Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Massa de Hawking e rigidez de superfícies mínimas em variedades tridimensionais

Jean Carlos Sousa de Brito

Teresina - 2021

Jean Carlos Sousa de Brito

Dissertação de Mestrado:

Massa de Hawking e rigidez de superfícies mínimas em variedades tridimensionais

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista

Teresina - 2021

Ficha catalográfica editada pela biblioteca setorial do CCN.

de Brito, J. C. S.

xxxx Massa de Hawking e rigidez de superfícies mínimas em variedades tridimensionais.

Jean C. S. de Brito – Teresina: 2021.

Orientador: Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista.

1. Área de Concentração

CDD 516.36

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Massa de Hawking e rigidez de superfícies mínimas em variedades tridimensionais

Jean Carlos Sousa de Brito

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 16 de Julho de 2021.

Banca Examinadora:

Rondinelle Marcolino Batista

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista - Orientador

Barnabé Pessoa

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima - UFPI

Eraldo Almeida Lima Júnior

Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior - UFPB

Sandoel de Brito Vieira

Prof. Dr. Sandoel de Brito Vieira - IFCE

Dedico este trabalho aos meus queridos pais: Adriana e Raimundo (Nonato), sem eles eu nada seria.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus pela dádiva da vida.

Agradeço a minha familia que tiveram um papel importante para exercução desta etapa, em especial aos meus pais Adriana e Raimundo (Nonato) pela confiança depositada em mim. Sempre me apoiando sem pressionar por nada, nem mesmo por notas.

Agradecimento muito especial as minhas irmãs Jane Kelly (Janinha) e Maria da Paz (Paizinha) pela nossa amizade e companheirismo. Ao José Edilson por ter sido mais que um irmão e por todas as dúvidas tiradas!

Agradeço ao professor Antônio Amaral (Amaral) por ter acreditado em mim quando nem eu mesmo acreditava e com seus incetivos foi me "devolvendo" a confiança e me permitindo sonhar com uma vida que até então não me sentia capaz de conquistar!

Agradeço ao departamento de matemática da UFPI por ter acolhido-me de modo tão caloroso, em especial aos professores: Paulo alexandre, Newton Luis, Jurandir, João Xavier, Barnabé Pessoa, Franciane Vieira, Vitaliano Amaral, Mykael, Kelton Bezerra, Leandro Pessoa, Gleison Nascimento, José Francisco, Halyson Baltazar. Um agradecimento muito especial ao Rondinelle Marcolino, meu pai acadêmico, amigo e um grande exemplo.

Agradeço aos amigos conquistados ao longo da minha trajetória, desde os amigos da infância, aos que conheci na universidade. Não me arriscarei a citar nomes para que não seja infortunadamente traído pela minha memória, mas gostaria de salientar que todos foram, da sua maneira, muito importantes na minha formação como pessoa.

Agradeço aos professores Prof. Dr. Barnabé Pessoa, Prof. Dr. Eraldo Almeida e Prof. Dr. Sandoel Vieira por terem aceito o convite para compor minha banca.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq e ao Instituto Tim em parceria com a OBMEP) pelo apoio financeiro.

"O mundo não é um mar de rosas; é um lugar sujo, um lugar cruel, que não quer saber o quanto você é durão. Vai botar você de joelhos e você vai ficar de joelhos para sempre se você deixar. Você, eu, ninguém vai bater tão forte como a vida, mas não se trata de bater forte. Se trata de quanto você aguenta apanhar e seguir em frente, o quanto você é capaz de aguentar e continuar tentando. É assim que se consegue vencer."

Sylvester Stallone.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a rigidez de esferas mínimas bidimensionais que maximizam localmente a massa de Hawking em variedades Riemannianas tridimensionais com curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante positiva. Assumindo estabilidade estrita de tal superfície, provaremos que existe uma vizinhança da mesma no ambiente isométrica a uma métrica de deSitter-Schwarzschild. Tal resultado foi obtido por D. Máximo e I. Nunes no artigo *Hawking mass and local rigidity of minimal two-spheres in three-manifolds.*

Palavras − chave : Massa de Hawking, métricas deSitter-Schwarzschild, Curvatura Média Constante (CMC), estabilidade.

Abstract

In this dissertation, we study the rigidity of two-dimensional minimal spheres that locally maximize the Hawking mass in three-dimensional Riemannian manifolds with a positive lower bound on its scalar curvature. Assuming strict stability of such a surface, we will prove that there is a neighborhood of it in the isometric to one of the deSitter-Schwarzschild metric. This result was obtained by D. Máximo and I. Nunes in their article *Hawking mass and local rigidity of minimal two-spheres in three-manifolds.*

Keywords : Hawking mass, deSitter-Schwarzschild metrics, Constant Mean Curvature (CMC), stability

Sumário

Introdução

Nas últimas décadas, superfícies mínimas estáveis provaram ser uma ferramenta muito importante no estudo de variedades Riemannianas tridimensionais (M^3, g) com curvatura escalar limitada por baixo.

Foram Schoen e Yau em [20] que observaram pela primeira vez que a segunda fórmula de variação de área fornece uma interação interessante entre a curvatura escalar de uma variedade (M^3, g) e a curvatura total de uma superfície mínima estável $\Sigma \subset M$, que por sua vez está relacionado à topologia de Σ. Como consequência, eles provaram que se (M, g) tem curvatura escalar não negativa e Σ é dois lados e compacto, então ou Σ é uma esferas bidimensional ou um toro plano totalmente geodésico.

Motivado pelo resultado acima, Cai e Galloway em [6] mostraram que se (M^3, g) é uma variedade com curvatura escalar não negativa e Σ é um toro mergulhado localmente minimizante de área (que é uma condição mais forte que a estabilidade), então Σ é um plano totalmente geodésico, e uma vizinhança de Σ em M é isométrico ao produto Riemanniano $(-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$. Recentemente Bray, Brendle e Neves em [3] obtiveram o mesmo resultado de rigidez para o caso em que Σ é uma esfera topológica bidimensional, mergulhada e localmente minimizante de área em (M^3, g) com curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante positiva. Posteriormente, I. Nunes em [17] obteve um resultado de rigidez semelhante para o caso em que Σ é uma superfície de Riemann compacta de genero maior que 1 e o ambiente possui curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante negativa. Mais tarde Micallef e Moraru em [16], encontraram um argumento alternativo que unificou os resultados acima. Além disso, um resultado de rigidez semelhante para planos projetivos e minimizante de área foi obtido por Bray, Brendle, Eichmair e Neves em [4].

Uma das mais importantes aplicações da relação entre a curvatura escalar de uma variedade Riemanniana (M^3, g) e a curvatura total de uma superfície mínima estável $\Sigma \subset$

M, foi obtida por Schoen e Yau em [21] na prova do celebrado teorema da massa positiva. O teorema da massa positiva é um resultado fundamental que relaciona a geometria Riemanniana e a teoria da relatividade geral. O teorema afirma que a massa ADM de uma variedade Riemanniana completa assintoticamente plana (M^n, g) com $3 \leqslant n \leqslant 7$ e curvatura escalar não negativa é sempre não negativa e é zero se, e somente se, M é isométrico ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Mais tarde, Witten em [23] obteve uma prova independente do teorema da massa positiva para dimensão arbitrária, usando métodos de spin.

Outro resultado importante no contexto da teoria da relatividade geral que envolve superfícies mínimas e curvatura escalar é a desigualdade de Penrose provada por Huisken e Ilmanen em [12], e de forma independente por Bray em [2]. Esta afirma que, se (M^3, g) é uma variedade Riemanniana completa assintoticamente plana com curvatura escalar não negativa, e fronteira $\Sigma = \partial M \neq \emptyset$ sendo uma duas esfera mínima *outer-most*, então a massa ADM de M é maior ou igual a massa de Hawking de Σ, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, M for isométrica a metade da métrica de Schwarzschild em $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. A massa de Hawking de uma superfície compacta $\Sigma \subset (M^3, g)$, denotada por $m_H(\Sigma)$ é definida como

$$m_H(\Sigma) = \left(\frac{|\Sigma|}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma H^2 d\sigma - \frac{\Lambda}{24\pi}|\Sigma|\right),$$

onde H é a curvatura média de Σ e $\Lambda = \inf_M R$, sendo R a curvatura escalar do ambiente.

A métrica de Schwarzschild em $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ pode ser vista como uma métrica Riemanniana completa, rotacionalmente simétrica em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ com curvatura escalar constante igual a zero, e o slice $\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{S}^2$ é a esfera mínima *outer-most*. Cada métrica de Schwarzschild é determinada pela massa de Hawking de Σ_0. Essas métricas aparecem como slices tipo espaço do espaço-tempo de Schwarzschild que é uma solução para a equação de Einstein no vácuo com constante cosmológica nula.

Outra classe de métricas em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ são as métricas de deSitter-Schwarzschild. Essas são métricas periódicas completas, rotacionalmente simétricas em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ com curvatura escalar constante positiva, além disso $\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{S}^2$ é uma esfera mínima estritamente estável. Elas aparecem como fatias especiais do espaço-tempo deSitter-Schwarzschild, que é uma solução para a equação de Einstein do vácuo com uma constante cosmológica positiva. As métricas deSitter-Schwarzschild contituem uma família de métricas a um parâmetro $\{g_a\}_{a \in (0,1)}$ e, neste trabalho, escalamos cada g_a para ter curvatura escalar igual a 2 (consulte a seção sobre essa métrica no capítulo 2 para uma descrição mais detalhada).

Nessa dissertação, provamos alguns resultados com relação as métricas de deSitter-Schwarzschild g_a em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$.

Começamos considerando a situação geral de uma superfície compacta de dois lados Σ que é um ponto crítico da massa de Hawking em uma variedade (M, g) com $R \geqslant 2$. Escrevendo a equação de Euler-Lagrange da massa, provamos que sempre que a curvatura média de Σ é não-negativa, deve ser mínima ou umbílica com $R = 2$ e curvatura de Gauss constante ao longo de Σ.

Em particular, sempre que M for a variedade deSitter-Schwarzschild $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2, g_a)$ a afirmação acima diz que os pontos críticos da massa de Hawking são superfícies mínimas ou slices $\{r\} \times \mathbb{S}^2$.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados preliminares que darão suporte as demonstrações no transcorrer desta dissertação. Para alguns resultados apresentaremos provas e para outros indicaremos apenas as referências usadas, principalmente para aqueles cujas provas são muito técnicas e fogem do escopo do trabalho.

1.1 Imersões isométricas

Iniciaremos esta seção definindo o que vem a ser uma imersão.

Definição 1.1. *Seja* M^n *uma variedade diferenciável e* $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ *uma variedade Riemanniana. Uma aplicação diferenciável* $\varphi : M \to \overline{M}$ *é uma imersão se* $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\overline{M}$ *é injetiva para todo* $p \in M$.

A métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M da seguinte forma: para quaisquer $p \in M$ e $u, v \in T_pM$, define-se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Com isso, φ passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$. Em particular, toda imersão isométrica é uma imersão.

Para cada $p \in M$, o produto interno de $T_p\overline{M}$ induz uma decomposição de $T_p\overline{M}$ como soma direta ortogonal

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de (T_pM) em $(T_p\overline{M})$. Se $\nu \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$\nu = \nu^T + \nu^N, \text{ onde } \nu^T \in T_pM, \ \nu^N \in (T_pM)^{\perp}.$$

Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos uma conexão em M por

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

Verifica-se que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M.

Afim de definir a segunda forma fundamental da imersão isométrica $\varphi : M \to \overline{M}$, convém introduzir previamente a seguinte definição. Seja $U \subset M$ um aberto de M, se X, Y são campos locais em U, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por

$$B(X, Y) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}) - \nabla_X Y$$

está bem definida, ou seja, não depende das extensões de $\overline{X}$, $\overline{Y}$.

Proposição 1.1. *A aplicação* $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ *é bilinear e simétrica.*

Demonstração. A prova dessa proposição pode ser encontrada em [9]. □

Vamos agora definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle,$$

é uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.2. *A forma quadrática* $II_\eta : T_pM \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$II_\eta(X) = H_\eta(X, X)$$

é chamada a $\mathsf{segunda\ forma\ fundamental}$ *de* φ *em* p *segundo o vetor normal* η.

Às vezes se utiliza também a expressão segunda forma fundamental para designar a aplicação B.

Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$ dado por

$$\langle A_\eta X, Y \rangle = H_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle.$$

A partir de

$$\langle A_\eta X, Y\rangle \;=\; \langle B(X,Y),\eta\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, \eta\rangle = -\langle \overline{\nabla}_X \eta, Y\rangle = \langle -(\overline{\nabla}_X \eta)^\top, Y\rangle,$$

obtemos

$$A_\eta X = -(\overline{\nabla}_X \eta)^\top. \tag{1.1}$$

Definição 1.3. *Dado uma imersão $\varphi : M \to \overline{M}$, seja η um campo de vetores normais a M, definimos o vetor curvatura média da imersão isométrica por*

$$\vec{H} = \mathrm{tr}(A_\eta)\eta,$$

pode-se provar que H independe da escolha do η. Dizemos que a imersão $\varphi : M \to \overline{M}$ é mínima, se $\vec{H} \equiv 0$.

No caso de imersões isométrica $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, a curvatura média é dada por $H = \mathrm{tr}(A_\eta)$.

A proposição a seguir relaciona, para campos em M, as componentes tangencial e normal do tensor curvatura de $\overline{M}$ com o tensor curvatura de M e a segunda forma fundamental da imersão isométrica.

As fórmulas presentes na proposição abaixo são conhecidas na literatura como as equações de **Gauss** e **Codazzi**.

Proposição 1.2. *Se $\varphi : M \to \overline{M}$ é uma imersão isométrica e $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, então:*

$a)$ (**Gauss**) $(\overline{R}(X,Y)Z)^\top = R(X,Y)Z + A_{B(X,Z)}Y - A_{B(X,Z)}X.$

$b)$ (**Codazzi**) $(\overline{R}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp_X B)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y B)(X,Z)$

Demonstração. Para uma prova veja [9]. □

Corolário 1.1. *Se $\varphi : M \to \overline{M}$ é uma imersão isométrica e $W, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, então*

$$\langle R(W,X)Y, Z\rangle = \langle \overline{R}(W,X)Y, Z\rangle + \langle B(W,Y), B(X,Z)\rangle - \langle B(W,Z), B(X,Y)\rangle \tag{1.2}$$

Em particular, se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ são ortonormais, então

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \langle B(X,X), B(Y,Y)\rangle - |B(X,Y)|^2,$$

onde K e $\overline{K}$ denotam as curvaturas seccionais em M e $\overline{M}$, respectivamente.

Aproveitaremos esta seção para trazer mais dois resultados de geometria Riemanniana que serão muito úteis no decorrer da dissertação.

Teorema 1.1 (Divergência)**.** *Sejam* M *uma variedade compacta orientável com bordo* ∂M *e* X *um campo de classe* C^k*. Então*

$$\int_M \mathrm{div}\ X dM = \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle dS,$$

onde η *é um campo unitário normal à* ∂M *apontando para fora de* M*.*

Demonstração. Esse teorema é uma consequência imediata do Teorema de Stokes para variedades. Uma demonstração do Teorema de Stokes pode ser encontrada em [22]. □

Corolário 1.2 ($1^{\underline{a}}$ Fórmula de Green)**.** *Sejam* $u, v : U \to \mathbb{R}$*, funções de classe* C^k *no aberto* U*. Seja* $M \subset U$ *uma variedade orientável, compacta com bordo suave* ∂M*. Então,*

$$\int_M (u\Delta v + \langle \mathrm{grad}(u), \mathrm{grad}(v) \rangle) dM = \int_{\partial M} u \frac{\partial v}{\partial \eta} dS.$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema da divergência e da definição de divergência de um campo, considerando o seguinte campo $X = u.\mathrm{grad}(v)$. □

1.2 Fórmulas de variação da área

Nesta seção demonstraremos algumas fórmulas gerais para variações normais de hipersuperfícies propriamente imersas em uma variedade Riemanniana (M^n, g). Dentre elas, as fórmulas da primeira e sugunda variação da área.

