Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Caracterização de Sólitons de Bach compactos e completos

Emanuelly Beatriz Ribeiro dos Santos

Teresina - 2024

Emanuelly Beatriz Ribeiro dos Santos

Dissertação de Mestrado:

Caracterização de Sólitons de Bach compactos e completos

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha.

Teresina - 2024

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Caracterização de sólitons de Bach compactos e completos

Emanuelly Beatriz Ribeiro dos Santos

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 29 de janeiro de 2024.

Banca Examinadora:

Antonio Wilson Rodrigues da Cunha

Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha – Orientador

Halyson Irene Baltazar

Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar - UFPI

Eraldo Almeida Lima Júnior

Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior – UFPB

Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

Divisão de Representação da Informação

S237c Santos, Emanuelly Beatriz Ribeiro dos.
Caracterização de Sólitons de Bach compactos e completos / Emanuelly Beatriz Ribeiro dos Santos. – – Teresina, 2024.
69 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2024.
“Orientador: Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha.”

1. Variedades compactas e completas não-compactas. 2. Sólitons de Bach. 3. Sólitons de Bach gradiente. 4. Variedades parabólicas. I. Cunha, Antonio Wilson Rodrigues da. II. Título.

CDD 510

Elaborada por Fabíola Nunes Brasilino CRB 3/ 1014

Dedico este trabalho aos meus pais Erismar Rodrigues dos Santos e Rosangela Pereira Ribeiro.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me proporcionar saúde mental e física para continuar os estudos.

Agradeço à minha família por sempre apoiar minhas decisões. Em especial, agradeço à companhia de minha mãe Rosangela, que sempre me encorajou e apoiou a seguir meus sonhos. Agradeço ao meu pai Erismar por sempre dar o suporte necessário nos meus estudos e por me fazer sorrir em dias difíceis. Agradeço à minha irmã Erica pela companhia e pelo apoio.

Agradeço ao meu namorado, João Victor, por todo o amor, compreensão e paciência durante esses anos de graduação e mestrado, por deixar meus dias mais leves, por sempre acreditar no meu potencial e por ser meu porto seguro no fim do dia.

Agradeço aos meus amigos de Graduação. Em especial a minha companheira de estudos Maria Aline e aos meus amigos Geusivan e Marcus Vinute por todas as conversas e por acreditar no meu potencial.

Agradeço aos meus amigos da pós-graduação pela companhia, pelas conversas, por todos os cafezinhos e pizzas. Em especial, Ana Júlia, Danilo, Eduardo, Fáuster, Honório, Isaque, Jefferson, José Alencar, José Vitor, Luzivânia, Suerlan, Thiago Carvalho e Vinicius.

Agradeço a todo o corpo docente do Departamento de Matemática da UFPI, em especial reconhecimento aos professores Rondinelli Batista, Aurineide Fonseca, Mario Gomes (e por todas as resmas de papel) e ao meu primeiro orientador, Jefferson Leite. Também agradeço ao corpo docente da Pós-Graduação, Mykael, Joel, e aos professores Halyson Baltazar e Cícero, que cuidaram da minha formação em Geometria. Agradeço sinceramente por todo o conhecimento compartilhado.

Ao meu querido orientador, Antonio Wilson, expresso minha gratidão pelo valioso conhecimento compartilhado, pela paciência e compreensão dedicadas ao longo desses anos de orientação. Agradeço sinceramente pelo incentivo para cursar a Pós-Graduação e pela prontidão em auxiliar. Serei eternamente grata por todo o apoio e paciência oferecidos.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"*Não espere por uma crise para descobrir o que é importante em sua vida*".

Platão.

Resumo

Este trabalho, baseado em [12, 25, 37], buscou estudar os resultados que caracterizam os sólitons de Bach. Os sólitons de Bach foram abordados nos casos gradiente e não gradiente, sendo classificados nos casos compactos e completos não-compactos. Adicionalmente, no caso não gradiente, analisamos as condições em que o campo vetorial associado ao sóliton é um campo de Killing. Para alcançar tais objetivos, utilizamos ferramentas como: integral de Dirichlet finita, regularidade em L^p ou L^∞ da variedade, parabolicidade da variedade e fórmulas do tipo Bochner.

Palavras chaves: Variedades compactas e completas não-compactas, sólitons de Bach, sólitons de Bach gradiente, variedades parabólicas.

Abstract

This work, based on [12, 25, 37], aimed to study the results characterizing Bach solitons. Bach solitons were addressed in both gradient and non-gradient cases, classified into compact and complete non-compact cases. Additionally, in the non-gradient case, we analyzed conditions under which the vector field associated with the soliton became a Killing field. To achieve these objectives, tools such as finite Dirichlet integral, regularity in L^p or L^∞ of the manifold, manifold parabolicity, and Bochner-type formulas were utilized.

Keywords: Compact and non-compact complete manifolds, Bach solitons, gradient Bach solitons, parabolic manifolds.

Sumário

Introdução

O tensor de Bach foi introduzido por R. Bach [2] no início da década de 1920 com o objetivo de estudar a Teoria da gravidade conforme. A teoria da gravidade conforme é um ramo da física que investiga a natureza da gravidade sob uma perspectiva distinta da abordagem convencional de Einstein. Em vez de se concentrar na métrica do espaço-tempo, essa teoria explora a invariância sob transformações conformes.

Em 2012, Das e Kar introduziram, em seu trabalho [15], o conceito de fluxo de Bach como uma equação de evolução no espaço das métricas Riemannianas, estabelecendo a seguinte definição:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -B(t).$$

Os sólitons para um fluxo geométrico são caracterizados como as soluções auto-similares do fluxo. O sóliton de Bach em uma variedade Riemanniana (M^n, g) é definido quando existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma constante λ de modo que

$$B + \mathcal{L}_X g = \lambda g,$$

na variedade M. Onde $\mathcal{L}_X g$ representa a derivada de Lie da métrica g na direção do campo X. Quando o campo mencionado é um campo gradiente, ou seja, $X = \nabla f$ para f sendo uma função suave em M chamada de função potencial, referimos-nos a ele como um sóliton de Bach gradiente. Nesse caso, a equação pode ser reescrita como

$$B + 2\mathrm{Hess}(f) = \lambda g,$$

em M.

No primeiro capítulo, apresentamos conceitos preliminares essenciais para o desenvolvimento deste trabalho, juntamente com definições relevantes de tensores que consideramos fundamentais. As principais fontes para este capítulo foram [10] e [16].

No segundo capítulo, cuja fundamentação se baseou em [25], apresentaremos algumas propriedades do fluxo de Bach e realizaremos uma análise dos sólitons de Bach, tanto do tipo gradiente quanto não gradiente em variedades compactas. Nosso propósito é investigar as condições nas quais esses sólitons exibem métrica Bach-flat.

No terceiro capitulo, realizamos um estudo de sólitons de Bach gradientes e não-compactos, onde nosso objetivo foi estudar sob quais condições esses sólitons possuem metricas Bach-flat, diferenciando entre aqueles que satisfazem a condição de Weyl harmônico e os que atendem à condição de Ricci não negativo. As principais fontes de referência para os resultados desse capítulo foram [12] e [37].

No quarto capítulo, conduzimos um estudo sobre sólitons de Bach não compactos que, sob a condição de Ricci não positivo, apresentam métrica Bach-flat. Além disso, desenvolvemos fórmulas do tipo Bochner para serem utilizadas como ferramentas em algumas demonstrações. A principal referência para este capítulo foi [12].

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo, serão introduzidas algumas definições e resultados fundamentais em geometria Riemanniana, essenciais para a compreensão ao longo desta dissertação.

1.1 Gradiente, divergente e Laplaciano.

Nesta seção serão apresentadas as noções iniciais de gradiente, divergente e Laplaciano de uma função suave, bem como algumas de suas propriedades.

Definição 1. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave* ∇f*, definido sobre* M *por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Com base na definição anterior, derivam-se algumas proposições que se mostrarão úteis para o desenvolvimento deste trabalho.

Proposição 1. *Se* $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ *são funções suaves, então*

(i) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$*;*

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração. Observe que, ao considerar X como um campo suave sobre M, podemos deduzir, a partir da definição de gradiente, que

$$\begin{aligned}\langle \nabla(f+g), X\rangle &= X(f+g) = X(f) + X(g)\\ &= \langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla g, X\rangle\\ &= \langle \nabla f + \nabla g, X\rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \nabla(fg), X\rangle &= X(fg) = gX(f) + fX(g)\\ &= \langle g\nabla f + f\nabla g, X\rangle.\end{aligned}$$

□

Definição 2. *Seja* X *um campo vetorial suave em* M^n. *A divergência de* X *é a função suave* $\mathrm{div}: M^n \to \mathbb{R}$, *dada para* $p \in M$ *por*

$$(\mathrm{div}X)(p) = \mathrm{tr}(v \mapsto (\nabla_v X)(p)),$$

onde $v \in T_pM$ *e* tr *denota o traço do operador linear entre parênteses.*

Proposição 2. *Se* X, Y *são campos vetoriais suaves em* M^n *e* $f: M \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, então*

(i) $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y$;

(ii) $\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}(X) + \langle \nabla f, X\rangle$.

Demonstração. Considere X, Y como campos suaves definidos em M^n e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ como um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Temos então que

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(X+Y) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(X+Y), e_i \right\rangle\\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X + \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}Y, e_i \right\rangle\\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}Y, e_i \right\rangle\\ &= \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y,\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(fX) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(fX), e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f)X + \sum_{i=1}^{n} f\nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i, X \right\rangle + \left\langle f\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i, X \right\rangle + f\left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle \\
&= \langle \nabla f, X\rangle + f\mathrm{div}X.
\end{aligned}
$$

$\square$

Definição 3. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}^n$ *uma função suave. O Laplaciano de* f *é a função* $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f).$$

Corolário 1. *Se* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *e* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções suaves, então*

$$\Delta(\phi \circ f) = (\phi'' \circ f)|\nabla f|^2 + (\phi' \circ f)\Delta f.$$

Demonstração. A partir da definição do Laplaciano, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta(\phi \circ f) &= \mathrm{div}(\nabla(\phi \circ f)) \\
&= \mathrm{div}((\phi' \circ f)\nabla f) \\
&= \langle \nabla(\phi' \circ f), \nabla f\rangle + (\phi' \circ f)\mathrm{div}(\nabla f) \\
&= \langle (\phi'' \circ f)\nabla f, \nabla f\rangle + (\phi' \circ f)\Delta f.
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposição 3. *Dadas* $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ *funções suaves, tem-se*

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.$$

Em particular,

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2.$$

Demonstração. Considerando f e g como funções suaves, a partir da definição do Laplaciano e das propriedades do divergente, concluímos que:

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= div(\nabla fg)\\ &= div(f\nabla g + g\nabla f)\\ &= div(f\nabla g) + div(g\nabla f)\\ &= f div(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle + g div(\nabla f) + \langle \nabla g, \nabla f\rangle\\ &= f\nabla g + g\nabla f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.\end{aligned}$$

Agora, fazendo $f = g$ na demonstração acima obtemos o caso particular. □

Definição 4. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função suave e* $p \in M$. *O Hessiano de* f *é o campo de operadores lineares* $(Hessf)_p : T_pM \to T_pM$, *definido para* $v \in T_pM$ *por*

$$(Hessf)_p(v) = (\nabla_v \nabla f)(p).$$

Segue das propriedades da conexão Riemanniana que se X *é qualquer extensão de* v *a uma vizinhança de* p *em* M^n, *então*

$$(Hessf)_p(v) = (\nabla_X \nabla f)(p).$$

Da definição 4 temos a seguinte forma de expressar o Laplaciano.

Proposição 4. *Se* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, então*

$$\Delta f = tr(Hessf).$$

Demonstração. Suponha que $U \subset M$ seja uma vizinhança de $p \in M$ na qual um referencial móvel $e_1, \ldots, e_n$ esteja definido. Então,

$$\begin{aligned}tr(Hessf)_p &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \right\rangle_p\\ &= div(\nabla f)(p)\\ &= \Delta f(p).\end{aligned}$$

□

1.2 Tensores

Definição 5. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita e* V^* *o espaço dual de* V*. Um s-tensor covariante em* V *é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s \text{ vezes}} \to \mathbb{R}.$$

Um r-tensor contravariante é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r \text{ vezes}} \to \mathbb{R}.$$

Um tensor do tipo (r,s) é um tensor s-covariante e r-contravariante, isto é, uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r \text{ vezes}} \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s \text{ vezes}} \to \mathbb{R}.$$

O conjunto de todos os (r, s)-tensores sobre V, equipado com as operações padrões de adição e multiplicação por elementos de K, constitui um módulo sobre o corpo K. Um tensor do tipo $(0, 0)$ simplesmente corresponde a um elemento de K.

No contexto subsequente, (M^n, g) será usado para indicar uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. Denotaremos o anel comutativo das funções diferenciáveis (ou de classe C^∞) sobre M como C^∞. O espaço dos campos diferenciáveis sobre M será representado por $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 6. *Um campo de tensores ou um campo tensorial* A *em uma variedade* M^n *é um tensor sobre* $C^\infty(M)$*-módulo* $\mathfrak{X}(M)$*.*

Portanto, um (r, s)-tensor A é uma aplicação

$$A : \mathfrak{X}(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$$

multilinear sobre C^∞. De maneira mais precisa, A é uma aplicação multilinear sobre $C^\infty(M)$ que associa a cada $(r+s)$-upla $(Y^1, \ldots, Y^r, X_1, \ldots, X_s)$ a uma função diferenciável

$$f = A(Y^1, \ldots, Y^r, X_1, \ldots, X_s) : M^n \to \mathbb{R}.$$

A posição ocupada por Y^i é denominada como a i-ésima entrada contravariante, enquanto a posição ocupada por X_j é referida como a j-ésima entrada covariante. Dessa maneira, os tensores do tipo $(0, s)$ são identificados como contravariantes.

A seguir, apresentaremos a definição de alguns tensores essenciais no estudo da geometria Riemanniana.

