podemos concluir que os  $\alpha$ -níveis do fluxo  $\hat{\varphi}_t(x_0)$  convergem para  $\{0\}$ . De fato pois, para o modelo determinístico a solução é  $\varphi_t(x_0) = x_0 e^{\lambda t}$  e pelo teorema 3.1.1 temos que os  $\alpha$ -níveis de  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_0)$  são dados por  $[\hat{\varphi}_t(\hat{x}_0)]^\alpha = [\hat{x}_0]^\alpha e^{\lambda t}$ . Logo, se  $\lambda < 0$  o termo exponencial tende a zero. A figura (3.3) ilustra a solução de  $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_0)$  onde a condição inicial é o número fuzzy triangular  $\hat{x}_0 = (5/10/15)$ .

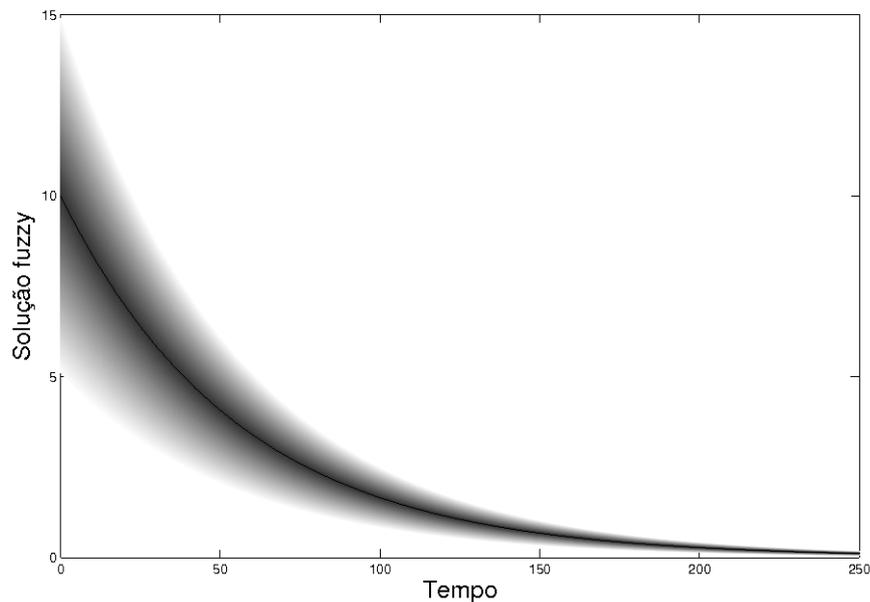


Figura 3.3: Solução fuzzy do Modelo de Malthus. Condição inicial fuzzy:  $\hat{x}_0 = (5/10/15)$  e  $\lambda = -0,012$

## 3.2 Sistemas p-fuzzy

### 3.2.1 Introdução

As equações diferenciais e de diferenças determinísticas constituem uma poderosa ferramenta para a modelagem de fenômenos cujas variáveis de estados estão sujeitas a variações ao longo do tempo. No entanto, para a modelagem determinística ser eficiente é necessário que tenhamos um conhecimento um tanto profundo das relações existentes entre as variáveis e suas variações. É o conhecimento do fenômeno que torna possível a escolha das funções que determinam as variações com relação ao estado (valor) da variável. Em muitas situações porém, esta relação entre variáveis e variações é somente conhecida parcialmente, o que torna a modelagem determinística menos aplicável. Por outro lado, a modelagem através de equações variacionais fuzzy embora comportando subjetividades, também não são aplicáveis à modelagem de fenômenos com relações parcialmente conhecidas. Isto vem do fato que estes modelos são provenientes de modelos determinísticos.

A subjetividade suportada pelas equações fuzzy se refere à imprecisões quanto aos estados iniciais das variáveis (fuzziness demográfica) e parâmetros (fuzziness ambiental). De modo geral, ambos os tipos de fuzziness estão presentes em equações de dinâmica populacional. Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados sobre estabilidade para sistemas iterativos baseados em regras fuzzy ou, sistemas p-fuzzy. Os sistemas p-fuzzy incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas relações com as variáveis, sendo portanto uma ferramenta muito útil para modelagem de fenômenos cujo comportamento é parcialmente conhecido.