Seja $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ uma hipersuperfície compacta. Uma variação normal de Σ em M, é uma família $\{\Sigma_t\}$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, onde $\Sigma_t = \{f(t, x); x \in \Sigma\}$ com $f : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to M$ uma aplicação suave, tal que $f(0, x) = x$ para todo $x \in \Sigma$, $f_t = f(t, \cdot) : \Sigma \to M$ é uma imersão para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ com $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0, x) = \varphi N_t$, onde $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$. Dizemos que φ é a velocidade normal da variação.

Estamos interessados em entender a evolução das quantidades área $|\Sigma_t|$ e curvatura média H_t de $\Sigma(t)$ ao longo dessa variação normal, para isso, começaremos trazendo algumas identidades, as quais faremos uso mais adiante.

Lema 1.1. *Seja* $G(t) = (a_{ij}(t))$*,* $t \in I$ *uma família suave de matrizes* $n \times n$*, então*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(G(t)) = \det(G(0)) \mathrm{Tr}(G'(0)).$$

Demonstração. Para uma prova desse Lema veja [15]. □

Lema 1.2. *Dado uma métrica* g*, temos as seguintes identidades:*

i) $\partial_t g_{ij} = g(\nabla_{\partial_i}\partial t, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j}\partial t)$;

ii) $\partial_t g^{ij} = -2g^{ik}g^{jl}g(\nabla_{\partial_k}\partial t, \partial_l)$;

Demonstração. Para provar i) note primeiramente que $g_{ij} = \langle\partial_i, \partial_j\rangle$, assim derivando e usando a compatibilidade da métrica, teremos

$$\partial_t g_{ij} = \partial_t\langle\partial_i, \partial_j\rangle = \langle\nabla_{\partial t}\partial_i, \partial_j\rangle + \langle\partial_i, \nabla_{\partial t}\partial_j\rangle.$$

Agora basta notar que $\nabla_{\partial t}\partial_i = \nabla_{\partial_i}\partial t$ já que $[\partial_t, \partial_i] = 0$. Portanto,

$$\partial_t g_{ij} = \langle\nabla_{\partial_i}\partial_t, \partial_j\rangle + \langle\partial_i, \nabla_{\partial_j}\partial_t\rangle.$$

Já para ii) começaremos observando que $g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l$ implica $g_{kl}\partial_t g^{ik} + g^{ik}\partial_t g_{kl} = 0$, usando o primeiro item temos

$$g_{kl}\partial_t g^{ik} = -g^{ik}g(\nabla_{\partial_k}\partial_t, \partial_l) - g^{ik}g(\partial_k, \nabla_{\partial_l}\partial_t).$$

Assim, multiplicando a igualdade acima por g^{jl} e observando que feito isso, os dois termos da direita são iguais, ganhamos

$$\delta^j_k\partial_t g^{ik} = -2g^{ik}g^{jl}g(\nabla_{\partial_k}\partial_t, \partial_l).$$

Logo

$$\partial_t g^{ik} = -2g^{ik}g^{jl}g(\nabla_{\partial_k}\partial_t, \partial_l).$$

□

Lema 1.3. *Considerando a variação descrita acima, temos:*

i) $\nabla_{\partial_i}N_t = -g^{kl}A_{il}\partial_k$;

ii) $\nabla_{\partial_t}N_t = -\nabla^{\Sigma_t}\varphi_t$.

Onde A *é a segunda forma fundamental com respeito a métrica* g.

Demonstração. Primeiramente, observe que $g(N_t, N_t) = 1$, daí pela compatibilidade da métrica, temos que

$$g(\nabla_{\partial_i}N_t, N_t) = 0, \tag{1.3}$$

ou seja, $\nabla_{\partial_i}N_t \in T\Sigma_t$. Assim, dado uma base $\{\partial_k\}$ de Σ_t, teremos

$$\nabla_{\partial_i}N_t = g^{kl}g(\nabla_{\partial_i}N_t, \partial_l)\partial_k = -g^{kl}A_{il}\partial_k,$$

provando assim o item i).

Um cálculo análogo, mostra que $\nabla_{\partial_t} N_t \in T\Sigma_t$ o que implica

$$\nabla_{\partial_i} N_t = g^{ik} g(\nabla_{\partial_t} N_t, \partial_k)\partial_i.$$

Notemos que, $g(N_t, \partial_k) = 0$ implica $\langle \nabla_{\partial_t} N_t, \partial_k\rangle = -\langle N_t, \nabla_{\partial_t}\partial_k\rangle = -\langle N_t, \nabla_{\partial_k}\partial t\rangle$. De posse disso e lembrando que $\partial t = \varphi_t N_t$, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} N_t &= -g^{ik} g(N_t, \nabla_{\partial_k}\partial_t)\partial_i \\ &= -g^{ik} g(N_t, \nabla_{\partial_k}\varphi_t N_t)\partial_i \\ &= -g^{ik}\varphi_t g(N_t, \nabla_{\partial_k} N_t)\partial_i - g^{ik}\partial_k(\varphi_t) g(N_t, N_t)\partial_i. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Donde pela equação (1.3), teremos

$$\nabla_{\partial_i} N_t = -g^{ik}\partial_k(\varphi_t)\partial_i = -g^{ik} g(\nabla\varphi_t, \partial_k)\partial_i = -\nabla^{\Sigma_t}\varphi_t.$$

□

Agora, estamos aptos a provarmos a fórmula da primeira variação da área.

Proposição 1.3. *Dada uma variação $\Sigma(t)$ de Σ, a primeira variação da área é dada por*

$$\frac{d}{dt}|\Sigma(t)|\Big|_{t=0} = -\int_\Sigma H\varphi\, d\sigma.$$

Demonstração. Seja $\{x_i\}$ um sistema de coordenadas local de Σ_t e $d\sigma_t = \sqrt{\det[g_{ij}]}dx_1 \cdots dx_n$ o elemento de área de Σ_t. Assim, usando o Lema 1.1, temos que

$$\begin{aligned} \partial_t\sqrt{\det[g_{ij}]} &= \frac{1}{2}\frac{\partial_t \det[g_{ij}]}{\sqrt{\det[g_{ij}]}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(g^{ij}\partial_t g_{ij})\det[g_{ij}]}{\sqrt{\det[g_{ij}]}}. \end{aligned}$$

Agora usando o item i) do Lema 1.2, teremos

$$\partial_t\sqrt{\det[g_{ij}]} = \frac{1}{2}g^{ij}\Big[g(\nabla_{\partial_i}\partial_t, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j}\partial_t)\Big]\sqrt{\det[g_{ij}]}.$$

Como estamos somando em ij, os dois termos dentro do colchete são iguais, ou seja

$$\begin{aligned} \partial_t\sqrt{\det[g_{ij}]} &= g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}\partial_t, \partial_j)\sqrt{\det[g_{ij}]} \\ &= g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(\varphi_t N_t), \partial_j)\sqrt{\det[g_{ij}]} \\ &= g^{ij}\varphi_t g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j)\sqrt{\det[g_{ij}]} + g^{ij}\partial_i(\varphi_t) g(N_t, \partial_j)\sqrt{\det[g_{ij}]} \\ &= -g^{ij}A_{ij}\varphi_t\sqrt{\det[g_{ij}]} \\ &= -H_t\varphi_t\sqrt{\det[g_{ij}]}. \end{aligned}$$

Provando assim a proposição. □

Observação 1.1. *Uma observação interessante é que* Σ *é mínima* $(H = 0)$ *se, e somente se,* $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} |\Sigma_t| = 0$ *(ou seja, superfícies minimas são pontos críticos do funcional área). Para provar essa afirmação faça*

$$\int_{\Sigma} H\varphi d\sigma = 0$$

para todo $\varphi \in C^{\infty}(\Sigma)$ *e suponha que* $H(p) \neq 0$ *para algum* $p \in \Sigma$*. Podemos supor, sem perda de generalidade que* $H(p) > 0$ *e pela continuidade existe uma vizinhança* U *de* p *tal que* $H(U) > 0$*. Assim podemos tomar* $\varphi \equiv 1$ *em* $V \subset U$ *e* $\operatorname{supp}\varphi \subsetneq U$*. Portanto,*

$$0 = \int_{\Sigma} H\varphi d\sigma = \int_{U} H\varphi d\sigma \geqslant \int_{V} H d\sigma > 0.$$

Isso é um absurdo. Logo $H \equiv 0$*. A outra implicação segue direto da Proposição 1.3.*

Afim de calcularmos a segunda variação da área de Σ_t, vamos primeiro encontrar uma fórmula para a derivada da curvatura média H_t.

Proposição 1.4. *Seja* H_t *a curvatura média de* Σ_t*. Então*

$$\partial_t H_t = L_{\Sigma_t} \varphi_t,$$

onde $L_{\Sigma_t} = \Delta_{\Sigma_t} + Ric(N_t, N_t) + |A|^2$ *é o operador de Jacobi de* Σ_t*.*

Demonstração. Por definição, a curvatura média é dada pelo traço da segunda forma fundamental, ou seja,

$$H_t = -g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j).$$

Assim, derivando a igualdade acima e usando o item ii) do Lema 1.2, teremos

$$\begin{aligned}
\partial_t H_t &= -\partial_t g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j) - g^{ij} \Big[g(\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j) + g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_t} \partial_j) \Big] \\
&= +2g^{ik} g^{jl} g(\nabla_{\partial_k} \partial_t, \partial_j) g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j) - g^{ij} \Big[g(R(\partial_t, \partial_i) N_t, \partial_j) \\
&\quad + g(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_t} N_t, \partial_j) + g(\nabla_{[\partial_t, \partial_i]} N_t, \partial_j) + g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_t} \partial_j) \Big],
\end{aligned}$$

onde na última igualdade, usamos $\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_i} N_t = R(\partial_t, \partial_i) N_t + \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_t} N_t + \nabla_{[\partial_t, \partial_i]} N_t$.

Agora, pelo Lema 1.3 e do fato que $[\partial_t, \partial_i] = 0$, podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned}
\partial_t H_t &= +2g^{ik} g(\nabla_{\partial_k}\partial_t, \nabla_{\partial_i} N_t) + g^{ij} g(R(\partial_i, \partial_t)N_t, \partial_j) \\
&\quad - g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(-\nabla^{\Sigma_t}\varphi_t), \partial_j) - g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_t}\partial_j) \\
&= g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_j}\partial_t) + Ric(\partial_t, N_t) + g^{ij} g(\nabla^{\Sigma_t}_{\partial_i}\nabla^{\Sigma_t}\varphi_t, \partial_j) \\
&= g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_j} N_t)\varphi_t + g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, N_t)\partial_j(\varphi_t) + Ric(N_t, N_t)\varphi_t + \Delta\varphi_t \\
&= g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_j} N_t)\varphi_t + Ric(N_t, N_t)\varphi_t + \Delta\varphi_t
\end{aligned}$$

Finalmente, uma vez que

$$|A|^2 = g^{kl} g^{mn} A_{km} A_{ln} = g^{kl} g^{mn} g(\nabla_{\partial_k} N_t, \partial_m) g(\nabla_{\partial_l} N_t, \partial_n),$$

e novamente pelo primeiro item do Lema 1.3, temos $|A|^2 = g^{kl} g(\nabla_{\partial_k} N_t, \nabla_{\partial_l} N_t)$. Portanto, teremos

$$\partial_t H_t = |A|^2 \varphi_t + Ric(N_t, N_t)\varphi_t + \Delta\varphi_t = L_{\Sigma_t}\varphi_t$$

□

Usaremos agora as fórmulas acima para obtermos a fórmula da segunda variação da área de Σ_t.

Proposição 1.5. *Dada uma variação $\Sigma(t)$ de Σ, a segunda variação da área é dada por*

$$\frac{d^2}{dt^2}|\Sigma(t)|\Big|_{t=0} = \int_\Sigma [-\varphi L\varphi + H^2\varphi^2 + div_\Sigma(\nabla_X X)] d\sigma,$$

onde $X(x) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(0, x)$.

Demonstração. A prova dessa proposição segue de um cálculo direto, ou seja, fazendo

$$\frac{d^2}{dt^2}(d\sigma_t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(-H_t\varphi_t d\sigma_t)\Big|_{t=0},$$

teremos pelas proposições 1.3 e 1.4 que

$$\frac{d^2}{dt^2}(d\sigma_t)\Big|_{t=0} = \Big(-\varphi L\varphi + H^2\varphi^2 - H\frac{d}{dt}\varphi\Big|_{t=0}\Big) d\sigma.$$

Agora basta notar que, sendo $X = \varphi_t N_t$, temos que

$$\nabla_X X = \nabla_{\varphi_t N_t}\varphi_t N_t = \varphi_t^2 \nabla_{N_t} N_t + \varphi_t N_t(\varphi_t) N_t,$$

como N_t é normal unitário, ficamos apenas com

$$\nabla_X X = \varphi_t N_t(\varphi_t) N_t.$$

Assim, teremos

$$\mathrm{div}_\Sigma(\nabla_X X) \;=\; \varphi_t N_t(\varphi_t)\mathrm{div} N_t + \langle N_t, \nabla^\Sigma \varphi_t N_t(\varphi_t)\rangle.$$

Como $\nabla^\Sigma \varphi_t N_t(\varphi_t)$ é tangente a Σ_t e $\mathrm{div} N_t = -H_t$, então

$$\mathrm{div}_\Sigma(\nabla_X X) = -H_t \frac{d}{dt}\varphi_t, \tag{1.5}$$

o que finaliza a prova da proposição. □

Ressaltamos que, se Σ é mínima, então

$$\frac{d^2}{dt^2}|\Sigma(t)|\Big|_{t=0} = -\int_\Sigma \varphi L \varphi \, d\sigma.$$

Veremos agora como a segunda variação da área de uma superfície mínima Σ está relacionada com sua estabilidade.

1.2.1 Estabilidade

Agora iremos introduzir a noção de estabilidade para superfícies mínimas.

Dada uma superfície Σ em uma variedade (M^3, g), o operador de Jacobi de Σ, denotado por L_Σ ou apenas por L se não houver ambiguidade, é definido como

$$L_\Sigma = \Delta_\Sigma + Ric(\nu, \nu) + |A|^2,$$

onde ν denota o campo vetorial normal unitário ao longo de Σ e A é a segunda forma fundamental de Σ. Nossa convenção para o problema de autovalor é o seguinte: dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de L se, e somente se, existe $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ tal que $L\varphi + \lambda\varphi = 0$.

O operador de Jacobi L pertence a uma classe de operadores que geralmente são chamadas de operadores de Schrodinger, ou seja, operadores da forma $\Delta + q$, onde q é uma função contínua em Σ. É sabido que, o espectro de L

$$Spec(L) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots\},$$

consiste em uma sequência crescente de autovalores λ_k com multiplicidades finitas m_k de modo que $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = +\infty$, onde $\lambda_1 = \lambda_1(\Sigma)$ denota o primeiro autovalor de L. Além disso, o primeiro autovalor é simples ($m_1 = 1$) e satisfaz a seguinte caracterização min-max

$$\lambda_1(L) = \inf_{\varphi\in C^\infty(\Sigma)}\left(\frac{-\int_\Sigma \varphi L\varphi d\sigma}{\int_\Sigma \varphi^2 d\sigma}\right). \tag{1.6}$$

Uma superfície mergulhada Σ é dita *estável* se, e somente se, $\lambda_1(\Sigma) \geqslant 0$. Dizemos que Σ é *estritamente estável*, quando $\lambda_1(\Sigma) > 0$.