Definição 7. *Seja* (M^n, g, f) *uma variedadde Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o (1,3)-tensor*

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

dado por

$$R_m(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_x Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Em coordenadas, temos

$$R_m \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Também por vezes iremos interpretar o tensor R_m como um $(0, 4)$-tensor, definido por

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

onde

$$R_m(X, Y, W, Z) = g(R_m(X, Y, Z), Z).$$

Em coordenadas, temos

$$R_m \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = R_{ijkl}.$$

Proposição 5. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades*

(i) $R_m(X, Y, W, Z) = -R_m(Y, X, W, Z) = R_m(Y, X, Z, W)$

(ii) $R_m(X, Y, W, Z) = R_m(W, Z, X, Y)$

(iii) Primeira Identidade de Bianchi

$$R_m(X, Y, W, Z) + R_m(Y, W, X, Z) + R_m(W, X, Y, Z) = 0.$$

Em coordenadas,

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

(iv) Segunda Identidade de Bianchi

$$(\nabla_W R_m)(X,Y,Z,U) + (\nabla_Y R_m)(W,X,Z,U) + (\nabla_X R_m)(Y,W,Z,U) = 0.$$

Em coordenadas se torna

$$\nabla_l R_{ijks} + \nabla_j R_{liks} + \nabla_i R_{jlks} = 0.$$

Demonstração. Para uma demonstração veja [16]. □

Definição 8. *Dados dois vetores* x *e* y *não nulos e linearmente independentes em* T_pM*, definimos a curvatura seccional do plano* σ *gerado pelos vetores* x *e* y *por*

$$K(\sigma) = K(x,y) = \frac{R(x,y,x,y)}{|x|^2|y|^2 - g(x,y)^2}.$$

Definição 9. *O tensor curvatura de Ricci é o* $(0,2)$*-tensor*

$$\mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dado pelo traço do tensor curvatura de Riemann, isto é,

$$\mathrm{Ric}(X,Z) = \mathrm{tr}\,(Y \longmapsto R_m(X,Y)Z)$$

donde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$*. Em coordenadas temos que*

$$(\mathrm{Ric})_{ik} = R_{ik} = g^{il}R_{ijkl}.$$

Definição 10. *A curvatura escalar de uma variedade é a função* $R : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$R = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}).$$

Em coordenadas,

$$R = g^{ik}R_{ik}.$$

Proposição 6. *(Identidade de Ricci) Seja* M *uma variedade Riemanniana e* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Para quaisquer campos* $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$*, vale a seguinte identidade*

$$(\nabla_X \mathrm{Hess} f)(Y,Z) - (\nabla_Y \mathrm{Hess} f)(X,Z) = \langle R(X,Y)Z, \nabla f\rangle.$$

Em coordenadas,

$$\nabla_i\nabla_j\nabla_k f - \nabla_j\nabla_i\nabla_k f = R_{ijkl}\nabla_l f. \tag{1.1}$$

Demonstração. Para uma demonstração veja [10]. □

Proposição 7. *Em uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *vale*

(i) Identidade de Ricci contraída

$$\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = g^{ls} \nabla_l R_{ijks}.$$

(ii) Segunda Identidade de Bianchi contraída duas vezes

$$g^{jk} \nabla_j R_{ik} = \frac{1}{2} \nabla_i R. \tag{1.2}$$

Demonstração. Para provar (i), tome o traço na segunda identidade de Bianchi para obter:

$$\begin{aligned}
0 &= g^{ls} \nabla_l R_{jiks} + g^{ls} \nabla_j R_{ilks} + g^{ls} \nabla_i R_{ljks} \\
&= g^{ls} \nabla_l R_{jiks} + \nabla_j (g^{ls} R_{ilks}) - \nabla_j (g^{ls}) R_{ilks} + \nabla_i (g^{ls} R_{ljks}) - \nabla_i (g^{ls}) R_{ljks} \\
&= g^{ls} \nabla_l R_{jiks} + \nabla_j (g^{ls} R_{ilks}) + \nabla_i (g^{ls} R_{ljks}) \\
&= g^{ls} \nabla_l R_{jiks} + \nabla_j (g^{ls} R_{ilks}) - \nabla_i (g^{ls} R_{jlks}) \\
&= -g^{ls} \nabla_l R_{ijks} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = g^{ls} \nabla_l R_{ijks}.$$

Isto prova o item (i).

Para o item (ii), reescrevendo a equação acima da seguinte maneira:

$$\nabla_i R_{jk} = \nabla_j R_{ik} + g^{ls} \nabla_l R_{jiks}, \tag{1.3}$$

tome o traço na equação (1.3), e daí:

$$\nabla_i (g^{jk} R_{jk}) = g^{jk} \nabla_j R_{ik} + g^{ls} \nabla_l (g^{jk} R_{ijsk}),$$

i.e.,

$$\nabla_i R = g^{jk} \nabla_j R_{ik} + g^{ls} \nabla_l R_{is}.$$

Logo, fazendo uma troca conveniente de índices

$$\nabla_i R = 2 g^{ik} \nabla_j R_{ik}.$$

Donde concluímos que

$$g^{jk} \nabla_j R_{ik} = \frac{1}{2} \nabla_i R.$$

□

Proposição 8. *(Fórmula de Bochner) Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave, então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle + |\mathrm{Hess}(f)|^2. \tag{1.4}$$

Demonstração. Para uma demonstração veja [11]. □

É possível estender aos tensores a noção de derivada covariante.

Definição 11. *Seja* T *um tensor de ordem* r. *A diferencial covariante* ∇T *de* T *é um tensor de ordem (r+1) dada por*

$$\nabla T(Y_1, \ldots, T_r, Z) = Z(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r).$$

Para cada $Z \in (M)$, *a derivada covariante* $\nabla_Z T$ *de* T *em relação a* Z *é um tensor de ordem* r *dado por*

$$\nabla_Z T(Y_1, \ldots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \ldots, Y_r, Z).$$

Proposição 9. *Seja* T *um (0,2)-tensor e* g *a métrica Riemanniana, então*

$$\langle g, T\rangle = \mathrm{tr}\{T\}.$$

Demonstração. Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal. Sendo T um $(0,2)$-tensor e escrevendo $T_{ij} = T(e_i, e_j)$, tem-se

$$\langle g, T\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}T_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}T_{ij} = \sum_i T_{ii} = \mathrm{tr}_g T.$$

Portanto, $\langle g, T\rangle = \mathrm{tr}\{T\}$. □

Para $n \geqslant 3$, a decomposição ortogonal do tensor de Riemann é dada por

$$Rm = W + A \owedge g \tag{1.5}$$

onde A é o tensor de Schounten,

$$A = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ric} - \frac{R}{2(n-1)}g\right) \tag{1.6}$$

e $\owedge$ é o produto de Kulkarni-Nomizo entre tensores simétricos de ordem 2 definido por

$$(T \owedge S)_{ijkl} = T_{ik}S_{jl} + T_{jl}S_{ik} - T_{il}S_{jk} - T_{jk}S_{il}. \tag{1.7}$$

Logo, podemos reescrever (1.5) como

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(\mathrm{Ric} \owedge g)_{ijkl} - \frac{R}{2(n-1)(n-2)}(g \owedge g)_{ijkl} \\ &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \end{aligned}$$

Definição 12. *O tensor de Weyl é o tensor definido pela seguinte fórmula de decomposição ortogonal do tensor de Riemann em dimensão* $n \geqslant 3$*,*

$$W = Rm - A \owedge g,$$

onde A é o tensor de Schounten.

Em coordenadas,

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(g_{ik}A_{jl} - g_{jk}A_{il} + g_{jl}A_{ik} - g_{il}A_{jk}). \tag{1.8}$$

Mais explicitamente,

$$\begin{aligned} W_{ijkl} = R_{ijkl} &- \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Proposição 10. *O tensor de Weyl satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) W *é livre de traços.*

(ii) $W_{ijkl} = -W_{jikl} = W_{jilk}$.

(iii) O tensor W *satisfaz a primeira identidade de Bianchi, isto é,*

$$W_{ijkl} + W_{jkil} + W_{kijl} = 0.$$

Demonstração. Para o item (i), tome o traço do tensor W em relação a i, k. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} g^{ik}W_{ijkl} &= \sum_{i,k}\Bigg(g^{ik}R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(g^{ik}R_{ik}g_{jl} + g^{ik}R_{jl}g_{ik} - g^{ik}R_{il}g_{jk} - g^{ik}R_{jk}g_{il}) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g^{ik}g_{ik}g_{jl} - g^{ik}g_{il}g_{jk})\Bigg) \\ &= \sum_{i,k}\Bigg(R_{jl} - \frac{1}{n-2}(Rg_{jl} + nR_{jl} - \delta_{ij}R_{il} - \delta_{kl}R_{jk}) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(ng_{jl} - \delta_{kl}g_{jk})\Bigg) \\ &= \sum_{k}\Bigg(R_{jl} - \frac{1}{n-2}(Rg_{jl} + nR_{jl} - R_{jl} - \delta_{kl}R_{jk}) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(ng_{jl} - \delta_{kl}g_{jk})\Bigg), \end{aligned}$$

i.e,

$$\begin{aligned}\sum_{i,k} g^{ik}W_{ijkl} &= R_{jl} - \frac{1}{n-2}(Rg_{jl} + nR_{jl} - R_{jl} - R_{jl}) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(ng_{jl} - g_{jl}) \\ &= R_{jl} - \frac{1}{n-2}(Rg_{jl} + (n-2)R_{jl}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(n-1)g_{jl} \\ &= -\frac{R}{n-2}g_{jl} + \frac{R}{n-2}g_{jl} \\ &= 0.\end{aligned}$$

De maneira análoga podemos mostrar que em qualquer dois índices o tensor de Weyl é livre de traços.

Para demonstrar o item (ii), observe que

$$\begin{aligned}W_{ijkl} &= R_{ijkl} - (A \owedge g)_{ijkl} \\ &= -R_{jikl} - (A_{ik}g_{jl} + A_{jl}g_{ik} - A_{il}g_{jk} - A_{jk}g_{il}) \\ &= -R_{jikl} + A_{jk}g_{il} + A_{il}g_{jk} - A_{jl}g_{ik} - A_{ik}g_{jl} \\ &= -(R_{jikl} - (A \owedge g)_{jikl}) \\ &= -W_{jikl},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}-W_{jikl} &= -(R_{jikl} - (A \owedge g)_{jikl}) \\ &= -R_{jikl} + A_{jk}g_{il} + A_{il}g_{jk} - A_{jl}g_{ik} - A_{ik}g_{jl} \\ &= R_{jilk} - (A_{jl}g_{ik} + A_{ik}g_{jl} - A_{jk}g_{il} - A_{il}g_{jk}) \\ &= R_{jilk} - (A \owedge g)_{jilk} \\ &= W_{jikl},\end{aligned}$$

o que mostra o item (ii).

Substituindo a equação (1.5) na primeira identidade de Bianchi, temos

$$\begin{aligned}0 &= R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} \\ &= (W_{ijkl} + (A \owedge g)_{ijkl}) + (W_{jkil} + (A \owedge g)_{jkil}) \\ &\quad + (W_{kijl} + (A \owedge g)_{kijl}).\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
W_{ijkl} + W_{jkil} + W_{kijl} &= -(A \owedge g)_{ijkl} - (A \owedge g)_{jkil} - (A \owedge g)_{kijl} \\
&= -A_{ik}g_{jl} - A_{jl}g_{ik} + A_{il}g_{jk} + A_{jk}g_{il} \\
&\quad - A_{ji}g_{kl} - A_{kl}g_{ji} + A_{jl}g_{ki} + A_{ki}g_{jl} \\
&\quad - A_{kj}g_{il} - A_{il}g_{kj} + A_{kl}g_{ij} + A_{ij}g_{kl} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

o que mostra o item (iii). □

Observação 1. *Em uma variedade Riemanniana com dimensão $n = 3$, o tensor de Weyl se anula. Veja exercício 1.58 de [10].*

Definição 13. *Em uma variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geqslant 4$, o tensor de Bach é definido como*

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}W_{ikjl}. \tag{1.10}$$

Definição 14. *A seguinte expressão coordenada*

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R) \tag{1.11}$$

define um $(0,3)$ tensor em (M^n, g), chamado **tensor de Cotton**.

Em termos do tensor Schounten (1.6), podemos reescrever o tensor de Cotton como

$$C_{ijk} = \nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik}, \tag{1.12}$$

e também o tensor de Bach da seguinte maneira:

$$B_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(\nabla_k C_{kij} + R_{kl}W_{ikjk}\right). \tag{1.13}$$

Proposição 11. *Para $n \geqslant 3$, temos*

$$C_{ijk} = -\frac{n-2}{n-3}\nabla_l W_{ijkl}. \tag{1.14}$$

Demonstração. Por (1.6), temos:

$$
\begin{aligned}
\nabla_l A_{jl} &= \nabla_l R_{jl} - \nabla_l \frac{R}{2(n-1)} g_{jl} \\
&= \nabla_l R_{jl} - \frac{1}{2(n-1)}\nabla_j R \\
&= \frac{1}{2}\nabla_j R - \frac{1}{2(n-1)}\nabla_j R \\
&= \frac{(n-2)\nabla_j R}{2(n-1)},
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

onde a terceira igualdade segue da segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes.

Calculando o divergente de W em (1.8) e tomando o traço em l, s, temos:

$$
\begin{aligned}
g^{ls}\nabla_s W_{ijkl} &= g^{ls}\nabla_s R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(g_{ik}g^{ls}\nabla_s A_{jl} - g_{il}g^{ls}\nabla_s A_{jk} - g_{jk}g^{ls}\nabla_s A_{il} \\
&\quad + g_{jl}g^{ls}\nabla_s A_{ik}) \\
&= \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{n-2}\left(g_{ik}\nabla_l A_{jl} - g_{il}\nabla_l A_{jk} - g_{jk}\nabla_l A_{il} + g_{jl}\nabla_l A_{ik}\right) \\
&= \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{n-2}\left(g_{ik}\nabla_l A_{jl} - \nabla_i A_{jk} - g_{jk}\nabla_l A_{il} + \nabla_j A_{ik}\right) \\
&= \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{n-2}\left(g_{ik}\nabla_l A_{jl} - g_{jk}\nabla_l A_{il} - (\nabla_i A_{jk} + \nabla_j A_{ik})\right), \\
&= \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{n-2}\left(g_{ik}\nabla_l A_{jl} - g_{jk}\nabla_l A_{il} - C_{ijk}\right) \\
&= \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{n-2}\left(g_{ik}\frac{n-2}{2(n-1)}\nabla_j R - g_{jk}\frac{n-2}{2(n-1)}\nabla_i R - C_{ijk}\right) \\
&= \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}g_{ik}\nabla_j R + \frac{1}{2(n-1)}g_{jk}\nabla_i R + \frac{1}{n-2}C_{ijk} \\
&= \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}g_{ik}\nabla_j R + \frac{1}{2(n-1)}g_{jk}\nabla_i R + \frac{1}{n-2}C_{ijk},
\end{aligned}
$$

onde a segunda igualdade segue da identidade de Ricci contraída, a quinta igualdade segue de (1.12), a sexta igualdade segue de (1.15). Daí, segue de (1.6)

$$
\begin{aligned}
g^{ls}\nabla_s W_{ijkl} &= \nabla_i\left(R_{jk} + \frac{R}{2(n-1)}g_{jk}\right) - \nabla_j\left(R_{ik} + \frac{R}{2(n-1)}g_{ik}\right) + \frac{1}{n-2}C_{ijk} \\
&= \nabla_i\left(2R_{jk} - A_{jk}\right) - \nabla_j\left(2R_{ik} - A_{ik}\right) + \frac{1}{n-2}C_{ijk} \\
&= 2\nabla_i R_{jk} - 2\nabla_j R_{ik} - \nabla_{jk} + \nabla_j A_{ik} + \frac{1}{n-2}C_{ijk} \\
&= -C_{ijk} + \frac{1}{n-2}C_{ijk} \\
&= -\frac{n-3}{n-2}C_{ijk}.
\end{aligned}
$$

Logo, obtemos:

$$
\begin{aligned}
C_{ijk} &= -\frac{n-2}{n-3}g^{ls}\nabla_s W_{ijkl} \\
&= -\frac{n-2}{n-3}\nabla_l W_{ijkl}
\end{aligned}
$$

o que demonstra a proposição. □

Observação 2. *Quando o divergente do tensor de Weyl é nulo, o chamamos Weyl harmônico. Logo, proposição acima podemos afirmar que Weyl harmônico é equivalente a Cotton nulo.*

Proposição 12. *(Propriedades do Tensor de Cotton)*

(i) O tensor de Cotton é antissimétrico, i.e, $C_{ijk} = -C_{jik}, \quad \forall i, j, k$*;*

(ii) O tensor de Cotton é livre de traços, i.e, $g^{ij}C_{ijk} = g^{ik}C_{ijk} = 0$*.*

Demonstração. Da definição do tensor de Cotton,

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= \nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik} \\ &= -(\nabla_j A_{ik} - \nabla_i A_{jk}) \\ &= -C_{jik}, \end{aligned}$$

o que demonstra o item (i).

