UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ

CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Controle Nulo para uma EDP Parabólica Linear

Pedro Paulo Alves Oliveira

Teresina - 2020

Pedro Paulo Alves Oliveira

Dissertação de Mestrado:

Controle Nulo para uma EDP Parabólica Linear

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus.

Teresina - 2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

O48c Oliveira, Pedro Paulo Alves.
Controle nulo para uma EDP parabólica linear / Pedro Paulo Alves Oliveira. – Teresina, 2020.
70 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2020.
Orientador: Prof. Dr. Isaias Pereira de Jesus

1. Análise. 2. Equações Diferenciais Parciais. 3. Controlabilidade Nula. I. Título.

CDD 515.353

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Controle Nulo para uma EDP Parabólica Linear

Pedro Paulo Alves Oliveira

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 10 de Janeiro de 2020.

Banca Examinadora:

Isaías Pereira de Jesus

Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus (UFPI) - Presidente

Prof. Dr. Juan Bautista Límaco Ferrel (UFF)

Prof. Dr. Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto (UFPE)

À minha família, em especial ao meu pai José de Arimatéa e à minha mãe Valdirene Mesquita.

Agradecimentos

Aos meus pais, José de Arimatéa e Valdirene Mesquita, responsáveis por onde passei, onde estou e onde vou chegar.

À minha namorada Júlia Peixoto, que nesses seis anos sempre me apoiou nos momentos difíceis e comemorou comigo os bons momentos, me fazendo sorrir em meio a devaneios matemáticos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus, por me orientar desde o quarto período da graduação, sempre otimista e motivador.

Ao professor Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto por contribuir com suas valiosas ideias, sempre solícito quando precisei.

Ao professor Juan Bautista Límaco Ferrel por aceitar participar da banca.

Aos docentes da graduação e pós-graduação que tive na UFPI, em especial, aos professores Marcondes Rodrigues Clark, Roger Peres de Moura, Gleison do Nascimento Santos e Barnabé Pessoa Lima, que são um espelho para mim como pessoa e como profissional.

Aos meus amigos que tive desde o início da graduação, Francimar Vieira, Dieme Pereira, Raimundo Bruno, Pedro Rodrigues, pela parceria de estudo, pela troca de ideias, vivências e risadas.

Aos diversos amigos que fiz nessa jornada acadêmica.

À Capes pelo apoio financeiro.

À todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indiretamente, meus agradecimentos.

Resumo

O objetivo desse trabalho é estudarmos a controlabilidade nula para uma equação linear da calor em um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Para isso, faremos uso de uma estimativa de Carleman, que nos possibilitará a encontrarmos uma desigualdade de observabilidade, e consequentemente obter o controle nulo para o problema proposto.

Palavras-chave: Equação Linear do Calor, Estimativa de Carleman, Desigualdade de Observabilidade, Controlabilidade Nula.

Abstract

The objective of this work is to study the null controllability for a linear heat equation in a limited domain of $\mathbb{R}^n$. For this, we will use a Carleman Estimative, which will enable us to find an observability inequality, and consequently to obtain the null control for the proposed problem.

Keywords: Linear Heat Equation, Carleman Estimative, Observability Inequality, Null Controlability.

Conteúdo

Notações e Simbologias

As simbologias abaixo são utilizadas no decorrer do texto.

- Ω denota um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$;
- Γ denota a fronteira de Ω suficientemente regular;
- ν denota o vetor normal exterior a Γ;
- $Q = \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$, onde $T > 0$, denota o cilindro do $\mathbb{R}^{N+1}$;
- $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ denota a fronteira lateral do cilindro Q;
- $(\cdot, \cdot)_{L^2(X)}$ denota o produto interno em $L^2(X)$;
- $|\cdot|_{L^2(X)}$ denota a norma em $L^2(X)$;
- $(\cdot, \cdot)_{H_0^1(X)}$ denota o produto interno em $H_0^1(X)$;
- $\|\cdot\|_{H_0^1(X)}$ denota a norma em $H_0^1(X)$;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o operador Laplaciano da função u;
- q.s. - quase sempre;
- $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota a imersão compacta;
- C quando não especificada, é uma constante positiva e arbitrária;
- y_t denota a derivada de y em relação a t;
- $\rightarrow$ denota convergência forte;
- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca;

- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ denota convergência fraca estrela;
- X^* denota o dual topológico de X;
- X^{**} denota o bidual topológico de X;
- χ_ω denota a função característica de ω, onde ω é um subconjunto aberto não vazio do $\mathbb{R}^N$;
- $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y.

Introdução

Neste trabalho investigamos a controlabilidade nula para uma equação linear do calor em um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$.

Ao longo da história, o homem desenvolveu de maneira significativa sua capacidade de manipular a natureza a fim de melhorar seu estilo de vida. Exemplos simples dessas modificações estão na criação de animais e agricultura, onde o homem percebeu que poderia interferir na natureza para que esta trabalhasse em seu favor. Nasce então a ideia de controle, como uma ação ou ações do homem sobre um meio de modo a obter um objetivo predeterminado. Essa ideia desenvolveu-se ao longo dos anos e passou a fazer parte do cotidiano da humanidade.

Em termos matemáticos, um sistema de controle é uma equação de evolução (EDO OU EDP) que depende de um parâmetro u, descrito pela expressão:

$$y_t = f(t, y, u), \tag{1}$$

onde $t \in [0, T]$ representa a variável temporal, $y : [0, T] \to X$ é a função estado e $u : [0, T] \to Y$ é um controle. Nesse modelo, X e Y são espaços de funções adequados, $T > 0$ é um valor real fixado e y_t representa a derivada de y em relação ao tempo t.

Em seguida, destacamos algumas das principais definições de controlabilidade presentes na literatura.

Definição 0.1 ***(Controlabilidade exata)*** *Sejam $T > 0$ e $y_0, y_1 \in X$ dois estados do sistema (1). Dizemos que tal sistema é exatamente controlável se existe $u : [0, T] \to Y$ tal que*

$$\left| \begin{array}{l} y_t = f(y, u) \text{ em } [0, T], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_1. \end{array} \right.$$

Definição 0.2 ***(Controlabilidade aproximada)*** *Sejam $T > 0$ um número real e y_0, y_1 dois possíveis estados do sistema (1). Dizemos que tal sistema é aproximadamente controlável se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $u_\epsilon : [0,T] \to Y$ tal que;*

$$\left| \begin{array}{l} y_t = f(y, u_\epsilon) \ \text{em} \ [0,T], \\ y(0) = y_0, \quad |y(T) - y_1| \leq \epsilon. \end{array} \right.$$

Definição 0.3 ***(Controlabilidade nula)*** *Sejam $T > 0$ um número real dado e $y_0 \in X$ um estado arbitrário do sistema (1). Dizemos que tal sistema é nulamente controlável se existe $u : [0,T] \to Y$ tal que;*

$$\left| \begin{array}{l} y_t = f(y, u) \ \text{em} \ [0,T], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = 0. \end{array} \right.$$

Definição 0.4 ***(Controlabilidade exata às trajetórias)*** *Sejam $T > 0$ um número real dado, $y_0 \in X$ um estado e $\overline{y}$ uma trajetória (isto é, uma solução arbitrária do sistema (1) sem controle). Dizemos que tal sistema é exatamente controlável às trajetórias se existe $u : [0,T] \to Y$ tal que*

$$\left| \begin{array}{l} y_t = f(y, u) \ \text{em} \ [0,T], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = \overline{y}(T). \end{array} \right.$$

É bem sabido que, em problemas lineares, as definições de controle nulo e exato às trajetórias são equivalentes.

Nesse trabalho analisaremos resultados de controlabilidade nula para a equação linear do calor

$$\left| \begin{array}{l} y_t - \Delta y = v\chi_{\mathcal{O}} \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times (0,T), \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{0.1}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e $T > 0$. Em (0.1), $y = y(x,t)$ é o estado a ser controlado, $v = v(x,t)$ é o controle e $\mathcal{O}$ é um subconjunto aberto não vazio de Ω.

Os primeiros resultados sobre controlabilidade nula para o sistema (0.1) surgiram no trabalho [1]. Posteriormente, Lebeau e Robbiano [2] mostraram, via estimativa de Carleman, a controlabilidade nula sem nenhuma restrição ao aberto ω onde o controle atua, e com coeficientes dependendo apenas da variável espacial. Resultados semelhantes, em um contexto geral, incluindo a dependência do tempo para os coeficientes, foram provados por Fursikov e Imanuvilov [3] usando estimativas de Carleman global para a equação do calor. No trabalho de Fernández-Cara e Guerrero [4], os autores utilizam uma estimativa de Carleman para obter uma desigualdade de observabilidade e consequentemente a controlabilidade nula para uma equação linear do calor. Recentemente, alguns avanços foram obtidos nessa direção, dentre os quais podemos citar os trabalhos de Araruna et. al [5] e Araruna et. al [6], onde os autores analizam a controlabilidade nula para um sistema parabólico utilizando uma estratégia de Stackelberg-Nash.

Em resumo, o trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos alguns resultados clássicos ao desenvolvimento do nosso trabalho.

No capítulo 2 investigamos a controlabilidade nula, onde é demonstrada que a mesma é obtida mediante uma desigualdade de observabilidade que por sua vez é obtida utilizando uma Desigualdade de Carleman.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados necessários para que o leitor possa ter uma melhor compreensão dos conteúdos abordados no capítulo posterior.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 1.1 ***(Convergência Fraca)*** *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, para todo $\varphi \in E^*$.*

Definição 1.2 ***(Convergência Fraca Estrela)*** *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E^*$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E^*. Dizemos que $\varphi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, para todo $u \in E^*$.*

Proposição 1.1 *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então:*

(i) *Se $x_n \rightharpoonup x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$, então $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E^*$;*

(ii) *Se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$;*

(iii) *Se $x_n \rightharpoonup x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$ e se $f_n \to f$ em E^* (isto é, $\|f_n - f\|_{E^*} \to 0$), então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

Demonstração: Jesus et. al ([7], p. 98). $\square$

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos

Definição 1.3 *Dizemos que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso.*

Definição 1.4 *Sejam E um espaço de Banach e J a injeção canônica de E em E^{**}. Dizemos que E é reflexivo quando $J(E) = E^{**}$.*

Quando o espaço E é reflexivo identificamos implicitamente E e E^{**} (com ajuda do isomorfismo J).

Teorema 1.1 *(**Banach-Alaoglu-Bourbaki**). Seja E um espaço de Banach. Então o conjunto*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*; \|f\| \leq 1\} \quad \textit{é compacto na topologia fraca estrela.}$$

Demonstração: Jesus et. al ([7], p. 110). □

Teorema 1.2 *Seja E um espaço de Banach separável. Então o conjunto*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*; \|f\| \leq 1\} \quad \textit{é metrizável na topologia fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se B_{E^*} é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.

Demonstração: Brezis([8], p. 74) □

Corolário 1.1 *Sejam E um espaço Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E^*. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Brezis([8], p. 76). □

Teorema 1.3 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E$ tal que*

$$f_{k_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração: Evans([9], p. 639). □

1.1.3 Convexidade e Otimização

Teorema 1.4 *Sejam E um espaço de Banach reflexivo, $A \subset E$ um subconjunto convexo, fechado, não vazio e $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$, uma função tal que:*

(i) *φ é convexa;*

(i) *φ é semicontínua inferiormente, isto é, $\forall a \in \mathbb{R} \quad \varphi^{-1}(a, +\infty)$ é aberto em E;*

(i) *φ é coerciva, ou seja, $\lim\limits_{\substack{x \in A \\ \|x\| \to +\infty}} \varphi(x) = +\infty$.*

Então φ atinge seu mínimo em A, ou seja, existe $x_0 \in A$ tal que $\varphi(x_0) = \min\limits_{x \in A} \varphi(x)$.

Demonstração: Brezis ([8], p. 71). □

Observação 1.1 *Sendo φ estritamente convexa, então o mínimo x_0 obtido no Teorema 1.4 é único.*

1.2 Teoria das Distribuições Escalares

Definição 1.5 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Denomina-se* suporte *de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x tais que $\varphi(x) \neq 0$. Simbolicamente,*

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\,\Omega}.$$

Definição 1.6 *Denota-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω com suporte compacto em Ω.*

Dado Ω como acima, consideremos o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset K \quad \text{e} \quad \operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^{\alpha}\varphi_{\nu} \longrightarrow D^{\alpha}\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^{\infty}(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que T satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ii) T é continua, isto é, se uma sequência $(\varphi_{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{D}(\Omega)$ para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então,

$$T(\varphi_{\nu}) \longrightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$. Equipa-se o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergencia:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, dizemos que a sequência $(T_{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para T, quando a sucessão $(\langle T_{\nu}, \varphi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω. Com o intuito de tratarmos de espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribuicional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definimos a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^{\alpha}T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Notemos que a aplicação

$$D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.1}$$

é linear e continua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{v \to \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \to \infty} D^{\alpha}T_v = D^{\alpha}T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.2}$$

1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, serão dadas algumas definições e propriedades elementares dos espaços $L^p(\Omega)$.

Definição 1.7 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\, f \textit{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big[\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big]^{1/p}.$$

Definição 1.8 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\, f \textit{ mensurável e } \exists\, C \textit{constante tal que } \ |f(x)| \leq C \textit{ q.s em } \Omega\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C > 0 : \ |f(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

Teorema 1.5 ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $p > 1$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Demonstração: Brezis ([8], p. 92). $\square$

Teorema 1.6 ***(Desigualdade de Young com ε)*** *Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $\varepsilon > 0$. Então,*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q, \quad \forall a, b \geq 0,$$

onde $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}} q^{-1}$. No caso particular quando $p = q = 2$, a desigualdade reduz-se a

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Demonstração: Evans ([9], p. 622). $\square$

Teorema 1.7 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p; isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Brezis ([8], p. 92). □

Definição 1.9 *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando f é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integravéis é denotado por $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Em símbolos temos que*

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |f|dx < \infty, \quad \textit{para todo compacto} \quad K \subset \Omega.$$

Lema 1.3.1 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Medeiros e Milla Miranda ([12], p. 11). □

As distribuções que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Exemplo 1.1 *Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

Nestas condições T_u é uma distribução escalar sobre Ω.

De fato, não é dificil mostrarmos a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta provarmos que T_u é contínua.

Seja uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ. Então, temos

$$\begin{aligned}
|\langle T_u, \varphi_\nu\rangle - \langle T_u, \varphi\rangle| &= |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi\rangle| \\
&= \left|\int_\Omega u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)|dx \\
&\leq \sup|\varphi_\nu - \varphi| \int_\Omega |u(x)|dx \to 0,
\end{aligned}$$

pois $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

A distribução T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u" e, usando o Lema de Du Bois Raymond, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$

Observação 1.2 *Outro resultado interessante é que a derivada de uma função $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, não é em geral uma função de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções conhecidas sob a denominação de *Espaços de Sobolev.*

1.4 Espaços de Sobolev

Como vimos na seção anterior, toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas distribucionais de todas as ordens. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são também funções em $L^p(\Omega)$.

1.4.1 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Chamaremos multi-índice a toda n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de números naturais. Dado um multi-índice α, definimos a ordem $|\alpha|$ de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, e representamos por D^α o operador derivação

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.10 *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O espaço de Sobolev que denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais de ordem α pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente escrevemos:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \Big)^{1/p}.$$

Também $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_\Omega \operatorname{ess} |D^\alpha u(x)|.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H^m(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert, cujo produto interno e a correspondente norma induzida em $H^m(\Omega)$ são dadas, respectivamente, por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Apresentaremos algumas desigualdades de Sobolev que nos ajudarão a alcançar o objetivo proposto.

Corolário 1.2 *Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 com fronteira limitada Γ e $1 \leq p \leq \infty$. Então:*

$$\begin{aligned}
&\textit{Se} \quad p < n, \quad \textit{então} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \ \textit{onde} \ \ \tfrac{1}{p^*} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n}, \\
&\textit{Se} \quad p = n, \quad \textit{então} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \ \textit{para todo} \ \ q \in [p, +\infty), \\
&\textit{Se} \quad p > n, \quad \textit{então} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega),
\end{aligned}$$

sendo todas estas injeções contínuas. Além disso, se $p > n$ tem-se para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}} |x - y|^\alpha \ \textit{q.s.} \ x, y \in \Omega,$$

onde $\alpha = 1 - (N/p)$ e C dependa apenas do Ω, p e n. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Brezis ([8], p. 285). □

Teorema 1.8 (Rellich–Kondrachov) *Seja Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 com fronteira Γ regular. Então:*

$$\begin{aligned}
&\textit{Se} \quad p < n, \quad \textit{então} \quad W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{q}(\Omega), \ \textit{para todo} \ q \in [1, p^*) \quad \textit{com} \ \ \tfrac{1}{p^*} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n}, \\
&\textit{Se} \quad p = n, \quad \textit{então} \quad W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{q}(\Omega), \ \textit{para todo} \ \ q \in [1, +\infty), \\
&\textit{Se} \quad p > n, \quad \textit{então} \quad W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega}).
\end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p (e para todo n).