Da equação (1.6), temos que

$$\lambda_1(L) \leqslant \left(\frac{-\int_\Sigma \varphi L\varphi d\sigma}{\int_\Sigma \varphi^2 d\sigma}\right),$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda_1(L)\int_\Sigma \varphi^2 d\sigma &\leqslant -\int_\Sigma \varphi L\varphi d\sigma\\ &= -\int_\Sigma \varphi\Delta_\Sigma\varphi d\sigma - \int_\Sigma (Ric(\nu,\nu)+|A|^2)\varphi^2 d\sigma.\end{aligned}$$

Assim, usando a 1° Fórmula de Green (1.2), obtemos

$$\lambda_1(L)\int_\Sigma \varphi^2 d\sigma + \int_\Sigma (Ric(\nu,\nu)+|A|^2)\varphi^2 d\sigma \leqslant \int_\Sigma |\nabla\varphi|^2 d\sigma. \tag{1.7}$$

A equação (1.7) é conhecida como *desigualdade de estabilidade.*

1.3 Massa de Hawking e suas fórmulas de variação

Nesta seção vamos definir o funcional massa de Hawking e calcular a sua primeira e segunda variação.

A massa de Hawking é uma importante massa quasi local, sua importância reside no fato que, a noção massa de Hawking foi fundamental na prova da desigualdade de Penrose, para mais detalhes veja [2] e [12].

Seja (M, g) uma variedade tridimensional e $\Sigma \subset M$ uma superfície compacta de dois lados (no nosso contexto, dois lados equivale a existência de um campo normal unitário ao longo da superfície). A massa de Hawking de Σ é definida por

$$m_H(\Sigma) = \left(\frac{|\Sigma|}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma H^2 d\sigma - \frac{\Lambda}{24\pi}|\Sigma|\right),$$

onde H é a curvatura média de Σ e $\Lambda = inf_M R$.

Como Σ é dois lados, existe um campo normal unitário ν ao longo de Σ. Seja $\Sigma(t) \subset M$ uma variação normal suave de Σ, ou seja, $\Sigma(t) = \{f(t,x);\ x \in \Sigma\}$, onde $f : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to M$ é uma função satisfazendo:

i) $f_t : \Sigma \to M$ é imersão, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$;

ii) $f(0,x) = x$ para todo $x \in \Sigma$;

iii) $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,x) = \varphi(x)\nu(x)$, para todo $x \in \Sigma$, onde $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$.

Agora estamos aptos a demonstrar as fórmulas de variação da massa de Hawking.

Proposição 1.6. *A primeira variação da massa de Hawking é dada por*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m_H(\Sigma(t))\Big|_{t=0} &= -\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \varphi\Delta_\Sigma H d\sigma + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma (\Lambda - R)H\varphi d\sigma \\
&\quad + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \left[2K_\Sigma - \frac{8\pi}{|\Sigma|} + \frac{1}{2|\Sigma|}\int_\Sigma H^2 d\sigma - |A|^2\right] H\varphi d\sigma.
\end{aligned}$$

Demonstração. Derivando a massa de Hawking, ao longo da variação normal dada acima, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m_H(\Sigma(t)) &= \frac{1}{2}\frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(1 - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma H_t^2 d\sigma_t - \frac{\Lambda}{24\pi}|\Sigma_t|\right)\frac{d}{dt}|\Sigma_t| \\
&\quad + \left(\frac{|\Sigma_t|}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{16\pi}\int_\Sigma (2H_t\frac{d}{dt}(H_t)d\sigma_t + H_t^2\frac{d}{dt}(d\sigma_t)) - \frac{\Lambda}{24\pi}\frac{d}{dt}|\Sigma_t|\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(1 - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma H_t^2 d\sigma_t - \frac{\Lambda}{24\pi}|\Sigma_t|\right)\int_\Sigma \varphi_t H_t d\sigma_t \\
&\quad - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma (2H_t(\Delta_\Sigma\varphi_t + Ric(\nu,\nu)\varphi_t + |A|^2\varphi_t)d\sigma_t - H_t^2\varphi_t H_t d\sigma_t) \\
&\quad + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{2\Lambda}{3}\int_\Sigma \varphi_t H_t d\sigma_t \\
&= -\frac{2|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma H_t\Delta_\Sigma\varphi_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma H_t(2Ric(\nu,\nu) + 2|A|^2)\varphi_t d\sigma_t \\
&\quad + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma H_t^3\varphi_t d\sigma_t + \frac{1}{2}\frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \varphi_t H_t d\sigma_t\int_\Sigma H_t^2 d\sigma_t \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\Lambda\int_\Sigma \varphi_t H_t d\sigma_t - \frac{1}{2}\frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_\Sigma \varphi_t H_t d\sigma_t \\
&= -\frac{2|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \varphi_t\Delta_\Sigma H_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma H_t(2Ric(\nu,\nu) + 2|A|^2)\varphi_t d\sigma_t \\
&\quad + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma H_t^3\varphi_t d\sigma_t + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2|\Sigma_t|}\int_\Sigma \varphi_t H_t d\sigma_t\int_\Sigma H_t^2 d\sigma_t \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\Lambda\int_\Sigma \varphi_t H_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{8\pi}{|\Sigma_t|}\int_\Sigma \varphi_t H_t d\sigma_t, \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

onde usamos as seguintes identidades

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_t &= \Delta_\Sigma\varphi_t + Ric(\nu_t,\nu_t)\varphi_t + |A_t|^2\varphi_t\\ \frac{d}{dt}(d\sigma_t) &= -\varphi_t H_t d\sigma_t\\ \int_\Sigma \varphi_t\Delta H_t d\sigma_t &= \int_\Sigma H_t\Delta\varphi_t d\sigma_t,\end{aligned}$$

sendo que a última igualdade segue do corolário 1.2.

Agora pela equação de Gauss temos que

$$2Ric(\nu_t,\nu_t) + 2|A|^2 = R - 2K_{\Sigma_t} + H_t^2 + |A_t|^2,$$

donde substituindo em (1.8) e organizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_H(\Sigma(t)) &= -\frac{2|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \varphi_t\Delta_\Sigma H_t d\sigma_t + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma(\Lambda - R)H_t\varphi_t d\sigma_t\\ &+\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma\left[2K_{\Sigma_t} - \frac{8\pi}{|\Sigma_t|} + \frac{1}{2|\Sigma_t|}\int_\Sigma H_t^2 d\sigma_t - |A_t|^2\right]H_t\varphi_t d\sigma_t.\end{aligned}$$

□

Agora calculemos a segunda variação da massa de Hawking para pontos críticos da primeira variação.

Proposição 1.7. *Se $\Sigma \subset M$ é um ponto crítico do funcional massa de Hawking, então*

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}m_H(\Sigma(t))\Big|_{t=0} &= -\frac{3}{4}\frac{m_H(\Sigma)}{|\Sigma|^2}\left(\int_\Sigma H\varphi d\sigma\right)^2 - \frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma (L\varphi)^2 d\sigma\\ &-\frac{m_H(\Sigma)}{2|\Sigma|}\int_\Sigma(\varphi L\varphi - H^2\varphi^2 + div_\Sigma(\nabla_X X))d\sigma\\ &-\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma HL'(0)\varphi d\sigma + \frac{4|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma H^2\varphi L\varphi d\sigma\\ &+\frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma\left[\left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\right)(\varphi L\varphi - H^2\varphi^2 + div_\Sigma(\nabla_X X))\right]d\sigma\end{aligned}$$

Demonstração. Vimos na proposição anterior que a primeira variação é dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_H(\Sigma(t)) &= \frac{1}{2}\frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_\Sigma\frac{d}{dt}(d\sigma_t)\left(1 - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma\left(H_t^2 + \frac{2\Lambda}{3}\right)d\sigma_t\right)\\ &+\left(\frac{|\Sigma_t|}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{16\pi}\int_\Sigma 2H_t\frac{d}{dt}(H_t)d\sigma_t - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma\left(H_t^2 + \frac{2}{3}\Lambda\right)\frac{d}{dt}(d\sigma_t)\right)\end{aligned}$$

Derivando a expressão acima, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}m_H(\Sigma(t)) &= -\frac{1}{4}\frac{|\Sigma_t|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(\int_\Sigma \frac{d}{dt}(d\sigma_t)\right)^2\left(1-\frac{1}{16\pi}\int_\Sigma\left(H_t^2+\frac{2\Lambda}{3}\right)d\sigma_t\right)\\
&+\frac{1}{2}\frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_\Sigma \frac{d^2}{dt^2}(d\sigma_t)\left(1-\frac{1}{16\pi}\int_\Sigma\left(H_t^2+\frac{2\Lambda}{3}\right)d\sigma_t\right)\\
&-\frac{1}{32\pi}\frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_\Sigma \frac{d}{dt}(d\sigma_t)\Bigg(\int_\Sigma 2H_t\frac{d}{dt}(H_t)d\sigma_t\\
&+\int_\Sigma\left(H_t^2+\frac{2\Lambda}{3}\right)\frac{d}{dt}(d\sigma_t)\Bigg)\\
&-\frac{1}{32\pi}\frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_\Sigma \frac{d}{dt}(d\sigma_t)\Bigg(\int_\Sigma 2H_t\frac{d}{dt}(H_t)d\sigma_t\\
&+\int_\Sigma\left(H_t^2+\frac{2\Lambda}{3}\right)\frac{d}{dt}(d\sigma_t)\Bigg)\\
&-\frac{2}{16\pi}\left(\frac{|\Sigma_t|}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg(\int_\Sigma\left(\frac{d}{dt}H_t\right)^2d\sigma_t+\int_\Sigma H_t\frac{d^2}{dt^2}(H_t)d\sigma_t\\
&+2\int_\Sigma H_t\frac{d}{dt}(H_t)\frac{d}{dt}(d\sigma_t)+\frac{1}{2}\int_\Sigma\left(H_t^2+\frac{2\Lambda}{3}\right)\frac{d^2}{dt^2}(d\sigma_t)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Pelos resultados provados na Seção 1.2, podemos reescrever a igualdade acima como:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}m_H(\Sigma(t))\Big|_{t=0} &= -\frac{m_H(\Sigma)}{4|\Sigma|^2}\left(\int_\Sigma H\varphi d\sigma\right)^2-\frac{m_H(\Sigma)}{2|\Sigma|}\int_\Sigma\Big(\varphi L\varphi-H^2\varphi^2\\
&+div_\Sigma(\nabla_X X)\Big)d\sigma+\frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma H\varphi d\sigma\Bigg(\int_\Sigma 2HL\varphi d\sigma\\
&-\int_\Sigma\left(H^2+\frac{2}{3}\Lambda\right)H\varphi d\sigma\Bigg)-\frac{2}{16\pi}\left(\frac{|\Sigma|}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg(\int_\Sigma(L\varphi)^2d\sigma\\
&+\int_\Sigma HL'(0)\varphi d\sigma-\int_\Sigma HL\varphi H\varphi d\sigma-\int_\Sigma HL\varphi H\varphi d\sigma\\
&+\frac{1}{2}\int_\Sigma\left(H_t^2+\frac{2}{3}\Lambda\right)(-\varphi L\varphi+H^2\varphi^2+div_\Sigma(\nabla_X X))d\sigma\Bigg).
\end{aligned}
$$

Como $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}m_H(\Sigma)=0$, então

$$
-\frac{m_H(\Sigma)}{2|\Sigma|}\int_\Sigma H\varphi d\sigma-\frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\left[\int_\Sigma 2HL\varphi d\sigma-\int_\Sigma\left(H^2+\frac{2}{3}\Lambda\right)H\varphi d\sigma\right]=0.
$$

Daí,

$$
-\left(\frac{16\pi}{|\Sigma|}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{m_H(\Sigma)}{2}\int_\Sigma H\varphi d\sigma=\int_\Sigma 2HL\varphi d\sigma-\int_\Sigma\left(H^2+\frac{2}{3}\Lambda\right)H\varphi d\sigma.
$$

Assim, da igualdade acima, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}m_H(\Sigma(t))\Big|_{t=0} &= -\frac{3}{4}\frac{m_H(\Sigma)}{|\Sigma|^2}\left(\int_\Sigma H\varphi d\sigma\right)^2 - \frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma (L\varphi)^2 d\sigma \\
&\quad -\frac{m_H(\Sigma)}{2|\Sigma|}\int_\Sigma (\varphi L\varphi - H^2\varphi^2 + div_\Sigma(\nabla_X X))d\sigma \\
&\quad -\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma HL'(0)\varphi d\sigma + \frac{4|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma H^2\varphi L\varphi d\sigma \\
&\quad +\frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \left[\left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\right)(\varphi L\varphi - H^2\varphi^2 + div_\Sigma(\nabla_X X))\right]d\sigma.
\end{aligned}$$

□

1.4 Métricas conformes

O objetivo dessa seção é apresentar algumas relações existentes com respeito a duas métricas conformes. Tais relações serão de grande importância para provar alguns resultodos do Capítulo 2. As demonstrações serão omitidas, mas podem ser encontradas em [7].

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Se $\mu : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave e positiva, então $\overline{g} = \mu g$ define outra métrica em M, dita conforme a g. A função μ é denominada o fator de conformidade entre as métricas. Escreveremos $\mu = e^{2h}$, onde $h : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, temos o seguintes resultados

Proposição 1.8. *Se* R *e* $\overline{R}$ *denotam respectivamente as curvaturas escalares de* M *com respeito as métricas* g *e* $\overline{g} = e^{2h}g$*, então*

$$e^{2h}\overline{R} = R - 2(n-1)\Delta h - (n-1)(n-2)|\nabla h|^2.$$

Demonstração. Para uma prova, veja Proposição 1.8 de [19]. □

Proposição 1.9. *Se* Ric *e* $\overline{Ric}$ *denotam respectivamente as curvaturas de Ricci de* M *com respeito as métricas* g *e* $\overline{g} = e^{2h}g$*, então*

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} - (n-2)(\nabla^2 h)_{ij} + (n-2)\nabla_i h\nabla_j h - (\Delta h + (n-2)|\nabla h|^2)g_{ij}.$$

Demonstração. Para uma prova, veja Proposição 1.8 de [19]. □

1.5 Produtos warped Riemanniano

Considere F uma variedade Riemanniana de dimensão n, orientada e conexa, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo da reta e $\phi : I \to \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Seja $M = I \times F$ a variedade produto e sejam $\pi_I : M \to I$ e $\pi_F : M \to F$ as projeções canônicas de M sobre I e F. Definimos em M a métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ por

$$\langle U, V \rangle_p = \langle (\pi_I)_* U, (\pi_I)_* V \rangle + \phi^2(p) \langle (\pi_F)_* U, (\pi_F)_* V \rangle,$$

para todo $p \in M$ e $U, V \in T_p M$. A variedade Riemanniana a qual nos referimos é o par $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que será representada por

$$M = I \times_\phi F$$

e será chamado de produto warped de I e F com função warping ϕ.

Um caso particular destas variedades é obtido considerando a função warping ϕ identicamente 1, as quais são conhecidas como variedades produtos (ou simplesmente como produto simples).

Para o próximo resultado, observe que no produto warped $M = I \times_\phi F$, dispomos das projeções π_I e π_F, o que nos permite falar em campos básicos verticais, isto é, campos verticais π_F–relacionados a campos em F, de outra forma, se $V \in \mathfrak{X}(M)$ for um campo básico vertical, diremos também que V é o levantamento vertical de um campo em F. De forma análoga se define campos horizontais.

Proposição 1.10. *No produto warped $M = I \times_\phi F$, se $p \in I$, então a fibra $\{p\} \times F$ é totalmente umbílica, com segunda forma fundamental dada por*

$$A_F(U, V) = -\left(\frac{\langle U, V \rangle}{\phi} \right) \nabla \phi,$$

para quaisquer U e V verticais.