Da equação (1.14), temos:

$$g^{ij}C_{ijk} = -g^{ij}\frac{n-2}{n-3}\nabla_l W_{ijkl} = -\frac{n-2}{n-3}\nabla_l g^{ij} W_{ijkl} = 0,$$

já que o tensor de Weyl é livre de traços. Isto demonstra o item (ii). □

Proposição 13. *O tensor de Bach é livre de traços em dimensão* $n \geqslant 4$*, o que pode ser expresso como* $\mathrm{tr}(B) = 0$*.*

Demonstração. O tensor de Bach é dado da seguinte maneira,

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\sum_{k,j=1}^{n} \nabla_k \nabla_l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2}\sum_{k,j=1}^{n} R_{kl} W_{ikjl}.$$

Conforme evidenciado anteriormente, tanto o tensor de Weyl quanto o tensor de Cotton são livre traços, o que implica que $\mathrm{tr}(B) = 0$. □

Lema 1. *Para toda função suave* $f : M \to \mathbb{R}$*, vale*

$$\Delta \nabla_i f = \nabla_i \Delta f + R_{ij} \nabla_j f. \tag{1.16}$$

Demonstração. Da identidade de Ricci teremos:

$$\Delta \nabla_i f = \nabla_j \nabla_i \nabla_j f = \nabla_i \nabla_j \nabla_j f - R_{jijk} \nabla_k f.$$

Donde segue,

$$\Delta \nabla_i f = \nabla_i \Delta f + R_{ij} \nabla_j f.$$

□

1.3 Variedades de Einstein

Aqui abordaremos um pouco sobre variedades de Einstein bem como algumas de suas propriedades.

Definição 15. *Uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *é chamada variedade de Einstein se o tensor de Ricci é um múltiplo da métrica* g*, ou seja,*

$$Ric(X, Y) = fg(X, Y)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *em que* $f : M \to \mathbb{R}$ *é uma função diferenciável.*

Em coordenadas,

$$R_{ij} = fg_{ij}. \tag{1.17}$$

Observação 3. *Ao tomar o traço em (1.17), teremos que* $R = fn$*. Disto, segue que* $f = \dfrac{R}{n}$*. Logo,* M *é uma variedade de Einstein se e somente se*

$$Ric = \frac{R}{n}g. \tag{1.18}$$

Proposição 14. *(Lema de Schur) Se* (M^n, g) *é uma variedade de Einstein conexa e* $n \geqslant 3$*, então* M *tem curvatura escalar constante.*

Demonstração. Das equações (1.17) e (1.18), temos:

$$\nabla_i nf = \nabla_i R = 2g^{jk}\nabla_j R_{ik} = 2\nabla_k R_{ik} = 2\nabla_k f g_{ik} = 2\nabla_i f$$

Assim,

$$(n-2)\nabla_i f = 0.$$

Portanto, como M é conexa, para $n \geqslant 3$ segue que f é constante. $\square$

Capítulo 2

Sólitons de Bach compactos

Neste capítulo apresentaremos algumas das propriedades para o fluxo de Bach e apresentaremos o conceito de sóliton do fluxo de Bach. De agora em diante, consideremos a convenção de soma de Einstein, onde somamos os índices de repetição. Os resultados deste capítulo têm como referência principal [25].

2.1 Fluxo de Bach

Um fluxo geométrico é uma equação diferencial em que a métrica é tratada como uma função $g(t)$ dependente do tempo em uma variedade Riemanniana e é modificada ao longo do tempo de acordo com a curvatura da variedade. A utilização do fluxo geométrico associado a um tensor nos permite empregar ferramentas de equações diferenciais para examinar a interação entre métricas e curvatura. O seguinte fluxo geométrico, definido como **fluxo de Bach**, foi apresentado em [15], e é expresso da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -B_{ij}. \tag{2.1}$$

Explorando ainda mais a interação entre fluxo geométrico e tensores, o tensor de Bach, introduzido por R. Bach [2] nos anos 1920 para estudar a Teoria da Gravidade Conforme, que representa uma abordagem alternativa à teoria da relatividade geral de Einstein. Na gravidade conforme, a ideia central é que as leis da física são invariantes sob transformações conforme. Em outras palavras, a teoria assume que as propriedades físicas de um sistema não mudam quando o espaço-tempo é multiplicado por um fator escalar. Em contraste com a equação de Einstein (estudada na teoria da gravidade), a Teoria da Gravidade Conforme adota a equação de Bach $B_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu}$, onde K é uma constante relacionada à gravidade conforme e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento. Essa equação descreve a geometria do espaço-tempo e garante a conservação local da energia-momento. Para uma compreensão mais aprofundada, consulte [33, 34].

Vale ressaltar que em 2010, soluções derivadas da equação de fluxo de Bach apareceram como soluções relevantes na teoria de gravidade de Horava-Lifshitz. Esta teoria, proposta em cinco dimensões, representa uma abordagem teórica que visa ajustar a relatividade geral de Einstein em escalas cosmológicas. O objetivo é manter a invariância de Lorentz em níveis baixos de energia, proporcionando uma visão diferenciada e promissora sobre os fenômenos gravitacionais em nosso universo. Para mais detalhes, consulte [4].

Para o que se segue, diremos que uma métrica Riemanniana é Bach-flat quando o tensor de Bach é nulo, isto é, $B_{ij} = 0$.

No sentido de estudar o comportamento de certas métricas de variedades que satisfazem a equação (2.1), coletamos algumas propriedades iniciais como segue:

Proposição 15 ([25])**.** *O fluxo de Bach preserva o volume de M.*

Demonstração. Seja M uma variedade Riemanniana satisfazendo a equação (2.1). A forma de volume da métrica Riemanniana é dada por:

$$dVg = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1\, dx^2 \dots dx^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} dVg &= \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1\, dx^2 \dots dx^n) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}} \frac{\partial}{\partial t}(\det g_{ij}) dx^1\, dx^2 \dots dx^n + \sqrt{\det g_{ij}} \frac{\partial}{\partial t}(dx^1\, dx^2 \dots dx^n) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}} \det(g_{ij}) \mathrm{tr}(g^{ij} \frac{\partial}{\partial t}(g_{ij})) dx^1\, dx^2 \dots dx^n \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{\det g_{ij}}\, \mathrm{tr}(g^{ij} \frac{\partial}{\partial t}(g_{ij})) dx^1\, dx^2 \dots dx^n \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{\det g_{ij}}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial t}(g_{ij}) dx^1\, dx^2 \dots dx^n \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\det g_{ij}}\, g^{ij} B_{ij} dx^1\, dx^2 \dots dx^n \\
&= \frac{1}{2} g^{ij} B_{ij} \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1\, dx^2 \dots dx^n \\
&= \frac{1}{2} g^{ij} B_{ij} dVg \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos que o tensor de Bach é livre de traços, o que demonstra a proposição. □

Observação 4. O fluxo de Bach não preserva a estrutura conforme em geral. De fato, o fluxo de Bach preserva a estrutura conforme apenas quando a métrica inicial for Bach-flat. Para ver isto, observe que sendo $\tilde{g} = e^{2u}g$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^m_{ij} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}(\partial_i\tilde{g}_{jk} + \partial_j\tilde{g}_{ik} - \partial_k\tilde{g}_{ij})\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{e^{2u}}g^{km}(e^{2u}\partial_i g_{jk} + e^{2u}\partial_j g_{ik} - e^{2u}\partial_k g_{ij})\\ &= \Gamma^m_{ij}.\end{aligned}$$

Portanto, segue diretamente que $\tilde{R}^s_{ijk} = R^s_{ijk}$, $\tilde{R}_{ijkl} = e^{2u}R_{ijkl}$, $\tilde{R}_{ij} = R_{ij}$ e $\tilde{R} = e^{-2u}R$. Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{ikjl} &= \tilde{R}_{ikjl} - \frac{1}{n-2}(\tilde{R}_{ij}\tilde{g}_{kl} + \tilde{R}_{kl}\tilde{g}_{ij} - \tilde{R}_{il}\tilde{g}_{kj} - \tilde{R}_{kl}\tilde{g}_{il})\\ &\quad + \frac{\tilde{R}}{(n-1)(n-2)}(\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{kl} - \tilde{g}_{il}\tilde{g}_{kl})\\ &= e^{2u}R_{ikjl} - \frac{1}{n-2}(R_{ij}e^{2u}g_{kl} + R_{kl}e^{2u}g_{ij} - R_{il}e^{2u}g_{kj} - R_{kl}e^{2u}g_{il})\\ &\quad + \frac{e^{-2u}R}{(n-1)(n-2)}(e^{2u}g_{ij}e^{2u}g_{kl} - e^{2u}g_{il}e^{2u}g_{kl})\end{aligned}$$

i.e,

$$\tilde{W}_{ikjl} = e^{2u}W_{ikjl}.$$

Logo, calculando $\tilde{B}_{ij}$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{ij} &= \frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l\tilde{W}_{ikjl} + \frac{1}{n-2}\tilde{R}_{kl}\tilde{W}_{ikjl}\\ &= \frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l e^{2u}W_{ikjl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}e^{2u}W_{ikjl}\\ &= \frac{e^{2u}}{n-3}\nabla_k\nabla_l W_{ikjl} + \frac{e^{2u}}{n-2}R_{kl}W_{ikjl}\\ &= e^{2u}B_{ij}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{B}_{ij} = e^{2u}B_{ij}, \tag{2.2}$$

onde $\tilde{B}_{ij}$ e B_{ij} são os tensores de Bach de $\tilde{g}$ e g respectivamente. Portanto, se $\tilde{g} = e^{2u}g$ é a solução do fluxo de Bach, temos:

$$-\tilde{B}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{g}_{ij}) = \frac{\partial}{\partial t}(e^{2u}g_{ij}) = 2e^{2u}\frac{\partial u}{\partial t}g_{ij}.$$

Portanto, por (2.1) e (2.2), temos:

$$2e^{2u}\frac{\partial u}{\partial t}g_{ij} = -e^{2u}B_{ij}. \tag{2.3}$$

Tomando o traço dos dois lados em (2.3), obtemos:

$$2ne^{2u}\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

i.e.,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{2.4}$$

Segue de (2.4) que:

$$-\tilde{B}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{ij} = 2e^{2u}\frac{\partial u}{\partial t}g_{ij} = 0,$$

o que implica que $\tilde{B}_{ij} = 0$ para todo $t \geqslant 0$. Em particular, a métrica inicial é Bach-flat.

A seguinte proposição nos afirma que se g é uma métrica Einstein, então g é Bach-flat. A demonstração, baseada em manipulações álgebricas e cálculos diferenciais, nos revela que o tensor de Bach é nulo para métricas Einstein.

Proposição 16 ([25])**.** *Se g é Einstein, então g é Bach-flat.*

Demonstração. Da Observação 3, se g é Einstein, então

$$R_{ij} = \frac{R}{n}g_{ij}. \tag{2.5}$$

Da Proposição 14 temos que a curvatura escalar R é constante para $n \geqslant 3$. Substituindo a equação (2.5) na expressão do tensor de Weyl, obtemos

$$\begin{aligned}
W_{ikjl} &= R_{ikjl} - \frac{1}{n-2}\left(\frac{R}{n}g_{ij}g_{kl} + \frac{R}{n}g_{kl}g_{ij} - \frac{R}{n}g_{il}g_{kj} - \frac{R}{n}g_{kj}g_{il}\right) \\
&\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{kj}) \\
&= R_{ikjl} - \frac{R}{n(n-2)}(g_{ij}g_{kl} + g_{kl}g_{ij} - g_{il}g_{kj} - g_{kj}g_{il}) \\
&\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{kj}) \\
&= R_{ikjl} - \frac{R}{n(n-2)}(2g_{ij}g_{kl} - 2g_{il}g_{kj}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{kj}) \\
&= R_{ikjl} + \left(-\frac{2R}{n(n-2)} + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\right)g_{ij}g_{kl} \\
&\quad + \left(\frac{2R}{n(n-2)} - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\right)g_{il}g_{kj} \\
&= R_{ikjl} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{kj}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$W_{ikjl} = R_{ikjl} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{kj}). \tag{2.6}$$

Veja ainda que, por (2.5)

$$R_{kl}W_{ikjl} = \frac{R}{n}g_{kl}W_{ikjl} = 0, \tag{2.7}$$

pois o tensor de Weyl é livre de traços. Assim, através da equação (2.6) e da definição do tensor de Bach,

$$\begin{aligned}
B_{ij} &= \frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}W_{ikjl}\\
&= \frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l\left(R_{ikjl} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{kj})\right)\\
&= \frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l R_{ikjl} - \frac{R}{n(n-1)(n-3)}\nabla_k\nabla_l(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{kj})\\
&= \frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l R_{ikjl}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Pela identidade de Bianchi, temos:

$$\nabla_l R_{ikjl} + \nabla_i R_{kljl} + \nabla_k R_{lijl} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_l R_{ikjl} &= -\nabla_i R_{kljl} - \nabla_k R_{lijl}\\
&= -\nabla_i R_{kljl} + \nabla_k R_{iljl}\\
&= -\nabla_i R_{kl} + \nabla_k R_{ij}\\
&= -\nabla_i\left(\frac{R}{n}g_{kl}\right) + \nabla_k\left(\frac{R}{n}g_{ij}\right)\\
&= -\left(\frac{R}{n}\right)\nabla_i g_{kl} + \left(\frac{R}{n}\right)\nabla_k g_{ij}\\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde a quarta igualdade segue da equação (2.5). Portanto, de (2.8) e (2.9) concluímos que $B_{ij} = 0$. □

O seguinte Lema devido a Cao e Chen, nos apresenta o divergente do tensor de Bach.