Demonstração: Brezis ([8], p. 285). □

Teorema 1.9 *(**Gauss-Green**) Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então* $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u\nu^i d\Gamma$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Demonstração: Evans ([9], p. 627). □

Teorema 1.10 *(**Fórmulas de Green**) Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2.*

(i) *Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \nabla\gamma\ \nabla u\ dx = -\int_\Omega u\ \Delta\gamma\ dx + \int_\Gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\nu}\ u\ ds, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(ii) *Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega (u\ \Delta\ \gamma - \gamma\ \Delta u\ )\ dx = \int_\Gamma \left(u\ \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma\ \frac{\partial u}{\partial\nu} \right) ds.$$

Demonstração: Brezis ([8], p. 296). □

1.4.2 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$

Observemos que, embora o espaço vetorial das funções testes $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, em geral, ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto acontece porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior" que a norma de $L^p(\Omega)$ e é por isso que $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos sequências convergentes. Isto motiva a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como segue:

Definição 1.11 *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Definimos*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 1.11 *(**Desigualdade de Poincaré**) Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Brezis ([8], p. 290). □

Observação 1.3 *Em particular, a expressão* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *é uma norma no espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *equivalente a norma* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. *Em* $H_0^1(\Omega)$ *denotamos o produto interno*

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, *equivalente à norma* $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração: Brezis ([8], p. 290). $\square$

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular, os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham um papel fundamental na Teoria dos Espaços de Sobolev e por conseguinte na Teoria das EDP's. Se $1 \leq p < \infty$ e o número q é o expoente conjugado de p, isto é $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, então representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológido de $H_0^m(\Omega)$. Em outras palavras, se f pertence a $H^{-m}(\Omega)$ então f é um funcional linear limitado sobre $H_0^m(\Omega)$.

Observação 1.4 *Em particular, as imersões do Corolário 1.2 são válidas para o espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *com um subconjunto arbitrário aberto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$. *Analogamente, as imersões do Teorema 1.8 são válidas para* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *com um subconjunto arbitrário* Ω *aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.12 *Se* $f \in H^{-1}(\Omega)$ *a norma é definida como sendo*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle f,u\rangle; \textit{para todo } u \in H_0^1(\Omega) \textit{ com } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

1.5 Os Espaços $L^p(0,T;X)$

Nesta seção, estenderemos as noções de mensurabilidade e integrabilidade para funções

$$f:[0,T] \longrightarrow X,$$

onde $T>0$ e X é um espaço de Banach real com a norma $\|.\|$.

Definição 1.13 *Denota-se por* $L^p(0,T;X)$, *com* $1 \leq p \leq \infty$ *o espaço vetorial das (classes de) funções* $u:(0,T) \longrightarrow X$ *fortemente mensuráveis com valores em* X *e tais que se* $1 \leq p < \infty$ *a função* $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ *é integrável à* Lesbegue *em* $(0,T)$ *e se* $p=\infty$ *a função* $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$.

O espaço $L^p(0,T;X)$ é um espaço completo com a norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}, \text{ se } 1 \le p < \infty.$$

Se $p = \infty$ a norma acima é substituída por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0<t<T} \text{ess} \, \|u(t)\|_X = inf\{C > 0 : ||u(t)||_X \le C \;\; q.s \;\; \text{em} \;\; \Omega\}.$$

Apenas no caso em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle v, u \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_X \, dt.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0,T;X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, temos

$$\left[L^p(0,T;X)\right]' \approx L^{p'}(0,T,X').$$

A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral por

$$\langle v, u \rangle_{L^{p'}(0,T;X') \times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{X' \times X} \, dt.$$

No caso $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$, ou seja,

$$\left[L^1(0,T;X)\right]' \approx L^\infty(0,T,X').$$

Definição 1.14 *Denota-se por $C([0,T];X)$, com $T > 0$ o espaço de* Banach *das funções contínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Teorema 1.12 *Sejam X, B e Y espaços de Banach com $X \subset B \subset Y$. Suponhamos que X está compactamente imerso em B e B está continuamente imerso em Y. Temos que,*

(i) Se F é limitado em $L^p(0,T;X)$, onde $1 \le p < \infty$ e $\partial F/\partial t = \{\partial f/\partial t : \; f \in F\}$ é limitado em $L^1(0,T;Y)$, então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$.

(ii) Se F é limitado em $L^{\infty}(0,T;X)$ e $\partial F/\partial t$ é limitado em $L^{r}(0,T;Y)$ onde $r>1$, então F é relativamente compacto em $C([0,T];B)$.

Demonstração: Simon ([10], p. 85).

Teorema 1.13 (Teorema da Compacidade de Aubin-Lions) *Sejam X, B e Y espaços de Banach com $X\subset B\subset Y$, X e Y reflexivos. Suponhamos que X está compactamente imerso em B e B está continuamente imerso em Y. Então*

$$W=\{v:\ v\in L^{p_0}(0,T;X), v'=dv/dt\in L^{p_1}(0,T;Y)\},$$

onde $1<p_i<\infty$, $i=0,1$, munido da norma

$$\|v\|_W=\|v\|_{L^{p_0}(0,T;X)}+\|v'\|_{L^{p_1}(0,T;Y)},$$

é um espaço de Banach compactamente imerso em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Demonstração: Lions ([11], p. 58).

1.6 Distribuições Vetoriais

Seja um número real $T>0$ e X um espaço de Banach real com a norma $\|.\|$

Definição 1.15 *Uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X, é uma função $f:\mathcal{D}(0,T)\to X$ linear e contínua. O conjunto dessas transformações lineares é chamado Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X e é denotado por*

$$\mathcal{D}'(0,T;X)=\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X).$$

Definição 1.16 *Seja $f\in\mathcal{D}'(0,T;X)$. A* derivada *de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n},\varphi\right\rangle=(-1)^n\left\langle f,\frac{d^n\varphi}{dt^n}\right\rangle,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Observação 1.5 *Se a função f pertence ao espaço $L^p(0,T;X)$ com $1\le p\le\infty$, então define uma distribuição que denotamos pela mesma função f e é dada por*

$$f(\varphi)=\int_0^T f(t)\varphi(t)dt,\ \text{para todo}\ \varphi\in\mathcal{D}(0,T),$$

com valores integrales em X.

Demonstração: Lions ([11], p. 7). □

1.7 Um Resultado Importante

Nesta seção, nosso objetivo é dar ênfase a um resultado importante que será utilizado para alcançarmos nosso resultado principal, o qual enunciaremos como segue.

1.7.1 Um Lema Fundamental

Lema 1.7.1 *Seja $\omega \subset\subset \Omega$ um subconjunto aberto e não vazio. Então existe $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\left|\begin{array}{lll} \eta^0 > 0 & em & \Omega, \\ \eta^0 = 0 & sobre & \partial\Omega, \\ |\nabla \eta^0| > 0 & em & \overline{\Omega \backslash \omega}. \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Demonstração: Fursikov e Imanuvilov ([3], p. 4). □

Capítulo 2

Equação Linear do Calor em um Domínio Limitado

2.1 Formulação do Problema

Seja $\mathcal{O}$ um subconjunto aberto e não vazio de Ω. Dado $T > 0$, consideremos a equação linear do calor

$$\left| \begin{array}{lll} y_t - \Delta y = v\chi_{\mathcal{O}} & \text{em} & Q, \\ y = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em} & \Omega, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

onde $y_0 \in L^2(\Omega)$ e $v \in L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big)$.

Observação 2.1 *Seja $h = v\chi_{\mathcal{O}}$. Se $h \in L^2(\Omega \times (0,T))$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$ então o sistema (2.1) admite única solução $y \in L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big) \cap C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$ (cf.[4]).*

O problema de controlabilidade nula para o sistema (2.1) pode ser formulado como segue: dados $T > 0$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$, encontrar uma função $v \in L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big)$ tal que a solução $y(x,t)$ do problema (2.1) satisfaz a condição $y(T) = 0$.

Mais precisamente, vale a seguinte definição:

Definição 2.1 *O sistema (2.1) é dito de controlabilidade nula no tempo $T > 0$, se para cada $y_0 \in L^2(\Omega)$, existe um controle $v \in L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big)$ tal que a solução $y(x,t)$ do problema (2.1) satisfaz a condição $y(T) = 0$ quase sempre em Ω.*

Assumimos que $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$ é um conjunto aberto e não vazio. Tentaremos encontrar um controle $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ tal que o estado associado $y = y(x,t)$ satisfaz $y(T) = 0$.

Para o nosso propósito, precisamos obter o sistema adjunto de (2.1). Para tal, multiplicamos $(2.1)_1$ por φ e integramos em $\Omega \times (0,T)$, obtendo

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega y(T)\varphi(T)\,dx - \int_\Omega y(0)\varphi(0)dx - \int_0^T\int_\Omega y\varphi_t\,dxdt - \int_0^T\int_\Omega \Delta y\varphi\,dxdt \\
&= \int_0^T\int_\Omega \varphi v\chi_{\mathcal{O}}\,dxdt.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Pela primeira fórmula de Green, temos

$$-\int_\Omega \Delta y\,\varphi\,dx = \int_\Omega \nabla y\nabla\varphi\,dx - \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial\nu}\,\varphi\,d\sigma. \tag{2.3}$$

Usando novamente a primeira fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega \nabla y\nabla\varphi\,dx = -\int_\Omega y\,\Delta\varphi\,dx + \int_\Gamma y\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\sigma. \tag{2.4}$$

Substituindo (2.4) em (2.3) e em seguida integrando de 0 a T, segue que

$$\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\Omega \Delta y\varphi\,dxdt = -\int_0^T\int_\Omega y\Delta\varphi\,dxdt + \int\int_\Sigma y\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\sigma dt \\
-\int\int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial\nu}\varphi\,d\sigma dt.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) em (2.2) e usando $(2.1)_2$ e $(2.1)_3$, resulta que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega y(T)\varphi(T)\;dx - \int_\Omega y_0(x)\varphi(0)\;dx - \int_0^T\int_\Omega y\varphi_t\;dxdt - \int_0^T\int_\Omega y\Delta\varphi\,dxdt - \int\int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial\nu}\varphi\,d\sigma dt \\
&= \int_0^T\int_\Omega \varphi\;v\chi_{\mathcal{O}}dxdt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\big(y(T),\varphi(T)\big)_{L^2(\Omega)} - \big(y_0(x),\varphi(0)\big)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T\int_\Omega [-\varphi_t - \Delta\varphi]\,y\;dxdt - \int\int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial\nu}\,\varphi\,d\sigma dt \\
&= \int_0^T\int_\Omega \varphi\;v\chi_{\mathcal{O}}\;dxdt.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

De (2.6), é natural definirmos o *sistema adjunto* por

$$\left|\begin{array}{ll}
-\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \text{em} \quad Q, \\
\varphi = 0 \quad \text{sobre} & \Sigma, \\
\varphi(T) = \varphi^0 \quad \text{em} & \Omega.
\end{array}\right. \tag{2.7}$$

Sendo $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, temos que o sistema (2.7) admite exatamente uma solução na classe $\varphi \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big) \cap C\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$ (vide [4]).

2.2 Estimativa de Carleman

O objetivo dessa seção é mostrarmos uma estimativa de Carleman para o sistema adjunto (2.7). Para isso faremos uso do Lema 1.7.1, que nos possibilitará definir funções peso, que foram inicialmente introduziadas por Imanuvilov (cf. [3]), que nos auxiliarão na prova da desigualdade de Carleman. Mais precisamente, consideremos as seguintes funções peso:

$$\alpha(x,t) := \frac{e^{2\lambda\, m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)}, \quad \xi(x,t) := \frac{e^{\lambda(m\,\|\eta\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)}, \tag{2.8}$$

onde $(x,t) \in Q$ e $m > 1$. Com estas considerações, podemos enunciar o principal resultado do nosso trabalho:

Teorema 2.1 ***(Desigualdade de Carleman).*** *Existe uma constante $\lambda_1 = C(\Omega,\mathcal{O}) \geq 1$, $s_1 = C(\Omega,\mathcal{O})(T+T^2)$ e $C_1(\Omega,\mathcal{O})$ tal que, para quaisquer $\lambda \geq \lambda_1$ e $s \geq s_1$, vale a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned}
&s^{-1}\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|q_t|^2 + |\Delta q|^2\right)\,dx\,dt + s\lambda^2\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\,dx\,dt \\
&+s^3\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dx\,dt \leq C_1\Bigg(\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\left|q_t + \Delta q\right|^2\,dx\,dt \\
&+s^3\lambda^4\int\!\!\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dx\,dt\Bigg),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

para toda $q \in C^2(\overline{Q})$ com $q = 0$ sobre Σ.

Demonstração: Seja $q \in C^2(\overline{Q})$ tal que $q = 0$ sobre Σ. Faremos a mudança de variável

$$\psi = e^{-s\alpha}q, \tag{2.10}$$

ou seja,

$$q = e^{s\alpha}\psi \tag{2.11}$$

e consideremos a função

$$g = e^{-s\alpha} f,$$

onde $f = q_t + \Delta q$. Temos

$$q_t = se^{s\alpha}\alpha_t\psi + e^{s\alpha}\psi_t,$$

e

$$\Delta q = e^{s\alpha}\Delta\psi + 2se^{s\alpha}\nabla\alpha \cdot \nabla\psi + s^2 e^{s\alpha}|\nabla\alpha|^2\psi + se^{s\alpha}\Delta\alpha\psi.$$

Logo,

$$f = e^{s\alpha}(s\alpha_t\psi + \psi_t + \Delta\psi + 2s\nabla\alpha \cdot \nabla\psi + s^2|\nabla\alpha|^2\psi + s\Delta\alpha\psi). \tag{2.12}$$

Multiplicando a igualdade (2.12) por $e^{-s\alpha}$, resulta que

$$g = s\alpha_t\psi + \psi_t + \Delta\psi + 2s\nabla\alpha \cdot \nabla\psi + s^2|\nabla\alpha|^2\psi + s\Delta\alpha\psi.$$

Como

$$\nabla\alpha = -\xi\lambda\nabla\eta^0,$$

e

$$\Delta\alpha = -\lambda^2\xi|\nabla\eta^0|^2 - \lambda\xi\Delta\eta^0,$$

obtemos

$$g = s\alpha_t\psi + \psi_t + \Delta\psi - 2s\lambda\xi\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi + s^2\lambda^2\xi^2|\nabla\eta^0|^2\psi - s\lambda^2\xi|\nabla\eta^0|^2\psi - s\lambda\xi\Delta\eta^0\psi.$$

Assim, se considerarmos

$$I_1\psi = -2s\lambda^2\xi|\nabla\eta^0|^2\psi - 2s\lambda\xi\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi + \psi_t \tag{2.13}$$

e

$$I_2\psi = s^2\lambda^2\xi^2|\nabla\eta^0|^2\psi + \Delta\psi + s\alpha_t\psi, \tag{2.14}$$

temos

$$I_1\psi + I_2\psi = g_{s,\lambda},$$

onde

$$g_{s,\lambda} = g + s\lambda\xi\Delta\eta^0\psi - s\lambda^2\xi|\nabla\eta^0|^2\psi.$$

Para simplificarmos a notação, denotaremos por $(I_i\psi)_j$ $(1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3)$ o j-ésimo termo de $I_i\psi$ dado em (2.13) ou (2.14).

Desenvolvendo o produto interno $(I_1\psi, I_2\psi)_{L^2(Q)}$, temos

$$|I_1\psi|^2_{L^2(Q)} + |I_2\psi|^2_{L^2(Q)} + 2\sum_{i,j=1}^{3}((I_1\psi)_i, (I_2\psi)_j)_{L^2(Q)} = |g_{s,\lambda}|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.15}$$

A partir de agora, a tarefa é desenvolver os nove produtos internos que aparecem na expressão (2.15). Faremos uso de algumas derivadas e estimativas, que serão listadas aqui, cujas demonstrações serão vistas no apêndice A.

$$\alpha_{x_i} = -\xi_{x_i} = -\lambda\eta^0_{x_i}\xi \leq C\lambda\xi, \tag{2.16}$$

$$|\alpha_t| \leq CT\xi^2, \tag{2.17}$$

$$\xi_{x_i} = \lambda\xi\eta^0_{x_i}, \tag{2.18}$$

$$\xi_t \leq 3T\xi^2, \tag{2.19}$$

$$\nabla\alpha_t = -\lambda\frac{T-2t}{t(T-t)}\xi\nabla\eta^0, \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{t(T-t)} \leq \xi. \tag{2.21}$$

Denotaremos por $C = C(\Omega, \mathcal{O})$ uma constante que depende de Ω e $\mathcal{O}$. Inicialmente, temos

$$((I_1\psi)_1, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)} = -2s^3\lambda^4\int\int_Q |\nabla\eta^0|^4\xi^3|\psi|^2\, dxdt = A. \tag{2.22}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
((I_1\psi)_2, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)} &= -2s^3\lambda^3\int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi^3(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi)\psi\, dxdt \\
&= 3s^3\lambda^4\int\int_Q |\nabla\eta^0|^4\xi^3|\psi|^2\, dxdt \\
&+ s^3\lambda^3\int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi^3|\psi|^2\Delta\eta^0\, dxdt \\
&+ 2s^3\lambda^3\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_Q \eta^0_{x_i}\eta^0_{x_ix_j}\eta^0_{x_j}\xi^3|\psi|^2\, dxdt \\
&= B_1 + B_2 + B_3,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

onde B_i denota o i-ésimo termo do lado direito de (2.23). Observemos que $A + B_1$ é positivo e, pelo Lema 1.7.1, vale que

$$\begin{aligned}
A + B_1 &= s^3\lambda^4 \int\int_Q |\nabla\eta^0|^4 \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\
&\geq s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\overline{\Omega\setminus\omega}} |\nabla\eta^0|^4 \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\
&\geq \overline{C} s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\overline{\Omega\setminus\omega}} \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\
&= \overline{C} s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt - \overline{C} s^3\lambda^4 \int_0^T \int_\omega \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\
&\geq \overline{C} s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt - C s^3\lambda^4 \int_0^T \int_\omega \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\
&= \tilde{A} - \tilde{B},
\end{aligned}$$

para algum $\overline{C} = \overline{C}(\Omega, \mathcal{O})$, onde $|\nabla\eta^0| \geq \overline{C} > 0$. Como $\eta^0 \in C^2(\overline{Q})$, temos que

$$B_2 \geq -C s^3\lambda^3 \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt, \tag{2.24}$$

e

$$B_3 \geq -C s^3\lambda^3 \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt. \tag{2.25}$$

Os termos B_2 e B_3 serão absorvidos por $\tilde{A}$ do seguinte modo: tomando $\lambda \geq \frac{4C}{\overline{C}}$, temos $\overline{C} - \frac{2C}{\lambda} \geq \frac{\overline{C}}{2}$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{A} + B_2 + B_3 &\geq \overline{C} s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt - 2C s^3\lambda^3 \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\
&= \overline{C} s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt - \frac{2C}{\lambda} s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\
&= \left(\overline{C} - \frac{2C}{\lambda}\right) s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\
&\geq \frac{\overline{C}}{2} s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

Observemos que isso foi possível pelo fato das potências de s e λ em B_2 e B_3 serem menores que as potências em $\tilde{A}$.