Demonstração. Para uma prova veja [7]. □

Proposição 1.11. *No produto warped $M = I \times_\phi F$, se X é levantamento horizontal e U é levantamento vertical, então*

$$\nabla_X U = \nabla_U X = \left(\frac{X\phi}{\phi} \right) U.$$

Demonstração. Para uma prova veja [7]. □

Para finalizar esta seção, relembremos algumas propriedades do tensor de curvatura de M, que podem serem encontradas em detalhes, no livro do O'Neill (veja [18], proposição 7.42). Seja $U, V \in \mathfrak{X}(M)$ e considere a decomposição

$$U = U_F + \langle U, \partial_t \rangle \partial_t \text{ e } V = V_F + \langle V, \partial_t \rangle \partial_t,$$

onde U_F e V_F representam as projeções sobre a fibra F. Então, o tensor de Riemann de M, satisfaz:

i) $R(U_F, V_F)\partial_t = 0$;

ii) $R(U_F, \partial_t)V_F = -\langle U_F, V_F \rangle \dfrac{\phi''}{\phi}\partial_t = -(\langle U, V \rangle - \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle)\dfrac{\phi''}{\phi}\partial_t$;

iii) $R(U_F, \partial_t)\partial_t = \dfrac{\phi''}{\phi}U_F = \dfrac{\phi''}{\phi}(U - \langle U, \partial_t \rangle \partial_t)$;

iv) $R(\partial_t, \partial_t) = 0$.

Tais fórmulas serão importantes no cálculo da curvatura escalar da variedade de deSitter-Schwarzschild.

1.6 Alguns resultados sobre Equações Diferenciais Parciais

Nessa seção definiremos o conceito de operador elíptico de segunda ordem, bem como definição de operador adjunto. Além disso, enunciaremos alguns resultados envolvendo esse tipo de operador.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, um *operador diferencial linear de segunda ordem* L em Ω é um operador do tipo

$$L = a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c,$$

onde $a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e limitadas, com $a_{ij} = a_{ji}$ para todos $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Para $u \in C^2(\Omega)$, definiremos

$$Lu = a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu.$$

Um operador L como acima é *elíptico* em $x \in \Omega$ se a matriz $(a_{ij}(x))$ for positiva definida; L é *elíptico* em Ω se o for em todo $x \in \Omega$. Pelo Teorema Espectral, um operador L é elíptico em $x \in \Omega$ se, e somente se, os autovalores da matriz $(a_{ij}(x))$ forem todos positivos. Ademais, se $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ são respectivamente o menor e o maior de tais autovalores, tem-se para $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ que

$$\lambda(x)|\xi(x)|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i \leqslant \Lambda(x)|\xi(x)|^2.$$

L é dito *estritamente elíptico* se existir uma constante $\lambda > 0$ tal que $\lambda(x) \geqslant \lambda$, para todo $x \in \Omega$. Se $\frac{\Lambda}{\lambda}$ for limitado em Ω, dizemos que L é *uniformemente elíptico* em Ω.

Agora estamos em condições de enunciar o *Princípio do máximo forte* para operadores elípticos.

Teorema 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (não necessariamente limitado). Seja L um operador uniformemente elíptico, com $c = 0$ e $Lu \geqslant 0 (Lu \leqslant 0)$. Se u atinge um máximo(mínimo) no interior de Ω, então u é constante. Se $c \leqslant 0$ e c/λ é limitado, então u não pode atingir um máximo não negativo (mínimo não positivo), a menos que u seja constante.*

Demonstração. Para um prova veja [10]. □

Como consequência, temos o teorema seguinte.

Teorema 1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado. Suponha que L seja estritamente elíptico (sem suposição de sinal em c). Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz $Lu \leqslant 0$ em Ω e $u \geqslant 0$ em $\overline{\Omega}$, então ou $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$, ou $u \equiv 0$.*

Demonstração. Escrevendo $c(x) = c^+(x) + c^-(x)$, onde $c^+(x) = max(u(x), 0)$ e $c^-(x) = min(u(x), 0)$, temos que

$$(L - c^+)u \leqslant -c^+u \leqslant 0,$$

pois $Lu \leqslant 0$. Agora, basta aplicar o Teorema 1.2 para o operador $L - c^+$. □

O adjunto de um operador diferencial foi introduzido por Lagrange (a identidade de lagrange para equações diferenciais ordinárias). Em $\mathbb{R}$ com o produto interno L^2, o adjunto de $D = \frac{d}{dx}$ é encontrado simplesmente integrando por partes, ou seja, para quaisquer $\varphi, \psi \in C_c^\infty$ (isto é, funções C^∞ com suporte compacto)

$$\langle \varphi, D\psi \rangle = \int \varphi \overline{\psi}' dx = -\int \varphi' \overline{\psi} dx = \langle -D\varphi, \psi \rangle.$$

Assim, o adjunto de $\frac{d}{dx}$ é $-\frac{d}{dx}$.

Sejam E e F fibrados de vetores Hermitianos suaves sobre M, se $P : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ é um operador diferencial linear, então podemos usar o produto interno L^2 para definir o adjunto formal, P^*, pela regra usual

$$\langle Pu, v\rangle_F = \langle u, P^*v\rangle_E,$$

para quaisquer seções suaves $u \in C_c^\infty(E)$ e $v \in C_c^\infty(F)$.

Agora, apresentaremos uma ferramenta fundamental na teoria de existência de soluções de operadores elípticos lineares, a saber, a *Alternativa de Fredholm*.

Teorema 1.4 (Alternativa de Fredholm)**.** *Seja* $P : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ *um operador diferencial elíptico de ordem* k.

a) Então ambos $\ker P$ *e* $\ker P^*$ *tem dimensões finitas.*

b) Se $f \in H^{2,l}(F)$, *existe uma solução* $u \in H^{2,k+l}(E)$ *de* $Pu = f$ *se, e somente se,* f *for ortogonal a* $\ker P^*$ *em* $L^2(F)$*;* u *será única se tivermos* u *ortogonal a* $\ker P$ *em* $L^2(E)$.

c) Se $E = F$, *os autoespaços* $[= \ker(P - \lambda I)]$ *são de dimensão finita.*

d) Além disso, para $1 < p < \infty$, *se* $f \in H^{p,l}$, $C^{l,\alpha}$ *ou* C^∞, *então a solução* u *está em* $H^{p,k+l}$, $C^{k+l,\alpha}$ *ou* C^∞, *respectivamente.*

e) Para um operador elíptico escalar satisfazendo $\dim \ker P = \dim \ker P^*$. *Então, a existência de solução equivale a unicidade.*

Demonstração. Para uma prova, veja seção 2.5 de [13]. □

Capítulo 2

Resultados preliminares

O intuito deste trabalho é apresentar um resultado de rigidez para esferas bidimensionais estritamente estável mergulhada em uma variedade tridimensional com curvatura limitada inferiormente por uma constante positiva. Desta forma, neste capítulo iremos apresentar algumas propriedades relacionadas ao funcional massa de Hawking e estabilidade. Além disso, estudaremos as principais propriedades das métricas de deSitter-Schwarzschild, tais métricas são o modelo do resultado principal desta dissertação.

2.1 DeSitter-Schwarzshild

Nesta seção, começaremos definindo a variedade de deSitter-Schwarzschild e mostrando algumas de suas principais propriedades. A métrica de deSitter-Schwarzschild com parâmetro de massa $0 < m < \frac{1}{3\sqrt{3}}$ e curvatura escalar igual a 2, é dada por

$$\left(1 - \frac{r^2}{3} - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2}, \tag{2.1}$$

definida em $(r_-, r_+) \times \mathbb{S}^2$, onde $(r_-, r_+) = \{r > 0; 1 - \frac{r^2}{3} - \frac{2m}{r} > 0\}$, sendo $0 < r_- < r_+$ raízes do polinômio $1 - \frac{r^2}{3} - 2mr^{-1} = 0$ e $g_{\mathbb{S}^2}$ é a métrica canônica de $\mathbb{S}^2$ com curvatura de Gauss constante igual a 1.

As métricas de deSitter-Schwarzschild em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, são métricas periódicas, rotacionalmente simétricas, completas em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ e de curvatura escalar constante positiva. Além disso, $\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{S}^2$ é uma esfera mínima estritamente estável em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ (estas afirmações serão provadas mais adiante).

Começaremos estendendo a métrica definida em (2.1) para $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$. Considere a função $V : M \to \mathbb{R}$, dada por

$$V(r) = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{r^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2}$$

Para estender a métrica (2.1) vamos incluir os horizontes, ou seja, $\{r_-\}\times\mathbb{S}^2$ e $\{r_+\}\times\mathbb{S}^2$. Para isso, considere

$$F(r) := \int_{r_-}^{r} \left(1 - \frac{2m}{t} - \frac{t^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\frac{dF}{dr} = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{r^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{V(r)} > 0,$$

pelo Teorema da Função Inversa, existe uma função $u : (0, a) \to (r_-, r_+)$ que é inversa de F. Pela continuidade, podemos estender a função u da seguinte forma, $u : [0, a] \to [r_-, r_+]$ com $u(0) = r_-$ e $u(a) = r_+$. Tomando $s = F(r)$ temos que $ds = F'(r)dr$ implica $dr = \dfrac{ds}{F'(r)}$ e ainda de $s = F(r)$ temos que $u(s) = r$. Assim podemos reescrever a métrica (2.1) como

$$\begin{aligned} g &= \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2} \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{r^2}{3}\right)^{-1} \frac{1}{(F'(r))^2} ds^2 + u(s)^2 g_{\mathbb{S}^2}, \end{aligned}$$

donde teremos

$$g = ds^2 + u(s)^2 g_{\mathbb{S}^2}, \tag{2.3}$$

definida em $[0, a] \times \mathbb{S}^2$.

Para estender a métrica (2.3) para $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$, a idéia é definir

$$g = ds^2 + v(s) g_{\mathbb{S}^2},$$

em $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$, onde $v : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é uma função periódica com $v|_{[0,a]} \equiv u$.

Primeiramente, definamos v em $[0, 2a]$, da seguinte forma

$$v(s) := \begin{cases} u(s), & \text{se } s \in [0, a] \\ \tilde{u}(s), & \text{se } s \in [a, 2a] \end{cases},$$

onde $\tilde{u}(s) = u(2a - s)$. Vamos provar que as k-ésimas derivadas laterais de v em a coincidem, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} u'(s) &= \left(1 - \frac{2m}{u(s)} - \frac{u(s)^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = V(u(s)) \qquad (2.4) \\ u''(s) &= \left(\frac{m}{u(s)^2} - \frac{u(s)}{3}\right) =: G(u(s)), \end{aligned}$$

onde G é uma função com valor real. Para as outras derivadas, podemos usar a fórmula de Faà di Bruno

$$\frac{d^k}{ds^k}G(u(s)) = \sum \frac{k!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}G^{(m)}(u(s))\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{u^{(j)}(s)}{j!}\right)^{m_j}, \tag{2.5}$$

onde $m = m_1 + \cdots + m_k$, e a soma é feita sobre todas as partições de k, isto é, coleções de inteiros não negativos satisfazendo a restrição

$$m_1 + 2m_2 + \cdots + km_k = k,$$

pela regra da cadeia, $\frac{d^k}{ds^k}\tilde{u}(a^-) = (-1)^k\frac{d^k}{ds^k}u(a^+)$. Assim, para k par, temos que $\frac{d^k}{ds^k}\tilde{u}(a^-) = \frac{d^k}{ds^k}u(a^+)$. Provemos por indução que

$$\frac{d^k}{ds^k}u(a^+) = 0 = \frac{d^k}{ds^k}\tilde{u}(a^-), \quad \forall\, k \in \{2p-1, p \in \mathbb{N}\}. \tag{2.6}$$

Para $k = 1$, obtemos $u'(a^+) = v(r_+) = 0 = -v(r_+) = \tilde{u}'(a^-)$. Para $k = 3$, temos que

$$u'''(a^+) = G'(u(a^+).u'(a^+) = 0 = G'(\tilde{u}(a^-)).\tilde{u}'(a^-) = \tilde{u}'''(a^-).$$

Suponha que (2.6), seja válida para $k = 1, 3, \cdots, 2p-1$. Por (2.5), temos

$$\begin{aligned}\frac{d^{2p+1}}{ds^{2p+1}}u(a^+) &= \frac{d^{2p-1}}{ds^{2p-1}}[G(u(a^+))]\\ &= G^{2p-1}(u(a^+)).u^{(2p-1)}(a^+) + O(a^+),\end{aligned}$$

onde $O(a^+)$ é uma soma de termos, cada um dos quais é um produto de fatores, incluindo uma derivada à direita de ordem $k \in \{1, 3, ..., 2p-1\}$ em a (isso é válido porque $m_1 + 2m_2 + \cdots + (2p-1)m_{2p-1} = 2p-1$ implica que pelo menos um dos m_i é ímpar e menor ou igual a $2p-1$). Então, pela hipótese de indução, $\frac{d^{2p+1}}{ds^{2p+1}}u(a^+) = 0$. Analogamente, temos que $\frac{d^{2p+1}}{ds^{2p+1}}\tilde{u}(a^-) = 0$. Assim, (2.6) é válido.

Finalmente, estendemos v periodicamente tomando $v(s+2a) = v(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave e positiva. Portanto,

$$g = ds^2 + v^2(s)g_{\mathbb{S}^2},$$

está definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$.

Definindo $M_n = [na, (n+1)a] \times \mathbb{S}^2; n \in \mathbb{Z}$. Pela definição de v e da métrica g, temos que (M_n, g) é isométrica a (M_0, g), para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Agora provemos que a curvatura escalar do deSitter-Schwarzschild é constante igual a 2.

Para provar esse fato, considere $M_0 = [r_-, r_+] \times \mathbb{S}^2$ com métrica

$$g = \left(1 - \frac{r^2}{3} - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2},$$

onde $0 < r_- < r_+$ são raizes de $V(r) = \sqrt{1 - \frac{r^2}{3} - \frac{2m}{r}}$.

Agora, definindo $\tilde{g} = dr^2 + \phi^2 g_{\mathbb{S}^2}$ onde $\phi = rV(r)$ vemos que tal métrica é conforme a métrica g, ou seja,

$$g = \frac{1}{V(r)^2}\tilde{g}.$$

Afim de facilitar os cálculos, escreveremos $e^{2u} = V(r)^{-2}$, temos que $2u = -\ln V(r)^2$, daí $u = -\ln\frac{\phi}{r}$, implicando que $u = \ln(r) - \ln(\phi)$.