Lema 2 ([9])**.** *Para* $n \geqslant 4$*, temos:*

$$\mathrm{div}B = \nabla_j B_{ij} = \frac{n-4}{(n-2)^2}C_{ijk}R_{jk}. \tag{2.10}$$

Demonstração. Da definição de tensor de Bach em termos do tensor de Schouten (1.13), temos

$$\nabla_i B_{ij} = \nabla_i \left(\frac{1}{n-2} (\nabla_k C_{kij} + R_{kl} W_{ikjl}) \right),$$

i.e.,

$$\begin{aligned}(n-2)\nabla_i B_{ij} &= \nabla_i \nabla_k C_{kij} + \nabla_i R_{kl} W_{ikjl} \\ &= \nabla_i \nabla_k \left(\nabla_k A_{ij} - \nabla_i A_{kj}\right) + \nabla_k (R_{kl}) W_{ikjl} + R_{kl} \nabla_k W_{ikjl}.\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\nabla_i \nabla_k (\nabla_k A_{ij} - \nabla_i A_{kj}) &= \nabla_i \nabla_k \nabla_k A_{ij} - \nabla_i \nabla_k \nabla_i A_{kj} \\ &= \nabla_i \nabla_k \nabla_k A_{ij} - \nabla_k \nabla_i \nabla_k A_{ij} \\ &= (\nabla_i \nabla_k - \nabla_k \nabla_i) \nabla_k A_{ij} \\ &= -R_{il} \nabla_l A_{ij} + R_{kl} \nabla_k A_{lj} + R_{ikjl} \nabla_k A_{il} \\ &= R_{ikjl} \nabla_k A_{il}.\end{aligned}$$

Usando (1.8),

$$\begin{aligned}\nabla_i \nabla_k (\nabla_k A_{ij} - \nabla_i A_{kj}) + \nabla_k (R_{kl}) W_{ikjl} &= R_{ikjl} \nabla_k A_{il} + \nabla_k (R_{kl}) W_{ikjl} \\ &= R_{ikjl} \nabla_k A_{il} + \nabla_k (A_{kl}) W_{ikjl} \\ &= (R_{ikjl} - W_{ikjl}) \nabla_k A_{il} \\ &= \frac{1}{n-2} (A_{jk} g_{il} C_{lki} + A_{ik} C_{kji}) \\ &= -\frac{1}{n-2} R_{ki} C_{jki}.\end{aligned}$$

Pela relação (1.14), temos:

$$\nabla_k W_{ikjl} = \frac{n-3}{n-2} C_{jkl}.$$

Substituindo isto, temos

$$\begin{aligned}(n-2)\nabla_i B_{ij} &= \nabla_i \nabla_k (\nabla_k A_{ij} - \nabla_i A_{kj}) + \nabla_k R_{kl} W_{ikjl} + R_{kl} \nabla_k W_{ikjl} \\ &= -\frac{1}{n-2} R_{ki} C_{jki} + R_{kl} \frac{n-3}{n-2} C_{jik} \\ &= -\frac{1}{n-2} R_{kl} C_{jkl} + R_{kl} \frac{n-3}{n-2} C_{jkl} \\ &= \frac{n-4}{n-2} C_{jkl} R_{kl}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_i B_{ij} = \frac{n-4}{(n-2)^2} C_{jkl} R_{kl}.$$

□

Observação 5. *Do Lema acima, segue que quando* $n = 4$ *o tensor de Bach tem divergente nulo.*

2.2 Sóliton do fluxo de Bach

Na presente seção, investigaremos o sóliton associado ao fluxo de Bach. De maneira mais específica, considerando uma variedade Riemanniana (M, g_0), a função $g(t)$ representa o sóliton correspondente ao fluxo geométrico

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = F(g(t)), \quad \text{com} \quad g(0) = g_0, \tag{2.11}$$

se

$$g(t) = \sigma(t)\phi_t^*(g_0) \tag{2.12}$$

é a solução de (2.11), σ é uma função dependendo apenas de t com $\sigma(0) = 1$ e ϕ_t é uma família de difeomorfismos de M tal que $\phi_0 = Id_M$. Tomando a derivada de (2.12) em relação a t e avaliando-a em $t = 0$,

$$-B = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sigma(t) \right\} \Big|_{t=0} \phi_0^*(g_0) + \sigma(0) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \phi_t^*(g_0) \right\} \Big|_{t=0},$$

i.e,

$$-B = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sigma(t) \right\} \Big|_{t=0} g_0 + \mathcal{L}_X g_0.$$

Tomando $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sigma(t) \right\} \Big|_{t=0} = \lambda$, segue-se que **o sóliton para o fluxo de Bach** é dado por:

$$B_{ij} + (\mathcal{L}_X g)_{ij} = \lambda g_{ij}, \tag{2.13}$$

onde $\mathcal{L}$ denota a derivada de Lie. Se o campo vetorial X é gradiente, i.e., $X = \nabla_g f$ para alguma função suave f em M, a equação (2.13) se torna o **sóliton gradiente** dado por

$$B_{ij} + 2\nabla_i \nabla_j f = \lambda g_{ij}. \tag{2.14}$$

A seguir, demonstraremos que a métrica de qualquer sóliton gradiente compacto para o fluxo de Bach deve ser Bach-flat.

Teorema 1 ([25]). *Todo sóliton gradiente compacto (2.14) para o fluxo de Bach (2.1), é Bach-flat.*

Demonstração. Pela definição (1.10), o tensor de Bach é livre de traços. Portanto, ao tomar o traço em ambos os lados de (2.14), tem-se

$$2\Delta f = \lambda n. \tag{2.15}$$

Integrando (2.15) sobre M e aplicando o teorema da divergência, obtemos

$$0 = 2\int_M \Delta f \; = \int_M \lambda n = \lambda n \mathrm{vol}(M).$$

O que implica,

$$\lambda = 0. \tag{2.16}$$

Daí, por (2.15) temos que $\Delta f = 0$, isto é, f é uma função harmônica. Como qualquer função harmônica em uma variedade compacta M deve ser constante (pelo teorema de Hopf), segue de (2.14) que

$$B_{ij} = 0,$$

i.e, (M, g) é Bach-flat. □

Usaremos a ideia da prova do Teorema 1 para estudar os sólitons de Bach no caso não gradiente. Contudo, para fundamentar a prova do Teorema 2, utilizaremos o seguinte lema amplamente reconhecido na literatura, o qual desempenhará um papel crucial em nossa argumentação.

Lema 3. *Para qualquer campo $(0,2)$-tensorial ϕ e campo vetorial ξ, vale o seguinte*

$$\langle \mathcal{L}_\xi g, \phi \rangle = 2\mathrm{div}(\iota_\xi \phi) - 2(\mathrm{div}\phi)(\xi),$$

onde $\iota_\xi \phi$ é uma 1-forma tal que $\iota_\xi \phi(.) = \phi(\xi, .)$.

Demonstração. Considere um campo $(0,2)$-tensorial simétrico ϕ e um campo vetorial ξ. Para um $(0,2)$-tensor A, sabemos que $A(x,y) = g(A(x,y),y)$. Assim,

$$\langle A, B \rangle = \sum_i g(A(e_i), B(e_i)) = \sum_i A(e_i, B(e_i)),$$

onde B é um $(1,1)$-tensor. Considere a derivada de Lie como um $(0,2)$-tensor, e ϕ um $(1,1)$-tensor. Primeiro, examinando a mudança de tipo. Vejamos: sendo

$$\phi(X, Y) = g(\phi(X), Y),$$

temos que

$$\phi(X, E_j) = g(\phi(X), E_j).$$

Logo,

$$\phi(X) = \sum_j g(\phi(X), E_j)E_j.$$

Como

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\iota_\xi \phi) &= \sum_i \left(\nabla_{E_i} \iota_\xi \phi\right)(E_i) \\
&= \sum_i \nabla_{E_i} \phi(\xi, E_i) \\
&= \sum_i \nabla_{E_i} g(\phi(E_i), \xi)
\end{aligned}$$

e

$$\mathrm{div}\phi(\xi) = \sum_i g(\xi, \nabla_{E_i}(\phi(E_i))),$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_\xi g, \phi \rangle &= \sum_i \mathcal{L}_\xi g(E_i, \phi(E_i)) \\
&= \sum_i g\left(\nabla_{E_i}\xi, \phi(E_i)\right) + \sum_i g\left(E_i, \nabla_{\phi(E_i)}\xi\right) \\
&= \sum_i g\left(\nabla_{E_i}\xi, g(\phi(E_i), E_j)E_j\right) + \sum_i g\left(E_i, \nabla_{g(\phi(E_i),E_j)E_j}\xi\right) \\
&= \sum_i g\left(\phi(E_i), E_j\right) g\left(\nabla_{E_i}\xi, E_j\right) + \sum_i g\left(\phi(E_i), E_j\right) g\left(E_i, \nabla_{E_j}\xi\right) \\
&= 2\sum_i g\left(\phi(E_i), E_j\right) g\left(\nabla_{E_i}\xi, E_j\right) \\
&= 2\sum_i \left(g(\nabla_{E_i}\xi, \phi(E_i)\right) \\
&= 2\sum_i \left[\nabla_{E_i} g(\xi, \phi(E_i)) - g(X, \nabla_{E_i}(\phi(E_i)))\right] \\
&= 2\mathrm{div}\iota_\xi\phi - 2\left(\mathrm{div}\phi\right)(\xi).
\end{aligned}$$

Assim, temos a identidade desejada. □

Agora estamos prontos para enunciar e provar o seguinte.

Teorema 2 ([25])**.** *Seja* (M^4, g, X) *um sóliton compacto 4-dimensional (2.13) para o fluxo de Bach (2.1). Então* (M^4, g) *deve ser Bach-flat e* X *é um campo vetorial de killing.*

Demonstração. Note que se ϕ é um campo $(0,2)$-tensorial, então pelo Lema 3 temos

$$\langle \mathcal{L}_X g, \phi \rangle = 2\mathrm{div}(\iota_X \phi) - 2(\mathrm{div}\phi)(X), \tag{2.17}$$

para qualquer campo vetorial X em M, onde $\iota_X\phi$ é a 1-forma dada por $\iota_X\phi(.) = \phi(X,\cdot)$. Tomando a divergência na equação do sóliton para o fluxo de Bach (2.13) e pelo fato de o tensor de Bach (1.10) ter divergente nulo em dimensão quatro, temos:

$$\mathrm{div}(\mathcal{L}_X g) = \mathrm{div}(\lambda g)$$

i.e,

$$\mathrm{div}(\mathcal{L}_X g) = 0.$$

Fazendo $\phi = \mathcal{L}_X g$ na expressão (2.17), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_X g, \mathcal{L}_X g \rangle &= |\mathcal{L}_X g|^2 \\ &= 2\mathrm{div}(\iota_X \mathcal{L}_X g) - 2\mathrm{div}(\mathcal{L}_X g)(X) \\ &= 2\mathrm{div}(\iota_X \mathcal{L}_X g), \end{aligned}$$

i.e.,

$$|\mathcal{L}_X g|^2 = 2\mathrm{div}(\iota_X \mathcal{L}_X g). \tag{2.18}$$

Integrando (2.18) sobre M,

$$\int_M |\mathcal{L}_X g|^2 = 2\int_M 2\mathrm{div}(\iota_X \mathcal{L}_X g) = 0,$$

pelo teorema da divergência, o que implica, $\mathcal{L}_X g = 0$ e, portanto, X é um campo vetorial de Killing. Além disso, tomando o traço em (2.13), obtemos

$$\lambda = 0.$$

Portanto,

$$B_{ij} = 0,$$

donde concluímos que (M, g) é Bach-flat. □

É importante ressaltar que o resultado obtido no teorema acima ainda é válido se assumirmos Weyl harmônico ($\mathrm{div}W = 0$) devido a relação (1.14). A condição de Weyl harmônico desempenha um papel fundamental na teoria de sólitons para o fluxo de Bach, pois ao estender o resultado deste teorema para esse contexto, podemos compreender melhor o que acontece em dimensões maiores que $n = 4$ no contexto de sólitons para o fluxo de Bach.

Utilizaremos a abordagem empregada na demonstração do Teorema 1 para analisar os sólitons de Bach em situações não compactas. No entanto, para sustentar a argumentação no contexto da prova do Corolário 2, utilizaremos o seguinte lema segundo Karp, o qual desempenhará um papel crucial em nosso raciocínio.

Lema 4 ([28]). *Se M é uma variedade Riemanniana n-dimensional completa, não-compacta com curvatura seccional não-negativa, então nenhuma função C^2 subharmônica u tem seu gradiente $\nabla_g u$ satisfazendo*

$$\int_M |\nabla_g u|^{\frac{n}{n-1}} < \infty.$$

Demonstração. Para uma demonstração veja [28]. □

Corolário 2 ([25]). *Seja (M^n, g, f) um sóliton gradiente completo não compacto (2.14) para o fluxo de Bach, tal que M tenha curvatura seccional não negativa e o gradiente de f satisfaça:*

$$\int_M |\nabla_g f|^{\frac{n}{n-1}} < \infty.$$

Então (M^n, g) é Bach-flat.

Demonstração. Tomando o traço do sóliton gradiente (2.14), temos,

$$2\Delta f = \lambda n. \tag{2.19}$$

Se $\lambda \geqslant 0$, então segue que f é claramente uma função subharmônica. Se $\lambda < 0$, então segue de que $-f$ é uma função subharmônica, pois

$$2\Delta(-f) = -\lambda n \geqslant 0.$$

Em ambos os casos, pelo Lema 4, podemos concluir que f é uma função constante. Logo, pela equação (2.19), temos $\lambda = 0$. Portanto, segue de (2.14) que $B_{ij} = 0$, ou seja, (M, g) é Bach-flat. Isso prova a afirmação. □

Exploraremos agora um resultado que conecta as propriedades de um sóliton gradiente 4-dimensional para o fluxo de Bach à curvatura de Ricci de M. Este resultado estabelece que, quando a curvatura de Ricci é positiva ou negativa, (M, g_{ij}) é Bach-flat.

Teorema 3 ([25]). *Seja* (M^4, g, f) *um sóliton gradiente* 4*-dimensional (2.14) para o fluxo de Bach tal que* M *tenha curvatura de Ricci positiva ou negativa, então* (M^4, g) *é Bach-flat.*

Demonstração. Tomando a derivada covariante de ambos os lados na equação do sóliton gradiente (2.14) e utilizando a relação (2.10) com $n = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{n-4}{(n-2)^2} C_{jik}R_{ik} = \nabla_i B_{ij} &= \nabla_i \lambda g_{ij} - 2\nabla_i\nabla_i\nabla_j f \\ &= -2\nabla_i\nabla_i\nabla_j f \\ &= -2(\nabla_j \Delta f + R_{jk}\nabla_k f) \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Lema 1. Ou seja,

$$2\nabla_j \Delta f + 2R_{jk}\nabla_k f = 0. \tag{2.20}$$

Tomando o traço do sóliton gradiente (2.14),

$$2\Delta f = \lambda n.$$

Daí, temos

$$2\nabla_j \Delta f = \nabla_j \lambda n = 0,$$

e, por (2.20),

$$2R_{jk}\nabla_k f = 0.$$

Como, por hipótese, o tensor curvatura de Ricci é positivo ou negativo, concluímos que

$$\nabla_k f = 0,$$

o que implica, f constante. De (2.15), temos que $\lambda = 0$. Portanto, (M^4, g) é Bach-flat. □

Em particular, se (M, g, f) é um sóliton gradiente n-dimensional com $n \geqslant 5$ e com Weyl harmônico, o teorema acima é satisfeito devido as relações (1.14) e (2.10).