Também, temos

$$\begin{aligned}
((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)} &= s^2\lambda^2 \int\int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi^2 \psi_t \psi \, dxdt \\
&= -s^2\lambda^2 \int\int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi\xi_t |\psi|^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

Assim, usando (2.19), nos leva a

$$
\begin{aligned}
|((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)}| &\leq s^2\lambda^2 \int\int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi\xi_t |\psi|^2 \, dxdt \\
&\leq Cs^2\lambda^2 T \int\int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\
&\leq Cs^2\lambda^2 T \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt.
\end{aligned}
$$

Notemos que $((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)}$ também será absorvido. Com efeito, para $\lambda \geq \frac{4C}{\overline{C}}$, $\lambda \geq 1$ e $s \geq \frac{4CT}{\overline{C}}$, temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} + B_2 + B_3 + ((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_1) &\geq \frac{\overline{C}}{2} s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3|\psi|^2 \, dxdt - Cs^2\lambda^2 T \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\
&\geq \frac{\overline{C}}{2} s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3|\psi|^2 \, dxdt - \frac{Cs^3\lambda^4 T}{s} \int\int_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\
&= \left(\frac{\overline{C}}{2} - \frac{CT}{s}\right) s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3|\psi|^2 \, dxdt \\
&\geq \left(\frac{\overline{C}}{2} - \frac{\overline{C}}{4}\right) s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3|\psi|^2 \, dxdt \\
&= \frac{\overline{C}}{4} s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3|\psi|^2 \, dxdt.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, se $\lambda \geq \frac{4C}{\overline{C}}$, $\lambda \geq 1$ e $s \geq \frac{4CT}{\overline{C}}$, então obtemos

$$
\begin{aligned}
(I_1\psi, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)} &= ((I_1\psi)_1, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)} + ((I_1\psi)_2, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)} + ((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)} \\
&= A + B_1 + B_2 + B_3 + ((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)} \\
&\geq \tilde{A} - \tilde{B} + B_2 + B_3 + ((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)} \qquad (2.26) \\
&= \tilde{A} + B_2 + B_3 + ((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_1)_{L^2(Q)} - \tilde{B} \\
&\geq \frac{\overline{C}}{4} s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3|\psi|^2 \, dxdt - Cs^3\lambda^4 \int_0^T \int_\omega \xi^3|\psi|^2 \, dxdt.
\end{aligned}
$$

Notemos que,

$$
\begin{aligned}
((I_1\psi)_1,(I_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &= -2s\lambda^2\int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi\Delta\psi\psi\,dxdt \\
&= 2s\lambda^2\int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi|\nabla\psi|^2\,dxdt \\
&+ 4s\lambda^2\sum_{i,j=1}^n\int\int_Q \eta^0_{x_i}\eta^0_{x_ix_j}\xi\psi\psi_{x_j}\,dxdt \\
&+ 2s\lambda^3\int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi)\psi\,dxdt \\
&= C_1+C_2+C_3,
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

onde C_i representa o i-ésimo termo do lado direito de (2.27). Para C_2 e C_3, vale que

$$
\begin{aligned}
|C_2| &= \left|4s\lambda^2\sum_{i,j=1}^n\int\int_Q \eta^0_{x_i}\eta^0_{x_ix_j}\xi\psi\psi_{x_j}\,dxdt\right| \\
&= \left|4s\lambda^2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\int\int_Q \eta^0_{x_i}\eta^0_{x_ix_j}\xi\psi_j\psi\,dxdt\right| \\
&= \left|4s\lambda^2\sum_{i=1}^n\int\int_Q \sum_{j=1}^n\eta^0_{x_i}\eta^0_{x_ix_j}\xi\psi_j\psi\,dxdt\right| \\
&= \left|4s\lambda^2\sum_{i=1}^n\int\int_Q \eta^0_{x_i}\xi\psi\sum_{j=1}^n\eta^0_{x_ix_j}\cdot\psi_j\,dxdt\right| \\
&= \left|4s\lambda^2\sum_{i=1}^n\int\int_Q \partial_i\eta^0_{x_i}\psi\langle\nabla(\eta^0_{x_i},\nabla\psi\rangle\,dxdt\right| \\
&\le 4s\lambda^2\sum_{i=1}^n\int\int_Q |\eta^0_{x_i}|\cdot\xi\cdot|\psi|\cdot|\nabla(\eta^0_{x_i})|\cdot|\nabla\psi|\,dxdt \\
&\le Cs\lambda^2\int\int_Q \xi\cdot|\psi|\cdot|\nabla\psi|\,dxdt \\
&= Cs\int\int_Q \xi\cdot\lambda^2|\psi|\cdot|\nabla\psi|\,dxdt,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
|C_2|\le Cs\int\int_Q \xi\cdot\lambda^2|\psi|\cdot|\nabla\psi|\,dxdt. \tag{2.28}
$$

Aplicando a Desigualdade de Young com ε no caso $p=q=2$, com $a=\lambda^2|\psi|$ e $b=|\nabla\psi|$, temos

$$
\lambda^2|\psi|\cdot|\nabla\psi|\le\varepsilon\lambda^4|\psi|^2+\frac{1}{4\varepsilon}|\nabla\psi|^2.
$$

Assim, de (2.28), temos

$$\begin{aligned} |C_2| &\leq Cs\int\int_Q \varepsilon\xi\cdot\lambda^4|\psi|^2\,dxdt + Cs\int\int_Q \frac{1}{4\varepsilon}\xi\cdot|\nabla\psi|^2\,dxdt \\ &\leq Cs\lambda^4\int\int_Q \xi\cdot|\psi|^2\,dxdt + Cs\int\int_Q \xi\cdot|\nabla\psi|^2\,dxdt. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |C_3| &= \left|2s\lambda^3\int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi\langle\nabla\eta^0,\nabla\psi\rangle\psi\,dxdt\right| \\ &\leq 2s\lambda^3\int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi|\langle\nabla\eta^0,\nabla\psi\rangle||\psi|\,dxdt \\ &\leq 2s\lambda^3\int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi|\nabla\eta^0|\cdot|\nabla\psi|\cdot|\psi|\,dxdt \\ &\leq 2Cs\lambda^3\int\int_Q \xi\cdot|\nabla\psi|\cdot|\psi|\,dxdt \\ &= 2C\int\int_Q \xi\lambda^2 s|\psi|\cdot\lambda|\nabla\psi|\,dxdt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|C_3| \leq 2C\int\int_Q \xi\lambda^2 s|\psi|\cdot\lambda|\nabla\psi|\,dxdt. \tag{2.29}$$

Novamente, aplicando a Desigualdade de Young com ε no caso $p = q = 2$, com $a = \xi\lambda^2 s|\psi|$ e $b = \lambda|\nabla\psi|$, temos que

$$\xi\lambda^2 s|\psi|\cdot\lambda|\nabla\psi| \leq \varepsilon\xi^2\lambda^4 s^2|\psi|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\lambda^2|\nabla\psi|^2.$$

Logo, de (2.29), vale que

$$\begin{aligned} |C_3| &\leq 2C\int\int_Q (\varepsilon\xi^2\lambda^4 s^2|\psi|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\lambda^2|\nabla\psi|^2)\,dxdt \\ &= 2C\varepsilon s^2\lambda^4\int\int_Q \xi^2|\psi|^2\,dxdt + 2C\frac{1}{4\varepsilon}\lambda^2\int\int_Q |\nabla\psi|^2\,dxdt \\ &\leq Cs^2\lambda^4\int\int_Q \xi^2|\psi|^2\,dxdt + C\lambda^2\int\int_Q |\nabla\psi|^2\,dxdt \end{aligned}$$

Como $\xi \geq \frac{1}{t(T-t)}$, obtemos que

$$\xi^2 = \xi\cdot\xi \geq \xi\cdot\frac{1}{t(T-t)} \geq \xi\frac{1}{T^2},$$

ou seja,

$$T^2\xi^2 \geq \xi.$$

Assim, para $s \geq CT^2$, temos

$$\begin{aligned} Cs\lambda^4 \int\int_Q \xi|\psi|^2 \, dxdt &\leq CT^2 s\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2 \, dxdt \\ &\leq s^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2 \, dxdt, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &\geq 2s\lambda^2 \int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt - Cs\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2 \, dxdt \\ &- Cs \int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt - Cs^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2 \, dxdt \\ &- C\lambda^2 \int\int_Q |\nabla\psi|^2 \, dxdt \\ &\geq 2s\lambda^2 \int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt - s^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2 \, dxdt \qquad (2.30) \\ &- Cs^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2 \, dxdt - C \int\int_Q (s\xi + \lambda^2)|\nabla\psi|^2 \, dxdt \\ &= 2s\lambda^2 \int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt - (C+1)s^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2 \, dxdt \\ &- C \int\int_Q (s\xi + \lambda^2)|\nabla\psi|^2 \, dxdt. \end{aligned}$$

Como $\psi = 0$ sobre Σ, então $\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\nu$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} ((I_1\psi)_2, (I_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &= -2s\lambda \int\int_Q \xi(\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi)\Delta\psi \, dxdt \\ &= 2s\lambda \int\int_Q \nabla(\xi(\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi)) \cdot \nabla\psi \, dxdt \qquad (2.31) \\ &- 2s\lambda \int\int_\Sigma \xi(\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi)\frac{\partial\psi}{\partial\nu} \, d\sigma dt. \end{aligned}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} \int\int_\Sigma \xi(\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi)\frac{\partial\psi}{\partial\nu} \, d\sigma dt &= \int\int_\Sigma \xi(\nabla\eta^0 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\nu)\frac{\partial\psi}{\partial\nu} \, d\sigma dt \\ &= \int\int_\Sigma \xi(\nabla\eta^0 \cdot \nu)\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 \, d\sigma dt \\ &= \int\int_\Sigma \xi\frac{\partial\eta^0}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 \, d\sigma dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}2s\lambda\int\int_Q \nabla(\xi(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi))\cdot\nabla\psi\,dxdt &= 2s\lambda\sum_{i,j=1}^n\int\int_Q \xi\eta^0_{x_ix_j}\psi_{x_i}\psi_{x_j}\,dxdt\\ &+ 2s\lambda^2\int\int_Q \xi|(\nabla\eta^0,\nabla\psi)|^2\,dxdt\\ &+ s\lambda\int\int_Q \xi(\nabla\eta^0\cdot\nabla(|\nabla\psi|^2))\,dxdt,\end{aligned}$$

e por (2.31), resulta que

$$\begin{aligned}((I_1\psi)_2,(I_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &= -2s\lambda\int\int_\Sigma \xi\frac{\partial\eta^0}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2\,d\sigma dt\\ &+ 2s\lambda\sum_{i,j=1}^n\int\int_Q \xi\eta^0_{x_ix_j}\psi_{x_i}\psi_{x_j}\,dxdt\\ &+ 2s\lambda^2\int\int_Q \xi|(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi)|^2\,dxdt\\ &+ s\lambda\int\int_Q \xi(\nabla\eta^0\cdot\nabla(|\nabla\psi|^2))\,dxdt\\ &= D_1+D_2+D_3+D_4,\end{aligned}\tag{2.32}$$

onde D_i denota o i-ésimo termo do lado direito de (2.32). Notemos que D_3 é positivo e, usando a Desigualdade de Young, nos leva a

$$\begin{aligned}|D_2| &= 2s\lambda\left|\sum_{i,j=1}^n\int\int_Q \xi\eta^0_{x_ix_j}\psi_{x_i}\psi_{x_j}\,dxdt\right|\\ &\leq 2s\lambda\sum_{i,j=1}^n\int\int_Q \xi|\eta^0_{x_ix_j}||\psi_{x_i}||\psi_{x_j}|\,dxdt\\ &\leq 2Cs\lambda\sum_{i,j=1}^n\int\int_Q \xi\frac{1}{2}(|\psi_{x_i}|^2+|\psi_{x_j}|^2)\,dxdt\\ &= 2Cs\lambda\sum_{i,j=1}^n\int\int_Q \xi\frac{1}{2}(2|\nabla\psi|^2)\,dxdt\\ &\leq Cs\lambda\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} D_4 &= s\lambda \int\int_Q \xi(\nabla\eta^0 \cdot \nabla(|\nabla\psi|^2))\, dxdt \\ &= s\lambda \int\int_\Sigma \xi\frac{\partial\eta^0}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2\, d\sigma dt \\ &- s\lambda^2 \int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi|\nabla\psi|^2\, dxdt \\ &- s\lambda \int\int_Q \Delta\eta^0\xi|\nabla\psi|^2\, dxdt \\ &= D_{41} + D_{42} + D_{43}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Em virtude das propriedades de η^0, temos que para cada ponto da fronteira $\partial\Omega$ existe uma vizinhança desse ponto na qual η^0 é decrescente, pois η^0 é positiva e se anula em $\partial\Omega$. Portanto, $\frac{\partial\eta^0}{\partial\nu}$ é negativa, e assim

$$\begin{aligned} D_1 + D_{41} &= -2s\lambda \int\int_\Sigma \xi\frac{\partial\eta^0}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2\, d\sigma dt + s\lambda \int\int_\Sigma \xi\frac{\partial\eta^0}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2\, d\sigma dt \\ &= -s\lambda \int\int_\Sigma \xi\frac{\partial\eta^0}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2\, d\sigma dt \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Observemos que,

$$|D_{43}| = \left|s\lambda \int\int_Q \Delta\eta^0\xi|\nabla\psi|^2\, dxdt\right| \leq Cs\lambda \int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\, dxdt. \tag{2.36}$$

Portanto, de (2.33), (2.34), (2.35) e (2.36), temos

$$\begin{aligned} D_1 + D_2 + D_3 + D_4 &= D_1 + D_{41} + D_2 + D_3 + D_{42} + D_{43} \\ &\geq D_2 + D_{42} + D_{43} \\ &\geq -s\lambda^2 \int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi|\nabla\psi|^2\, dxdt \\ &- Cs\lambda \int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\, dxdt. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Agora, usando integração por partes, a primeira fórmula de Green, notando que $\psi = 0$ sobre Σ e $\psi(x,0) = \psi(x,T) = \psi_{x_i}(x,0) = \psi_{x_i}(x,T) = 0$ em Ω (ver Apêndice B), segue que

$$\begin{aligned}
((I_1\psi)_3,(I_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &= \int\int_Q \psi_t\Delta\psi\ dxdt \\
&= \int_\Omega \psi\Delta\psi\Big|_0^T\ dxdt - \int_\Omega\int_0^T \psi(\Delta\psi)_t\ dtdx \\
&= -\int_\Omega\int_0^T \psi\Delta(\psi_t)\ dtdx \\
&= -\int_0^T\int_\Omega \nabla\psi\cdot\nabla\psi_t\ dxdt \qquad (2.38)\\
&= -\int_0^T (\psi,\psi_t)_{H_0^1(\Omega)}(t)\ dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\ dt \\
&= -\frac{1}{2}\|\psi(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\psi(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De (2.30) e (2.37), vale que

$$\begin{aligned}
(I_1\psi,(I_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &= ((I_1\psi)_1,(I_2\psi)_2)_{L^2(Q)} + ((I_1\psi)_2,(I_2\psi)_2)_{L^2(Q)} + ((I_1\psi)_3,(I_2\psi)_2)_{L^2(Q)} \\
&= C_1+C_2+C_3+D_1+D_2+D_3+D_4 \\
&\geq s\lambda^2\int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi|\nabla\psi|^2\ dxdt \\
&- (C+1)s^2\lambda^4\int\int_Q \xi^2|\psi|^2\ dxdt \qquad (2.39)\\
&- C\int\int_Q (s\lambda\xi+\lambda^2)|\nabla\psi|^2\ dxdt \\
&= F_1+F_2+F_3.
\end{aligned}$$

para $\lambda\geq 1$ e $s\geq CT^2$, onde F_i denota o i-ésimo termo do lado direito de (2.39).