Para o que segue, seja $\{\tilde{e}_1 = \partial r, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ um referencial ortonormal para $(M_0, \tilde{g})$ com $\{\tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ tangentes a esfera $\mathbb{S}^2$. Daí, usando a equação de Gauss, temos que

$$R^{\mathbb{S}^2}_{ijkl} = \tilde{R}^M_{ijkl} + A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk}. \tag{2.7}$$

Segue da Proposição 1.10, que $A = \frac{\phi'}{\phi}\tilde{g}$. De posse disso, podemos reescrever (2.7), da seguinte forma

$$R^{\mathbb{S}^2}_{ijkl} = \tilde{R}^M_{ijkl} + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 (\tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl} - \tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk})$$

Agora tomando o traço em jl, temos

$$Ric^{\mathbb{S}^2}_{\tilde{g}} = \tilde{R}^M_{ik} - \tilde{R}^M_{i1k1} + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \tilde{g}_{ik}$$

Agora, lembremos que $\mathbb{S}^2$ com a métrica canônica é uma variedade de Einstein, daí segue da Proposição 1.9 que $Ric^{\mathbb{S}^2}_{\tilde{g}} = \frac{1}{\phi^2}\tilde{g}$, donde ganhamos

$$\tilde{R}^M_{ik} = \tilde{R}^M_{i1k1} + \left(\frac{1 - \phi'^2}{\phi^2}\right)\tilde{g}_{ik}.$$

Por outro lado, pelo que vimos na seção 1.5, $\tilde{R}^M(e_i, \partial r)e_k = -\langle e_i, e_k\rangle\frac{\phi''}{\phi}\partial r$, daí

$$\tilde{R}^M_{i1k1} = \langle \tilde{R}^M(e_i, \partial r)e_k, \partial r\rangle = -\frac{\phi''}{\phi}\tilde{g}_{ik}. \tag{2.8}$$

Afim de fazer uso mais adiante, podemos reescrever a equação (2.8) como

$$\tilde{R}ic^M(\partial r, \partial r) = -2\frac{\phi''}{\phi}. \tag{2.9}$$

Portanto,

$$\tilde{R}^M_{ik} = \left[-\frac{\phi''}{\phi} + \left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right]\tilde{g}_{ik}. \tag{2.10}$$

Para todo $i, k \in \{2,3\}$. Logo, podemos tomar o traço em (2.10) e somar com (2.9) para obtermos a curvatura escalar na métrica $\tilde{g}$, ou seja,

$$\begin{aligned} R_{\tilde{g}} &= \tilde{R}^M_{ii} - 2\frac{\phi''}{\phi} \\ &= 2\left[-\frac{\phi''}{\phi} + \left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right] - 2\frac{\phi''}{\phi} \\ &= 2\left[-2\frac{\phi''}{\phi} + \left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.11}$$

Agora, pela Proposição 1.8 , temos que

$$R_g = e^{-2u}(R_{\tilde{g}} - 4\Delta_{\tilde{g}}u - 2|\nabla^{\tilde{g}}u|^2), \tag{2.12}$$

onde

$$\begin{aligned} |\nabla^{\tilde{g}}u|^2 &= |\nabla^{\tilde{g}}(\ln(r) - \ln(\phi(r))|^2 \\ &= \left|\frac{1}{r}\partial r - \frac{\phi'}{\phi}\partial r\right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{r^2} + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 - 2\frac{1}{r}\frac{\phi'}{\phi}\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{g}}u &= \Delta_{\tilde{g}}(\ln(r) - \ln(\phi(r))) \\ &= div(\nabla(\ln(r) - \ln(\phi(r)))) \\ &= div\left(\left(\frac{1}{r} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\partial r\right) \\ &= \left(\frac{1}{r} - \frac{\phi'}{\phi}\right) div(\partial r) + \tilde{g}(\nabla(\frac{1}{r} - \frac{\phi'}{\phi}), \partial r) \\ &= \left(\frac{1}{r} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\sum_{i=1}^{3}\tilde{g}(\nabla^{\partial r}_{e_i}, e_i) - \frac{1}{r^2} - \left(\frac{\phi''\phi - \phi'^2}{\phi^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{r} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\sum_{i=2}^{3}\tilde{g}(\frac{\phi'}{\phi}e_i, e_i) - \frac{1}{r^2} - \frac{\phi''}{\phi} + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \\ &= 2\left(\frac{1}{r} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\left(\frac{\phi'}{\phi}\right) - \frac{1}{r^2} - \frac{\phi''}{\phi} + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \\ &= 2\frac{\phi'}{r\phi} - \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 - \frac{1}{r^2} - \frac{\phi''}{\phi}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde na sexta igualdade usamos o fato que $\tilde{g}(\nabla_{\partial r}^{\partial r}, \partial r) = 0$ e a Proposição 1.11. Agora, podemos substituir (2.11), (2.13) e (2.14) em (2.12) para obtermos

$$\begin{aligned} R_g &= e^{-2u}2\Bigg[-2\frac{\phi''}{\phi} + \left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right) - 4\frac{\phi'}{r\phi} - 2\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \\ &\quad -\frac{2}{r^2} - \frac{2\phi''}{\phi} - \left(\frac{1}{r^2} + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 - 2\frac{1}{r}\frac{\phi'}{\phi}\right)\Bigg] \\ &= e^{-2u}2\left(\frac{1}{\phi^2} - \frac{-1}{r^2} - \frac{2\phi'}{r\phi}\right). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Note que

$$e^{-2u} = \frac{\phi^2}{r^2} = \left(1 - 2mr^{-1} - \frac{r^2}{3}\right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} R_g &= \frac{\phi^2}{r^2}2\left(\frac{1}{\phi^2} - \frac{-1}{r^2} - \frac{2\phi'}{r\phi}\right) \\ &= \frac{2}{r^2}\left(1 - (-1)\left(1 - 2mr^{-1} - \frac{r^2}{3}\right) - \frac{2\phi\phi'}{r}\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Um cálculo direto, implica que

$$\frac{\phi\phi'}{r} = \left(1 - 2mr^{-1} - \frac{r^2}{3}\right) + \left(mr^{-1} - \frac{r^2}{3}\right).$$

Com isso, podemos reescrever a equação (2.16) da seguinte forma

$$\begin{aligned} R_g &= \frac{2}{r^2}\left(1 - \left(1 - 2mr^{-1} - \frac{r^2}{3}\right) - 2\left(mr^{-1} - \frac{r^2}{3}\right)\right) \\ &= \frac{2}{r^2}\left(\frac{3r^2}{3}\right) \\ &= 2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Seja $g = dr^2 + u(r)^2 g_{\mathbb{S}^2}$ a métrica de deSitter-Schwarzschild. Agora mostraremos um fato fundamental na prova do resultado principal desse trabalho, a saber, a função warped $u(r)$ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária

$$u''(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - u'(r)^2}{u(r)}\right) - \frac{u(r)}{2}. \tag{2.18}$$

Para ver isso, basta notar que pela equação (2.11), temos que

$$R_g = 2\left[-2\frac{u''}{u} + \left(\frac{1-u'^2}{u^2}\right)\right],$$

por outro lado, a curvatura escalar $R_g = 2$, daí

$$-2\frac{u''}{u} + \left(\frac{1-u'^2}{u^2}\right) = 1,$$

ou seja,

$$u'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1-u'(r)^2}{u(r)}\right) - \frac{u(r)}{2}.$$

Considerando apenas soluções positivas da equação (2.18) que são definidas para todo $r \in \mathbb{R}$, obtemos uma família a 1-parâmetro de métricas rotacionalmente simétricas $g_a = dr^2 + u_a(r)^2 g_{\mathbb{S}^2}$ com curvatura escalar constante igual a 2, onde $u_a(r)$ satisfaz $u_a(0) = a = \min u$ e $u_a'(0) = 0$ com $a \in (0,1)$ (para ver isso, note que sendo 0 um ponto de mínimo então $u''(0) > 0$). Estas métricas são precisamente as métricas de deSitter-Schwarzschild definidas acima.

Observação 2.1. *Note que, para $a = 1$, temos que por unicidade de solução de EDO, $u(r) \equiv 1$ é a única solução de (2.18), ou seja, $g = dr^2 + g_{\mathbb{S}^2}$ é a métrica produto em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$. Em suma, quando $a \to 1$, as métricas de deSitter-Schwarzschild convergem para a métrica produto.*

A proposição a seguir, nos trás um resultado fundamental para esse trabalho. Provaremos que o slice Σ_0 é estritamente estável no deSitter-Schwarzschild.

Proposição 2.1. *$\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{S}^2 \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2, g_a)$ é estritamente estável com área igual a $4\pi a^2$ para todo $a \in (0,1)$, mas na métrica produto padrão $dr^2 + g_{\mathbb{S}^2}$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, ou seja, no limite quando $a \to 1$, Σ_0 é apenas estável e não estritamente.*

Demonstração. Pela Proposição 1.10, temos que a segunda forma fundamental de Σ_0 é dada por

$$A_{ij} = -\frac{u_a'(0)}{u_a(0)} g_{ij} = 0,$$

ou seja, Σ_0 é totalmente geodésico. Por outro lado, note que a métrica induzida em Σ_0 é $u_a(0)^2 g_{\mathbb{S}^2} = a^2 g_{\mathbb{S}^2}$ e portanto temos $|\Sigma_0| = 4\pi a^2$. Com isso, segue que o operador de Jacobi de Σ_0 é dado por

$$\begin{aligned} L_{\Sigma_0} &= \Delta_{\Sigma_0} + \mathrm{Ric}(\nu,\nu) \\ &= \Delta_{\Sigma_0} + \frac{R}{2} - K_{\Sigma_0} \\ &= \Delta_{\Sigma_0} + 1 - \frac{4\pi}{|\Sigma_0|} \\ &= \Delta_{\Sigma_0} + 1 - \frac{1}{a^2}, \end{aligned}$$

para todo $a \in (0,1)$. Note que, na terceira igualdade usamos o Teorema de Gauss Bonnet e o fato de que K_{Σ_0} é constante. Assim, temos que

$$\begin{aligned} -\int_{\Sigma_0} \varphi L \varphi d\sigma &= -\int_{\Sigma_0} \varphi \Delta_{\Sigma_0} \varphi d\sigma - \int_{\Sigma_0} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \varphi^2 d\sigma \\ &= \int_{\Sigma_0} |\nabla \varphi|^2 d\sigma + \left(\frac{1}{a^2} - 1\right) \int_{\Sigma_0} \varphi^2 d\sigma, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$, daí

$$\begin{aligned} -\frac{\int_{\Sigma_0} \varphi L \varphi d\sigma}{\int_{\Sigma_0} \varphi^2 d\sigma} &= \frac{\int_{\Sigma_0} |\nabla \varphi|^2 d\sigma}{\int_{\Sigma_0} \varphi^2 d\sigma} + \frac{1 - a^2}{a^2} \\ &\geqslant \frac{1 - a^2}{a^2} > \delta > 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\lambda_1(L) = \inf \left(-\frac{\int_{\Sigma_0} \varphi L \varphi d\sigma}{\int_{\Sigma_0} \varphi^2 d\sigma} \right) > \delta > 0,$$

e portanto Σ_0 é estritamente estável. Por fim, note que no limite quando $a \to 1$, perdemos a desigualdade estrita nas equações acima, ou seja, teremos somente

$$\lambda_1(L) \geqslant 0,$$

configurando ser Σ_0 apenas estável na variedade $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2, dr^2 + g_{\mathbb{S}^2})$. □

Nosso próximo resultado mostra que a massa de Hawking é constante ao longo dos slices da variedade deSitter-Schwarzschild, mais precisamente temos a

Proposição 2.2. *A massa de Hawking de* $\Sigma_r = \{r\} \times \mathbb{S}^2 \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2, g_a)$ *é constante para todo* $r \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Primeiramente, por definição, a massa de Hawking de Σ_r é dada por

$$m_H(\Sigma_r) = \left(\frac{|\Sigma_r|}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_r} \left(H_r^2 + \frac{4}{3}\right) d\sigma\right),$$

onde H_r é a curvatura média de Σ_r, pela Proposição 1.10, temos que

$$H_r = (B(e_1, e_1) + B(e_2, e_2)) = -2\frac{u_a'(r)}{u_a(r)}.$$

Note que a métrica induzida em Σ_r é dada por $u_a^2(r) g_{\mathbb{S}^2}$, daí $|\Sigma_r| = 4\pi u_a^2(r)$. Agora podemos reescrever a massa de Hawking em função de $u_a(r)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
m_H(\Sigma_r) &= \left(\frac{4\pi u_a^2(r)}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{16\pi}\int_{\Sigma_r}\left(\frac{4(u_a'(r))^2}{u_a^2(r)} + \frac{4}{3}\right)d\sigma\right)\\
&= \frac{u_a(r)}{2}\left(1 - \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_r}\left(\frac{(u_a'(r))^2}{u_a^2(r)} + \frac{1}{3}\right)d\sigma\right)\\
&= \frac{u_a(r)}{2}\left(1 - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{(u_a'(r))^2}{u_a^2(r)} + \frac{1}{3}\right)|\Sigma_r|\right)\\
&= \frac{u_a(r)}{2}\left(1 - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{(u_a'(r))^2}{u_a^2(r)} + \frac{1}{3}\right)4\pi u_a^2\right)\\
&= \frac{u_a(r)}{2}\left(1 - (u_a'(r))^2 - \frac{u_a^2(r)}{3}\right).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Assim, calculando a primeira variação de $m_H(\Sigma_r)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}m_H(\Sigma_r) &= \frac{u_a'(r)}{2}\Big(1 - (u_a'(r))^2 - \frac{u_a^2(r)}{3}\Big)\\
&\quad + \frac{u_a(r)}{2}\Big(-2u_a'(r)u_a''(r) - \frac{2u_a(r)u_a'(r)}{3}\Big)\\
&= \frac{u_a'(r)}{2}\Big(1 - (u_a'(r))^2 - u_a^2(r) - 2u_a(r)u_a''(r)\Big)\\
&= \frac{u_a'(r)}{2}\left(1 - (u_a'(r))^2 - u_a^2(r) - 2u_a(r)\Big(\frac{1-(u_a'(r))^2}{2u_a(r)} - \frac{u_a(r)}{2}\Big)\right)\\
&= \frac{u_a'(r)}{2}\Big(1 - (u_a'(r))^2 - u_a^2(r) - 1 + (u_a'(r))^2 + u_a^2(r)\Big)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que nos slices Σ_r do deSitter-Schwarzschild $(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2, g_a)$, a massa de Hawking é constante para todo $r \in \mathbb{R}$. $\square$

Note que $m_H(\Sigma_r) = m$, onde m é o parâmetro de massa na expressão da métrica de deSitter-Schwarzschild dada em (2.1). Para provar tal afirmação, basta isolar m na equação (2.4), para obtermos

$$m = \frac{u_a(r)}{2}\left(1 - (u_a'(r))^2 - \frac{u_a^2(r)}{3}\right) = m_H(\Sigma_r),$$

onde a última igualdade é dada em (2.19).

2.2 Resultados importantes

Esta seção será destinada a alguns resultados que envolvem a massa de Hawking e estabilidade de esferas mínimas em variedades Riemannianas tridimensionais.

Começaremos apresentando uma caracterização dos pontos críticos do funcional massa de Hawking.

Proposição 2.3. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar* $R \geqslant 2$*. Se uma superfície compacta, dois lados* $\Sigma \subset M$ *com curvatura média não negativa é um ponto crítico do funcional massa de Hawking, então* Σ *é mínima ou* Σ *é umbílica,* $R = 2$ *ao longo de* Σ *e* Σ *tem curvatura de Gauss constante.*

Demonstração. Primeiramente, se $\Sigma \subset M$ é um ponto crítico do funcional massa de Hawking, pela Proposição 1.6, temos que

$$\begin{aligned}\frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma}\left[2K_{\Sigma} - \frac{8\pi}{|\Sigma|} + (2 - R) + \left(\frac{1}{2|\Sigma|}\int_{\Sigma} H^2 d\sigma - |A|^2\right)\right] H\varphi d\sigma & \\ -\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma}\varphi\Delta_{\Sigma}H d\sigma &= 0\end{aligned}$$

Multiplicando a igualdade acima por $\dfrac{-(16\pi)^{\frac{3}{2}}}{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$, obtemos

$$\int_{\Sigma}\varphi(\Delta_{\Sigma}H + QH)d\sigma = 0, \ \forall \ \varphi \in C^{\infty}(\Sigma),$$

onde

$$Q = \left(\frac{4\pi}{|\Sigma|} - K_{\Sigma}\right) + \frac{R-2}{2} + \frac{1}{2|\Sigma|}\int_{\Sigma}\left(|A|^2 - \frac{1}{2}H^2\right) d\sigma.$$

Portanto,

$$\Delta_{\Sigma}H + QH = 0 \tag{2.20}$$

Assim, fazendo $L = \Delta_{\Sigma} + Q$, pelo Teorema 1.3 podemos concluir que, ou $H \equiv 0$ ou $H > 0$.