### 3.2.2 Sistemas p-fuzzy

Denominamos de sistema p-fuzzy ao sistema iterativo

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ dado} \end{cases} \quad (3.14)$$

onde  $f(x_k)$  é quase linear, isto é,  $f(x) = \Delta(x)$ ,  $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$  e  $\Delta(x_k)$  é obtido por um sistema baseado em regras fuzzy. Os sistemas p-fuzzy são basicamente constituídos de variáveis linguísticas de entrada e saída e um controlador fuzzy (ver figura (3.4)).

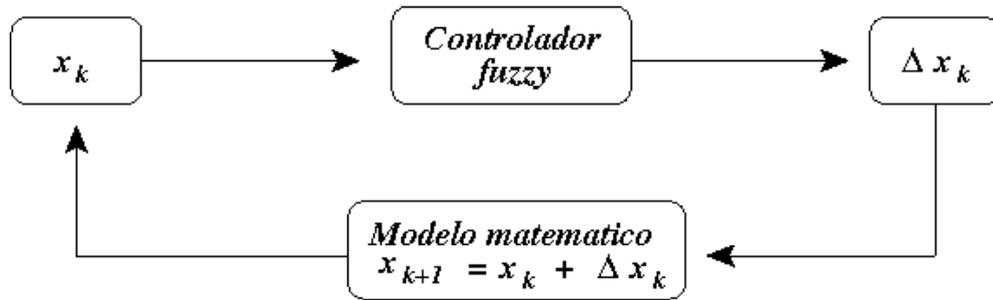


Figura 3.4: Estrutura de funcionamento de um sistema p-fuzzy

Variáveis linguísticas são variáveis de estado que, quantitativamente, são expressas por conjuntos fuzzy. Os conjuntos fuzzy representam os estados da variável que, em geral, são expressos por valores subjetivos como pequeno, muito, alto, etc. Por exemplo, supondo que a variável linguística seja população, seus estados subjetivamente podem ser baixa, média e alta. Os termos subjetivos que determinam os estados das variáveis são denominados termos linguísticos. Os termos linguísticos são importantes para a modelagem, pois definem os estados das variáveis. Quanto mais termos linguísticos, mais precisos estão os estados assumidos pelas variáveis. Um controlador fuzzy é constituído basicamente por um fuzzificador, uma base de regras, um método de inferência e um defuzzificador (veja figura (3.5)). No fuzzificador cada entrada do sistema é transformada em um conjunto fuzzy, ou seja, se  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é uma entrada do sistema, o fuzzificador associa a esta entrada uma função de pertinência  $\mu_{x_0}(a)$ . Em muitos casos, a função  $\mu_{x_0}(a)$  é a própria função característica de  $x_0$ .

A base de regras é um conjunto formado por regras fuzzy que relacionam os termos linguísticos das variáveis de entrada e saída. A base de regras é considerada como um elemento integrante do núcleo do controlador fuzzy. Cada regra da base satisfaz a seguinte estrutura:

$$\text{SE } a \text{ está em } A_i \text{ ENTÃO } b \text{ está em } B_i$$

onde  $A_i$  e  $B_i$  são conjuntos fuzzy que representam termos linguísticos das variáveis de entrada e saída, respectivamente. A expressão  $a$  está em  $A_i$  significa que  $\mu_{A_i}(a) \in [0, 1]$ . Tanto o conjunto fuzzy  $A_i$  quanto  $B_i$  podem ser produtos cartesianos de conjuntos fuzzy,

isto é,  $A_i = A_{i1} \times A_{i2} \times \dots \times A_{im}$  e  $B_i = A_{i1} \times B_{i2} \times \dots \times B_{in}$ . Neste caso, cada conjunto fuzzy  $A_{ij}$  e  $B_{ik}$  representa um termo linguístico para a  $j$ -ésima variável de entrada e  $k$ -ésima variável de saída e, a expressão  $a$  está em  $A_i$  significa que  $\mu_{A_i}(a) = \min\{\mu_{A_{i1}}, \mu_{A_{i2}}, \dots, \mu_{A_{im}} \in [0, 1]\}$ . É na definição da base de regras que as informações do fenômeno em estudo são utilizadas. Para cada estado definido pelos termos linguísticos da variável de entrada, é definido uma regra. Sendo assim, quanto mais termos linguísticos mais informações são incorporadas na modelagem.