Notemos que,

$$\begin{aligned}
F_1 &= s\lambda^2\int\int_Q |\nabla\eta^0|^2\xi|\nabla\psi|^2\ dxdt \\
&\geq \overline{C}s\lambda^2\int\int_{\overline{\Omega\setminus\omega}} \xi|\nabla\psi|^2\ dxdt \\
&= \overline{C}s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\ dxdt - \overline{C}s\lambda^2\int_0^T\int_\omega \xi|\nabla\psi|^2\ dxdt \\
&\geq \overline{C}s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\ dxdt - Cs\lambda^2\int_0^T\int_\omega \xi|\nabla\psi|^2\ dxdt
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|F_3| &= \left| -C \int\int_Q (s\lambda\xi + \lambda^2)|\nabla\psi|^2 \, dxdt \right| \\
&= C \int\int_Q (s\lambda\xi + \lambda^2)|\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&\leq Cs\lambda \int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt + C\lambda^2 \int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(I_1\psi, (I_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &\geq F_1 + F_2 + F_3 \\
&\geq \overline{C}s\lambda^2 \int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt - Cs\lambda^2 \int_0^T \int_\omega \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&- (C+1)s^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2 \, dxdt \\
&- Cs\lambda \int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt - C\lambda^2 \int\int_Q |\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&\geq \overline{C}s\lambda^2 \int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt - Cs\lambda^2 \int_0^T \int_\omega \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&- 2Cs^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2 \, dxdt \qquad (2.40) \\
&- Cs\lambda \int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt - C\lambda^2 \int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&= (\overline{C}s\lambda^2 - Cs\lambda - C\lambda^2) \int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&- 2Cs^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2 \, dxdt \\
&- Cs\lambda^2 \int\int_\omega \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\overline{C}s\lambda^2 - Cs\lambda - C\lambda^2 \geq \frac{\overline{C}}{4}s\lambda^2, \qquad (2.41)$$

se $\lambda \geq \frac{8C}{3\overline{C}}$ e $s \geq \frac{8C}{3\overline{C}}$, visto que

$$\begin{aligned}
\lambda \geq \frac{8C}{3\overline{C}} \text{ e } s \geq \frac{8C}{3\overline{C}} &\Rightarrow \frac{1}{2}s\lambda^2 \geq \frac{4C}{3\overline{C}}s\lambda \text{ e } \frac{1}{2}s\lambda^2 \geq \frac{4C}{3\overline{C}}\lambda^2 \\
&\Rightarrow s\lambda^2 \geq \frac{4C}{3\overline{C}}s\lambda + \frac{4C}{3\overline{C}}\lambda^2 \\
&\Rightarrow \frac{3\overline{C}}{4}s\lambda^2 \geq Cs\lambda + C\lambda^2 \\
&\Rightarrow \overline{C}s\lambda^2 - Cs\lambda - C\lambda^2 \geq \frac{\overline{C}}{4}s\lambda^2.
\end{aligned}$$

Assim, por (2.40) e (2.41), nos garante que

$$\begin{aligned}(I_1\psi,(I_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &\geq \frac{\overline{C}}{4}s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt\\ &- 2Cs^2\lambda^4\int\int_Q \xi^2|\psi|^2\,dxdt\\ &- Cs\lambda^2\int_0^T\int_\omega \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt.\end{aligned}\tag{2.42}$$

se $\lambda \geq \frac{8C}{3\overline{C}}$ e $s \geq \frac{8C}{3\overline{C}}$ e $s \geq CT^2$.

Agora consideremos o próximo produto interno. De (2.17), temos

$$\begin{aligned}|((I_1\psi)_1,(I_2\psi)_3)_{L^2(Q)}| &\leq 2s^2\lambda^2\int\int_Q |\nabla\eta^0|^2|\alpha_t|\xi|\psi|^2\,dxdt\\ &\leq Cs^2\lambda^2T\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt,\end{aligned}\tag{2.43}$$

o qual pode ser absorvido por $\tilde{A}$ tomando $s \geq \frac{2CT}{\overline{C}}$ e $\lambda \geq 1$. Com efeito, para $s \geq \frac{2CT}{\overline{C}}$, temos que $\overline{C}s^3\lambda^4 - Cs^2\lambda^4T \geq \frac{\overline{C}}{2}s^3\lambda^4$, e assim,

$$\begin{aligned}\tilde{A} + ((I_1\psi)_1,(I_2\psi)_3) &\geq \overline{C}s^3\lambda^4\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt\\ &- Cs^2\lambda^2T\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt\\ &\geq (\overline{C}s^3\lambda^4 - Cs^2\lambda^4T)\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt\\ &\geq \frac{\overline{C}}{2}s^3\lambda^4\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}((I_1\psi)_2,(I_2\psi)_3)_{L^2(Q)} &= -2s^2\lambda\int\int_Q \alpha_t\xi(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi)\psi\,dxdt\\ &= s^2\lambda^2\int\int_Q \alpha_t|\nabla\eta^0|^2\xi|\psi|^2\,dxdt\\ &+ s^2\lambda\int\int_Q (\nabla\alpha_t\cdot\nabla\eta^0)\xi|\psi|^2\\ &+ s^2\lambda\int\int_Q \alpha_t\Delta\eta^0\xi|\psi|^2\,dxdt\\ &= G_1+G_2+G_3.\end{aligned}\tag{2.44}$$

Por (2.20) e (2.21) notemos que G_1, G_2 e G_3 são limitados, em módulo, por

$$Cs^2\lambda^2T\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt,\tag{2.45}$$

se $\lambda \geq 1$. Então, por (2.44), segue que

$$((I_1\psi)_2, (I_2\psi)_3)_{L^2(Q)} \geq -3Cs^2\lambda^2 T \int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt. \tag{2.46}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} ((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_3)_{L^2(Q)} &= s\int\int_Q \alpha_t\psi_t\psi\, dxdt \\ &= s\int_\Omega \left(\alpha_t\psi\psi\big|_0^T - \int_0^T (\alpha_t\psi)_t\psi\right)\, dx \\ &= -s\int_\Omega\int_0^T (\alpha_t\psi)_t\psi\, dx \\ &= -s\int\int_Q \alpha_{tt}|\psi|^2\, dxdt - s\int\int_Q \alpha_t\psi_t\psi\, dxdt, \end{aligned}$$

donde,

$$2s\int\int_Q \alpha_t\psi_t\psi\, dxdt = -s\int\int_Q \alpha_{tt}|\psi|^2\, dxdt, \tag{2.47}$$

e assim,

$$((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_3)_{L^2(Q)} = -\frac{1}{2}s\int\int_Q \alpha_{tt}|\psi|^2\, dxdt. \tag{2.48}$$

Como

$$\alpha_{tt} \leq C\xi^2(1+T^2\xi) \leq CT^2\xi^3,$$

de (2.48), segue que

$$-((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_3)_{L^2(Q)} = \frac{1}{2}s\int\int_Q \alpha_{tt}|\psi|^2\, dxdt \leq CsT^2\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt,$$

ou seja,

$$((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_3)_{L^2(Q)} \geq -CsT^2\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt. \tag{2.49}$$

Concluímos por (2.43), (2.46) e (2.49) que, para $\lambda \geq C$ e $s \geq CT$, temos

$$\begin{aligned} (I_1\psi, (I_2\psi)_3)_{L^2(Q)} &= ((I_1\psi)_1, (I_2\psi)_3)_{L^2(Q)} + ((I_1\psi)_2, (I_2\psi)_3)_{L^2(Q)} + ((I_1\psi)_3, (I_2\psi)_3)_{L^2(Q)} \\ &\geq -Cs^2\lambda^2 T\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt - 3Cs^2\lambda^2 T\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt \\ &- CsT^2\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt \\ &= (-Cs^2\lambda^2T - 3Cs^2\lambda^2T - CsT^2)\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt \\ &\geq -Cs^3\lambda^2\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Agora, (2.26), (2.42) e (2.50) nos fornece que

$$\begin{aligned}(I_1\psi, I_2\psi)_{L^2(Q)} &= (I_1\psi,(I_2\psi)_1)_{L^2(Q)} + (I_1\psi,(I_2\psi)_2)_{L^2(Q)} + (I_1\psi,(I_2\psi)_3)_{L^2(Q)}\\ &\geq C\int\int_Q (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\,dxdt \\ &- C\int\int_{\omega\times(0,T)} (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\,dxdt,\end{aligned} \tag{2.51}$$

para $\lambda \geq C$ e $s \geq C(T+T^2)$.

Usando (2.51) e (2.15), temos

$$\begin{aligned}|g_{s,\lambda}|^2_{L^2(Q)} &= |I_1\psi|^2_{L^2(Q)} + |I_2\psi|^2_{L^2(Q)} + 2(I_1\psi, I_2\psi)_{L^2(Q)}\\ &\geq |I_1\psi|^2_{L^2(Q)} + |I_2\psi|^2_{L^2(Q)} + C\int\int_Q (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\,dxdt\\ &- C\int\int_{\omega\times(0,T)} (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\,dxdt,\end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}&|I_1\psi|^2_{L^2(Q)} + |I_2\psi|^2_{L^2(Q)} + \int\int_Q (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\,dxdt\\ &\leq C\left(|g_{s,\lambda}|^2 + \int\int_{\omega\times(0,T)} (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\right)\,dxdt.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}g_{s,\lambda} &= g + s\lambda\Delta\eta^0\xi\psi - s\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\xi\psi\\ &= g + s\lambda\xi\psi(\Delta\eta^0 - \lambda|\nabla\eta^0|^2)\\ &= g + s\lambda^2\xi\psi\left(\frac{\Delta\eta^0}{\lambda} - |\nabla\eta^0|^2\right),\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}g^2_{s,\lambda} &= \left[g + s\lambda^2\xi\psi\left(\frac{\Delta\eta^0}{\lambda} - |\nabla\eta^0|^2\right)\right]^2\\ &\leq 2\left(g^2 + s^2\lambda^4\xi^2\psi^2\left(\frac{\Delta\eta^0}{\lambda} - |\nabla\eta^0|^2\right)^2\right).\end{aligned} \tag{2.53}$$

Como

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta\eta^0}{\lambda} - |\nabla\eta^0|^2\right)^2 &= \left|\frac{1}{\lambda^2}(\Delta\eta^0)^2 - 2\frac{1}{\lambda}\Delta\eta^0|\nabla\eta^0|^2 + |\nabla\eta^0|^4\right|\\ &\leq \frac{1}{\lambda^2}(\Delta\eta^0)^2 + 2\frac{1}{\lambda}|\Delta\eta^0||\nabla\eta^0|^2 + |\nabla\eta^0|^4\\ &\leq C,\end{aligned}$$

então de (2.53), temos

$$g_{s,\lambda}^2 \leq C(g^2 + s^2\lambda^4\xi^2|\psi|^2),$$

e portanto,

$$|g_{s,\lambda}|_{L^2(Q)}^2 \leq C\left(\int\int_Q g^2\, dxdt + s^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2\, dxdt\right). \tag{2.54}$$

De (2.52) e (2.54), obtemos

$$\begin{aligned}
&|I_1\psi|_{L^2(Q)}^2 + |I_2\psi|_{L^2(Q)}^2 + \int\int_Q (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\, dxdt \\
&\leq C\left(\int\int_Q g^2\, dxdt + s^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2\, dxdt + \int\int_{\omega\times(0,T)} (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\right) dxdt \\
&= C\bigg(\int\int_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\, dxdt + s^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2\, dxdt \\
&+ \int\int_{\omega\times(0,T)} (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\bigg)\, dxdt.
\end{aligned}$$

A integral em Q envolvendo o termo $|\psi|$ que se encontra do lado direito da desigualdade acima pode ser facilmente absorvida pelos termos do lado esquerdo, considerando $s \geq 2C$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
&s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt - Cs^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^2|\psi|^2\, dxdt \\
&\geq s^3\lambda^4 \int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxt - Cs^2\lambda^4 \int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt \\
&= (s^3 - Cs^2)\lambda^4 \int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt \\
&\geq \frac{s^3}{2}\lambda^4 \int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&|I_1\psi|_{L^2(Q)}^2 + |I_2\psi|_{L^2(Q)}^2 + \int\int_Q (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\, dxdt \\
&\leq C\left(\int\int_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\, dxdt + \int\int_{\omega\times(0,T)} (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\right) dxdt
\end{aligned} \tag{2.55}$$

para $\lambda \geq C$ e $s \geq C(T + T^2)$.

O passo final é adicionarmos as integrais de $|\Delta\psi|^2$ e $|\psi_t|^2$ no lado esquerdo de (2.55). Para isto faremos uso das expressões de $I_i\psi$ $(i = 1, 2)$. De fato, por (2.13), temos

$$\begin{aligned}
|\psi_t|^2 &= \left[I_1\psi + 2s\lambda^2\xi\left(|\nabla\eta^0|^2\psi + \frac{1}{\lambda}\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi\right)\right]^2 \\
&\leq 2\left(|I_1\psi|^2 + 4s^2\lambda^4\xi^2\left(|\nabla\eta^0|^2\psi + \frac{1}{\lambda}\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}\left(|\nabla\eta^0|^2\psi+\frac{1}{\lambda}\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi\right)^2 &\le 2\left(|\nabla\eta^0|^4|\psi|^2+\frac{1}{\lambda^2}|\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi|^2\right)\\ &\le 2\left(|\nabla\eta^0|^4|\psi|^2+\frac{1}{\lambda^2}|\nabla\eta^0|^2|\nabla\psi|^2\right)\\ &\le C|\psi|^2+C\frac{1}{\lambda^2}|\nabla\psi|^2,\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}|\psi_t|^2 &\le 2\left(|I_1\psi|^2+4Cs^2\lambda^4\xi^2|\psi|^2+4Cs^2\lambda^2\xi^2|\nabla\psi|^2\right)\\ &\le C\left(|I_1\psi|^2+s^2\lambda^4\xi^2|\psi|^2+s^2\lambda^2\xi^2|\nabla\psi|^2\right),\end{aligned}$$

de sorte que,

$$s^{-1}\xi^{-1}|\psi_t|^2\le C\left(|I_1\psi|^2+s\lambda^4\xi|\psi|^2+s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2\right),$$

e portanto,

$$s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,dxdt\le C\left(s\lambda^2\int\int_Q\xi|\nabla\psi|^2\,dxdt+s\lambda^4\int\int_Q\xi|\psi|^2\,dxdt+|I_1\psi|^2_{L^2(Q)}\right). \tag{2.56}$$

Por outro lado, de (2.14), temos

$$\begin{aligned}|\Delta\psi|^2 &= \left[I_2\psi-s^2\lambda^2\xi^2|\nabla\eta^0|^2\psi-s\alpha_t\psi\right]^2\\ &= [I_2\psi+s\psi(-s\lambda^2\xi^2|\nabla\eta^0|^2-\alpha_t)]^2\\ &\le 2\left(|I_2\psi|^2+s^2|\psi|^2(s\lambda^2\xi^2|\nabla\eta^0|^2+\alpha_t)^2\right).\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\left(s\lambda^2\xi^2|\nabla\eta^0|^2+\alpha_t\right)^2 &\le 2(s^2\lambda^4\xi^4|\nabla\eta^0|^4+|\alpha_t|^2)\\ &\le 2(s^2\lambda^4\xi^4|\nabla\eta^0|^4+C^2T^2\xi^4),\\ &\le C(s^2\lambda^4\xi^4+T^2\xi^4).\end{aligned}$$

e assim,

$$|\Delta\psi|^2\le C(|I_2\psi|^2+s^4\lambda^4\xi^4|\psi|^2+s^2T^2\xi^4|\psi|^2),$$

de maneira que,

$$s^{-1}\int\int_Q\xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,dxdt\le C\left(s^3\lambda^4\int\int_Q\xi^3|\psi|^2\,dxdt+sT^2\int\int_Q\xi^3|\psi|^2+|I_2\psi|^2_{L_2(Q)}\right). \tag{2.57}$$

De (2.56), vale que

$$\begin{aligned}
& s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,dxdt + s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt \\
& \leq C\Big(s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 + s\lambda^4\int\int_Q \xi|\psi|^2\,dxdt + |I_1\psi|^2_{L^2(Q)}\Big) \\
& + s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt \\
& \leq C\Big(s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt + |I_1\psi|^2_{L^2(Q)} + |I_2\psi|^2_{L^2(Q)}\Big),
\end{aligned} \tag{2.58}$$

e (2.57) nos conduz a

$$\begin{aligned}
& s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt \\
& \leq C\Big(s^3\lambda^4\int\int_Q \xi^3|\psi|^2 + sT^2\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt + |I_2\psi|^2_{L^2(Q)}\Big) \\
& + s^3\lambda^4\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt \\
& \leq C\Big(s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt + |I_1\psi|^2_{L^2(Q)} + |I_2\psi|^2_{L^2(Q)}\Big).
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Somando as desigualdades (2.58) e (2.59), e observando que o membro direito da desigualdade resultante será igual ao membro esquerdo da desigualdade (2.55), segue de (2.55), que

$$\begin{aligned}
& s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2)\,dxdt + s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt \\
& \leq C\left(\int\int_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\,dxdt + \int\int_{\omega\times(0,T)} (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)\,dxdt\right),
\end{aligned} \tag{2.60}$$

para $\lambda \geq C$ e $s \geq C(T+T^2)$.