A seguir, utilizando as ideias de Ho [25], ao considerarmos $\mathbb{R}^2$ com a métrica g^0 e S^2 com a métrica padrão g^2, investigamos o espaço produto $\mathbb{R}^2 \times S^2$ munido com a métrica produto $g^0 \times g^2$. Este espaço revela-se um sóliton gradiente não trivial para o fluxo de Bach apresentando uma expressão específica para a função associada f. Para isto, necessitaremos do seguinte lema que expresa o tensor de Bach de uma variedade produto $M \times N$.

Lema 5 ([20])**.** *Sejam* (M, g^M) *e* (N, g^N) *variedades Riemannianas bidimensionais. Utilizaremos as letras gregas* μ, ν, α *para representar os índices de* M *e as letras* i, j, k *para representar os índices de* N*. Então o tensor de Bach da variedade produto* $M \times N$ *munido com a métrica produto* $g^M \times g^N$ *se divide da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \frac{1}{3}\nabla_\mu\nabla_\nu R_{g^M} - \frac{1}{3}g^M_{\mu\nu}\left[\nabla_\alpha\nabla_\alpha R_{g^M} - \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_k R_{g^N} + \frac{1}{4}\left((R_{g^M})^2 - (R_{g^N})^2\right)\right] \text{ em } M \\ B_{ij} &= \frac{1}{3}\nabla_i\nabla_j R_{g^N} - \frac{1}{3}g^N_{ij}\left[\nabla_k\nabla_k R_{g^N} - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\alpha R_{g^N} + \frac{1}{4}\left((R_{g^N})^2 - (R_{g^M})^2\right)\right] \text{ em } N \end{aligned} \tag{2.21}$$

Nas equações acima, R_{g^M} *e* R_{g^N} *são as curvaturas escalares de* g^M *e* g^N *respectivamente.*

Demonstração. Veja [20]. □

Teorema 4. *Seja* $(\mathbb{R}^2, g^0)$ *o espaço Euclideano bidimensional munido com a métrica plana* g^0 *e* (S^2, g^2) *a esfera bidimensional munida com a métrica canônica* g^2*. A variedade produto* $\mathbb{R}^2 \times S^2$ *munido com a métrica produto* $g^0 \times g^2$ *é um sóliton gradiente não trivial para o fluxo de Bach com* $\lambda = -\frac{1}{3}$ *em (2.14), para qualquer função* $f = f(x, y)$ *em* $\mathbb{R}^2$ *da forma*

$$f(x, y) = -\frac{1}{6}(x^2 + y^2) + Dx + Ey + C \tag{2.22}$$

onde C, D, E são constantes.

Demonstração. Como as curvaturas de g^0 e g^2 são dadas por $R_{g^0} = 0$ e $R_{g^2} = 2$, respectivamente, segue de (2.21) que:

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \frac{1}{3}\nabla_\mu\nabla_\nu R_{g^0} - \frac{1}{3}g^0_{\mu\nu}\left[\nabla_\alpha\nabla_\alpha R_{g^0} - \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_k R_{g^2} + \frac{1}{4}((R_{g^0})^2 - (R_{g^2})^2)\right] \\ &= \frac{1}{3}\nabla_\mu\nabla_\nu(0) - \frac{1}{3}g^0_{\mu\nu}\left[\nabla_\alpha\nabla_\alpha(0) - \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_k(2) + \frac{1}{4}(0 - 2^2)\right] \\ &= -\frac{1}{3}g^0_{\mu\nu}(-1) \\ &= \frac{1}{3}g^0_{\mu\nu} \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{2.23}$$

e

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \frac{1}{3}\nabla_i\nabla_j R_{g^2} - \frac{1}{3}g^2_{ij}\left[\nabla_k\nabla_k R_{g^2} - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\alpha R_{g^0} + \frac{1}{4}\left((R_{g^2})^2 - (R_{g^0})^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\nabla_i\nabla_j(2) - \frac{1}{3}g^2_{ij}\left[\nabla_k\nabla_k(2) - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\alpha(0) + \frac{1}{4}\left(2^2 - 0^2\right)\right] \\ &= -\frac{1}{3}g^2_{ij}(1) \\ &= -\frac{1}{3}g^2_{ij} \quad \text{em } S^2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Combinando (2.23) com a equação do sóliton gradiente (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}g^0_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu\nabla_\nu f &= \lambda g^0_{\mu\nu} \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ -\frac{1}{3}g^2_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j f &= \lambda g^2_{ij} \quad \text{em } S^2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Portanto, se $\lambda = -\frac{1}{3}$ e f depende apenas de $\mathbb{R}^2$, então a segunda equação em (2.25) é satisfeita, pois

$$-\frac{1}{3}g^2_{ij} = \lambda g^2_{ij},$$

i.e.,

$$\lambda = -\frac{1}{3}.$$

Por outro lado, se $\lambda = -\frac{1}{3}$, então a primeira equação em (2.25) implica que

$$\nabla_\mu\nabla_\nu f = -\frac{1}{3}g^0_{\mu\nu} \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Olhando de forma matricial, as fórmulas acima são justificadas da seguinte forma: por convenção, seja $\nabla_\mu\nabla_\mu f = f_{\mu\mu}$. Assim, o sóliton gradiente pode ser representado pela igualdade

$$\begin{bmatrix} f_{\mu\mu} & f_{\mu\nu} \\ f_{\nu\mu} & f_{\nu\nu} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} g_{\mu\mu} & g_{\mu\nu} \\ g_{\nu\mu} & g_{\nu\nu} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o que implica que $f = f(x, y)$ é uma função em $\mathbb{R}^2$ satisfazendo

$$f_{xx} = f_{yy} = -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad f_{xy} = f_{yx} = 0.$$

Integrando $f_{xx} = -\frac{1}{3}$ em relação a x, obtemos,

$$f_x = -\frac{1}{3}x + g(y), \tag{2.26}$$

onde $g(y)$ é uma função arbitrária dependente de y. Similarmente, integrando $f_{yy} = -\frac{1}{3}$ em relação a y, obtemos

$$f_y = -\frac{1}{3}y + h(x), \tag{2.27}$$

onde $h(x)$ é uma função arbitrária dependente de x. Integrando (2.26) e (2.27) em relação a x e y, respectivamente, obtemos as seguintes expressões para f,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\frac{1}{6}x^2 + xg(y) + c_1, \\ f(x, y) &= -\frac{1}{6}y^2 + yh(x) + c_2. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Porém, como f deve ser a mesma para ambas as expressões, derivando a primeira equação de (2.28) com relação a x e depois derivando com relação a y, obtemos

$$f_{xy} = g'(y) = 0,$$

pois $f_{xy} = 0$, donde concluímos que $g(y)$ é constante. Similarmente, derivando a segunda equação de (2.28) em relação a y e depois com relação a x, obtemos

$$f_{yx} = h'(x),$$

pois $f_{yx} = 0$, e concluímos que $h(x)$ é constante. Portanto, a forma mais geral que satisfaz todas as condições dadas é

$$f(x, y) = -\frac{1}{6}(x^2 + y^2) + Dx + Ey + C$$

para constantes C,D,E. □

Com base na demonstração do teorema acima, é possível classificar os sólitons gradientes não triviais no fluxo de Bach da variedade produto $\mathbb{R}^2 \times S^2$, que está munida com a métrica produto $g^0 \times g^2$, da seguinte forma.

Teorema 5. *Todos os sólitons gradientes não-triviais (2.14) para o fluxo de Bach da variedade produto* $\mathbb{R}^2 \times S^2$ *munido com a métrica produto* $g^0 \times g^2$ *devem ter a forma de (2.22).*

Demonstração. Pela demonstração do teorema anterior, temos que:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}g^0_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu\nabla_\nu f = \lambda g^0_{\mu\nu} && \text{em } \mathbb{R}^2, \\ -&\frac{1}{3}g^2_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j f = \lambda g^2_{ij} && \text{em } S^2. \end{aligned}$$

Tomando o traço da segunda equação, temos:

$$\Delta_{g^2} f = \lambda + \frac{1}{3} \quad \text{em} \quad S^2. \tag{2.29}$$

Se $\lambda \geqslant -\frac{1}{3}$, então f é superharmônica, e se $\lambda \leqslant -\frac{1}{3}$, então f é subharmônica. Em ambos os casos, como S^2 é compacto, f deve ser uma função constante em S^2 pelo teorema de Hopf. Isto implica que f é uma função que depende apenas de $\mathbb{R}^2$ e $\lambda = -\frac{1}{3}$ por (2.29). Seguindo a demonstração do teorema anterior, concluímos que

$$f(x, y) = -\frac{1}{6}(x^2 + y^2) + Dx + Ey + C,$$

para constantes C, D, E. □

Suponha que $(\mathbb{H}^2, g^{-2})$ seja o espaço hiperbólico bidimensional com a métrica canônica g^{-2}. Seguindo a demonstração do Teorema 4, também podemos provar o seguinte resultado para a variedade produto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}^2$.

Teorema 6. *A variedade produto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}^2$ munida com a métrica produto $g^0 \times g^{-2}$ é um sóliton gradiente não trivial para o fluxo de Bach com $\lambda = -\frac{1}{3}$, para qualquer função $f = f(x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ da forma:*

$$f(x, y) = -\frac{1}{6}(x^2 + y^2) + Dx + Ey + C$$

onde C,D e E são constantes.

Demonstração. Como as curvaturas de g^0 e g^{-2} são dadas por $R_{g^0} = 0$ e $R_{g^{-2}} = -2$ respectivamente, segue de (2.25) que

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \frac{1}{3}\nabla_\mu\nabla_\nu(0) - \frac{1}{3}g^0_{\mu\nu}\left[\nabla_\alpha\nabla_\alpha(0) - \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_k(-2) + \frac{1}{4}(0 - (-2)^2)\right] \\ &= \frac{1}{3}g^0_{\mu\nu} \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \frac{1}{3}\nabla_i\nabla_j(-2) - \frac{1}{3}g^{-2}_{ij}\left[\nabla_k\nabla_k(-2) - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\alpha(0) + \frac{1}{4}\left((-2)^2 - 0^2\right)\right] \\ &= -\frac{1}{3}g^{-2}_{ij} \quad \text{em } \mathbb{H}^2. \end{aligned}$$

Combinando estas equações com a equação do sóliton do fluxo de Bach (2.14), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}g^0_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu\nabla_\nu f &= \lambda g^0_{\mu\nu} \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ -\frac{1}{3}g^{-2}_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j f &= \lambda g^{-2}_{ij} \quad \text{em } \mathbb{H}^2. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Portanto, se $\lambda = -\frac{1}{3}$ e f depende apenas de $\mathbb{R}^2$, então a segunda equação em (2.30) é satisfeita, pois

$$-\frac{1}{3}g^{-2}_{ij} = \lambda g^{-2}_{ij},$$

i.e,

$$\lambda = -\frac{1}{3}.$$

Por outro lado, se $\lambda = -\frac{1}{3}$, então a primeira equação em (2.30) implica que

$$\nabla_\mu\nabla_\nu f = -\frac{1}{3}g^0_{\mu\nu} \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Seguindo a demonstração do Teorema 4, concluímos que

$$f(x,y) = -\frac{1}{6}(x^2+y^2) + Dx + Ey + C,$$

para constantes C,D,E. $\square$

Podemos classificar os sólitons gradientes no fluxo de Bach da variedade produto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}^2$ munida com a métrica produto $g^0 \times g^{-2}$.

Teorema 7. *Todos os sólitons gradientes (2.14) para o fluxo de Bach da variedade produto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}^2$ munido com a métrica produto $g^0 \times g^{-2}$ devem ter a forma*

$$f(x_1,x_2,w_1,w_2) = \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{12}\right)(x_1^2+x_2^2) + C_1x_1 + C_2x_2 + \left(\frac{1}{6}+\frac{\lambda}{2}\right)\log w_2 + C$$

para $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(w_1,w_2) \in \mathbb{H}^2$, onde C_1, C_2 e C são constantes.

Demonstração. Seguindo a prova do Teorema 6, obtemos (2.30). Segue de (2.30) que $f = f_1 + f_2$, onde f_1 e f_2 são funções que dependem apenas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{H}^2$ respectivamente. Por outro lado, f_1 e f_2 satisfazem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}g^0_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu\nabla_\nu f_1 &= \lambda g^0_{\mu\nu} \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ -\frac{1}{3}g^{-2}_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j f_2 &= \lambda g^{-2}_{ij} \quad \text{em } \mathbb{H}^2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Denotando as coordenadas de $\mathbb{R}^2$ por (x_1,x_2), segue da primeira equação de (2.31) que

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \tag{2.32}$$

Como $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$ segue que $f_1(x_1,x_2) = h_1(x_1) + h_2(x_2)$. De maneira análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema 4, de (2.32), obtemos:

$$\begin{aligned} h_1(x_1) &= \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{12}\right)x_1^2 + C_1x + D_1, \\ h_2(x_2) &= \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{12}\right)x_2^2 + C_2x + D_2. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que h_1 e h_2 são funções quadráticas de x_1 e x_2 respectivamente e tomando $D_1 + D_2 = C$, obtemos

$$f_1(x_1,x_2) = \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{12}\right)(x_1^2+x_2^2) + C_1x_1 + C_2x_2 + C,$$

para constantes C_1, C_2 e C. Por outro lado, se denotarmos as coordenadas de $\mathbb{H}^2$ por (w_1,w_2), i.e, $\mathbb{H}^2 = \{(w_1,w_2) \in \mathbb{R}^2 \mid w_2 > 0\}$, então a métrica g^{-2} é dada por:

$$g^{-2}_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(w_2)^2} \quad \text{e} \quad (g^{-2}_{ij})^{-1} = \delta_{ij}(w_2)^2, \tag{2.33}$$

onde,

$$g^{-2}_{11} = g^{-2}_{22} = \frac{1}{w_2^2} \quad \text{e} \quad g^{-2}_{12} = 0.$$

Usando a fórmula

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \left(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}\right) g^{mk},$$

temos os seguintes símbolos de Cristoffel para g^{-2}:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{w_2} \quad \text{e} \quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{w_2}.$$