Se $H \equiv 0$ temos que Σ é mínima. Por outro lado, se $H > 0$, temos por (2.20), que

$$\frac{\Delta_{\Sigma}H}{H} + Q = 0. \tag{2.21}$$

Pela 1° Fórmula de Green 1.2, fazendo $u = \dfrac{1}{H}$, $v = H$ o que implica $\nabla u = -\dfrac{\nabla H}{H^2}$ e $\nabla v = \nabla H$, temos que

$$\int_{\Sigma}\frac{1}{H}\Delta H + \int_{\Sigma} -\frac{1}{H^2}\langle\nabla H, \nabla H\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Sigma}\frac{1}{H}\Delta H = \int_{\Sigma}\frac{|\nabla H|^2}{H^2} \geqslant 0. \tag{2.22}$$

Portanto, integrando (2.21) e usando (2.22), temos que

$$0 = \int_{\Sigma}\frac{|\nabla H|^2}{H^2}d\sigma + \int_{\Sigma} Q d\sigma. \tag{2.23}$$

Afirmamos que, $\int_\Sigma Q d\sigma \geqslant 0$. Com efeito, como $\chi(\Sigma) \leqslant 2$ e por hipótese $R \geqslant 2$, então

$$
\begin{aligned}
\int_\Sigma Q d\sigma &= \int_\Sigma \left(\frac{4\pi}{|\Sigma|} - K_\Sigma\right) d\sigma + \frac{1}{2}\int_\Sigma (R-2) d\sigma + \frac{1}{4}\left(\int_\Sigma \frac{2|A|^2}{|\Sigma|} d\sigma - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H^2 d\sigma\right) \\
&= (4\pi - 2\pi\chi(\Sigma)) + \frac{1}{2}\int_\Sigma (R-2) d\sigma + \frac{1}{2|\Sigma|}\int_\Sigma \left(|A|^2 - \frac{H^2}{2}\right) d\sigma \\
&\geqslant \frac{1}{2|\Sigma|}\int_\Sigma \left(|A|^2 - \frac{H^2}{2}\right) d\sigma, \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

onde na segunda igualdade usamos o Teorema de Gauss-Bonnet. Para o que falta, seja $\mathring{A} = A - \frac{H}{2} I$ o operador segunda forma fundamental sem traço. Então,

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant |\mathring{A}|^2 &= \langle A - \frac{H}{2} I, A - \frac{H}{2} I\rangle \\
&= |A|^2 - \frac{2H}{2}\langle A, I\rangle + \frac{H^2}{4}\langle I, I\rangle \\
&= |A|^2 - H^2 + \frac{H^2}{2} \\
&= |A|^2 - \frac{H^2}{2},
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
|A|^2 - \frac{H^2}{2} \geqslant 0, \qquad (2.25)
$$

a igualdade em (2.25) ocorre se, e somente se, Σ é umbílica. Com isso, concluimos a afirmação, ou seja,

$$
\int_\Sigma Q d\sigma \geqslant 0. \qquad (2.26)
$$

Portanto, (2.23) e (2.26) implica que $\int_\Sigma \frac{|\nabla H|^2}{H^2} d\sigma = 0$, donde H é constante. Assim, segue de (2.21) que $Q \equiv 0$, daí segue de (2.24) que $K_\Sigma = \dfrac{4\pi}{|\Sigma|}$ e $R = 2$ ao longo de Σ. Além disso, a igualdade ocorre na equação (2.25), implicando que Σ é umbílica. Isso conclui a prova. □

Como consequência imediata da proposição acima, temos

Corolário 2.1. *Uma superfície compacta dois lados com curvatura média não negativa na variedade deSitter-Schwarzschild* $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2, g_a)$ *é um ponto crítico do funcional massa de Hawking se, e somente se, for mínima ou um slice* $\{r\} \times \mathbb{S}^2$.

Demonstração. Pela Proposição 2.3, temos que Σ é mínima, ou possui curvatura média constante, neste caso segue do Corolário 1.2 em [5] que Σ é um slice. □

Agora provaremos uma relação envolvendo a área de uma esfera mínima e o primeiro autovalor do operador de Jacobi.

Proposição 2.4. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar* $R \geqslant 2$. *Se* $\Sigma^2 \subset M$ *é uma esfera topológica mínima estável, então*

$$|\Sigma| \leqslant \frac{4\pi}{\lambda_1(L) + 1}. \tag{2.27}$$

Demonstração. Pela desgualdade de estabilidade, temos que

$$\lambda_1(L)\int_\Sigma \varphi^2 d\sigma + \int_\Sigma (\mathrm{Ric}(\upsilon, \upsilon) + |A|^2)\varphi^2 d\sigma \leqslant \int_\Sigma |\nabla_\Sigma \varphi|^2 d\sigma,$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$, onde $d\sigma$ denota o elemento de área de Σ e $\lambda_1(L) \geqslant 0$. Escolhendo $\varphi = 1$, obtemos

$$\lambda_1(L)|\Sigma| + \int_\Sigma (\mathrm{Ric}(\upsilon, \upsilon) + |A|^2) d\sigma \leqslant 0, \tag{2.28}$$

onde $|\Sigma|$ é a área de Σ. A equação de Gauss, implica que

$$\mathrm{Ric}(\upsilon, \upsilon) = \frac{R}{2} - K_\Sigma - \frac{|A|^2}{2}, \tag{2.29}$$

onde K_Σ é a curvatura de Gauss de Σ. Substituindo (2.29) em (2.28), teremos

$$\lambda_1(L)|\Sigma| + \frac{1}{2}\int_\Sigma (R + |A|^2) d\sigma \leqslant \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma). \tag{2.30}$$

Agora, usando que $R \geqslant 2$ e que $|A|^2 \geqslant 0$ em (2.30), obtemos

$$\lambda_1(L)|\Sigma| + |\Sigma| \leqslant 2\pi\chi(\Sigma) = 4\pi,$$

ou seja,

$$|\Sigma| \leqslant \frac{4\pi}{\lambda_1(L) + 1}.$$

□

Como corolário da prova acima, temos que se a igualdade em (2.27) é atingida, então obtemos uma rigidez infinitesimal sobre Σ.

Corolário 2.2. *Se ocorre a igualdade na equação (2.27), então ao longo de* Σ *devemos ter* $A = 0$, $R = 2$, $\mathrm{Ric}(\nu, \nu) = -\lambda_1(L)$, $K = \dfrac{4\pi}{|\Sigma|}$ *e* $\mathrm{Ker}(L + \lambda_1(L))$ *são as funções constantes.*

Demonstração. Primeiramente, note que na desigualdade (2.30) usamos os fatos que $|A|^2 \geqslant 0$ e $R \geqslant 2$, então para que a igualdade em (2.30) ocorra, devemos ter $A = 0$ e $R = 2$. Agora, segue de (1.6) que

$$-\int_\Sigma \varphi(L + \lambda_1(L))\varphi d\sigma \geqslant 0. \tag{2.31}$$

Por outro lado, da igualdade em (2.28), temos que

$$\int_{\Sigma}(\mathrm{Ric}(\nu,\nu)+\lambda_1(L))d\sigma = 0$$

e portanto, fazendo $\varphi = c$ (constante), obtemos a igualdade em (2.31), dessa forma o primeiro autovalor do operador $(L+\lambda_1(L))$ é igual a zero, daí temos $(L+\lambda_1(L))c = 0$, ou seja, $c \in \mathrm{Ker}(L+\lambda_1(L))$. De posse disso, veja que

$$(L+\lambda_1(L))c = (\mathrm{Ric}(\nu,\nu)+\lambda_1(L))c,$$

o que nos permite concluir que $\mathrm{Ric}(\nu,\nu) = -\lambda_1(L)$, e da equação (2.29) juntamente com a igualdade em (2.27) concluimos que $K_{\Sigma} = \dfrac{4\pi}{|\Sigma|}$.

Para finalizar a prova, seja $\varphi \in \mathrm{Ker}((L+\lambda_1(L))$, daí temos $(L+\lambda_1(L))\varphi = 0$ o que implica $\varphi(L+\lambda_1(L))\varphi = 0$ e portanto, $\int_{\Sigma}|\nabla\varphi|^2 d\sigma = 0$, donde ganhamos $|\nabla\varphi|^2 = 0$, isto é, φ é contante e assim provamos que o $\mathrm{Ker}(L+\lambda_1(L))$ são as funções constantes. □

Nossa próxima proposição fornece uma relação entre a estabilidade estrita e a massa de Hawking. Mais precisamente, ela nos diz que, se a segunda variação da massa de Hawking de uma esfera mínima estritamente estável Σ for não positiva para toda variação normal $\Sigma(t)$ de Σ, então temos a desigualdade reversa a (2.9). Portanto obtemos a igualdade em (2.27) e as conclusões do Corolário 2.2 seguem neste caso.

Lembre-se que, por definição Σ é estritamente estável quando $\lambda_1(L) > 0$.

Proposição 2.5. *Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com* $R \geqslant 2$ *e* $\Sigma^2 \subset M$ *uma esfera topológica mínima. Se* Σ^2 *é estritamente estável e maximiza localmente a massa de Hawking, então*

$$|\Sigma| \geqslant \frac{4\pi}{\lambda_1(L)+1}.$$

Demonstração. Como Σ maximiza localmente $m_H(\Sigma)$, então

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} m_H(\Sigma(t)) \leqslant 0,$$

daí pela Proposição 1.7, temos que

$$-\frac{m_H(\Sigma)}{2|\Sigma|}\int_{\Sigma}\varphi L\varphi d\sigma + \frac{4}{3}\frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma}\varphi L\varphi d\sigma - \frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma}(L\varphi)^2 d\sigma \leqslant 0. \tag{2.32}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{m_H(\Sigma)}{2|\Sigma|} &= \frac{\left(\frac{|\Sigma|}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{16\pi}\int_{\Sigma}H^2 d\sigma - \frac{2}{24\pi}|\Sigma|\right)}{2|\Sigma|} \\
&= \frac{1}{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}(16\pi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{3(16\pi)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Substituindo 2.33 em 2.32, obtemos

$$-\frac{1}{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_\Sigma \varphi L\varphi d\sigma + \frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \varphi L\varphi d\sigma - \frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma (L\varphi)^2 d\sigma \leqslant 0. \tag{2.34}$$

Afim de simplificar nossa conta, multipliquemos (2.34) por $|\Sigma|^{\frac{1}{2}}(16\pi)^{\frac{3}{2}}$, dessa forma, teremos

$$-8\pi\int_\Sigma \varphi L\varphi d\sigma + 2|\Sigma|\int_\Sigma \varphi L\varphi d\sigma - 2|\Sigma|\int_\Sigma (L\varphi)^2 d\sigma \leqslant 0. \tag{2.35}$$

Agora, se aplicarmos em (2.35) uma autofunção de $\lambda_1(L)$ satisfazendo $\int_\Sigma \varphi^2 d\sigma = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant -8\pi\int_\Sigma -\lambda_1(L)\varphi^2 d\sigma + 2|\Sigma|\int_\Sigma -\lambda_1(L)\varphi^2 d\sigma - 2|\Sigma|\int_\Sigma \lambda_1^2\varphi^2 d\sigma \\ &= 8\pi\lambda_1(L) - 2|\Sigma|\lambda_1 - 2|\Sigma|\lambda_1^2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Como por hipótese Σ é estritamente estável, ou seja, $\lambda_1(L) > 0$, podemos dividir (2.36) por $\lambda_1(L)$ e isolar $|\Sigma|$, obtendo assim,

$$|\Sigma| \geqslant \frac{4\pi}{(1+\lambda_1(L))}.$$

$\square$

Capítulo 3

Resultados principais

Neste capítulo traremos o resultado principal deste trabalho, a saber, *"Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura escalar* $R \geqslant 2$*. Se* $\Sigma^2 \subset M$ *é uma esfera topológica mínima, mergulhada, estritamente estável que maximiza localmente o funcional massa de Hawking, então a curvatura Gaussiana de* Σ *é constante e igual a* $\frac{1}{a^2}$ *para algum* $a \in (0, 1)$*, e existe uma vizinhança de* Σ *em* (M, g) *isométrica a métrica de deSitter-Schwarzschild* $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, g_a)$ *para algum* $\epsilon > 0$*".*

3.1 Folheação CMC

Nesta seção iremos apresentar um resultado fundamental para a prova do Teorema principal.

Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana e considere uma superfície compacta dois lados $\Sigma \subset M$. Se Σ é uma superfície mínima estritamente estável, podemos sempre usar o teorema da função implícita para encontrar uma função suave $\omega : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to \mathbb{R}$ com $\omega(0, x) = 0$, para todo $x \in \Sigma$, de modo que as superfícies

$$\Sigma(t) = \{\exp_x(\omega(t, x)\nu(x)); x \in \Sigma\}, \ t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

tem curvatura média constante, onde ν é o campo vetorial normal unitário ao longo de Σ e $\exp$ é a applicação exponencial de M.

Proposição 3.1. *Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura escalar* $R \geqslant 2$*. Se* $\Sigma \subset M$ *é uma esfera topológica mínima mergulhada, estritamente estável tal que*

$$|\Sigma| = \frac{4\pi}{\lambda_1(L) + 1}, \tag{3.1}$$

então existe $\epsilon > 0$ *e uma função suave* $\omega : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to \mathbb{R}$ *satisfazendo as seguintes condições*

i) Para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$*,* $\Sigma(t) = \{\exp_x(\omega(t,x)\upsilon(x); x \in \Sigma\}$ *é uma esfera topológica mergulhada* CMC;

ii) $\omega(0,x) = 0$*,* $\dfrac{\partial \omega}{\partial t}(0,x) = 1$ *e* $\int_\Sigma (\omega(t,\cdot) - t)d\sigma = 0$*.*

Demonstração. Fixado $\alpha \in (0,1)$, considere os espaços de Banach $X := \{u \in C^{2,\alpha}(\Sigma); \int_\Sigma u d\sigma = 0\}$ $Y := \{u \in C^{0,\alpha}(\Sigma); \int_\Sigma u d\sigma = 0\}$. Para cada $u \in C^\infty(\Sigma)$, seja $\Sigma_u := \{\exp_x(u(x)\upsilon(x)); x \in \Sigma\}$ sendo υ normal unitário de Σ. Escolhendo $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ tal que Σ_{u+t} é uma superfície compacta de classe $C^{2,\alpha}$ para todo $(t,u) \in (-\epsilon,\epsilon) \times B(0,\delta)$, onde $B(0,\delta) = \{u \in X; \|u\|_{C^{2,\alpha}} < \delta\}$. Denote por $H_{\Sigma_{u+t}}$ a curvatura média de Σ_{u+t}.

Considere $\Psi : (-\epsilon,\epsilon) \times B(0,\delta) \to Y$ definida por

$$\Psi(t,u) := H_{\Sigma_{u+t}} - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H_{\Sigma_{u+t}} d\sigma.$$

Note que $\Psi(0,0) = H_{\Sigma_0} - \dfrac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H_{\Sigma_0} d\sigma = 0$, pois Σ_0 é mínima. Note ainda que pela igualdade em (3.1) temos que $Ric(\upsilon,\upsilon) = -\lambda_1(L)$ e $|A|^2 = 0$ (veja Corolário 1), donde ganhamos que o operador de Jacobi de Σ é dado por $L = \Delta_\Sigma - \lambda_1(L)$. Assim, dado $\upsilon \in X$, temos

$$\begin{aligned}
D\Psi(0,0)\cdot\upsilon &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Psi(0,s\nu)\\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\left(H_{s\upsilon} - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H_{s\upsilon} d\sigma\right)\\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} H_{s\upsilon} - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} H_{s\upsilon} d\sigma\right)\\
&= L\upsilon - \left(\frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma L\upsilon d\sigma\right)\\
&= L\upsilon - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma \Delta_\Sigma\upsilon d\sigma + \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma \lambda_1(L)\upsilon d\sigma\\
&= L\upsilon + \frac{\lambda_1(L)}{|\Sigma|}\int_\Sigma \upsilon d\sigma,
\end{aligned}$$

onde na útima igualdade acima usamos o teorema da divergência. Como $\upsilon \in X$, então

$$D\Psi(0,0)\cdot\upsilon = L\upsilon.$$

Afirmamos que o operador $L : X \to Y$ é um isomorfismo linear. Com efeito, $Lu = 0$ implica $\Delta_\Sigma u - \lambda_1(L)u = 0$, donde multiplicando a última igualdade por u e integrando, ganhamos

$$0 \geqslant -\int_\Sigma |\nabla u|^2 d\sigma = \lambda_1(L)\int_\Sigma u^2 d\sigma \geqslant 0,$$

ou seja, $u \equiv 0$ e $\ker L = 0$. Por outro lado, vimos na Seção 1.6 que

$$\langle Lu, \nu\rangle_{L^2} = \langle u, L^*\nu\rangle_{L^2}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\langle u, L^*\nu\rangle_{L^2} &= \int_\Sigma Lu\cdot \nu d\sigma \\
&= \int_\Sigma (\Delta u - \lambda_1 u)\nu d\sigma \\
&= \int_\Sigma (\nu\Delta u - \lambda_1 u\nu) d\sigma \\
&= \int_\Sigma (u\Delta\nu - \lambda_1 u\nu) d\sigma \\
&= \int_\Sigma u(\Delta\nu - \lambda_1\nu) d\sigma \\
&= \langle u, L\nu\rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Isso implica que $L = L^*$ o que nos permite concluir que $\ker L^* = 0$. Portanto, pelo Teorema 1.4, concluimos que para todo $y \in Y$ a equação $Lu = y$ tem uma única solução $u \in X$. Isso conclui nossa afirmação.