Nosso objetivo agora é eliminarmos a segunda integral do lado direito de (2.60). Para isto, consideremos uma função $\theta = \theta(x)$ tal que

$$\theta \in C_0^2(\mathcal{O}), \quad \theta = 1 \text{ em } \omega, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{2.61}$$

Usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
s\lambda^2 \int\int_{\omega\times(0,T)} \xi|\nabla\psi|^2\, dxdt &= s\lambda^2 \int\int_{\omega\times(0,T)} \theta\xi|\nabla\psi|^2\, dxdt \\
&\leq s\lambda^2 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi|\nabla\psi|^2\, dxdt \\
&= -s\lambda^2 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi\Delta\psi\psi\, dxdt \\
&- s\lambda^2 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi(\nabla\theta\cdot\nabla\psi)\psi\, dxdt \\
&- s\lambda^3 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi)\psi\, dxdt \\
&= H_1 + H_2 + H_3.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Pela Desigualdade de Young, vale que

$$\begin{aligned}
H_1 &= -s\lambda^2 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi\Delta\psi\psi\, dxdt \\
&\leq s\lambda^2 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi|\Delta\psi||\psi|\, dxdt \\
&= \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} C^{-1/2}\theta^{1/2}s^{-1/2}\xi^{-1/2}|\Delta\psi|\cdot C^{1/2}\theta^{1/2}s^{3/2}\xi^{3/2}\lambda^2|\psi|\, dxdt \\
&\leq \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \frac{1}{2C}\theta s^{-1}\xi^{-1}|\Delta\psi|^2 + \frac{C}{2}\theta s^3\xi^3\lambda^4|\psi|^2\, dxdt \\
&= \frac{1}{2C}s^{-1}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi^{-1}|\Delta\psi|^2\, dxdt + \frac{C}{2}s^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi^3|\psi|^2\, dxdt.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
H_2 &= -s\lambda^2 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi(\nabla\theta\cdot\nabla\psi)\psi\, dxdt \\
&= \frac{s\lambda^3}{2}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi(\nabla\theta\cdot\nabla\eta^0)|\psi|^2\, dxdt + \frac{s\lambda^2}{2}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi\Delta\theta|\psi|^2\, dxdt \\
&\leq Cs\lambda^4 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi|\psi|^2\, dxdt,
\end{aligned} \tag{2.64}$$

e além disso,

$$\begin{aligned}
H_3 &= s\lambda^3 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi)\psi\, dxdt\\
&= \frac{s\lambda^3}{2}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi(\nabla\eta^0\cdot\nabla\theta)|\psi|^2\, dxdt + \frac{s\lambda^4}{2}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi|\nabla\eta^0|^2|\psi|^2\, dxdt\\
&+ \frac{s\lambda^3}{2}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi\Delta\eta^0|\psi|^2\, dxdt \qquad (2.65)\\
&\leq \frac{1}{2}s\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (\nabla\eta^0\cdot\nabla\theta + \theta|\nabla\eta^0|^2 + \theta\Delta\eta^0)\xi|\psi|^2\, dxdt\\
&\leq Cs\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi|\psi|^2.
\end{aligned}$$

Combinando (2.62)-(2.65), nos leva a

$$\begin{aligned}
s\lambda^2\int\int_{\omega\times(0,T)} \xi|\nabla\psi|^2\, dxdt &\leq \frac{1}{2C}s^{-1}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi^{-1}|\Delta\psi|^2\, dxdt\\
&+ \frac{C}{2}s^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi^3|\psi|^2\, dxdt\\
&+ Cs\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi|\psi|^2\, dxdt + Cs\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi|\psi|^2\, dxdt\\
&\leq \frac{1}{2C}s^{-1}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \theta\xi^{-1}|\Delta\psi|^2\, dxdt \qquad (2.66)\\
&+ C\Bigg(s^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi^3|\Delta\psi|^2\, dxdt\\
&+ s\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi|\psi|^2\, dxdt\Bigg).
\end{aligned}$$

A desigualdade (2.66) é suficiente para removermos a integral em $\omega\times(0,T)$ do termo $|\nabla\psi|^2$ no lado direito de (2.60). Assim, por (2.60) e (2.66) concluímos que

$$\begin{aligned}
&s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2)\, dxdt + s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\, dxdt + s^3\lambda^4\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\, dxdt\\
&\leq C\int\int_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\, dxdt + \frac{1}{2}s^{-1}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi^{-1}|\Delta\psi|^2 + Cs^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\, dxdt\\
&+Cs\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi|\psi|^2\, dxdt + Cs^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\, dxdt\\
&\leq C\int\int_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\, dxdt + \frac{1}{2}s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2 + Cs^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\, dxdt.
\end{aligned} \qquad (2.67)$$

Passando a integral em Q envolvendo $|\Delta\psi|^2$ para o membro esquerdo da desigualdade

(2.67), segue que

$$s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}(|\psi_t|^2+|\Delta\psi|^2)\,dxdt + s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\int\int_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt$$
$$\leq C\int\int_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\,dxdt + Cs^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\,dxdt, \tag{2.68}$$

para $\lambda \geq C$ e $s \geq C(T+T^2)$.

Finalmente, retornaremos para a função original dada em (2.11). Substituindo (2.10) em (2.68), temos

$$s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}(|\psi_t|^2+|\Delta\psi|^2)\,dxdt + s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt$$
$$\leq C\int\int_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\,dxdt + Cs^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt. \tag{2.69}$$

Como

$$\nabla q = e^{s\alpha}(\nabla\psi - s\lambda\nabla\eta^0\xi\psi),$$

obtemos

$$s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\,dxdt \leq 2s\lambda^2\int\int_Q(\xi|\nabla\psi|^2 + s^2\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\xi^3|\psi|^2)\,dxdt$$
$$\leq 2s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt + 2Cs^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt. \tag{2.70}$$

Por (2.69) e (2.70), segue que

$$\begin{aligned}
&s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}(|\psi_t|^2+|\Delta\psi|^2)\,dxdt + s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\,dxdt\\
&+s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt\\
&\leq s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}(|\psi_t|^2+|\Delta\psi|^2)\,dxdt + 2s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt\\
&+2Cs^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt\\
&\leq C\bigg(s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}(|\psi_t|^2+|\Delta\psi|^2)\,dxdt + s\lambda^2\int\int_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt\\
&+s^3\lambda^4\int\int_Q \xi^3 e^{-2s\alpha}|q|^2\,dxdt\bigg)\\
&\leq C\int\int_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\,dxdt + Cs^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Para Δq utilizamos a identidade

$$\Delta\psi = e^{-s\alpha}(\Delta q + s\lambda\Delta\eta^0\xi q + s\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\xi q + 2s\lambda\xi\nabla\eta^0\cdot\nabla q + s^2\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\xi^2 q). \quad (2.72)$$

Assim,

$$-e^{-s\alpha}\Delta q = -\Delta\psi + e^{-s\alpha}(s\lambda\Delta\eta^0\xi q + s\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\xi q + 2s\lambda\xi\nabla\eta^0\cdot\nabla q + s^2\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\xi^2 q), \quad (2.73)$$

donde,

$$\begin{aligned} & e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2 \leq 2(|\Delta\psi|^2 + e^{-2s\alpha}|s\lambda\Delta\eta^0\xi q + s\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\xi q + 2s\lambda\xi\nabla\eta^0\cdot\nabla q \\ & + s^2\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\xi^2 q|^2) \\ & \leq C(|\Delta\psi|^2 + e^{-2s\alpha}s^2\lambda^2\xi^2|q|^2 + e^{-2s\alpha}s^2\lambda^4\xi^2|q|^2 + e^{-2s\alpha}s^2\lambda^2\xi^2|\nabla q|^2 \\ & + e^{-2s\alpha}s^4\lambda^4\xi^4|q|^2). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Muliplicando (2.74) por $s^{-1}\xi^{-1}$ e integrando em Q, temos

$$\begin{aligned} s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}e^{-2s\alpha}|\Delta q|^2 &\leq C\Big(s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,dxdt + s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|q|^2\,dxdt \\ &+ s\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|q|^2\,dxdt + s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\,dxdt \\ &+ s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt\Big). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Finalmente, para q_t usamos a identidade

$$q_t = se^{s\alpha}\alpha_t\psi + e^{s\alpha}\psi_t \quad (2.76)$$

e a desigualdade $|\alpha_t| \leq CT\xi^2$ para obtermos

$$\begin{aligned} |q_t|^2 &\leq 2(s^2e^{2s\alpha}|\alpha_t|^2|\psi|^2 + e^{2s\alpha}|\psi_t|^2) \\ &\leq 2(s^2e^{2s\alpha}CT^2\xi^4e^{-2s\alpha}|q|^2 + e^{2s\alpha}|\psi_t|^2) \\ &\leq C(e^{2s\alpha}|\psi_t|^2 + s^2T^2\xi^4|q|^2). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Multiplicando (2.77) por $s^{-1}e^{-2s\alpha}\xi^{-1}$ e integrando em Q, temos

$$s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}|q_t|^2\,dxdt \leq C\Big(s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,dxdt + sT^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt\Big). \quad (2.78)$$

Por (2.75) e (2.78), nos leva a

$$
\begin{aligned}
& s^{-1} \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}(|q_t|^2 + |\Delta q|^2)\, dxdt + s\lambda^2 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\, dxdt \\
& + s^3\lambda^4 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\, dxdt \\
& \leq C\Big(s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\, dxdt + sT^2 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\, dxdt\Big) \\
& + C\Big(s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\, dxdt + s\lambda^2 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|q|^2\, dxdt \\
& + s\lambda^4 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|q|^2\, dxdt + s\lambda^2 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\, dxdt \\
& + s^3\lambda^4 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\, dxdt\Big) \\
& + s\lambda^2 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\, dxdt + s^3\lambda^4 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\, dxdt \\
& \leq C\Big(s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2)\, dxdt + 2s\lambda^2 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\, dxdt \\
& + 5s^3\lambda^4 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\, dxdt\Big) \\
& \leq C\Big(s^{-1}\int\int_Q \xi^{-1}(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2)\, dxdt + s\lambda^2 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\, dxdt \\
& + s^3\lambda^4 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\, dxdt\Big)
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

Notando que o lado direito de (2.79) é igual a C vezes o lado esquerdo de (2.71), concluímos de (2.71) e (2.79) a Desigualdade de Carleman (2.9), conforme desejado. □

2.3 Desigualdade de Observabilidade

Esta seção é dedicada a provarmos a Desigualdade de Observabilidade para o sistema adjunto (2.7). Para isso, utilizaremos a Desigualdade de Carleman vista na seção anterior. Antes, enunciaremos o seguinte resultado.

Lema 2.3.1 *Nas condições do Lema 1.7.1 e da Desigualdade de Carleman (2.9), fixados $\lambda = \lambda_1$ e $s = s_1$, existe uma constante $C = C(\lambda_1, s_1)$ tal que valem as seguintes desigualdades:*

(a) $e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \geq e^{-2C(1+\frac{1}{T})}\frac{1}{T^6}$ *em* $\Omega \times (\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$*;*

(b) $e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \leq e^{-(1+\frac{1}{T})}\frac{1}{T^6}$ *em* $\Omega \times (0,T)$.

Demonstração: Com efeito,

(a) Para $t \in (\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$, temos que

$$\frac{1}{t} < \frac{4}{T} \quad \text{e} \quad \frac{1}{T-t} < \frac{4}{T},$$

e portanto,

$$\frac{1}{t(T-t)} < \frac{16}{T^2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{e^{2\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)} \\ &< \frac{e^{2\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}{t(T-t)} \\ &< \frac{16}{T^2}e^{2\lambda m\|\eta^0\|_\infty}. \end{aligned}$$

Como, pelas hipóteses da desigualdade de Carleman, $s_1 = C(T+T^2)$, segue da desigualdade acima que

$$\begin{aligned} 2s_1\alpha &< 2s_1\frac{16}{T^2}e^{2\lambda m\|\eta^0\|_\infty} \\ &= 2C(T+T^2)\frac{16}{T^2}e^{2\lambda m\|\eta^0\|_\infty}, \\ &\leq 2C(1+1/T) \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{-2s_1\alpha} > e^{-2C(1+\frac{1}{T})}, \quad \forall t \in \left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right). \tag{2.80}$$

Como $t \in (0,T)$, temos que

$$t(T-t) < tT < T^2 \tag{2.81}$$

e, consequentemente,

$$t^{-3}(T-t)^{-3} > \frac{1}{T^6}. \tag{2.82}$$

De (2.80) e (2.82) concluímos que

$$e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \geq e^{-2C(1+\frac{1}{T})}\frac{1}{T^6}$$

em $\Omega \times (\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$, conforme queríamos.

(b) Por hipótese, na desigualdade de Carleman, $s_1 = C(T+T^2)$. Podemos supor que λ_1 já foi tomada na desigualdade de Carleman suficientemente grande de forma que

$$e^{\lambda_1(m+1)\|\eta^0\|_\infty} \geq \max\left\{\frac{3}{C_1}, 2\right\},$$

onde $C_1 = C$ é a constante tal que $s_1 = C(T+T^2)$.

Temos então que,

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))} &\leq e^{\lambda_1(m\|\eta^0\|_\infty + \|\eta^0\|_\infty)} \\ &= e^{\lambda_1(m+1)\|\eta^0\|_\infty}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} e^{2\lambda_1 m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda_1(m\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))} &\geq e^{2\lambda_1 m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda_1(m+1)\|\eta^0\|_\infty} \\ &= e^{\lambda_1(m+1)\|\eta^0\|_\infty}(e^{\lambda_1(m-1)\|\eta^0\|_\infty} - 1) \\ &\geq \frac{3}{C_1}(2-1) \\ &= \frac{3}{C_1} \end{aligned}$$

e daí, como $s_1 = C_1(T+T^2)$, isto é, $\frac{s_1}{C_1} = (T+T^2)$, obtemos que

$$\begin{aligned} e^{2s_1\alpha} &= e^{2s_1 \frac{e^{2\lambda_1 m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda_1(m\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))}}{t(T-t)}} \\ &\geq e^{2s_1 \frac{3}{C_1}\frac{1}{t(T-t)}} \\ &= e^{\frac{s_1}{C_1}\frac{6}{t(T-t)}}. \\ &= e^{\frac{6(T+T^2)}{t(T-t)}}. \end{aligned}$$

Como $e^x \geq 1$ e $e^x \geq x$ para $x \geq 0$ e, por (2.81), $\frac{1}{t(T-T)} > \frac{1}{T^2}$, deduzimos que

$$\begin{aligned} e^{2s_1\alpha} &\geq e^{\frac{6(T+T^2)}{t(T-t)}} \\ &> e^{\frac{4(T+T^2)}{t(T-t)}} \\ &= e^{\frac{3(T+T^2)}{t(T-t)}} e^{\frac{T+T^2}{t(T-t)}} \\ &= e^{\frac{3T}{t(T-t)}} \left(e^{\frac{T^2}{t(T-t)}}\right)^3 e^{\frac{T+T^2}{t(T-t)}} \\ &\geq 1 \cdot \left(\frac{T^2}{t(T-t)}\right)^3 \cdot e^{\frac{T+T^2}{T^2}} \\ &= \frac{T^6}{t^3(T-t)^3} e^{\left(1+\frac{1}{T}\right)}. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Da desigualdade acima concluímos que

$$e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \leq e^{-(1+\frac{1}{T})}\frac{1}{T^6} \quad \text{em } \Omega \times (0,T),$$

conforme desejado.

$\square$

Teorema 2.2 *(**Desigualdade de Observabilidade**). Para cada $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, a solução φ do sistema (2.7) satisfaz*

$$|\varphi(0)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt, \tag{2.84}$$

onde C é uma constante positiva que depende de Ω, $\mathcal{O}$ e T.

Demonstração: Podemos supor, por densidade, que a Desigualdade de Carleman é válida para a solução φ do sistema adjunto (2.7).

Fixemos os parâmetros $s = s_1$ e $\lambda = \lambda_1$ dados nas hipóteses da desigualdade de Carleman (2.9) e no Lema 2.3.1. Sendo não-negativas as duas primeiras integrais do lado esquerdo da desigualdade em (2.9) temos que

$$\begin{aligned} s^3\lambda^4 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \, dxdt &\leq C_1 \int\int_Q e^{-2s\alpha}|\varphi_t + \Delta\varphi|^2 \, dxdt \\ &+ C_1 s^3\lambda^4 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \, dxdt. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Como φ é solução de (2.7) temos que $\varphi_t + \Delta\varphi = 0$ q.s. em Q. Assim, de (2.85), resulta que

$$\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \, dxdt \leq C_1 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \, dxdt. \tag{2.86}$$

De (2.86) e lembrando que na desigualdade de Carleman o parâmetro λ foi tomado suficientemente grande para que $\frac{1}{t(T-t)} \leq \xi$, obtemos que

$$\int\int_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \, dxdt \leq C_1 \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \, dxdt.$$

Por outro lado, existe uma constante positiva $M_0 = M_0(\lambda)$ tal que

$$\xi^3 = \frac{e^{3\lambda(m\|\eta^0\|+\eta^0(x))}}{t^3(T-t)^3} \leq \frac{M_0}{t^3(T-t)^3}.$$

Portanto, como foi fixado $s = s_1$, concluímos que

$$\int\int_Q e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dxdt \le C\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dxdt. \quad (2.87)$$

Usando Lema 2.3.1 podemos estimar o lado esquerdo da desigualdade (2.87) por:

$$\begin{aligned} e^{-2C(1+\frac{1}{T})}\frac{1}{T^6}\int\int_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})}|\varphi|^2\,dxdt &= \int\int_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} e^{-2C(1+\frac{1}{T})}\frac{1}{T^6}|\varphi|^2\,dxdt \\ &\le \int\int_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dxdt \\ &\le \int\int_Q e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dxdt; \quad (2.88) \end{aligned}$$

e o lado direito da desigualdade (2.87) por:

$$\begin{aligned} \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dxdt &\le \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-(1+\frac{1}{T})}\frac{1}{T^6}|\varphi|^2\,dxdt \\ &= e^{-(1+\frac{1}{T})}\frac{1}{T^6}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\varphi|^2\,dxdt. \quad (2.89) \end{aligned}$$

Combinando (2.87), (2.88) e (2.89) obtemos que

$$\int\int_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})}|\varphi|^2\,dxdt \le K(\Omega,\mathcal{O},T)\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\varphi|^2\,dxdt. \quad (2.90)$$

onde $K(\Omega,\mathcal{O},T) = e^{(2C-1)\left(1+\frac{1}{T}\right)}$.