Como

$$\nabla_i\nabla_j f_2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1} \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f_2}{\partial x^k},$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\nabla_1\nabla_1 f_2 &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial w_1^2} - \Gamma^1_{11}\frac{\partial f_2}{\partial w_1} - \Gamma^2_{11}\frac{\partial f_2}{\partial w_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial w_1^2} - \frac{1}{w_2}\frac{\partial f_2}{\partial w_2},\\
\nabla_1\nabla_2 f_2 &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial w_1 \partial w_2} - \Gamma^1_{12}\frac{\partial f_2}{\partial w_1} - \Gamma^2_{12}\frac{\partial f_2}{\partial w_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial w_1 \partial w_2} + \frac{1}{w_2}\frac{\partial f_2}{\partial w_1},\\
\nabla_2\nabla_2 f_2 &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial w_2^2} - \Gamma^1_{22}\frac{\partial f_2}{\partial w_1} - \Gamma^2_{22}\frac{\partial f_2}{\partial w_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial w_2^2} + \frac{1}{w_2}\frac{\partial f_2}{\partial w_2}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Da segunda equação de (2.31), temos:

$$\nabla_i\nabla_j f_2 = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{6}\right) g^{-2}_{ij}.$$

Combinando (2.33) com (2.34), (2.34) e a segunda equação de (2.31), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f_2}{\partial w_1^2} - \frac{1}{w_2}\frac{\partial f_2}{\partial w_2} + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{w_2^2} = 0,\\
&\frac{\partial^2 f_2}{\partial w_1 \partial w_2} + \frac{1}{w_2}\frac{\partial f_2}{\partial w_1} = 0,\\
&\frac{\partial^2 f_2}{\partial w_2^2} + \frac{1}{w_2}\frac{\partial f_2}{\partial w_2} + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{w_2^2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Como,

$$\frac{\partial f_2}{\partial w_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial w_2} + \frac{1}{w_2} f_2\right) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial w_1 \partial w_2} + \frac{1}{w_2}\frac{\partial f_2}{\partial w_1} = 0,$$

pela segunda equação de (2.35), a função

$$\frac{\partial f_2}{\partial w_2} + \frac{1}{w_2} f_2$$

depende apenas de w_2. Disto,

$$\frac{\partial f_2}{\partial w_2} + \frac{1}{w_2} f_2 = h(w_2),$$

para alguma função h. Diferenciando-a com respeito a w_2, segue

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial w_2^2} + \frac{1}{w_2}\frac{\partial f_2}{\partial w_2} - \frac{1}{w_2^2} f_2 = h'(w_2)$$

Comparando com a terceira equação de (2.35), temos:

$$-\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{w_2^2} - \frac{1}{w_2^2} f_2 = h'(w_2),$$

donde vemos que f_2 depende apenas de w_2. Em particular, temos $\frac{\partial^2 f_2}{\partial w_1^2} = 0$. Assim, da primeira equação de (2.35), tem-se:

$$\frac{\partial f_2}{\partial w_2} = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{w_2}.$$

Integrando ambos os lados, teremos:

$$f_2(w_1, w_2) = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{6}\right)\log w_2 + C.$$

Combinando as expressões dadas por $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(w_1, w_2)$, concluímos que

$$f(x_1, x_2, w_1, w_2) = \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{12}\right)(x_1^2 + x_2^2) + C_1 x_1 + C_2 x_2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{6}\right)\log w_2 + C,$$

para $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(w_1, w_2) \in \mathbb{H}^2$, e C_1, C_2 e C constantes. $\square$

Capítulo 3

Sólitons de Bach completos e não-compactos

Neste capítulo estudaremos os sólitons para o fluxo de Bach no caso gradiente completo e não-compacto. As principais fontes de referência para os resultados apresentados neste capítulo incluem os trabalhos [37] e [12].

3.1 Sólitons de Bach gradiente completo com Weyl harmônico

Nesta seção, exploraremos as características dos sólitons de Bach do tipo gradiente (M^n, g, f) completos e não-compactos que possuem Weyl harmônico (i.e., $\mathrm{div}(W) = 0$). Adiante, estudaremos os sólitons gradientes de dimensão 4.

Iniciaremos com as seguintes propriedades de sólitons de Bach do tipo gradiente com Weyl harmônico.

Lema 6 ([37])**.** *Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Bach gradiente com Weyl harmônico e* $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$*. Então, as seguintes propriedades são válidas:*

(i) $B_{ij} = \dfrac{1}{n-2} R_{kl} W_{ikjl}$*;*

(ii) $B(\nabla f, \cdot) = 0$*;*

(iii) $\nabla_j B_{ij} = 0$*;*

(iv) $\mathrm{Ric}(\nabla f, \cdot) = 0$*.*

Demonstração. Pela definição de tensor de Bach (1.10) e a hipótese de Weyl harmônico, segue que:

$$B_{ij} = \frac{1}{n-2} R_{kl} W_{ikjl},$$

o que demonstra o item (i). Para o item (ii) temos, por hipótese, que $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$. Logo, segue diretamente da definição (1.10) que $B(\nabla f, \cdot) = 0$.

Para o item (iii), a relação (1.14) implica que Weyl harmônico é equivale a $C_{ijk} = 0$. Assim, pela divergência do tensor de Bach dada por (2.10), temos $\nabla_j B_{ij} = 0$.

Finalmente, tomando a derivada covariante na equação do sóliton gradiente (2.14), obtemos

$$\nabla_k B_{ij} + 2\nabla_k \nabla_i \nabla_j f = \nabla_k \lambda g_{ij},$$

i.e.,

$$\nabla_k B_{ij} = -2\nabla_k \nabla_i \nabla_j f.$$

Similarmente, obtemos

$$-\nabla_i B_{kj} = 2\nabla_i \nabla_k \nabla_j f.$$

Assim,

$$-\nabla_i B_{kj} + \nabla_k B_{ij} = 2\nabla_i \nabla_k \nabla_j f - 2\nabla_k \nabla_i \nabla_j f = 2R_{ikjl} \nabla_l f, \tag{3.1}$$

onde a última igualdade segue da identidade de Ricci (1.1). Tomando o traço na equação acima, obtemos

$$-\nabla_j B_{kj} + g^{ij} \nabla_k B_{ij} = 2R_{kl} \nabla_l f.$$

E usando a propriedade (iii) e o fato de que o tensor de Bach é livre de traços, segue que

$$R_{kl} \nabla_l f = 0,$$

i.e., $Ric(\nabla f, \cdot) = 0$. Isto conclui a demonstração. □

Note que, nas demonstrações dos itens (iii) e (iv) do lema acima, não utilizamos a condição $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$.

Observação 6. *A propriedade (iv) do lema acima segue do fato de que* $\nabla_j B_{ij} = 0$*, quando a condição de Weyl harmônico é atendida. Entretanto, para dimensão* $n = 4$*, as propriedades (iii) e (iv) são cumpridas em virtude da equação (2.10), mesmo em casos nos quais a variedade não atende à condição de Weyl harmônico.*

Observação 7. *Note que, sendo (M^n, g, f) um sóliton de Bach gradiente com Weyl harmônico e $\iota_{\nabla f} W = 0$, então (M, g) é Bach- flat. De fato, sendo Weyl harmônico, temos:*

$$B_{ij} = \frac{1}{n-2} R_{kl} W_{ijkl}.$$

Vejamos:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_i (W_{ijkl} \nabla_l f) \\ &= \nabla_i W_{ijkl} \nabla_l f + W_{ijkl} \nabla_i \nabla_l f \\ &= W_{ijkl} \nabla_i \nabla_l f \\ &= -\frac{1}{2} W_{ijkl} (\lambda g_{jl} + B_{jl}) \\ &= -\frac{1}{2} W_{ijkl} B_{jl}. \end{aligned}$$

Assim,

$$0 = W_{ijkl} R_{ik} B_{jl} = (n-2) B_{jl} B_{jl},$$

onde a última igualdade segue da relação acima. Portanto, (M, g) é Bach-flat.

Lema 7 ([37]). *Seja (M^n, g, f) um sóliton de Bach gradiente com Weyl harmônico e $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$. Seja c um valor regular de f e Σ_c sua superfície de nível. Então, os seguintes resultados são válidos:*

(i) Quando $\nabla f \neq 0$, $E_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é um campo autovetor de Ric e B.

(ii) $|\nabla f|^2$ é constante em uma componente conexa de Σ_c.

(iii) Existe uma função s que é definida localmente por $s(x) = \int \frac{df}{|\nabla f|}$, tal que $ds = \frac{df}{|\nabla f|}$ e $E_1 = \nabla s$.

(iv) Próximo de um ponto em Σ_c, a métrica g pode ser escrita como

$$g = ds^2 + g_{ij}(s, x_2, \ldots, x_n) dx^i \otimes dx^j,$$

onde $x_2, \ldots, x_n$ é um sistema de coordenadas locais de Σ_c.

(v) $\nabla_{E_1} E_1 = 0$.

Demonstração. Pelo Lema 6, se (M, g, f) um sóliton de Bach gradiente com Weyl harmônico, então $B(\nabla f, \cdot) = 0$ e $\mathrm{Ric}(\nabla f, \cdot) = 0$. Logo, quando $\nabla f \neq 0$, $E_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é um autovetor de

Ric e B, uma vez que $\mathsf{B}(E_1,\cdot)=0$ e $\mathsf{Ric}(E_1,\cdot)=0$. O que demonstra o item (i). Agora, supondo $X\perp\nabla f$, temos pela equação do sóliton de Bach gradiente

$$\begin{aligned}\nabla_X|\nabla f|^2 &= X(|\nabla f|^2)\\ &= X(\langle\nabla f,\nabla f\rangle)\\ &= 2\langle\nabla_X\nabla f,\nabla f\rangle\\ &= 2\left(\frac{\lambda g(X,\nabla f)-B(X,\nabla f)}{2}\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de que $X\perp\nabla f$ e $B(\nabla f,\cdot)=0$ devido ao Lema 6. Portanto, $|\nabla f|^2$ é constante em cada componente conexa de Σ_c. O que demonstra o item (ii).

Seja $\frac{df}{|\nabla f|}$ uma 1-forma, onde $\nabla f\neq 0$. Note que,

$$d\left(\frac{df}{|\nabla f|}\right)=-\frac{1}{2|\nabla f|^{3/2}}d|\nabla f|^2\wedge df=0, \tag{3.2}$$

pois $\nabla_X(|\nabla f|^2=0$ para $X\perp\nabla f$. Da equação (3.2) temos que $\frac{df}{|\nabla f|}$ é uma 1-forma fechada. Do Lema de Poincaré, $\frac{df}{|\nabla f|}$ é localmente exata, logo existe uma função s tal que $ds=\frac{df}{|\nabla f|}$. Por fim, calculando ∇s num sistema de coordenadas local $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ concluímos que $\nabla s=E_1$. O que demonstra o item (iii).

A perpendicularidade entre o vetor gradiente ∇f e as superfícies de nível associadas à função f estabelece a validade do item (iv). Finalmente, considere $s,x_2,\dots,x_n$ um sistema de coordenadas em Σ_c. Como $|\nabla f|$ é constante ao longo da superfície de nível, $[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial s}]=0$. Assim, $\langle\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial s}\rangle=1$ e $\langle\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial x_i}\rangle=0$, disto, concluímos que $\nabla_{E_1}E_1=0$. O que demonstra o item (v). $\square$

O primeiro resultado, devido a Shin [37], proporciona-nos uma característica dos sólitons gradientes de Bach (M^n,g,f), na qual é evidenciada a presença de uma curvatura de Weyl harmônica.

Teorema 8 ([37]). *Seja* (M^n,g,f) *um sóliton de Bach gradiente com Weyl harmônico e* $W(\nabla f,\cdot,\cdot,\cdot)=0$. *Então temos* $B_{ij}=0$ *em todos os pontos onde* $\nabla f\neq 0$.

Demonstração. Baseado na definição de tensor de Weyl e na propriedade (iv) do Lema 6, temos:

$$\begin{aligned}
W_{ikjl}\nabla_l f &= R_{ikjl}\nabla_l f - \frac{1}{n-2}(R_{ij}g_{kl}\nabla_l f + R_{kl}g_{ij}\nabla_l f \\
&\quad - R_{il}g_{kj}\nabla_l f - R_{kj}g_{il}\nabla_l f) \\
&\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ij}g_{kl}\nabla_l f - g_{il}g_{kj}\nabla_l f) \\
&= R_{ikjl}\nabla_l f - \frac{1}{n-2}(R_{ij}\nabla_k f - R_{kj}\nabla_i f) \\
&\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ij}\nabla_k - g_{kj}\nabla_i f).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Como $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$, isolando o termo $R_{ikjl}\nabla_l f$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
R_{ikjl}\nabla_l f &= \frac{1}{n-2}(R_{ij}\nabla_k f - R_{kj}\nabla_i f) - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ij}\nabla_k f - g_{kj}\nabla_i f) \\
&= \frac{1}{n-2}\left[\left(R_{ij} - \frac{R}{(n-1)}g_{ij}\right)\nabla_k f - \left(R_{kj} - \frac{R}{(n-1)}g_{kj}\right)\nabla_i f\right].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Da relação (3.1), obtida na demonstração do Lema 6, e por (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_k B_{ij} - \nabla_i B_{kj} &= 2R_{ikjl}\nabla_l f \\
&= \frac{2}{n-2}\left[\left(R_{ij} - \frac{R}{n-1}g_{ij}\right)\nabla_k f - \left(R_{kj} - \frac{R}{n-1}g_{kj}\right)\nabla_i f\right].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Como mostrado no Lema 7, $E_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é um autovetor de B, logo podemos considerar uma base ortonormal $\left(E_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, E_2, \ldots, E_n\right)$, formada por campos autovetores de B. Note que, $\nabla_{E_a} f = 0$ para $a > 1$, pois

$$\nabla_{E_a} f = E_a(f) = \langle \nabla f, E_a\rangle = \left\langle |\nabla f|\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, E_a\right\rangle = 0,$$

onde $|\nabla f| \neq 0$. Para $a > 1$, pela equação (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1} B_{aa} - \nabla_{E_a} B_{1a} &= \frac{2}{n-2}\left[\left(R_{aa} - \frac{R}{n-1}g_{aa}\right)\nabla_{E_1} f - \left(R_{aa} - \frac{R}{n-1}g_{1a}\right)\nabla_{E_a} f\right] \\
&= \frac{2}{n-2}\left(R_{aa} - \frac{R}{n-1}\right)E_1(f) \\
&= \frac{2}{n-2}\left(R_{aa} - \frac{R}{n-1}\right)\frac{\partial}{\partial s}(f),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\nabla_{E_1} B_{aa} - \nabla_{E_a} B_{1a} = \frac{2}{n-2}\left(R_{aa} - \frac{R}{n-1}\right)f' \tag{3.6}$$

onde f' denota $E_1(f) = \dfrac{\partial}{\partial s}(f)$. O lado esquerdo de (3.6) pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1}B_{aa} - \nabla_{E_a}B_{1a} &= (E_1B_{aa} - B(E_a, \nabla_{E_1}E_a) - B(\nabla_{E_1}E_a, E_a)\\
&\quad - (E_aB_{1a} - B(\nabla_{E_a}E_1, E_a) - B(E_1, \nabla_{E_a}E_a))\\
&= E_1B_{aa} - 2B(\nabla_{E_1}E_a, E_a) - E_aB_{1a} + B(\nabla_{E_a}E_1, E_a) + B(E_1, \nabla_{E_a}E_a)\\
&= B'_{aa} + \langle \nabla_{E_a}E_1, E_a\rangle B_{aa}\\
&= B'_{aa} + \frac{1}{f'}(\lambda - B_{aa})B_{aa},
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue de $B(\nabla f, \cdot) = 0$, enquanto que a última igualdade segue da definição de sóliton de Bach gradiente. Assim, para $a > 1$, temos:

$$\nabla_{E_1}B_{aa} - \nabla_{E_a}B_{1a} = B'_{aa} + \frac{1}{f'}(\lambda - B_{aa})B_{aa}.$$