Logo pelo teorema da função implícita, existe $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ e $u(t) := u(t,\cdot) \in B(0,\delta)$, onde $u(0) = 0$ e $\Psi(t, u(t)) = 0 \quad$ para todo $t \in (-\epsilon_1, \epsilon_1)$.

Definindo $\omega : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to \mathbb{R}$ como $\omega(t, x) = u(t, x) + t$; $(t, x) \in (-\epsilon_1, \epsilon_1)$, temos que

i) $\Sigma_t := \{\exp_x(\omega(t, x)\nu(x));\ x \in \Sigma\}$ é CMC;

ii) $\omega(0, x) = u(0, x) + 0 = 0$;

iii) $\int_\Sigma(\omega(t,\cdot) - t)d\sigma = \int_\Sigma u d\sigma = 0$, pois $u \in X$.

O item $iii)$ implica

$$\int_\Sigma \frac{\partial\omega}{\partial t}(0,\cdot)d\sigma = \int_\Sigma 1 d\sigma = |\Sigma|. \tag{3.2}$$

Agora de $\Psi(t, u(t)) = 0$, temos que

$$H_{u(t)+t} - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H_{u(t)+t} d\sigma = 0,$$

o que implica

$$H_{\omega(t,\cdot)} = \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H_{\omega(t,\cdot)} d\sigma \quad \forall\, t \in (-\epsilon_1, \epsilon_1),$$

donde diferenciando em $t = 0$ e usando (3.2) temos

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}(0,\cdot)\right) &= \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma L\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}(0,\cdot)\right) d\sigma \\ &= \frac{-\lambda_1(L)}{|\Sigma|}\int_\Sigma \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}(0,\cdot)\right) d\sigma \\ &= -\lambda_1(L) \\ &= L(1). \end{aligned}$$

Logo pela injetividade de L, temos $\dfrac{\partial \omega}{\partial t}(0,\cdot) = 1$ para Σ estritamente estável.

□

Estamos agora interessados nas propriedades da folheação CMC dada pela Proposição 3.1. Diremos que uma superfície Σ em uma variedade (M^3, g) é *fracamente estáveis*, se

$$\int_\Sigma |\nabla_\Sigma \varphi|^2 d\sigma_t - \int_\Sigma (\mathrm{Ric}(\nu,\nu) + |A|^2)\varphi^2 d\sigma_t \geqslant 0 \tag{3.3}$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$, tal que $\int_\Sigma \varphi d\sigma = 0$. Provaremos em seguidada, diminuindo ϵ se necessário, que todas as superfícies $\Sigma(t)$ da folheação dada na Proposição 3.1 são fracamente estáveis.

Lema 3.1. *Sejam* (M^3, g), Σ *e* $\Sigma(t)$ *como na Proposição 3.1. Então existe* $0 < \delta < \epsilon$ *tal que, se* $t \in (-\delta, \delta)$ *e* $u \in C^\infty(\Sigma(t))$ *satisfazendo* $\int_{\Sigma(t)} u d\sigma_t = 0$, *então*

$$\int_{\Sigma(t)} |\nabla_{\Sigma(t)} u|^2 d\sigma_t - \int_{\Sigma(t)} (\mathrm{Ric}(\nu,\nu) + |A|^2) u^2 d\sigma_t \geqslant \lambda_1(L_\Sigma)\int_{\Sigma(t)} u^2 d\sigma_t,$$

onde ν_t *é o campo vetorial normal unitário ao longo de* $\Sigma(t)$ *com* $\nu_0 = \nu$.

Demonstração. Começamos notando que podemos escolher uma constante uniforme $C > 0$ de modo que a desigualdade de Poincaré

$$\int_{\Sigma(t)} |\nabla_{\Sigma(t)} u|^2 d\sigma_t \geqslant C\int_{\Sigma(t)} u^2 d\sigma_t, \tag{3.4}$$

é satisfeita para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e para qualquer função suave $u : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\int_{\Sigma(t)} u d\sigma_t = 0$. Além disso, segue do Corolário 2.2 que

$$\mathrm{Ric}(\nu_t, \nu_t) + |A_{\Sigma(t)}|^2 + \lambda_1(L_\Sigma) = 0, \text{ em } t = 0.$$

Assim, temos que

$$\sup_{\Sigma(t)}(\mathrm{Ric}(\nu_t,\nu_t)+|A_{\Sigma(t)}|^2+\lambda_1(L_{\Sigma(t)}))\to 0,$$

quando $t\to 0$. Logo existe $0<\delta<\epsilon$, tal que para todo $t\in(-\delta,\delta)$

$$\mathrm{Ric}(\upsilon,\upsilon)+|A_{\Sigma(t)}|^2+\lambda_1(L_\Sigma)\leqslant C,$$

como $u^2\geqslant 0$, temos que

$$\left(\mathrm{Ric}(\upsilon,\upsilon)+|A_{\Sigma(t)}|^2+\lambda_1(L_\Sigma)\right)u^2\leqslant Cu^2. \tag{3.5}$$

Integrando (3.5), teremos

$$\int_\Sigma\left(\mathrm{Ric}(\upsilon,\upsilon)+|A_{\Sigma(t)}|^2+\lambda_1(L_\Sigma)\right)u^2d\sigma\leqslant C\int_{\Sigma(t)}u^2d\sigma,$$

daí usando a equação (3.4), temos que

$$\int_\Sigma\left(\mathrm{Ric}(\upsilon,\upsilon)+|A_{\Sigma(t)}|^2+\lambda_1(L_\Sigma)\right)u^2d\sigma\leqslant\int_{\Sigma(t)}|\nabla_{\Sigma(t)}u|^2d\sigma_t,$$

ou seja,

$$\int_{\Sigma(t)}|\nabla_{\Sigma(t)}u|^2d\sigma_t-\int_\Sigma\left(\mathrm{Ric}(\upsilon,\upsilon)+|A_{\Sigma(t)}|^2\right)u^2d\sigma\geqslant\lambda_1(L_\Sigma)\int_\Sigma u^2d\sigma_t.$$

□

Novamente, sejam (M,g), Σ e $\Sigma(t)$ como na Proposição 3.1. Agora apresentaremos algumas notações. Seja $f(t,x)=\exp_x(\omega(t,x)\nu(x))$, $(t,x)\in(-\delta,\delta)\times\Sigma$, onde $\delta>0$ é dado pelo Lema 3.1. Considere a *função lapso*

$$\rho_t(x)=\left\langle\frac{\partial f}{\partial t}(t,x),\nu_t(x)\right\rangle,\ (t,x)\in(-\delta,\delta)\times\Sigma.$$

Note que

$$\rho_0(x)=\langle\exp_{(\omega(0,x)\nu(x))}(\frac{\partial\omega}{\partial t}(0,x)(\nu(x))),\nu_t(x)\rangle,$$

daí pela Proposição 3.1, temos que $\rho_0(x)=\langle\exp_0(\nu(x)),\nu_t(x)\rangle=\langle\nu(x),\nu(x)\rangle\equiv 1$, donde podemos assumir, diminuindo $\delta>0$ se necessário, que $\rho_t>0$. Por fim, denotemos por H_t a curvatura média de $\Sigma(t)$ com respeito a ν_t e seja $\overline{\rho_t}=\dfrac{1}{|\Sigma(t)|}\int_{\Sigma(t)}\rho_t d\sigma_t$.

Agora, podemos afirmar e provar

Lema 3.2. *Para todo* $t\in(-\delta,\delta)$, *temos*

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma(t)}(\mathrm{Ric}(\nu(t),\nu(t))+|A_{\Sigma(t)}|^2)\rho_t d\sigma_t\\ \geqslant\ &\frac{\lambda_1(L_\Sigma)}{\overline{\rho_t}}\int_{\Sigma(t)}(\rho_t-\overline{\rho_t})^2d\sigma_t+\overline{\rho_t}\int_{\Sigma(t)}(\mathrm{Ric}(\nu(t),\nu(t))+|A_{\Sigma(t)}|^2)d\sigma_t.\end{aligned}$$

Demonstração. Primeiramente note que $\frac{d}{dt}H_t = L_{\Sigma(t)}$, $\int_{\Sigma(t)}(\rho_t - \overline{\rho_t})d\sigma_t = 0$ e o Lema 3.1 implicam a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\lambda_1(L_\Sigma)\int_{\Sigma(t)}(\rho_t - \overline{\rho_t})^2 d\sigma_t &\leqslant \int_{\Sigma(t)} |\nabla_{\Sigma(t)}(\rho - \overline{\rho_t})|^2 d\sigma_t \\
&\quad - \int_{\Sigma(t)} (Ric(\nu(t),\nu(t)) + |A_{\Sigma(t)}|^2)(\rho - \overline{\rho_t})^2 d\sigma_t \\
&= -\int_{\Sigma(t)} L_{\Sigma(t)}(\rho_t - \overline{\rho_t})^2 d\sigma_t \\
&= -\int_{\Sigma(t)} (\rho_t - \overline{\rho_t})L_{\Sigma(t)}(\rho_t - \overline{\rho_t})d\sigma_t \\
&= -\int_{\Sigma(t)} (\rho_t - \overline{\rho_t})L_{\Sigma(t)}\rho_t d\sigma_t + \int_{\Sigma(t)} (\rho_t - \overline{\rho_t})L_{\Sigma(t)}\overline{\rho_t}d\sigma_t \\
&= -\frac{d}{dt}H_t \int_{\Sigma(t)} (\rho_t - \overline{\rho_t})d\sigma_t + \int_{\Sigma(t)} (\rho_t - \overline{\rho_t})L_{\Sigma(t)}\overline{\rho_t}d\sigma_t \\
&= \int_{\Sigma(t)} (\rho_t - \overline{\rho_t})(\Delta_{\Sigma(t)}\overline{\rho_t} + (Ric(\nu_t,\nu_t) + |A_{\Sigma(t)}|^2)\overline{\rho_t}d\sigma_t.
\end{aligned}$$

Agora basta notar que $\overline{\rho_t}$ não depende de t, ou seja $\Delta_{\Sigma(t)}\overline{\rho_t} = 0$ donde ganhamos

$$\int_{\Sigma(t)} (\rho_t - \overline{\rho_t})(Ric(\nu_t,\nu_t) + |A_{\Sigma(t)}|^2)\overline{\rho_t}d\sigma_t \geqslant \lambda_1(L_\Sigma)\int_{\Sigma(t)} (\rho_t - \overline{\rho_t})^2 d\sigma_t, \tag{3.6}$$

dividindo (3.6) por $\overline{\rho_t}$, teremos

$$\int_{\Sigma(t)} (\rho_t - \overline{\rho_t})(Ric(\nu_t,\nu_t) + |A_{\Sigma(t)}|^2)d\sigma_t \geqslant \frac{\lambda_1(L_\Sigma)}{\overline{\rho_t}}\int_{\Sigma(t)} (\rho_t - \overline{\rho_t})^2 d\sigma_t.$$

Isso conclui a demonstração do lema. □

Afim de fazer uso mais adiante, mostraremos agora que uma certa aplicação é uma isometria. Mais precisamente, seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana. Se $\Sigma^2 \subset M$ é uma superfície compacta, dois lados, isometricamente mergulhada, então, existe um campo normal unitário ν globalmente definido em Σ, daí considere a variação normal de Σ, $f : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to M$ dada por $f(t, x) = exp_x(t\nu(x))$. Seja $g_{\Sigma(t)}$ a métrica induzida em $\Sigma(t) = \{f(t, x); x \in \Sigma\}$ pela aplicação f, então temos o seguinte teorema

Teorema 3.1. *As variedades Riemannianas* $((-\epsilon, \epsilon)\times\Sigma, dt^2 + g_{\Sigma(t)})$ *e* $(f((-\epsilon, \epsilon)\times\Sigma), g)$ *são isométricas.*

Para provar esse teorema, vamos primeiro enunciar um resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [9].

Proposição 3.2. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana completa, e seja* $N \subset M$ *uma subvariedade compacta de* M. *Seja* $p_0 \in M$, $p_0 \notin N$, *e seja* $d(p_0, N)$ *a distância de* p_0 *a* N. *Então existe um ponto* $q_0 \in N$ *tal que* $d(p_0, q_0) = d(p_0, N)$ *e qualquer geodésica minimizante que liga* p_0 *a* q_0 *é ortogonal a* N *em* q_0.

Antes de seguir, vamos fazer uma observação importante para o que segue.

Observação 3.1. *Seja* $\exp_q : T_qM \to M$ *a aplicação exponencial. Então* $d(\exp_q)_0(v) = v$ *para todo* $v \in T_qM$. *Com efeito,*

$$d(\exp_q)_0(v) = \frac{d}{dt}(\exp_q(tv))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v))\Big|_{t=0} = v,$$

ou seja, $d(\exp_q)_0$ *é a aplicação identidade.*

Agora podemos seguir com a prova do Teorema 3.1.

Demonstração. Note que, por construção é suficente provarmos que a aplicação $f : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to M$ é um difeomorfismos sobre sua imagem. Pela Observação 3.1, vemos que a aplicação $f(t, x) = \exp_x(tv(x))$ satisfaz

$$df_{(0,x)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = v(x) \quad e \quad df_{(0,x)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde $\{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\}$ é uma base do $T_{(t,x)}(\{0\}\times\Sigma)$. Logo df leva base em base, donde df é um isomorfismo. Assim, pelo Teorema da Aplicação Inversa, para cada $(0, x) \in (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$ existe uma vizinhança $U_{(0,x)} = (-\delta_x, \delta_x) \times \Sigma_x$ em $(-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$, onde Σ_x é uma vizinhança de $x \in \Sigma$ e $(-\delta_x, \delta_x) \subset (-\epsilon, \epsilon)$, $f|_{U_{(0,x)}}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Como Σ é compacta, podemos considerar $\Sigma \subset \cup\Sigma_{x_i}$ e $\epsilon_0 = min\delta_{x_i}$, portanto $f : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \times \Sigma \to M$ é localmente um difeomorfismo.

Afim de mostrarmos que $f : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \times \Sigma \to M$ é um difeomorfismo sobre sua imagem, vamos mostrar que f é injetiva. Para isso, tomemos (t_0, x_0), $(t_1, x_1) \in ((-\epsilon_0, \epsilon_0) \times \Sigma)$ tal que $f(t_0, x_0) = f(t_1, x_1) = x$. Pela Proposição 3.2, podemos supor que o comprimento da geodésica minimizante ligando x_1 a x é igual a distância de Σ a x, ou seja, $d(x, x_1) = d(x, \Sigma)$. Note que $d(x, x_1) = L(\beta(t_1)) = \int_0^{t_1} |\beta'(s)|dt$, onde $\beta(s) = f(s, x_1)$ e $\beta'(s) = \dfrac{\partial}{\partial s}f(s, x_1) = v_s(x_1)$, portanto $d(x, x_1) = \int_0^{t_1} dt = t_1$, temos ainda que o campo variacional da curva ligando x_1 a x no instante $t = 0$ é normal a Σ, mas como $f(t_0, x_0) = \exp_{x_0}(t_0 v(x_0)) = x$, então $d(x, x_0) = d(x, \Sigma)$, segue que $d(x, x_0) = \int_0^{t_0} |\gamma'(s)|dt = \int_0^{t_0} dt = t_0$ onde $\gamma(s) = f(s, x_0)$. Logo, temos que $t_0 = t_1$, como

$f_t(\cdot) = f(t, \cdot)$ é um difeomorfismo, então $x_0 = x_1$. Portanto f é injetiva e assim concluímos que $f : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \times \Sigma \to M$ é um difeomorfismo sobre sua imagem.