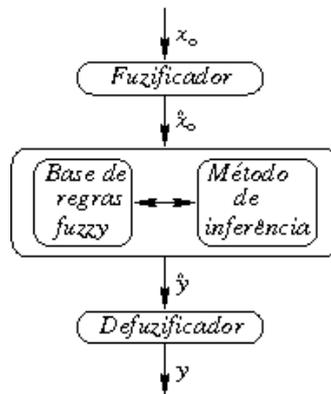


Figura 3.5: Estrutura do controlador fuzzy

O método de inferência é o mecanismo pelo qual as informações subjetivas definidas pela base de regras são avaliadas matematicamente. É neste estágio que para cada valor assumido pelas variáveis de entrada, o valor das variáveis de saída são determinadas de acordo com a base de regras. Assim como a base de regras, o método de inferência é considerado parte integrante do núcleo do controlador fuzzy. O método de inferência utilizado neste trabalho é conhecido como método de inferência de Mamdani ou método MAX-MIN. Neste método, cada regra é considerado como um relação fuzzy e não como implicação lógica. A relação entre as variáveis linguísticas é caracterizada pelo operador MIN, isto é, cada regra é considerada uma relaçãoo fuzzy  $R_i$  onde o grau de pertinência para cada par  $(a, b)$  é:

$$\mu_{R_i}(a, b) = \min\{\mu_{A_i}(a), \mu_{B_i}(b)\}$$

A relação entre cada regra é caracterizada pelo operador máximo, ou seja, a relação fuzzy  $R$  que representa o modelo determinado por uma base de regras, é obtida pela união (máximo) de cada regra individual, de modo que para cada par  $(a, b)$  temos:

$$\mu_R(a, b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \mu_{A_i}(a) \wedge \mu_{B_i}(b) \}$$

onde  $\wedge$  representa o operador MIN. Agora, para cada entrada desejamos encontrar uma ação correspondente, isto é, para um conjunto  $A$  de dados de entrada, queremos determinar um conjunto  $B$  de dados de saída. Pelo método de Mamdani, a função de pertinência de  $B$  é dada por:

$$\mu_B(b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \max_a \{ \mu_A(a) \wedge \mu_{A_i}(a) \} \wedge \mu_{B_i}(b) \}$$

Se a entrada for um conjunto clássico unitário, então  $\mu_A(a) = 1$  e  $\mu_{A_i}(a) \leq 1$ . Logo, a expressão acima resulta em:

$$\mu_B(b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \mu_{A_i}(a) \wedge \mu_{B_i}(b) \}$$

e, portanto, temos o conjunto fuzzy  $B$  que representa a ação para cada entrada  $A$  (figura

O papel do defuzzificador é converter cada conclusão obtida pelo método de inferência em um número real que melhor representa a ação a ser tomada. No caso dos sistemas p-fuzzy, o número real obtido pela defuzzificação é acrescentado ao valor assumido pela variável de entrada no instante  $k$ , alimentando o sistema iterativo. Um dos principais métodos de defuzzificação é o centro de massa, que para variáveis contínuas é dado pela expressão

$$m(B) = \frac{\int_{\Omega} b \mu_B(b) db}{\int_{\Omega} \mu_B(b) db}$$

Notemos que o controlador fuzzy pode ser visto como uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , já que dado um valor de entrada, existe um único valor de saída correspondente.