Por (3.6), segue que,

$$\frac{2f'}{n-1}\left(R_{aa} - \frac{R}{n-1}\right) = B'_{aa} + \frac{1}{f'}(\lambda - B_{aa})B_{aa}.$$

Assim,

$$B'_{aa} = -\frac{1}{f'}(\lambda - B_{aa})B_{aa} + \frac{2f'}{n-2}\left(R_{aa} - \frac{R}{n-1}\right). \tag{3.7}$$

Como $\mathrm{tr}(B) = 0$, temos $E_1\left(\sum_{i=1}^{n} B_{ii}\right) = 0$. Uma vez que $B(\nabla f, \cdot) = 0$, tem-se que $B_{11} = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{a=1}^{n} B'_{aa}\\
&= \sum_{a=2}^{n}\left[-\frac{1}{f'}(\lambda - B_{aa})B_{aa} + \frac{f'}{n-2}\left(R_{aa} - \frac{R}{n-1}\right)\right]\\
&= \sum_{a=2}^{n}\left(\frac{1}{f'}B_{aa}^2\right) + \frac{f'}{n-2}R - \frac{n-1}{(n-1)(n-2)}f'R\\
&= \sum_{a=2}^{n}\left(\frac{1}{f'}B_{aa}^2\right) + \frac{f'}{n-2}R - \frac{f'}{n-2}R\\
&= \sum_{a=2}^{n}\frac{1}{f'}B_{aa}^2\\
&= \frac{1}{f'}(B_{22}^2 + \ldots + B_{nn}^2),
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue de (3.7), enquanto que a terceira igualdade segue do fato de que $\mathrm{tr}(B) = 0$ e $R(\nabla f, \cdot) = 0$. Portanto, obtemos que $B_{ii} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. $\square$

O seguinte resultado estabelece condições abrangentes que garantem a presença de métricas Bach-flat em casos em que o sóliton de Bach gradiente é completo e não-compacto.

Teorema 9 ([37])**.** *Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Bach gradiente completo e não compacto com Weyl harmônico. Suponha que o tensor de Ricci satisfaça*

$$-(n-1)\frac{k^2}{1+d^2}g \leqslant \mathrm{Ric}$$

no sentido de formas quadráticas, sendo d *a função distância em relação a um ponto fixo* $p \in M$ *e* $k \in \mathbb{R}$*. Se* f *tem uma integral de Dirichlet finita, isto é, para alguma bola* $B(x_0)$*,*

$$\int_{M-B(x_0)} d(x,x_0)^{-2}|\nabla f|^2\, dx < \infty. \tag{3.8}$$

Então, (M^n, g) *é Bach-flat.*

Demonstração. Tomando o traço da equação do sóliton de Bach gradiente (2.14), obtemos

$$\Delta f = \frac{1}{2}n\lambda,$$

i.e, Δf é constante. Daí, usando o item (iv) do Lema 6 e a fórmula de Bochner (1.4), temos:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess}(f)|^2. \tag{3.9}$$

Considere uma função cut-off (veja Teorema 2.1 de [6]), $\phi_r \in C_0^2(B_{2r}(x_0))$ para $r > 0$,

$$\begin{cases} 0 \leqslant \phi_r \leqslant 1 \quad \text{em} \quad B_{2r}(x_0) \\ \phi_r = 1 \quad \text{em} \quad B_r(x_0) \\ |\nabla \phi_r|^2 \leqslant \dfrac{C}{r^2} \quad \text{em} \quad B_{2r}(x_0) \\ \Delta \phi_r \leqslant \dfrac{C}{r^2} \quad \text{em} \quad B_{2r}(x_0) \end{cases}, \tag{3.10}$$

onde $C > 0$ é constante. Multiplicando (3.9) por ϕ_r^2, e integrando sobre a bola $B_{2r}(x_0)$,

$$0 \leqslant \int_{B_{2r(x_0)}} |\mathrm{Hess}(f)|^2\phi_r^2 = \int_{B_{2r}(x_0)} \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2\phi_r^2.$$

Por um lado, fazendo a integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_{2r}(x_0)} \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2\phi_r^2 &= \int_{B_{2r}(x_0)} \frac{1}{2}|\nabla f|^2\Delta\phi_r^2 \\ &\leqslant \int_{B_{2r}(x_0)-B_r(x_0)} \frac{C}{2r^2}|\nabla f|^2, \end{aligned}$$

pela definição (3.10). Como a integral de Dirichlet (3.8) é finita,

$$\int_M \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2\phi_r^2 \leqslant \int_{M-B_r(x_0)} \frac{C}{2r^2}|\nabla f|^2 \to 0,$$

quando $r \to \infty$. Logo,

$$\int_M |\mathrm{Hess}(f)|^2\phi_r^2 = 0,$$

donde concluímos que $|\mathrm{Hess}(f)|^2 = 0$. Observe que, da definição de sóliton de Bach gradiente (2.14),

$$\begin{aligned} 0 = |\mathrm{Hess}(f)|^2 &= \langle \mathrm{Hess}(f), \mathrm{Hess}(f)\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle \lambda g - B, \lambda g - B\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle \lambda g, \lambda g\rangle - \frac{\lambda}{2}\langle g, B\rangle + \frac{1}{4}\langle B, B\rangle \\ &= \frac{1}{4}\lambda^2 n + \frac{1}{4}|B|^2, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da Proposição 9 e do fato de que o tensor de Bach ser livre de traço. Assim,

$$|B|^2 = -\lambda^2 n.$$

Como $n \geqslant 4$ e $|B| \geqslant 0$, segue que $|B|^2 = 0$. Portanto, (M, g) é Bach-flat. □

Na demonstração do Teorema 9 usamos a fómula de Bochner (1.4) e o fato de que $\mathrm{Ric}(\nabla f, \cdot) = 0$, pelo Lema 6, para obtermos a equação (3.9). Porém, como mencionado na Observação 6, desde que $n = 4$, obtemos $\mathrm{Ric}(\nabla f, \cdot) = 0$. Logo, baseado no teorema anterior, obtemos o seguinte resultado para um sóltiton gradiente de Bach completo e não-compacto de dimensão 4.

Teorema 10 ([37]). *Suponha* (M^4, g, f) *um sóliton de Bach gradiente completo e não-compacto de dimensão* 4. *Suponha que* f *tenha uma integral de Dirichlet finita, ou seja, para alguma bola* $B(x_0)$,

$$\int_{M-B(x_0)} d(x, x_0)^{-2}|\nabla f|^2\, dx < \infty.$$

Então, (M^4, g) *é Bach-flat.*

Demonstração. Tomando o traço da equação do sóliton de Bach gradiente (2.14), obtemos

$$\Delta f = 2\lambda,$$

i.e, Δf é constante. Da Observação 6, se (M^4, g, f) é um sóliton de Bach gradiente de dimensão $n = 4$, obtemos $Ric(\nabla f, \cdot) = 0$. Logo, da fórmula de Bochner (1.4), obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |Hess(f)|^2 + g(\nabla f, \nabla \Delta f),$$

como Δf é constante, tem-se

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |Hess(f)|^2.$$

Logo, seguindo a demonstração do Teorema 9 segue o resultado. □

3.2 Sólitons de Bach gradiente com Ricci não-negativo

Nesta seção, abordaremos sólitons de Bach gradiente completos e não-compactos que possuem a condição de Ricci não-negativo e casos onde a variedade M é parabólica.

Recentemente, Shin [37] provou que, sob uma condição integral de Dirichlet finita, qualquer sóliton de Bach gradiente completo e não compacto com Weyl harmônico é Bach-flat. Mais recentemente Cunha, Eudes de Lima e Rong Mi [12], consideraram sólitons de Bach gradiente com Ricci não-negativo juntamente com hipótese de a função pontencial possuir integral de Dirichlet finita. Com isso, eles melhoraram o resultado de Shin uma vez que a condição Weyl harmônico implica $Ric(\nabla f, \cdot) = 0$ (veja Lema 6).

Teorema 11 ([12])**.** *Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Bach gradiente completo e não-compacto com Ricci não-negativo. Se* f *tem uma integral de Dirichlet finita, isto é, para alguma bola* $B_r(x_0)$,

$$\int_{M-B(x_0)} d(x, x_0)^{-2}|\nabla f|^2 \, dx < \infty \tag{3.11}$$

então (M^n, g) *é Bach-flat.*

Demonstração. De forma similar à demonstração do Teorema 9, tomando o traço na equação do sóliton de Bach gradiente (2.14), temos

$$\Delta f = \frac{1}{2}\lambda n,$$

donde teremos que Δf é constante. Logo, da fórmula de Bochner (1.4), obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |Hess(f)|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f). \tag{3.12}$$

Como a curvatura de Ricci é não-negativa, consideremos a função cut-off (veja o Teorema 2.2 de [23]), $\phi_r \in C_0^2(B_{2r}(x_0))$ para $r > 0$, tal que:

$$\begin{cases} 0 \leqslant \phi_r \leqslant 1 \quad \text{em} \quad B_{2r}(x_0) \\ \phi_r = 1 \quad \text{em} \quad B_r(x_0) \\ |\nabla \phi_r|^2 \leqslant \dfrac{C}{r^2} \quad \text{em } B_{2r}(x_0) \\ \Delta \phi_r \leqslant \dfrac{C}{r^2} \quad \text{em } B_{2r}(x_0) \end{cases}, \tag{3.13}$$

onde $C > 0$ é constante. Multiplicando (3.12) por ϕ_r^2, e integrando sobre a bola $B_{2r}(x_0)$,

$$\int_{B_{2r}} |\mathrm{Hess}(f)|^2 \phi_r^2 + \int_{B_{2r}} \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)\phi_r^2 = \int_{B_{2r}} \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 \phi_r^2. \tag{3.14}$$

Por um lado, usando integração por partes, teremos:

$$\int_{B_{2r}} \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 \phi_r^2 = \int_{B_{2r}} \frac{1}{2}|\nabla f|^2 \Delta\phi_r^2 \leqslant \int_{B_{2r}-B_r} \frac{C}{2r^2}|\nabla f|^2,$$

onde a desigualdade acima segue da definição da função cut-off. Como por hipótese temos que a integral (3.11) é finita, podemos tomar $r \to \infty$. Assim,

$$\int_{M-B_r} \frac{C}{2r^2}|\nabla f|^2 \to 0,$$

quando $r \to \infty$. Logo, por (3.14)

$$\int_M |\mathrm{Hess}(f)|^2 + \int_M \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) = 0,$$

o que implica, $|\mathrm{Hess}(f)|^2 = 0$.

Note que,

$$\begin{aligned} 0 = |\mathrm{Hess}(f)|^2 &= \frac{1}{4}\langle \lambda g - B, \lambda g - B\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \lambda g, \lambda g\rangle - \frac{\lambda}{2}\langle g, B\rangle + \frac{1}{4}\langle B, B\rangle \\ &= \frac{1}{4}\lambda^2 n + \frac{1}{4}|B|^2, \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde a última igualdade segue da Proposição 9. Assim,

$$0 \leqslant |B|^2 = -\lambda^2 n \leqslant 0$$

concluímos que $|B|^2 = 0$. Portanto, (M^n, g) é Bach-flat. □

Adiante, continuaremos explorando as características dos sólitons de Bach gradiente (M, g, f), onde a função f tem integral de Dirichlet finita, mas estenderemos nosso estudo para o caso onde a variedade Riemanniana M^n é parabólica (lembre que toda compacta é parabólica). Para isto, se faz necessário a seguinte definição.

Definição 16. *Uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *é dita parabólica se toda função subharmônica em* M *limitada por cima é constante, isto é, se* $u \in C^\infty(M)$ *com* $\Delta u \geqslant 0$ *e* $\sup_M u < \infty$*, então* u *é constante.*

Para o próximo resultado, do qual não assumimos a condição de integral finita da função potencial, iremos considerar a condição de parabolicidade e uma certa regularidade em L^∞ ou L^p no gradiente da função potencial. Isso nos permitirá demonstrar que um sóliton de Bach gradiente completo e não-compacto é Bach-flat. Para atingir esse propósito, necessitamos do seguinte resultado estabelecido por Yau, conforme discutido no Teorema 3 de [41].

Lema 8 ([41])**.** *Seja* u *uma função suave subharmônica não negativa em uma variedade Riemanniana completa* M^n*. Se* $u \in L^p(M)$*, para algum* $p > 1$*, então* u *é constante.*

Demonstração. Para uma demonstração veja [41]. □

Lembre que $L^p(M) = \{u : M^n \to \mathbb{R}; \int_M |u|^p dM < +\infty\}$, para $p \geqslant 1$.

Teorema 12 ([12])**.** *Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Bach gradiente completo e não-compacto com* $\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geqslant 0$*. Se* M *for parabólica e* $|\nabla f| \in L^\infty(M)$ *ou* $|\nabla f| \in L^p(M)$ *para* $p > 1$*, então* (M^n, g) *é Bach-flat.*

Demonstração. Inicialmente, supondo M parabólica e $|\nabla f| \in L^\infty(M)$. Como a curvatura de Ricci é não negativa obtemos de (3.12) que,

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess}(f)|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geqslant 0 \tag{3.16}$$

pois $\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geqslant 0$. Logo, $|\nabla f|^2$ é uma função subharmônica em M. Desde que $\sup_M |\nabla f| < \infty$ e M é parabólica, segue que $|\nabla f|^2$ é constante em M. Portanto, segue de (3.16),

$$0 = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess}(f)|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

i.e.,

$$|\mathrm{Hess}(f)|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) = 0.$$

Como $\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geqslant 0$,

$$0 \leqslant |\mathrm{Hess}(f)|^2 = -\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leqslant 0,$$

donde concluímos que $|\mathrm{Hess}(f)|^2 = 0$. Seguindo a demonstração do Teorema 11, obtemos a equação (3.15), logo $B = 0$, e portanto, (M^n, g) é Bach-flat.

Agora, assumindo $|\nabla f| \in L^p(M)$ para $p > 1$, novamente da demonstração do Teorema anterior, obtemos a equação (3.12) e como, por hipótese, $\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geqslant 0$, obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess}(f)|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geqslant 0, \tag{3.17}$$

donde concluímos que $|\nabla f|^2$ é uma função subharmônica em M. Do Lema 8 teremos que $|\nabla f|^2$ é constante em M. Portanto, de (3.17),

$$|\mathrm{Hess}(f)|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) = 0,$$

i.e.,

$$|\mathrm{Hess}(f)|^2 = 0,$$

pois $\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geqslant 0$. Seguindo da demonstração do teorema anterior, temos a equação (3.15), e novamente obtemos $B = 0$. Portanto, (M^n, g) é Bach-flat. O que demonstra o Teorema. □

Como consequência, deduzimos que qualquer sóliton de Bach gradiente com Weyl harmônico deve ser Bach-flat.