Multiplicando $(2.7)_1$ por φ e integrando em $\Omega\times(0,t)$, vale que

$$\begin{aligned} 0 &= -\int\int_{\Omega\times(0,t)}\varphi\varphi_t\,dxdt - \int\int_{\Omega\times(0,t)}\varphi\Delta\varphi\,dxdt \\ &= -\int\int_{\Omega\times(0,t)}\varphi\varphi_t\,dxdt + \int\int_{\Omega\times(0,t)}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\,dxdt \\ &\ge -\int\int_{\Omega\times(0,t)}\varphi\varphi_t\,dxdt \\ &= -\frac{1}{2}\left(|\varphi(t)|^2_{L^2(\Omega)} - |\varphi(0)|^2_{L^2(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\varphi(0)|^2_{L^2(\Omega)} \le |\varphi(t)|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{para todo } t\in(0,T). \quad (2.91)$$

Integrando (2.91) em $(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})$, segue que

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}|\varphi(0)|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \le \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}|\varphi(t)|^2_{L^2(\Omega)}\,dt,$$

isto é,

$$\left|\varphi(0)\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{T}\int\int_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2\, dxdt. \tag{2.92}$$

Finalmente, por (2.3) e (2.92), deduzimos que

$$\left|\varphi(0)\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{T}\int\int_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2\, dxdt \leq \frac{2}{T}K(\Omega,\mathcal{O},T)\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2\, dxdt \tag{2.93}$$

donde concluímos (2.84), com $C = \frac{2}{T}K(\Omega,\mathcal{O},T)$. □

2.4 Controlabilidade Nula

O objetivo dessa seção é provarmos que a controlabilidade nula para o sistema (2.1) é equivalente a desigualdade de observabilidade do sistema adjunto (2.7) vista na Seção 2.3. Mais precisamente, vale o seguinte resultado:

Teorema 2.3 *O sistema (2.1) é nulamente controlável com controle em* $L^2\big(\mathcal{O}\times(0,T)\big)$ *se, e somente se, vale (2.84).*

Demonstração: Inicialmente, suponhamos que (2.84) é satisfeita. Dividiremos a prova em três etapas. Na primeira etapa, mostraremos a existência de um controle v_ε, obtido pela minimização de um funcional J_ε. Na segunda etapa, obteremos controlabilidade aproximada para o sistema (2.1), isto é, mostraremos que a solução y_ε, associada ao controle v_ε satisfaz

$$|y_\varepsilon(T)|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{2.94}$$

Finalmente, na terceira etapa, combinando a controlabilidade aproximada com a limitação do controle, a controlabilidade nula é obtida.

Etapa 1: Minimização do Funcional. Para cada $y^0 \in L^2(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, consideremos $J_\varepsilon : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$J_\varepsilon(\varphi^0) = \frac{1}{2}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2\, dxdt + \varepsilon|\varphi^0|_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)},$$

onde φ é solução de (2.7) com dado inicial φ^0. Usaremos o Teorema 1.4 para garantirmos a existência de um mínimo para o funcional J_ε. Com efeito,

(a) **J_ε é estritamente convexo.** Sejam $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$, com $\varphi^0 \neq \psi^0$, e $\lambda \in (0,1)$. Pela linearidade do sistema adjunto (2.7), temos que se φ e ψ são soluções de (2.7) com dados φ^0 e ψ^0, respectivamente, então $\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi$ é solução de (2.7) com dado $\lambda\varphi^0 + (1-\lambda)\psi^0$. Além disso, temos que $\varphi \neq \psi$, visto que $\varphi^0 \neq \psi^0$. Assim, usando a Desigualdade de Young, vale que

$$\begin{aligned} |\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi|^2 &\leq (|\lambda\varphi| + (1-\lambda)|\psi|)^2 \\ &= \lambda^2|\varphi|^2 + 2\lambda(1-\lambda)|\varphi||\psi| + (1-\lambda)^2|\psi|^2 \\ &< \lambda^2|\varphi|^2 + \lambda(1-\lambda)(|\varphi|^2 + |\psi|^2) + (1-\lambda)|\psi|^2 \\ &= \lambda|\varphi|^2 + (1-\lambda)|\psi|^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$|\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi|^2 < \lambda|\varphi|^2 + (1-\lambda)|\psi|^2, \tag{2.95}$$

onde a desigualdade estrita segue do fato $\varphi \neq \psi$. Portanto, de (2.95), obtemos que

$$J_\varepsilon(\lambda\varphi^0 + (1-\lambda)\psi^0) < \lambda J_\varepsilon(\varphi^0) + (1-\lambda)J_\varepsilon(\psi^0).$$

(b) **J_ε é contínuo.** Seja (φ_n^0) uma sequência de dados iniciais tal que

$$\varphi_n^0 \to \varphi^0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{2.96}$$

Mostraremos que $J_\varepsilon(\varphi_n^0) \to J_\varepsilon(\varphi^0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja φ_n a solução do sistema adjunto associada ao dado inicial φ_n^0 e φ a solução associada ao dado φ^0. Assim,

$$\left| \begin{array}{l} -(\varphi_n - \varphi)_t - \Delta(\varphi_n - \varphi) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ \varphi_n - \varphi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ (\varphi_n - \varphi)(T) = \varphi_n^0 - \varphi^0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.97}$$

Multiplicando $(2.97)_1$ por $\varphi_n - \varphi$, integrando de t a T, usando Identidade de Green e por $(2.97)_2$, resulta que

$$\frac{1}{2}|\varphi_n - \varphi|^2 + \int_t^T \|\varphi_n - \varphi\|^2_{H_0^1(\mathcal{O})}\, dt = \frac{1}{2}|\varphi_n^0 - \varphi^0|^2_{L^2(\Omega)},$$

donde

$$|\varphi_n - \varphi|^2 \leq |\varphi_n^0 - \varphi^0|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.98}$$

Integrando (2.98) em $\mathcal{O} \times (0,T)$, segue que

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi_n - \varphi|^2 \, dxdt \leq T|\varphi_n^0 - \varphi^0|^2_{L^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$\left|\varphi_n - \varphi\right|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leq T|\varphi_n^0 - \varphi^0|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.99}$$

Como $\varphi_n^0 \to \varphi^0$ em $L^2(\Omega)$ concluímos, por (2.99), que $\varphi_n \to \varphi$ em $L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, e assim,

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi_n|^2 \, dxdt \to \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt. \tag{2.100}$$

Usando a Desigualdade de Hölder e (2.84), temos que

$$\begin{aligned}
|(\varphi_n(0), y^0)_{L^2(\Omega)} - (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)}| &= |((\varphi_n - \varphi)(0), y^0)_{L^2(\Omega)}| \\
&\leq |(\varphi_n - \varphi)(0)|_{L^2(\Omega)} |y^0|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sqrt{C}\left(\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi_n - \varphi|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} |y^0|_{L^2(\Omega)} \\
&= \sqrt{C}\left|\varphi_n - \varphi\right|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} |y^0|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $\varphi_n \to \varphi$ em $L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, segue que

$$(\varphi_n(0), y^0)_{L^2(\Omega)} \to (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.101}$$

Por (2.96), (2.100) e (2.101), concluímos que $J_\varepsilon(\varphi_n^0) \to J_\varepsilon(\varphi^0)$ conforme queríamos.

(c) J_ε **é coercivo.** Devemos mostrar que $J_\varepsilon(\varphi^0) \to \infty$ sempre que $|\varphi^0|_{L^2(\Omega)} \to \infty$, onde $\varepsilon > 0$.

De fato, para $\varphi^0 \neq 0$, temos

$$\frac{J_\varepsilon(\varphi^0)}{|\varphi^0|_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{2|\varphi^0|_{L^2(\Omega)}} \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt + \varepsilon + \frac{1}{|\varphi^0|_{L^2(\Omega)}}(\varphi(0), y^0). \tag{2.102}$$

Dividiremos a prova em dois casos.

1º caso: Se

$$\liminf_{|\varphi^0|\to\infty} \frac{1}{|\varphi^0|}\left(\frac{1}{2}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt + (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)}\right) \leq 0,$$

então existe $K > 0$ tal que se $|\varphi^0| > K$, vale que

$$\frac{1}{2}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt + (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)} \leq 0.$$

Por (2.84), segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\varphi|^2\,dxdt &\leq -(\varphi(0),y^0)_{L^2(\Omega)}\\ &\leq |\varphi(0)|_{L^2(\Omega)}|y^0|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq C^{\frac{1}{2}}\left(\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\varphi|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}|y^0|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\varphi|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\leq C|y^0|_{L^2(\Omega)},\qquad \text{para } |\varphi^0|_{L^2(\Omega)}>K. \tag{2.103}$$

Fixando φ^0 tal que $|\varphi^0|_{L^2(\Omega)} > K$, temos que $|n\varphi^0|_{L^2(\Omega)} > K$ para todo $n \geq 1$. Assim, pela linearidade do sistema adjunto (2.7) e por (2.103), resulta que

$$\left(\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\varphi|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\leq \frac{C}{n}|y^0|_{L^2(\Omega)},\qquad \text{para } |\varphi^0|_{L^2(\Omega)}>K,$$

de sorte que

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\varphi|^2\,dxdt=0,\qquad \text{para } |\varphi^0|_{L^2(\Omega)}>K. \tag{2.104}$$

Por (2.84), segue que $\varphi(0) = 0$, donde

$$(\varphi(0),y^0)_{L^2(\Omega)}=0. \tag{2.105}$$

Substituindo (2.104) e (2.105) em (2.102), nos conduz a

$$\frac{J_\varepsilon(\varphi^0)}{|\varphi^0|_{L^2(\Omega)}}=\varepsilon,$$

e assim, J_ε é coercivo.

<u>2º caso:</u> Por outro lado, se

$$\liminf_{|\varphi^0|\to\infty}\frac{1}{|\varphi^0|}\left(\frac{1}{2}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\varphi|^2\,dxdt+(\varphi(0),y^0)_{L^2(\Omega)}\right)\geq 0,$$

então de (2.102), segue que

$$\liminf_{|\varphi^0|\to\infty}\frac{J_\varepsilon(\varphi^0)}{|\varphi^0|_{L^2(\Omega)}}\geq\varepsilon,$$

donde concluímos que J_ε é coercivo.

Finalmente, como o funcional J_ε é estritamente convexo, contínuo e coercivo, então pelo Teorema 1.4, temos que J_ε atinge o seu mínimo em um único $\varphi_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$.

Etapa 2: Controlabilidade Aproximada. Consideremos $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ e y_ε a solução do problema (2.1) com controle v_ε.

Pela dualidade entre os sistemas (2.1) e (2.7), vale que

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi_\varepsilon \varphi \, dxdt = (y_\varepsilon(T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)} - (y_0, \varphi(0))_{L^2(\Omega)}. \tag{2.106}$$

Com efeito, fazendo a dualidade entre a solução φ de (2.7) e os dois lados da igualdade $(y_\varepsilon)_t - \Delta y_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \chi_{\mathcal{O}}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \varphi_\varepsilon \varphi \, dxdt &= \int_0^T \langle (y_\varepsilon)_t, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \, dt - \int_0^T \langle \Delta y_\varepsilon, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \, dt \\
&= (\varphi(T), y_\varepsilon(T))_{L^2(\Omega)} - (\varphi(0), y_\varepsilon(0))_{L^2(\Omega)} - \int_0^T \langle \varphi_t, y_\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \, dt \\
&- \int_0^T \langle \Delta \varphi, y_\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \, dt \\
&= (y_\varepsilon(T), \varphi(T))_{L_2(\Omega)} - (y_\varepsilon(0), \varphi(0))_{L^2(\Omega)} \\
&= (y_\varepsilon(T), \varphi^0)_{L_2(\Omega)} - (y_0, \varphi(0))_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para verificarmos o controle aproximado, analisaremos dois casos:

<u>1º caso:</u> Se $\varphi_\varepsilon^0 = 0$, então sua solução correspondente φ_ε é a solução nula, e portanto $J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0) = 0$. Como φ_ε^0 é o mínimo do funcional J_ε, temos

$$J_\varepsilon(\varphi^0) \geq J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0) = 0 \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega). \tag{2.107}$$

Para $t > 0$, então de (2.107), segue que

$$0 \leq \frac{J_\varepsilon(t\varphi^0)}{t} = \frac{t}{2} \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt + \varepsilon |\varphi^0|_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.108}$$

Fazendo $t \to 0$ em (2.108), resulta que

$$-\varepsilon |\varphi^0|_{L^2(\Omega)} \leq (\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.109}$$

Agora para $t < 0$, então de (2.107), vale que

$$0 \geq \frac{J_\varepsilon(t\varphi^0)}{t} = \frac{t}{2} \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt - \varepsilon |\varphi^0|_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.110}$$

Fazendo $t \to 0$ em (2.110), obtemos que

$$(\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon|\varphi^0|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.111}$$

Como $\varphi_\varepsilon = 0$, segue por (2.106), que

$$(\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)} = (y_\varepsilon(T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.112}$$

De (2.109), (2.111) e (2.112), concluímos que

$$|(y_\varepsilon(T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)}| \leq \varepsilon|\varphi^0|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.113}$$

de sorte que

$$|y_\varepsilon(T)|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon,$$

e assim segue (2.94).

2º caso: Se $\varphi_\varepsilon^0 \neq 0$, diferenciamos J_ε em φ_ε^0. Dado $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0 + h\varphi^0) - J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0)}{h} &= \frac{1}{2}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \frac{|\varphi_\varepsilon + h\varphi|^2 - |\varphi_\varepsilon|^2}{h}\, dxdt \\
&+ \varepsilon\left(\frac{|\varphi_\varepsilon^0 + h\varphi^0|_{L^2(\Omega)} - |\varphi_\varepsilon^0|_{L^2(\Omega)}}{h}\right) \\
&+ (\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)} \\
&= \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (\varphi_\varepsilon\varphi + h|\varphi|^2)\, dxdt + \varepsilon\frac{2(\varphi_\varepsilon^0, \varphi^0)_{L^2(\Omega)} + h|\varphi^0|^2_{L^2(\Omega)}}{|\varphi_\varepsilon^0 + h\varphi^0|_{L^2(\Omega)} + |\varphi_\varepsilon^0|_{L^2(\Omega)}} \\
&+ (\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0$ na expressão acima e sendo φ_ε^0 o mínimo do funcional J_ε, segue que

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi_\varepsilon\varphi\, dxdt + \varepsilon\frac{(\varphi_\varepsilon^0, \varphi^0)_{L^2(\Omega)}}{|\varphi_\varepsilon^0|_{L^2(\Omega)}} + (\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{2.114}$$

para todo $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$.

De (2.106) e (2.114), resulta que

$$(y_\varepsilon(T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)} - (y_0, \varphi(0))_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\frac{(\varphi_\varepsilon^0, \varphi^0)_{L^2(\Omega)}}{|\varphi_\varepsilon^0|_{L^2(\Omega)}} + (\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

ou seja,

$$(y_\varepsilon(T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)} = -\varepsilon\frac{(\varphi_\varepsilon^0, \varphi^0)_{L^2(\Omega)}}{|\varphi_\varepsilon^0|_{L^2(\Omega)}},$$

isto é,

$$|(y_\varepsilon(T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)}| \leq \varepsilon|\varphi^0|_{L^2(\Omega)},$$

de sorte que

$$|y_\varepsilon(T)|_{L^2(\Omega)} = \sup_{|\varphi^0|=1} |(y_\varepsilon(T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)}| \leq \varepsilon,$$

donde segue (2.94).