### 3.2.3 Sistema p-fuzzy unidimensional

Nesta seção, faremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados importantes sobre a existência e unicidade de estados de equilíbrio para sistemas p-fuzzy. Consideremos o sistema p-fuzzy unidimensional

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.15)$$

onde  $\Delta x$  é a saída defuzzificada de um controlador fuzzy tipo Mamdani. O sistema acima está em estado de equilíbrio quando

$$x^* = x_k = x_{k+1} \iff \Delta(x_k) = 0$$

**Definição 3.2.1.** *Seja  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$  uma família de subconjuntos fuzzy com  $\text{supp}A_i = (a_i^1, a_{i+1}^2)$ .*

*Dizemos que os conjuntos  $A_i$  são sucessivos se satisfazem:*

1.  $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}A_{i+1} \neq \emptyset$ ;
2.  $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}A_j \neq \emptyset$  se  $|i - j| \geq 2$ ;
3. sejam  $\hat{x}$  e  $\tilde{x}$  tais que  $\mu_{A_i}(\hat{x}) = \mu_{A_{i+1}}(\tilde{x}) = 1$ , então  $\hat{x} < \tilde{x}$ .

**Definição 3.2.2.** *Consideremos um sistema p-fuzzy e uma família de subconjuntos sucessivos  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ . Se para  $x_1, x_2 \in \text{supp}(A_i, A_{i+1})$  as variações  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$  possuem sinais contrários, então o subconjunto fuzzy  $A^* = A_i \cap A_{i+1}$  é denominado conjunto viável de equilíbrio e  $\text{supp}(A^*)$  é uma região viável de equilíbrio.*

Como veremos nos resultados seguintes, o sistema p-fuzzy admite um estado de equilíbrio digamos  $x^*$ , sempre que há uma região de equilíbrio  $\text{supp}(A^*)$ . Neste caso, as regras associadas aos conjuntos  $A_i$  e  $A_{i+1}$  da definição acima satisfazem:

1. se  $a$  está  $A_i$  então  $b$  está em  $B_i$ ;
2. se  $a$  está  $A_{i+1}$  então  $b$  está  $B_{i+1}$ ;

com  $\text{supp}A_i \subset \mathbb{R}_+(\mathbb{R}_-)$  e  $\text{supp}A_{i+1} \subset \mathbb{R}_-(\mathbb{R}_+)$

**Teorema 3.2.1.** *Se um sistema p-fuzzy  $S$  admite uma região viável de equilíbrio  $\text{supp}(A^*)$ , então  $S$  possui ao menos um estado de equilíbrio em  $\text{supp}(A^*)$ , ou seja, existe  $x^* \in \text{supp}(A^*)$  tal que  $\Delta(x^*) = 0$ .*

Para demonstração Consulte [2]

A unicidade do estado de equilíbrio exige algumas restrições dos conjuntos sucessivos que determinam os termos linguísticos do sistema p-fuzzy  $S$ .

**Teorema 3.2.2.** *Sejam  $\mu_{A_i}$  e  $\mu_{A_{i+1}}$  monótonas em  $\text{supp}(A^*) = (a_{i+1}^1, a_i^2)$ ,  $a_i$  e  $a_{i+1}$  tais que  $\mu_{A_i}(a_i) = \mu_{A_{i+1}}(a_{i+1}) = 1$ . Se  $a_i < a_{i+1}^1$  e  $a_{i+1} < a_i^2$  então o estado de equilíbrio é único em  $\text{supp}(A^*)$ .*

Para demonstração Consulte [2]

A análise de estabilidade do estado de equilíbrio de um sistema p-fuzzy unidimensional é feita de modo análogo ao caso determinístico, isto é, avaliando a derivada de  $f(x) = x + \Delta(x)$  em  $x^*$ . Portanto, o sistema p-fuzzy será estável quando  $0 < \Delta'(x^*) < 2$  e instável caso contrário.