$\square$

3.2 Prova do Teorema Principal

De posse de todos esses resultados anteriores, provaremos nesta seção, o resultado principal dete trabalho. Seguiremos com o teorema e sua demonstração.

Teorema 3.2. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar* $R \geqslant 2$. *Se* $\Sigma \subset M$ *é uma esfera topológica mínima mergulhada estritamente estável que maximiza localmente o funcional massa de Hawking , então a curvatura de Gauss de* Σ *é constante igual a* $\dfrac{1}{a^2}$ *para algum* $a \in (0, 1)$ *e existe uma vizinhança de* Σ *em* (M, g) *isométrica a métrica de deSitter-Schwarzschild* $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, g_a)$ *para algum* $\epsilon > 0$.

Demonstração. Sejam (M, g) e $\Sigma = \mathbb{S}^2 \subset M$ satisfazendo as condições do teorema. Sendo Σ máximo local da massa de Hawking, temos que

$$\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} m_H(\Sigma(t)) \leqslant 0,$$

para toda variação normal suave $\Sigma(t)$ de Σ, essa condição juntamente com Σ é mínima e estritamente estável, segue das Proposições 2.4 e 2.5 que

$$|\Sigma| = \frac{4\pi}{\lambda_1(L) + 1}.$$

Assim, pela Proposição 3.1, existe uma folheação por esferas topológicas mergulhadas CMC. Em uma vizinhança de $\Sigma(t) \subset M$ com $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Note que, como $\rho_0(x) \equiv 1$, então

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} H_t = L(1) = -\lambda_1(L_\Sigma) < 0,$$

diminuindo ϵ se necessário, podemos assumir que

$$\begin{cases} H_t < 0, & \text{em } t \in (0, \epsilon) \\ H_t > 0, & \text{em } t \in (-\epsilon, 0) \end{cases}. \tag{3.7}$$

Agora, seja $\delta > 0$ dado pelo Lema 3.1 de modo que para cada $t \in (-\delta, \delta)$, $\Sigma(t) \subset M$ é uma esfera topológica CMC fracamente estável.

A seguir veremos que (3.7) juntamente com o Lema 3.2 implicará monotonicidade da massa de Hawking ao longo da folheação $\Sigma(t)$. De fato, segue da equação (1.8) que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_H(\Sigma(t)) &= -\frac{2|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma_t}\rho_t\Delta_{\Sigma_t}H_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma_t}H_t(2Ric(\nu_t,\nu_t)+2|A|^2)\rho_t d\sigma_t\\ &+\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma_t}H_t^3\rho_t d\sigma_t + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2|\Sigma_t|}\int_{\Sigma_t}\rho_t H_t d\sigma_t\int_{\Sigma_t}H_t^2 d\sigma_t\\ &+\frac{1}{2}\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}2\int_{\Sigma_t}\rho_t H_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{8\pi}{|\Sigma_t|}\int_{\Sigma_t}\rho_t H_t d\sigma_t.\end{aligned}$$

Note que como a folheação $\Sigma(t)$ é CMC, temos que $\Delta_{\Sigma_t}H_t = 0$ e daí podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_H(\Sigma(t)) &= -\frac{2|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}H_t\Bigg[\int_{\Sigma_t}(Ric(\nu_t,\nu_t)+|A|^2)\rho_t d\sigma_t - \frac{H_t^2}{2}\int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t\\ &-\frac{4\pi}{|\Sigma_t|}\int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t - \frac{H_t^2}{4}\int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t - \int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t\Bigg]\\ &= -\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{32\pi^{\frac{3}{2}}}H_t\Bigg[\int_{\Sigma_t}(Ric(\nu_t,\nu_t)+|A|^2)\rho_t d\sigma_t\\ &-\frac{3H_t^2}{4}\int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t + 4\pi\overline{\rho_t} - \int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t\Bigg],\end{aligned}$$

onde pelo Lema 3.2 e por (3.7), teremos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_H(\Sigma(t)) &\geqslant -\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{32\pi^{\frac{3}{2}}}H_t\Bigg[\frac{\lambda_1(L)}{\overline{\rho_t}}\int_{\Sigma_t}(\rho_t-\overline{\rho_t})^2 d\sigma_t + \frac{\overline{\rho_t}}{2}\int_{\Sigma_t}2(Ric(\nu_t,\nu_t)+|A|^2)d\sigma_t\\ &-\frac{3}{4}H_t^2\int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t + 4\pi\overline{\rho_t} - \int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t\Bigg]\\ &= -\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{32\pi^{\frac{3}{2}}}H_t\Bigg[\frac{\lambda_1(L)}{\overline{\rho_t}}\int_{\Sigma_t}(\rho_t-\overline{\rho_t})^2 d\sigma_t + \frac{\overline{\rho_t}}{2}\int_{\Sigma_t}(R-2K_{\Sigma_t}+H_t^2+|A|^2)d\sigma_t\\ &-\frac{3}{4}H_t^2\int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t + 4\pi\overline{\rho_t} - \int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t\Bigg],\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,\delta)$, onde usamos a equação de Gauss na última igualdade. Agora note que $H^2 = \frac{3}{2}H_t^2 - \frac{H_t^2}{2}$ e $\int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t = \frac{\overline{\rho_t}}{2}\int_{\Sigma_t}2d\sigma_t$ o que nos permite reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_H(\Sigma(t)) &\geqslant -\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{32\pi^{\frac{3}{2}}}H_t\Bigg[\frac{\lambda_1(L)}{\overline{\rho_t}}\int_{\Sigma_t}(\rho_t-\overline{\rho_t})^2 d\sigma_t\\ &+\frac{\overline{\rho_t}}{2}\int_{\Sigma_t}\Big((|A_t|^2-\frac{H_t^2}{2})+(R-2)\Big)d\sigma_t\Bigg],\end{aligned} \tag{3.8}$$

como $|A_t|^2 \geqslant \frac{H_t^2}{2}$, $R \geqslant 2$ e $(\rho_t - \overline{\rho_t})^2 \geqslant 0$ temos por (3.7) que $\dfrac{d}{dt} m_H(\Sigma(t)) \geqslant 0$ para $t \in [0, \delta)$. De modo análogo, temos $\dfrac{d}{dt} m_H(\Sigma(t)) \leqslant 0$ para $t \in (-\delta, 0]$. Isso implica que

$$m_H(\Sigma) \leqslant m_H(\Sigma(t)),$$

para todo $t \in (-\delta, \delta)$.

No entanto, por hipótese Σ é máximo local da massa de Hawking, ou seja,

$$m_H(\Sigma) \geqslant m_H(\Sigma(t)),$$

para todo $t \in (-\delta, \delta)$, donde concluimos que $m_H(\Sigma(t)) \equiv m_H(\Sigma)$ e assim

$$\frac{d}{dt} m_H(\Sigma(t)) \equiv 0,$$

donde, por (3.8), temos que

i) $\Sigma(t)$ é umbílica;

ii) $R = 2$ em $\Sigma(t)$;

iii) $\rho_t \equiv \overline{\rho}_t$, para todo $t \in (-\delta, \delta)$.

Pela Proposição 1.4, temos que $\dfrac{d}{dt} H_{\Sigma_t} = L_{\Sigma_t}\rho(t) = (\Delta_{\Sigma_t} - \lambda_1(L))\rho(t) = -\lambda_1(L)\rho(t)$, já que $\rho_t \equiv \overline{\rho}_t = cte$. Por outro lado, temos de (1.1) que

$$A_\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = -\nabla_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \nu(t),$$

como Σ_t é totalmente umbílica, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \nu(t) = -\frac{H}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{3.9}$$

Uma vez que $\langle \nu(t), \nu(t) \rangle = 1$, então $\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \nu(t)$ é tangente a Σ_t. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \nu(t), \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle \nu(t), \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle - \langle \nu(t), \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle \\
&= -\langle \nu(t), \nabla_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \frac{\partial f}{\partial t} \rangle \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_i}\rho_t + \langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \nu(t), \frac{\partial f}{\partial t} \rangle.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Assim, substituindo (3.9) em (3.10), obtemos

$$\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \nu(t), \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle = -\frac{\partial}{\partial x_i}\rho_t - \frac{H}{2}\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0 \quad \forall\, i = 1, 2$$

(pois ρ_t não depende de x). Portanto, $\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \nu(t) = 0$. Isso significa que para todo $x \in \Sigma_t$, $\nu(t,x)$ é um campo vetorial paralelo ao longo da curva $\alpha_x : [0,\delta) \to M$ dada por $\alpha_x(t) = f(t,x) = \exp_x(\omega(t,x)\nu(x))$. Observe que $D(\exp_x)_{\omega(t,x)\nu(x)}(\nu(x))$ também é um campo paralelo ao longo da curva α_x. Logo, temos que

$$\nu(t,x) = D(\exp_x)_{\omega(t,x)\nu(x)}(\nu(x)),$$

já que $\omega(0,x) = 0$ temos pela Observação 3.1 que $D(\exp_x)_0(\nu(x)) = \nu(x)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \left\langle \nu(t,x), \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right\rangle \\
&= \left\langle \nu(t,x), D(\exp_x)_0\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x)\nu(x)\right) \right\rangle \\
&= \frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x).
\end{aligned}$$

Agora pela Proposição 3.1 temos

$$\int_\Sigma (\omega(t,x) - t)\, d\sigma = 0,$$

donde

$$\int_\Sigma \frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x)\, d\sigma = |\Sigma|.$$

Portanto, desde que $\frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x)$ não depende de x, então $\frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x) = 1$. Isso implica que $\omega(t,x) = t$ para todo $(t,x) \in [0,\delta) \times \Sigma$.

Um argumento análogo para $t \leqslant 0$ nos permite concluir que $\omega(t,x) = t$ para todo $(t,x) \in (-\delta,\delta) \times \Sigma$.

Seja $g_{\Sigma(t)}$ a métrica induzida em $\Sigma(t)$ pela isometria $f(t,x) = \exp_x(t\nu(x))$. Podemos agora aplicar o Lema 7.4 de [11] para concluir que a métrica induzida em $\Sigma(t)$ evolui ao longo do fluxo da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{\Sigma(t)} = -2\rho_t A_t.$$

Como $\rho_t \equiv 1$, $\Sigma(t)$ é umbílico e $H(t)$ é constante, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{\Sigma(t)} = -H(t) g_{\Sigma(t)}$$

para todo $t \in (-\delta,\delta)$.

Disto, segue que $g_{\Sigma(t)} = u_a(t)^2 g_{\mathbb{S}^2}$ para todo $t \in (-\delta,\delta)$, onde $u_a(t) = a e^{-\frac{1}{2}\int_0^t H(s)ds}$ com $u_a(0) = a$ e $g_{\Sigma_0} = a^2 g_{\mathbb{S}^2}$. Segue que $a^2 = \dfrac{|\Sigma|}{4\pi}$.

Finalmente, afirmamos que $u_a(t)$ satisfaz a Equação Diferencial Ordinária abaixo

$$u_a''(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-u_a'(t)^2}{u_a(t)}\right) - \frac{u_a(t)}{2}.$$

Com efeito,

$$u_a'(t) = -\frac{H(t)}{2}u_a(t),$$

daí

$$u_a''(t) = -\frac{H_t'}{2}u_a(t) + \frac{H_t^2}{4}u_a(t). \tag{3.11}$$

Note que, como $H'(t) = L\rho_t$, $\rho_t \equiv 1$, temos que

$$\begin{aligned} H_t' &= \Delta\rho_t + (Ric(\nu_t,\nu_t) + \frac{H_t^2}{2})\rho_t \\ &= Ric(\nu_t,\nu_t) + \frac{H_t^2}{2} \\ &= \frac{R}{2} - K_{\Sigma_t} + \frac{H_t^2}{2} - \frac{H_t^2}{4} + \frac{H_t^2}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{u_a(t)^2} + \frac{3H_t^2}{4}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde usamos a equação de Gauss e o fato que $g_{\Sigma_t} = u_a(t)^2 g_{\mathbb{S}^2}$ implica que $K_{\Sigma_t} = \frac{1}{u_a(t)^2}$, daí substituindo (3.12) em (3.11), teremos

$$\begin{aligned} u_a''(t) &= -\frac{u_a(t)}{2} + \frac{1}{2u_a(t)} - \frac{H_t^2}{8}u_a(t) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-u_a'(t)^2}{u_a(t)}\right) - \frac{u_a(t)}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, pelo Teorema 3.1, temos que a métrica induzida por $f(t,x) = \exp_x(t\nu(x))$ em $(-\delta,\delta)\times\Sigma$ é igual a $g = dt^2 + u_a(t)^2 g_{\mathbb{S}^2}$. Além disso, como a função $u_a(t)$ é solução da EDO (2.18), então pela unicidade de soluções para EDO‘s, segue-se que g é precisamente a métrica de deSitter-Schwarzschild com massa m_a em $(-\delta,\delta)\times\Sigma$. Isso completa a prova. □

Referências Bibliográficas

[1] Ambrozio, L.C.: *Rigidity of Area Minimizing Free Boundary Surfaces in Mean Convex Three-Manifolds*. J Geom Anal (2015), 1001-1017.

[2] Bray, H.: *Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem*. J. Differential Geom. 59 (2001), 177-267.

[3] Bray, H.; S. Brendle.; A. Neves.: *Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds*. Commun. Anal. Geom. 18(4) (2010), 821-830.

[4] Bray, H.; Brendle, S.; Eichmair, M.; Neves, A.: *Area-minimizing projective planes in three-manifolds*. Commun. Pure Appl. Math. 63 (2010), 1237-1247.

[5] Brendle, S.: *Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 117 (2013) 247-269.

[6] Cai, M.; Galloway, G.: *Rigidity of area minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*. Commun. Anal. Geom. 8 (2000), 565-573.

[7] Caminha, A.: *Notas de Geometria Diferencial*. Fortaleza, (2014).

[8] Cruz, T. C.; Lima, V.; de Sousa, A.: *Min-Max Minimal Surfaces, Horizons and Electrostatic Systems*. arXiv:1912.08600v2, 2020.

[9] do Carmo, M. P.: *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[10]] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[11] Huisken, G.; Polden, A.: *Geometric evolution equations for hypersurfaces*, in: Calculus of variations and geometric evolution problems, 45-84, Lecture Notes in Math. **1713** , Springer, Berlin, (1999).

[12] Huisken, G.; Ilmanen, T.: *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality*. J. Diferential Geom. 59(3) (2001), 353-437.

[13] Jerry L. K.: *Applications of Partial Differential Equations To Problems in Geometry.* Srinagar, India (10 August 1983).

[14] Lee, M.J.: *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 92, (2002).

[15] Lima, E. L.: *Curso de Análise, Volume II.* IMPA 547 (2015).

[16] Micallef, M.; Moraru, V.: *Splitting of 3-Manifolds and Rigitity of Area Surfaces.* Proc. Amer. Math. Soc., 143, (2015), 2865-2872.

[17] Nunes, I.: *Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in threemanifolds.*J. Geom. Anal. 23 (2013), no. 3, 1290-1302.

[18] O'Neill, B.: *Semi-Riemannian Geometry with Aplications to Relativity.* Academic Press, Londres, 1983.

[19] Queiroz, C.: *Sóliton de Ricci contrátil com integral pinçada.* Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal do Piauí. Teresina, p.87, 2020.

[20] Schoen, R.; Yau, S.T.: *Existence of incompressible minimal surfaces and the topo logy of three-manifolds with nonnegative scalar curvature.* Ann. Math. 110(4) (1979), 127-142.

[21] Schoen, R.; Yau, S.T.: *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity.* Commun. Math. Phys. 65(1) (1979), 45-76.

[22] Spivak, M.: *Calculus on Manifolds.* The Advanced Book Program, 1995.

[23] Witten, E.: *A new proof of the positive mass theorem.* Commun. Math. Phys. 80 (1981), 381-402.