Etapa 3: Controlabilidade Nula. Tomando $\varphi^0 = \varphi^0_\varepsilon$ em (2.114), lembrando que $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ e usando (2.84), vale que

$$\begin{aligned}
\left|v_\varepsilon\right|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} &= \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi_\varepsilon\varphi_\varepsilon \, dxdt \\
&= -\varepsilon\frac{(\varphi^0_\varepsilon, \varphi^0_\varepsilon)_{L^2(\Omega)}}{|\varphi^0_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}} - (\varphi_\varepsilon(0), y_0)_{L^2(\Omega)} \\
&\leq -(\varphi_\varepsilon(0), y_0)_{L^2(\Omega)} \\
&\leq |\varphi_\varepsilon(0)|_{L^2(\Omega)}|y_0|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(C\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi_\varepsilon|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} |y_0|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sqrt{C}\left|v_\varepsilon\right|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}|y_0|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|v_\varepsilon\right|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leq \sqrt{C}|y_0|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.115}$$

Fazendo a dualidade entre $y_\varepsilon(t)$ e a identidade $(y_\varepsilon)_t(t) - \Delta y_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t)\chi_{\mathcal{O}}(t)$, segue que

$$\langle (y_\varepsilon)_t(t) - \Delta y_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} = \langle v_\varepsilon(t)\chi_{\mathcal{O}}(t), y_\varepsilon(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}. \tag{2.116}$$

Observemos que

$$\langle (y_\varepsilon)_t(t), y_\varepsilon(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_\varepsilon(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}. \tag{2.117}$$

Além disso, vale que

$$-\langle \Delta y_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \nabla y_\varepsilon(t)\cdot\nabla y_\varepsilon(t)\, dx = \|y_\varepsilon(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}, \tag{2.118}$$

e como $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle v_\varepsilon(t)\chi_{\mathcal{O}}(t), y_\varepsilon(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} &\leq \|v_\varepsilon(t)\chi_{\mathcal{O}}(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|y_\varepsilon(t)\|_{H^1_0(\Omega)} \\
&\leq C|v_\varepsilon(t)\chi_{\mathcal{O}}(t)|_{L^2(\Omega)}\|y_\varepsilon(t)\|_{H^1_0(\Omega)} \\
&= C|v_\varepsilon(t)|_{L^2(\mathcal{O})}\|y_\varepsilon(t)\|_{H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.119}$$

Substituindo (2.117), (2.118) e (2.119) em (2.116), concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|y_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq C|v_\varepsilon(t)|_{L^2(\mathcal{O})}\|y_\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{2}|v_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\mathcal{O})} + \frac{1}{2}\|y_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{d}{dt}\|y_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C|v_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\mathcal{O})}. \tag{2.120}$$

Integrando (2.120) de 0 a t, temos

$$\|y_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|y_\varepsilon(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C\int_0^t |v_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\mathcal{O})}\, dt,$$

ou seja,

$$\|y_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C\bigg(\int_0^t |v_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\mathcal{O})}\, dt + \|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}\bigg). \tag{2.121}$$

Portanto, por (2.115) e (2.121), temos que

$$(v_\varepsilon) \text{ é limitada em } L^2(\mathcal{O}\times(0,T)), \tag{2.122}$$

$$(y_\varepsilon) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.123}$$

De (2.122), (2.123), pelo Teorema 1.3 e o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, segue que

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ em } L^2(\mathcal{O}\times(0,T)) \tag{2.124}$$

$$y_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} y \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.125}$$

Como $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, então por (2.123) obtemos que

$$(y_\varepsilon) \text{ é limitada em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.126}$$

donde pelo Teorema 1.3, resulta que

$$y_\varepsilon \rightharpoonup a \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

e portanto,

$$y_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} a \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.127}$$

Por outro lado, de (2.125) e novamente como $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, segue que

$$y_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} y \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.128}$$

Portanto, por (2.127) e (2.128), concluímos que $y = a$ em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, e assim

$$y_\varepsilon \rightharpoonup y \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.129}$$

Mostraremos que y é solução fraca de (2.1) com controle v. Com efeito, como y_ε é solução fraca de (2.1) com controle v_ε, temos

$$\int_\Omega \varphi(t)y_\varepsilon(t)\,dx - \int_\Omega \varphi(0)y_\varepsilon(0)\,dx - \int_0^t\int_\Omega \varphi_t y_\varepsilon\,dx + \int_0^t\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla y_\varepsilon\,dxdt = \int_0^t\int_{\mathcal{O}} \varphi v_\varepsilon\,dxdt, \tag{2.130}$$

para toda $\varphi \in C^0([0,t];L^2(\Omega)) \cap H^1(0,t;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,t;H_0^1(\Omega))$ e para todo $t \in [0,T]$, com $y_\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$.

Como (2.124) implica que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ em $L^2(\mathcal{O}\times(0,t)), \forall t \in (0,T)$, temos

$$\int_0^t\int_{\mathcal{O}} \varphi v_\varepsilon\,dxdt \to \int_0^t\int_{\mathcal{O}} \varphi v\,dxdt. \tag{2.131}$$

Já a convergência (2.129) nos conduz a $y_\varepsilon \rightharpoonup y$ em $L^2(0,t;H_0^1(\Omega)), \forall t \in (0,T)$, donde

$$\int_0^t\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla y_\varepsilon\,dxdt \to \int_0^t\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla y\,dxdt, \tag{2.132}$$

e, em particular, $y_\varepsilon \rightharpoonup y$ em $L^2((0,t)\times\Omega), \forall t \in (0,T)$, donde

$$\int_0^t\int_\Omega \varphi_t y_\varepsilon\,dxdt \to \int_0^t\int_\Omega \varphi_t y\,dxdt. \tag{2.133}$$

As três convergências acima permitem passar o limite nas integrais em (2.130), exceto pelas duas primeiras integrais. Justificaremos a seguir a passagem do limite nestas duas integrais restantes.

Como $-\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ e $y_\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, segue que $-\Delta y_\varepsilon \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, e além disso,

$$\|\Delta y_\varepsilon(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|y_\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{2.134}$$

visto que $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é uma isometria linear (cf. [12]).

De (2.134), temos

$$\begin{aligned}
\|\Delta y_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &= \int_0^T \|\Delta y_\varepsilon(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\,dt \\
&= \int_0^T \|y_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt \\
&= \|y_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{2.135}$$

Por (2.126) e (2.135), resulta que

$$(\Delta y_\varepsilon) \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.136}$$

Como $(y_\varepsilon)_t = v_\varepsilon\chi_{\mathcal{O}} + \Delta y_\varepsilon$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, a imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ nos leva a

$$\begin{aligned} \|(y_\varepsilon)_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq \|v_\varepsilon\chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|\Delta y_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\ &\leq C|v_\varepsilon|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + \|\Delta y_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$(y_\varepsilon)_t \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.137}$$

Por (2.123) e (2.137) e pelas imersões $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, observamos que a sequência y_ε está nas hipóteses do Teorema 1.13. Dessa forma, aplicando tal teorema citado, concluímos que a sequência y_ε é convergente em $C([0,T];L^2(\Omega))$, isto é, existe $b \in C([0,T];L^2(\Omega))$ tal que

$$y_\varepsilon \to b \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.138}$$

Em particular, pela imersão contínua $C([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q)$, temos que

$$y_\varepsilon \rightharpoonup b \text{ em } L^2(Q). \tag{2.139}$$

Por outro lado, da convergência (2.129) temos que $y_\varepsilon \rightharpoonup y$ em $L^2(Q)$. Pela unicidade do limite fraco segue que $b = y$ em $L^2(Q)$, donde $b = y$ q.s em Q. Portanto, $b = y$ em $C([0,T];L^2(\Omega))$, o que implica que

$$y_\varepsilon \to y \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.140}$$

Da convergência em (2.140) temos que

$$y_\varepsilon(0) \to y(0) \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad y_\varepsilon(t) \to y(t) \text{ em } L^2(\Omega),\ \forall t \in [0,T], \tag{2.141}$$

donde

$$\int_\Omega \varphi(t)y_\varepsilon(t)\,dx \to \int_\Omega \varphi(t)y(t)\,dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega \varphi(0)y_\varepsilon(0)\,dx \to \int_\Omega \varphi(0)y(0)\,dx. \tag{2.142}$$

De acordo com (2.131), (2.132), (2.133) e (2.142) podemos passar o limite em (2.130) e concluir que

$$\int_\Omega \varphi(t)y(t)\,dx - \int_\Omega \varphi(0)y(0)\,dx - \int_0^t\int_\Omega \varphi_t y\,dxdt + \int_0^t\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla y\,dxdt = \int_0^t\int_{\mathcal{O}} \varphi v\,dxdt,$$

ou seja, y é solução fraca de (2.1) com controle v.

Finalmente, de (2.141) temos que $y_\varepsilon(T) \to y(T)$ em $L^2(\Omega)$. Por outro lado, de (2.94) segue que $y_\varepsilon(T) \to 0$ em $L^2(\Omega)$. Pela unicidade do limite concluímos que $y(T) = 0$ conforme desejado.

Reciprocamente, se o sistema (2.1) é nulamente controlável, com controle v satisfazendo

$$|v|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leq \sqrt{C}|y_0|_{L^2(\Omega)},$$

para alguma constante $C > 0$, então a solução φ do sistema (2.7) satisfaz

$$|\varphi(0)|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C}\Big(\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.143}$$

com a mesma constante C. De fato, dados $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ e $y = y(y_0, v)$ solução de

$$\left|\begin{array}{l} y_t - \Delta y = v(y_0)\chi_{\mathcal{O}} \quad \text{em} \quad Q, \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y(0) = y_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ y(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \end{array}\right.$$

com

$$|v(y_0)|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leq \sqrt{C}|y_0|_{L^2(\Omega)},$$

obtemos que

$$\begin{aligned} 0 = \int\int_Q (-\varphi_t - \Delta\varphi) y \, dxdt &= \int\int_Q \varphi(y_t - \Delta y) \, dxdt - \int_\Omega \varphi y\Big|_0^T dx \\ &= \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi v(y_0) \, dxdt + \int_\Omega \varphi(0) y_0 \, dxdt, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} |(\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)}| &\leq \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi||v(y_0)| \, dxdt \\ &\leq \Big(\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} |v(y_0)|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \\ &\leq \sqrt{C}|y_0|_{L^2(\Omega)}\Big(\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

para todo $y_0 \in L^2(\Omega)$.

Assim, obtemos (2.143), já que

$$\begin{aligned} |\varphi(0)|_{L^2(\Omega)} &= \sup_{|y_0|=1} |(\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)}| \\ &\leq \sqrt{C}\Big(\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2\, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Elevando a desigualdade acima, obtemos a desigualdade de observabilidade (2.84). □

2.5 Uma Outra Versão para a Estimativa de Carleman

Nesta seção apresentaremos uma outra versão para a Desigualdade de Carleman (2.9), muito utilizada em outros contextos matemáticos com essencial aplicabilidade. Mais precisamente, o seguinte resultado é válido:

Corolário 2.1 *Existe uma constante $\lambda_1 = C(\Omega, \mathcal{O}) \geq 1$, $s_1 = C(\Omega, \mathcal{O})(T + T^2)$ e $C_1(\Omega, \mathcal{O})$ tal que, para quaisquer $\lambda \geq \lambda_1$ e $s \geq s_1$, vale a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned} &s^{m-4}\lambda^{m-3}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}\left(|q_t|^2 + |\Delta q|^2\right) dxdt + s^{m-2}\lambda^{m-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\, dxdt \\ &+s^m\lambda^{m+1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\, dxdt \leq C_1\Big(s^{m-3}\lambda^{m-3}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-3}\,|q_t+\Delta q|^2\, dxdt \\ &+s^m\lambda^{m+1}\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\, dxdt\Big). \end{aligned} \tag{2.144}$$

para toda $q \in C^2(\overline{Q})$ com $q = 0$ sobre Σ.

Demonstração: Seja $q \in C^2(\overline{Q})$ tal que $q = 0$ sobre Σ. Denotemos

$$z = \xi^{\tilde{m}} q \quad \text{e} \quad \tilde{m} = \frac{m-3}{2}.$$

É claro que $z \in C^2(\overline{Q})$ e $z = 0$ sobre Σ. Logo, pelo Teorema 2.1, existem $\lambda_1, s_1 > 0$ tais que para $\lambda \geq \lambda_1$ e $s \geq s_1$ vale a desigualdade de Carleman

$$\begin{aligned} &s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|z_t|^2 + |\Delta z|^2\right) dx\,dt + s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla z|^2\, dx\,dt \\ &+s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|z|^2\, dx\,dt \leq C_1\Big(\int\int_Q e^{-2s\alpha}\,|z_t+\Delta z|^2\, dx\,dt \\ &+s^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|z|^2\, dx\,dt\Big). \end{aligned} \tag{2.145}$$

Para lidar com desigualdade acima, usaremos a notação:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(z) = s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|z_t|^2+|\Delta z|^2\right)\,dx\,dt + s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla z|^2\,dx\,dt\\ + s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|z|^2\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{2.146}$$

Usando o fato que $|a+b|^2 \geq \frac{1}{2}|a|^2 - |b|^2$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e que $|\xi_t| \leq 3T\xi^2$, temos

$$\begin{aligned}|z_t|^2 &= |\xi^{\tilde{m}}q_t + \tilde{m}\xi^{\tilde{m}-1}\xi_t q|^2\\ &\geq \frac{1}{2}|\xi^{\tilde{m}}q_t|^2 - |\tilde{m}\xi^{\tilde{m}-1}\xi_t q|^2\\ &= \frac{1}{2}|\xi^{\tilde{m}}q_t|^2 - \tilde{m}^2\xi^{2(\tilde{m}-1)}|\xi_t|^2|q|^2\\ &= \frac{1}{2}|\xi^{\tilde{m}}q_t|^2 - \tilde{m}^2\xi^{m-5}|\xi_t|^2|q|^2\\ &\geq \frac{1}{2}|\xi^{\tilde{m}}q_t|^2 - \tilde{m}^2\xi^{m-5}9T^2\xi^4|q|^2\\ &\geq \frac{1}{2}\xi^{m-3}|q_t|^2 - C\xi^{m-1}|q|^2.\end{aligned} \tag{2.147}$$

e

$$\begin{aligned}|\nabla z|^2 &= |\xi^{\tilde{m}}\nabla q + \tilde{m}\xi^{\tilde{m}}\lambda q\nabla\eta^0|^2\\ &\geq \frac{1}{2}|\xi^{\tilde{m}}\nabla q|^2 - |\tilde{m}\xi^{\tilde{m}}\lambda q\nabla\eta^0|^2\\ &\geq \frac{1}{2}\xi^{m-3}|\nabla q|^2 - C\lambda^2\xi^{m-3}|q|^2.\end{aligned} \tag{2.148}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}|\Delta z|^2 &= \left|(\tilde{m}^2\xi^{\tilde{m}}\lambda^2|\nabla\eta^0|^2 + \tilde{m}\lambda\xi^{\tilde{m}}\Delta\eta^0)q + 2\tilde{m}\xi^{\tilde{m}}\lambda\nabla\eta^0\cdot\nabla q + \xi^{\tilde{m}}\Delta q\right|^2\\ &\geq \frac{1}{2}\left|\xi^{\tilde{m}}\Delta q\right|^2 - \left|(\tilde{m}^2\xi^{\tilde{m}}\lambda^2|\nabla\eta^0|^2 + \tilde{m}\lambda\xi^{\tilde{m}}\Delta\eta^0)q + 2\tilde{m}\xi^{\tilde{m}}\lambda\nabla\eta^0\cdot\nabla q\right|^2\\ &\geq \frac{1}{2}\xi^{m-3}\left|\Delta q\right|^2 - C\left(|\tilde{m}^2\xi^{\tilde{m}}\lambda^2|\nabla\eta^0|^2 q|^2 + |\tilde{m}\lambda\xi^{\tilde{m}}\Delta\eta^0 q|^2 + |2\tilde{m}\xi^{\tilde{m}}\lambda\nabla\eta^0\cdot\nabla q|^2\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\xi^{m-3}|\Delta q|^2 - C(\lambda^4\xi^{m-3}|q|^2 + \lambda^2\xi^{m-3}|q|^2 + \lambda^2\xi^{m-3}|\nabla q|^2)\\ &\geq \frac{1}{2}\xi^{m-3}|\Delta q|^2 - C(\lambda^4\xi^{m-1}|q|^2 + \lambda^2\xi^{m-3}|\nabla q|^2).\end{aligned} \tag{2.149}$$

Agora, vamos estimar cada integral de $\mathcal{I}(z)$ pode utilizando (2.147)-(2.149):

$$\begin{aligned}
&s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}|z_t|^2\,dx\,dt\\
&\quad\geq s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(\frac{1}{2}\xi^{m-3}|q_t|^2 - C\xi^{m-1}|q|^2\right)dx\,dt\\
&\quad\geq \frac{1}{2}s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}|q_t|^2\,dx\,dt - Cs^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|q|^2\,dx\,dt,\\
&s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}|\Delta z|^2\,dx\,dt\\
&\quad\geq s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(\frac{1}{2}\xi^{m-3}|\Delta q|^2 - C(\lambda^4\xi^{m-1}|q|^2 + \lambda^2\xi^{m-3}|\nabla q|^2)\right)dx\,dt\\
&\quad\geq \frac{1}{2}s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}|\Delta q|^2\,dx\,dt - Cs^{-1}\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|q|^2\,dx\,dt\\
&\qquad - Cs^{-1}\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}|\nabla q|^2\,dx\,dt,\\
&s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla z|^2\,dx\,dt\\
&\quad\geq s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi\left(\frac{1}{2}\xi^{m-3}|\nabla q|^2 - C\lambda^2\xi^{m-3}|q|^2\right)dx\,dt\\
&\quad\geq \frac{1}{2}s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dx\,dt - Cs\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-1}|q|^2\,dx\,dt
\end{aligned}$$

e

$$s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|z|^2\,dx\,dt = s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\,dx\,dt$$