# Capítulo 4

## Conclusão

### 4.0.4 Confronto entre a abordagem determinística e abordagem Fuzzy

Atualmente a idéia de alguns pesquisadores é contrapor modelos determinísticos a modelos mais flexíveis, que contemplam uma certa dose de incerteza tratada com a lógica Fuzzy, assim um dos desafios desses pesquisadores é formular matematicamente a subjetividade própria de fenômenos naturais, ou de como são vistos, para tentar previsões coerentes. A maior crítica ao uso, cada vez mais abrangente, da lógica Fuzzy recai sobre o fato de que as soluções obtidas por meio desse processo são, quase sempre, menos rigorosas quando comparadas às soluções "exatas" da teoria clássica. Nas próximas seções relacionaremos as abordagens determinística e Fuzzy de crescimento logístico generalizado das populações de Teresina e do Piauí concluindo que a incerteza da condição inicial não modificará as características do crescimento da função logística generalizada e portanto terá valores populacionais bem próximos da realidade.

### 4.0.5 Crescimento Logístico generalizado aplicado a população de Teresina

Vamos aplicar o modelo logístico generalizado com  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  para a população da cidade de Teresina. Vimos que se  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  então temos o modelo logístico clássico. Assim considerando os dados do IBGE em anexo para a população de Teresina,

consideremos a seguinte função:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left( 1 - \frac{N}{k} \right)$$

que tem como solução:

$$N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0)e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

que podemos escrever da seguinte maneira:

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{\alpha(t-t_0)}}{N_0 e^{\alpha(t-t_0)} + K - N_0}$$

pondo  $N_0 = 142691$ ,  $K = 3000000$  e  $t_0 = 1960$  temos a seguinte função:

$$N(t) = \frac{3000000 e^{0,040189(t-1960)}}{e^{0,040189(t-1960)} + 20,024451}$$

Veja que a função de crescimento relativo é linear, decrescente com relação a  $N(t)$  e tendendo a zero quando  $N(t) \rightarrow k$ . Isto é, a variação da população é menor quando o número de indivíduos se aproxima da capacidade suporte. Como o termo exponencial no denominador tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ , independentemente da condição inicial  $N(t) \rightarrow k$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja, o estado de estabilidade  $N^* = k$  é assintoticamente estável. Assim o gráfico dessa função é determinado pela figura (4.1)

#### 4.0.6 Crescimento Logístico generalizado aplicado a população do Piauí

Da mesma forma como foi feita pra a população de Teresina vamos aplicar o modelo logístico generalizado para  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , obtendo a seguinte função que modela bem esse crescimento:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left( 1 - \frac{N}{k} \right)$$

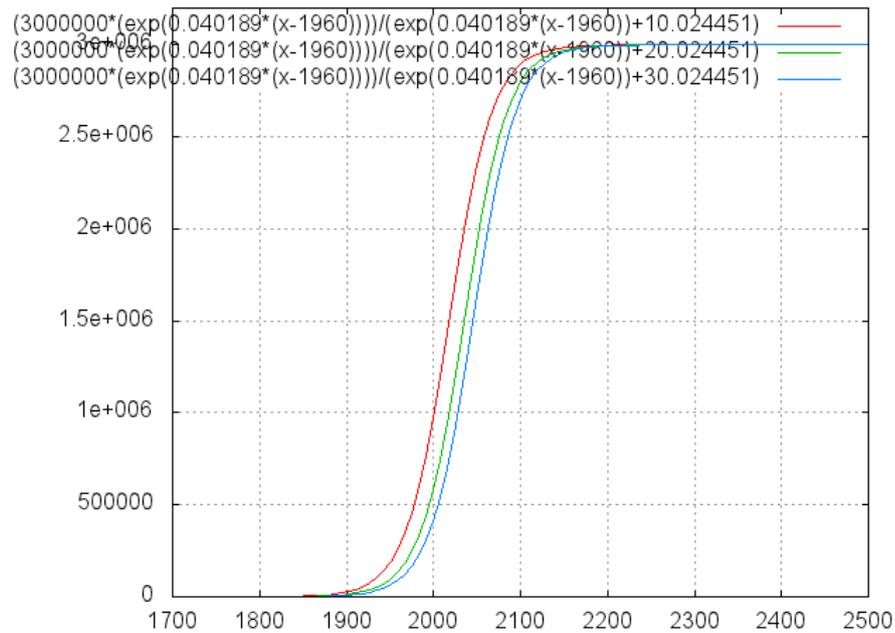


Figura 4.1: Função Logística Generalizada da população de Teresina

que tem como solução:

$$N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0)e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

que podemos escrever da seguinte maneira:

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{\alpha(t-t_0)}}{N_0 e^{\alpha(t-t_0)} + K - N_0}$$

pondo  $N_0 = 1263368$ ,  $K = 8000000$  e  $t_0 = 1960$  temos a seguinte função:

$$N(t) = \frac{8000000e^{0,024512(t-1960)}}{e^{0,024512(t-1960)} + 5,332280}$$

Assim o gráfico dessa função é determinado pela figura (4.2)

A teoria dos conjuntos Fuzzy é um argumento a mais para a continuidade e evolução da matemática, esta que tem um papel fundamental no desenvolvimento da humanidade. As soluções previstas pela matemática clássica, num certo sentido, fazem parte das soluções obtidas a partir da Lógica Fuzzy.

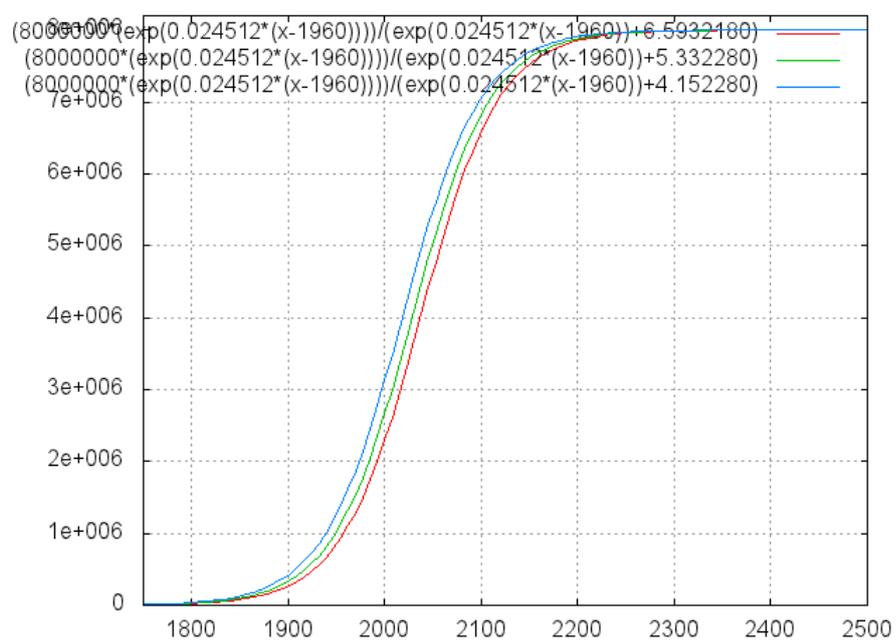


Figura 4.2: Função logística generalizada da população do Piauí

# Referências Bibliográficas

- [1] Tsoularis, A. Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models, *Mathematical Biosciences*, v. 179, p. 21-55.
- [2] L. C. Barros. *Sobre sistemas dinâmicos fuzzy - teoria e aplicações*. PhD thesis ,IMECC - UNICAMP, 1997.
- [3] V. M. P. Dos Santos. *Sistema presa-predador generalizado*. Master's thesis, IMECC - UNICAMP, Campinas - SP, abril 1989.
- [4] O. Kaleva. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):301-317, 1987.
- [5] C. Robinson. *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics and chaos*. 2 edition, 1998.
- [6] J. D. Mendes da Silva. *Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações em biomatemática*. PhD thesis, IME- UNICAMP, Campinas, 2005.
- [7] M. T. Mizukoshi. *Estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy*. PhD thesis, IMECC- UNICAMP, 2004.
- [8] S. Seikkala. *On the fuzzy initial value problem*. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):319-330, 1987.