Somando as quatro últimas desigualdades acima, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(z) &= e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|z_t|^2 + |\Delta z|^2\right) dx\,dt + s\lambda^2 \int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla z|^2\,dx\,dt \\
&\quad + s^3\lambda^4 \int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|z|^2\,dx\,dt \\
&\geq \frac{1}{2}s^{-1}\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}|q_t|^2\,dx\,dt - Cs^{-1}\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|q|^2\,dx\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2}s^{-1}\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}|\Delta q|^2\,dx\,dt - Cs^{-1}\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|q|^2\,dx\,dt \\
&\quad - Cs^{-1}\lambda^2\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}|\nabla q|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}s\lambda^2\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dx\,dt \\
&\quad - Cs\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-1}|q|^2\,dx\,dt + s^3\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m}|q|^2\,dx\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(s^{-1}\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}(|q_t|^2 + |\Delta q|^2)\,dx\,dt + s\lambda^2\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dx\,dt\right) \\
&\quad + s^3\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m}|q|^2\,dx\,dt \\
&\quad - Cs^{-1}\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|q|^2\,dx\,dt - Cs^{-1}\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|q|^2\,dx\,dt \\
&\quad - Cs\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-1}|q|^2\,dx\,dt - Cs^{-1}\lambda^2\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}|\nabla q|^2\,dx\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(s^{-1}\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}(|q_t|^2 + |\Delta q|^2)\,dx\,dt + s\lambda^2\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dx\,dt\right. \\
&\quad \left.+ s^3\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m}|q|^2\,dx\,dt\right) + \frac{1}{2}s^3\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m}|q|^2\,dx\,dt \\
&\quad - Cs\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-1}\left(s^{-2}\lambda^{-4}\xi^{-1} + s^{-2}\xi^{-1} + 1\right)|q|^2\,dx\,dt \\
&\quad - Cs^{-1}\lambda^2\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}|\nabla q|^2\,dx\,dt
\end{aligned}
$$

Observando que $s^{-2}\lambda^{-4}\xi^{-1} + s^{-2}\xi^{-1} + 1 \geq 1$, já que $s, \lambda\xi \geq 1$, segue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(z) &\geq \frac{1}{2}\left(s^{-1}\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}(|q_t|^2 + |\Delta q|^2)\,dx\,dt + s\lambda^2\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dx\,dt\right. \\
&\quad \left.+ s^3\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m}|q|^2\,dx\,dt\right) \\
&\quad - C\left(s\lambda^4\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-1}|q|^2\,dx\,dt + s^{-1}\lambda^2\int\!\!\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}|\nabla q|^2\,dx\,dt\right).
\end{aligned}
\tag{2.150}
$$

Multiplicando a desigualdade acima por 4 e reorganizando os termos segue que

$$
\begin{aligned}
& s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}(|q_t|^2+|\Delta q|^2)\,dx\,dt + 2s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dx\,dt \\
& +2s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m}|q|^2\,dx\,dt \\
& \qquad \le 4\mathcal{I}(z) + 4C\left(s\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-1}|q|^2\,dx\,dt + s^{-1}\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}|\nabla q|^2\,dx\,dt\right),
\end{aligned}
$$

Como $s,\lambda,\xi \ge 1$ são grandes, podemos tomá-los de forma que $s \ge 4C$. Assim, a partir da desigualdade acima que

$$
\begin{aligned}
& s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}(|q_t|^2+|\Delta q|^2)\,dx\,dt + 2s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dx\,dt \\
& +2s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m}|q|^2\,dx\,dt \\
& \qquad \le 4\mathcal{I}(z) + 4Cs^{-1}\left(s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m}|q|^2\,dx\,dt + s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dx\,dt\right), \\
& \qquad \le 4\mathcal{I}(z) + s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m}|q|^2\,dx\,dt + s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

Daí, concluímos que

$$
\begin{aligned}
& s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}(|q_t|^2+|\Delta q|^2)\,dx\,dt + s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dx\,dt \\
& +s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m}|q|^2\,dx\,dt \le 4\mathcal{I}(z).
\end{aligned} \tag{2.151}
$$

Agora, observando que $|\xi_t| \le 3T\xi^2$, $\xi \ge 1$ e$\lambda \ge 1$, temos que

$$
\begin{aligned}
|z_t+\Delta z|^2 &= \big|\xi^{\tilde m}q_t + \tilde m\xi^{\tilde m-1}\xi_t q + (\tilde m^2\xi^{\tilde m}\lambda^2|\nabla\eta^0|^2 + \tilde m\lambda\xi^{\tilde m}\Delta\eta^0)q \\
&\quad +2\tilde m\xi^{\tilde m}\lambda\nabla\eta^0\cdot\nabla q + \xi^{\tilde m}\Delta q\big|^2 \\
&= \big|\xi^{\tilde m}(q_t+\Delta q) + (\tilde m\xi^{\tilde m-1}\xi_t + \tilde m^2\xi^{\tilde m}\lambda^2|\nabla\eta^0|^2 + \tilde m\lambda\xi^{\tilde m}\Delta\eta^0)q \\
&\quad +2\tilde m\xi^{\tilde m}\lambda\nabla\eta^0\cdot\nabla q\big|^2 \\
&\le C\big(|\xi^{\tilde m}|^2|q_t+\Delta q|^2 + |(\tilde m\xi^{\tilde m-1}\xi_t + \tilde m^2\xi^{\tilde m}\lambda^2|\nabla\eta^0|^2 + \tilde m\lambda\xi^{\tilde m}\Delta\eta^0)|^2|q|^2 \\
&\le C\big(\xi^{m-3}|q_t+\Delta q|^2 + (\tilde m^2\xi^{m-5}|\xi_t|^2 + \tilde m^4\xi^{m-3}\lambda^4|\nabla\eta^0|^4 + \tilde m^2\lambda^2\xi^{m-3}|\Delta\eta^0|^2\big)|q|^2 \\
&\quad +4\tilde m^2\xi^{m-3}\lambda^2|\nabla\eta^0|^4|\nabla q|^2\big) \\
&\le C\big(\xi^{m-3}|q_t+\Delta q|^2 + (\xi^{m-1}+\lambda^4\xi^{m-3}+\lambda^2\xi^{m-3}\big)|q|^2 + \lambda^2\xi^{m-3}|\nabla q|^2\big) \\
&\le C\big(\xi^{m-3}|q_t+\Delta q|^2 + \lambda^4\xi^{m-1}|q|^2 + \lambda^2\xi^{m-3}|\nabla q|^2\big).
\end{aligned}
$$

Daí, segue que

$$
\begin{aligned}
&C_1\left(\int\int_Q e^{-2s\alpha}\left|z_t+\Delta z\right|^2\,dx\,dt+s^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|z|^2\,dx\,dt\right)\\
&\quad\leq C\int\int_Q e^{-2s\alpha}\big(\xi^{m-3}|q_t+\Delta q|^2+\lambda^4\xi^{m-1}|q|^2+\lambda^2\xi^{m-3}|\nabla q|^2\big)\,dx\,dt\\
&\qquad+Cs^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\,dx\,dt\\
&\quad=C\left(\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-3}|q_t+\Delta q|^2\,dx\,dt+s^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\,dx\,dt\right)\\
&\qquad+\int\int_Q e^{-2s\alpha}\big(\lambda^4\xi^{m-1}|q|^2+\lambda^2\xi^{m-3}|\nabla q|^2\big)\,dx\,dt,
\end{aligned}
$$

donde, combinado com (2.145) nos leva a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(z)&\leq C\int\int_Q e^{-2s\alpha}\big(\xi^{m-3}|q_t+\Delta q|^2+\lambda^4\xi^{m-1}|q|^2+\lambda^2\xi^{m-3}|\nabla q|^2\big)\,dx\,dt\\
&\quad+Cs^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\,dx\,dt\\
&=C\left(\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-3}|q_t+\Delta q|^2\,dx\,dt+s^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\,dx\,dt\right)\\
&\quad+\int\int_Q e^{-2s\alpha}\big(\lambda^4\xi^{m-1}|q|^2+\lambda^2\xi^{m-3}|\nabla q|^2\big)\,dx\,dt
\end{aligned}
\tag{2.152}
$$

Como $s,\lambda,\xi\geq 1$ são grandes, podemos tomá-los de forma que $s\geq 8$. Logo, utilizando a desigualdade (2.151), podemos observar que

$$
\begin{aligned}
&\int\int_Q e^{-2s\alpha}\big(\lambda^4\xi^{m-1}|q|^2+\lambda^2\xi^{m-3}|\nabla q|^2\big)\,dx\,dt\\
&\quad\leq s^{-1}\left(s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\,dx\,dt+s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dx\,dt\right)\\
&\quad\leq s^{-1}4\mathcal{I}(z)\\
&\quad\leq \frac{1}{2}\mathcal{I}(z)
\end{aligned}
\tag{2.153}
$$

De (2.152) e (2.153), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(z)&\leq C\int\int_Q e^{-2s\alpha}\big(\xi^{m-3}|q_t+\Delta q|^2+\lambda^4\xi^{m-1}|q|^2+\lambda^2\xi^{m-3}|\nabla q|^2\big)\,dx\,dt\\
&\quad+Cs^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\,dx\,dt\\
&=C\left(\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-3}|q_t+\Delta q|^2\,dx\,dt+s^3\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\,dx\,dt\right).
\end{aligned}
\tag{2.154}
$$

Finalmente, combinando (2.151) e (2.154) concluímos que

$$
\begin{aligned}
&s^{-1}\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-4}\left(|q_t|^2+|\Delta q|^2\right)\,dxdt+s\lambda^2\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla q|^2\,dxdt\\
&+s^3\lambda^4\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\,dxdt\le C_1\Bigg(\int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{m-3}\left|q_t+\Delta q\right|^2\,dxdt\\
&+s^2\lambda^4\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^m|q|^2\,dxdt\Bigg).
\end{aligned}
\tag{2.155}
$$

Multiplicando (2.155) por $s^{m-3}\lambda^{m-3}$, obtemos (2.144). $\square$

2.6 Apêndice A

Neste apêndice, justificaremos as derivadas e estimativas em (2.16) - (2.21). De fato, notemos que

$$
\begin{aligned}
\alpha_{x_i} &= \left(-\frac{e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))}}{t(T-t)}\right)_{x_i}\\
&= -\xi_{x_i}\\
&= -\lambda\eta^0_{x_i}\frac{e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))}}{t(T-t)}\\
&= -\lambda\eta^0_{x_i}\xi.
\end{aligned}
$$

Para α_t, segue

$$
\begin{aligned}
|\alpha_t| &= \left|\left(\frac{e^{2\lambda\, m\|\eta^0\|_\infty}-e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))}}{t(T-t)}\right)_t\right|\\
&= \left|-(T-2t)\cdot\frac{(e^{2\lambda\, m\|\eta^0\|_\infty}-e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))})}{t^2(T-t)^2}\right|\\
&= \frac{|T-2t|}{t(T-t)}\cdot\frac{(e^{2\lambda\, m\|\eta^0\|_\infty}-e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))})}{t(T-t)}\\
&= |T-2t|\frac{1}{t(T-t)}\cdot\alpha\\
&\le (|T|+|2t|)\xi\alpha\\
&\le 3T\xi\left(\frac{e^{2\lambda\, m\|\eta^0\|_\infty}}{t(T-t)}-\xi\right)\\
&\le 3T\xi(\xi e^{2\lambda\, m\|\eta^0\|_\infty}-\xi)\\
&= CT\xi^2,
\end{aligned}
$$

onde $C = 3T(e^{2\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - 1)$.

Para ξ_t, temos

$$\begin{aligned} |\xi_t| &= \left| -(T-2t)\frac{e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t^2(T-t)^2} \right| \\ &= |T-2t|\frac{1}{t(T-t)}\xi \\ &\leq 3T\xi^2. \end{aligned}$$

Para $\nabla\alpha_t$, segue

$$\begin{aligned} (\alpha_t)_{x_i} &= \left(-(T-2t)\frac{1}{t(T-t)}\alpha \right)_{x_i} \\ &= (T-2t)\frac{1}{t(T-t)}\lambda\xi\eta^0_{x_i}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\nabla\alpha_t = \lambda\frac{T-2t}{t(T-t)}\xi\nabla\eta^0.$$

2.7 Apêndice B

Mostraremos que $\psi(x,0) = \psi(x,T) = 0$ e $\psi_{x_i}(x,0) = \psi_{x_i}(x,T) = 0$, para todo $x \in \Omega$, as quais foram utilizadas em (2.38) . Com efeito, observando que

$$e^{-s\alpha} = e^{-s\alpha/2}e^{-s\alpha/2} \leq \frac{4}{s^2\alpha^2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} |\psi(x,0)| &= \lim_{t\to 0^+} |\psi(x,t)| = \lim_{t\to 0^+} e^{-s\alpha(x,t)}|q(x,t)| \\ &\leq \lim_{t\to 0^+} \frac{4}{s^2\alpha(x,t)^2}|q(x,t)| \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $1/\alpha^2 \to 0$ $(t \to 0)$ e q é limitada. Analogamente, vale que $\psi(x,T) = 0$.

Agora,

$$\begin{aligned} |\psi_{x_i}(x,0)| &= \lim_{t\to 0^+} |\psi_{x_i}(x,t)| \\ &\leq \lim_{t\to 0^+} s\alpha_{x_i}(x,t)e^{-s\alpha(x,t)}|q(x,t)| + \lim_{t\to 0^+} e^{-s\alpha(x,t)}|q_{x_i}(x,t)| \\ &\leq \lim_{t\to 0^+} s\lambda\eta^0_{x_i}(x)\xi(x,t)\frac{4}{s^2\alpha(x,t)^2}|q(x,t)| + \lim_{t\to 0^+} \frac{4}{s^2\alpha(x,t)^2}|q_{x_i}(x,t)| \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\xi/\alpha^2 \to 0$, $1/\alpha^2 \to 0$ e q, q_{x_i} são limitadas. Analogamente, podemos obter que $\psi_{x_i}(x,T) = 0$.

2.8 Considerações Finais

1. Resultados semelhantes obtidos nesse trabalho podem ser estendidos ao estudarmos a EDP linear com parte principal complexa como segue

$$\left| \begin{array}{l} (a+ib)y_t - \Delta y = v\chi_{\mathcal{O}} \quad \text{em} \quad Q, \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y(0) = y_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{2.156}$$

   Para maiores detalhes, ver [13].

   Notemos que:

   (i) Quando $a = 1$ e $b = 0$, o sistema (2.156) recai no problema (2.1).

   (ii) Quando $a = 0$ e $b = 1$ temos a equação de Schrödinger linear, onde existem vários estudos e problemas em aberto.

2. Os resultados obtidos nesse trabalho também podem ser estendidos ao sistema parabólico não linear

$$\left| \begin{array}{l} p_t(x,t) - \Delta p(x,t) + g(p(x,t)) = \chi_{\mathcal{O}} u(x,t) \quad \text{em} \quad Q, \\ p(x,t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ p(x,0) = p_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right.$$

   onde $u \in L^2(Q)$, $p_0 \in L^2(\Omega)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função globalmente lipschitz de classe C^1 com $g(0) = 0$.

   Para maiores detalhes, ver [14].

Bibliografia

[1] RUSSEL, D. L., *Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations,* Recent Progress and Open Questions, SIAM Rev., 20.

[2] LEBEAU, G., ROBBIANO, L., *Contrôle Exacte de L'Équation de la Chaleur,* Communications in Partial Differential Equations, v. 20, p.335–356, 1995.

[3] FURSIKOV, A. V., IMANUVILOV, O. Y., *Controllability of Evolution Equations,* Lecture Notes Ser. **34,** Reseach Institute of Mathematics, Seoul National University, Korea, 1996.

[4] FERNÁNDEZ-CARA. E., GUERRERO, S., *Global Carleman Inequalities for Parabolic Systems and Applications to Controllability,* Siam J. Control Optim, v. 45, nº 4, p.1395–1446, 2006.

[5] ARARUNA, F. D., FERNÁNDEZ-CARA, E., SANTOS, M. C., *Stackelberg-Nash exact controllability for linear and semilinear parabolic equations.* ESAIM. Contrôle, Optimisation et Calculus des Variations, v. 21, p. 835-856, 2015.

[6] ARARUNA, F.D., FERNÁNDEZ-CARA, E., GUERRERO, S., SANTOS, M. C., *New results on the Stackelberg-Nash exact control of linear parabolic equations.* Systems & Control Letters, v. 104, p. 78-85, 2017.

[7] JESUS, I. P., LIMA, O. A, CLARK, M. R., *Análise Funcional: Uma introdução*, 1ª. ed. Teresina: EDUFPI, 2018.

[8] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2011.

[9] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, Second edition. Graduate Studies in Mathematics, v. 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[10] SIMON, J., *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Annali de Matematica Pura ed Applicata, v. 146 , p. 65-96, 1986.

[11] LIONS, J.- L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[12] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*, 5a. edição. Rio de Janeiro: Editora IM-UFRJ, 2006.

[13] FU, X., A Weighted Identity for Partial Differential Operators of Second Order and its Applications. C. R. Acad. Sci. Paris Série **I** (342), 579-584, 2006.

[14] LIMACO, J., CLARK, H., MENEZES, S., MEDEIROS, L.A., Carleman Inequality and Null Controllability for Parabolic Equations, v. 40, 173-211, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2010.