Corolário 3 ([12])**.** *Seja (M^n, g, f) um sóliton de Bach gradiente completo e não-compacto com Weyl harmônico. Se M é uma variedade parabólica e $|\nabla f| \in L^\infty(M)$ ou $L^p(M)$ para $p > 1$, então (M^n, g) é Bach-flat.*

Demonstração. Como M tem Weyl harmônico, pelo Lema 6 temos que $\mathrm{Ric}(\nabla f, \cdot) = 0$. Portanto, segue do teorema acima que (M^n, g) é Bach-flat. □

Como visto no Lema 2, devido a Cao e Chen, dado que o tensor de Bach em dimensão 4 é livre de divergência, i.e., $\mathrm{div}B = 0$, somos capazes de obter o seguinte resultado.

Teorema 13 ([12])**.** *Seja (M^4, g, f) um sóliton de Bach gradiente 4-dimensional completo e não-compacto. Se M^4 for parabólica e $|\nabla f| \in L^\infty(M^4)$ ou $|\nabla f| \in L^p(M^4)$ para $p > 1$, então (M^4, g) é Bach-flat.*

Demonstração. Note que para $n = 4$, de (2.10) segue que $\mathrm{div}B = 0$. Tomando a derivada covariante na fómula do sóliton de Bach gradiente (2.14), obtemos,

$$\nabla_i B_{kj} + 2\nabla_i\nabla_k\nabla_j f = \nabla_i \lambda g_{kj},$$

daí,

$$2\nabla_i\nabla_k\nabla_j f = -\nabla_i B_{kj}. \tag{3.18}$$

De maneira análoga, teremos,

$$2\nabla_k\nabla_i\nabla_j f = -\nabla_k B_{ij} \tag{3.19}$$

Subtraindo as equações (3.18) e (3.19),

$$\begin{aligned} -\nabla_i B_{kj} + \nabla_k B_{ij} &= 2\nabla_i\nabla_k\nabla_j f - 2\nabla_k\nabla_i\nabla_j f \\ &= 2R_{ikjl}\nabla_l f, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da identidade de Ricci (1.1). Agora, tomando o traço da equação acima,

$$0 = -g^{ij}\nabla_j B_{ij} + g^{ij}\nabla_k B_{ij} = 2R_{kl}\nabla_l f,$$

pois $divB = 0$, daí,

$$R_{kl}\nabla_l f = 0.$$

Portanto, $Ric(\nabla f, \cdot) = 0$. Seguindo da demonstração do Teorema 11, precisamente da equação (3.12), obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |Hess(f)|^2 \geqslant 0.$$

Logo, $|\nabla f|^2$ é uma função subharmônica em M. Seguindo a demonstração do Teorema 12, concluímos que (M^4, g) é Bach-flat.

Finalmente, assumindo $|\nabla f| \in L^p(M)$ para $p > 1$, novamente da equação (3.12) obtida na demonstração do Teorema 11,

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |Hess(f)|^2 \geqslant 0,$$

donde concluímos que $|\nabla f|^2$ é subharmônica em M, logo do Lema 8 teremos que $|\nabla f|^2$ é constante em M, podemos concluir da demonstração do Teorema 12, que (M^4, g) é Bach-flat para $|\nabla f| \in L^p(M)$. O que conclui a demonstração. □

Capítulo 4

Sólitons de Bach com Ricci não-positivo

No contexto de um sóliton não gradiente, demonstramos no segundo capítulo, empregando as concepções de Ho [25], que um sóliton de Bach compacto 4-dimensional (M^4, g) é Bach-flat, e X é um campo vetorial de Killing (consulte o Teorema 2). Neste capítulo, apresentamos uma versão que se aplica a qualquer sóliton de Bach, sem fazer a suposição de compacidade. Para tal, necessitaremos dos seguintes lemas.

O primeiro lema é conhecido como fórmula de Bochner generalizada apresentado por Yano e Bochner em [40] (para uma demonstração detalhada o leitor pode consultar R. Lemos em [31]).

Lema 9 ([40])**.** *Sejam* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana e* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *qualquer, então*

$$\mathrm{div}(\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}(X, X) + \nabla_X \mathrm{div}(X). \tag{4.1}$$

Demonstração. Para uma demonstração veja [31]. □

O segundo lema fornece uma fórmula do tipo Bochner para sólitons de Bach não gradientes 4-dimensional.

Lema 10 ([12])**.** *Suponha que* (M^4, g, X) *seja um sóliton de Bach 4-dimensional. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X, X).$$

Demonstração. Tomando o divergente na fórmula do sóliton de Bach (2.13),

$$\mathrm{div}B + \mathrm{div}(\mathcal{L}_X g) = \mathrm{div}(\lambda g) = 0.$$

Usando o fato de que o tensor de Bach ser livre de divergência em dimensão 4,

$$\mathrm{div}(\mathcal{L}_X g) = 0.$$

Por outro lado, tomando o traço na equação do sóliton de Bach (2.13),tem-se

$$2\mathrm{div}X = \lambda n,$$

donde concluímos que $\mathrm{div}X$ é constante. Logo, da equação (4.1), obtemos

$$0 = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}(X,X).$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X).$$

□

Teorema 14 ([12]). *Seja* (M^4, g, X) *um sóliton de Bach 4-dimensional. Suponha que o tensor de Ricci satisfaça*

$$-(n-1)\frac{k^2}{1+d^2}g \leqslant \mathrm{Ric} \leqslant 0 \tag{4.2}$$

no sentido de formas quadráticas, sendo d *a função distância em relação a um ponto fixo* $p \in M$ *e* $k \in \mathbb{R}$. *Se,*

$$\int_{M-B_r(x_0)} d(x,x_0)^{-2}|X|^2 < \infty \tag{4.3}$$

então (M^4, g) *deve ser Bach-flat e* X *é um campo vetorial de Killing.*

Demonstração. Do Lema 10, temos

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X). \tag{4.4}$$

Por hipótese, a curvatura de Ricci tem um decaimento subquadrático em (4.2), logo considere uma função cut-off ϕ_r (como no Teorema 11). Multiplicando a equação (4.4) por ϕ_r^2 e integrando sobre $B_{2r}(x_0)$,

$$\int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla X|^2\phi_r^2 - \int_{B_{2r}(x_0)} \mathrm{Ric}(X,X)\phi_r^2 = \int_{B_{2r}(x_0)} \frac{1}{2}\Delta|X|^2\phi_r^2.$$

Por um lado, fazendo a integração por partes,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{B_{2r}(x_0)} \Delta|X|^2\phi_r^2 &= \frac{1}{2}\int_{B_{2r}(x_0)} (\Delta\phi_r^2)|X|^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{B_{2r}(x_0)-B_r(x_0)} \frac{C}{r^2}|X|^2,\end{aligned}$$

onde a desigualdade acima segue da definição da função cut-off. Como por hipótese temos que a integral (4.3) é finita, podemos tomar $r \to \infty$, e assim obter

$$\frac{1}{2}\int_M \Delta|X|^2\phi_r^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_{M-B_r}\frac{C}{2r^2}|X|^2 \to 0,$$

quando $r \to \infty$. Logo,

$$\int_M |\nabla X|^2 - \int_M \mathrm{Ric}(X,X) = 0,$$

i.e.,

$$\int_M |\nabla X|^2 = \int_M \mathrm{Ric}(X,X),$$

daí, $|\nabla X|^2 = 0$. Assim, concluímos que $\nabla X = 0$, i.e., X é paralelo, e em particular X é um campo vetorial de Killing.

Finalmente, como X é Killing, temos $\mathcal{L}_X g = 0$, e daí tomando o traço na equação do sóliton obtemos $\lambda = 0$. Novamente da equação do sóliton de Bach (2.13), teremos,

$$B_{ij} = 0.$$

Portanto, (M^4, g) é Bach-flat. □

De maneira similar ao Teorema 14, podemos demonstrar o caso em que $n \geqslant 5$ com a condição de Weyl harmônico. Para isto, necessitaremos do seguinte resultado.

Lema 11 ([12])**.** *Suponha que* (M^n, g, X) *seja um sóliton de Bach com Weyl harmônico. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X).$$

Demonstração. Como M tem Weyl harmônico então o Cotton é nulo devido a relação (1.14). Assim, por (2.10),

$$\nabla_j B_{ij} = \frac{n-4}{(n-2)^2}C_{ijk}R_{jk} = 0,$$

isto é, o divergente do tensor de Bach é nulo. Logo, seguindo como no Lema 10 concluímos a demonstração. □

Teorema 15 ([12])**.** *Seja* (M^n, X, g) *um sóliton de Bach com Weyl harmônico. Suponha que o tensor de Ricci satisfaça*

$$-(n-1)\frac{k^2}{1+d^2}g \leqslant \mathrm{Ric} \leqslant 0$$

no sentido de formas quadráticas, sendo d *a função distância em relação a um ponto fixo* $p \in M$ *e* $k \in \mathbb{R}$. *Se,*

$$\int_{M-B_r(x_0)} d(x,x_0)^{-2}|X|^2 < \infty$$

então (M^n, g) *deve ser Bach-flat e* X *é um campo vetorial de Killing.*

Demonstração. Do Lema 11, temos

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X).$$

Logo, seguindo da demonstração do Teorema 14, concluímos que (M, g) é Bach-flat e X é paralelo, e em particular é Killing. □

Os resultados obtidos nos Teorema 12 e Teorema 13 para o caso de sólitons gradiente e Ricci não-negativo podem ser reobtidos para o caso não-gradiente se assumirmos Ricci não-positivo.

Teorema 16 ([12])**.** *Seja* (M^4, X, g) *um sóliton de Bach 4-dimensional com Ricci não-positivo. Se* M^4 *for parabólica e* $|X| \in L^\infty(M^4)$ *ou* $|X| \in L^p(M^4)$ *para* $p > 1$, *então* (M^4, g) *é Bach-flat.*

Demonstração. Inicialmente suponha $|X| \in L^\infty(M^4)$. Do Lema 10,

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X).$$

Como Ricci é não-positivo,

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X) \geqslant 0. \tag{4.5}$$

Logo, $|X|^2$ é uma função subharmônica em M^4. Desde que $\sup_{M^4}|X| < +\infty$ e M é parabólica, obtemos que $|X|^2$ é constante em M^4. Logo de (4.5),

$$|\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X) = 0.$$

Como $\mathrm{Ric}(X,X) \leqslant 0$, segue que $|\nabla X|^2 = 0$. Donde concluímos que $\nabla X = 0$. Em particular, X é um campo vetorial de Killing. Finalmente, sendo X Killing, podemos seguir como no final da demonstração do Teorema 14 para concluir que (M^4, g) é Bach-flat.

Agora, assumindo $|X| \in L^p(M^4)$ para $p > 1$. Como Ricci é não-positivo, do Lema 10 temos,

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X) \geqslant 0, \tag{4.6}$$

donde concluímos que $|X|^2$ é subharmônica em M^4. Segue do Lema 8 que $|X|^2$ é constante em M^4. Daí, segue da equação (4.6) que

$$|\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X) = 0.$$

Portanto, seguindo como acima obtemos que X é Killing e (M^4, g) é Bach-flat. $\square$

Para $n \geqslant 5$, temos o seguinte resultado.

Teorema 17 ([12])**.** *Seja* (M^n, X, g) *um sóliton de Bach com Weyl harmônico e Ricci não-positivo. Se* M *for parabólica e* $|X| \in L^\infty(M)$ *ou* $|X| \in L^p(M)$ *para* $p > 1$*, então* (M^n, g) *é Bach-flat.*

Demonstração. Inicialmente, supondo $|X| \in L^\infty(M^4)$. Como a curvatura de Ricci é não-positiva e M tem Weyl harmônico, segue do Lema 11,

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X) \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Logo, $|X|^2$ é uma função subharmônica em M. Desde que $\sup_M |X| < +\infty$ e M é parabólica, obtemos que $|X|^2$ é constante em M. Logo de (4.7),

$$0 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X).$$

Como $|\nabla X|^2 \geqslant 0$ e $\mathrm{Ric}(X,X) \leqslant 0$, segue que $|\nabla X|^2 = 0$. Donde concluímos que $\nabla X = 0$. Em particular, X é um campo vetorial de Killing. Sendo X Killing, podemos seguir como no final da demonstração do Teorema 14 para concluir que (M, g) é Bach-flat.

Agora, assumindo $|X| \in L^p(M)$ para $p > 1$. Como a curvatura de Ricci é não-positiva, segue do Lema 11 que,

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X) \geqslant 0, \tag{4.8}$$

donde concluímos que $|X|^2$ é subharmônica em M. Logo do Lema 8, tem-se que $|X|^2$ é constante em M. Logo, segue de (4.8),

$$|\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X) = 0.$$

Portanto, seguindo como acima obtemos que X é Killing e (M, g) é Bach-flat. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Abbena, E.; Garbiero, S.; Salamon, S.: *Bach-flat Lie groups in dimension 4*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, (351) 303–306, 2013.

[2] Bach, R.: *Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs*. Math Z., (9) 110–135, 1921.

[3] Bahuaud, E.; Helliwell, D.: *Short-time existence for some higher-order geometric flows*, Comm. Partial Differential Equations, (36) 2186-2207, 2011.

[4] Bakas, I.; Bouliot, F.; Lust, D.; Petropoulos, M.: *Geometric flows in Horava-Lifshitz gravity*, JHEP, 2009 (4), 2010.

[5] Besse, A.L.: *Einstein Manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3, (10). Berlin, Springer, 1987.

[6] Bianchi, D., Setti, A.:*Laplacin cut-offs, porous and fast diffusion on manifolds and other applications*, Calc. Var., 4 (57), 2018.

[7] Buckland, J.A.: *Short-time existence of solutions to the cross curvature flow on* 3-*manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., (134) 1803-1807, 2006.

[8] Calviño Louzao, E.; García-Río, E.; Vázquez-Lorenzo, R.: *A note on compact Cotton solitons*, Classical Quantum Gravity, 205014 (29) p. 5, 2012.

[9] Cao, H.D.; Chen, Q.: *On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons*, Duke Math J., 6 (162) 1149-1169, 2013.

[10] Chow, B.; Lu, P.; Ni, L.: *Hamilton's Ricci Flow*, Graduate Studies in Mathematics, (77). Providence, American Mathematical Society, 2006.

[11] Chow, B.: *The Yamabe flow on locally conformally flat manifolds with positive Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. (45) 1003–1014, 1992.

[12] Cunha, A.W.; de Lima, E.L; Mi, R.:*Some characterizations of Bach solitons via Ricci curvature*, Differ. Geom. Appl., (90) 102046, 2023.

[13] Cunha, A.W.:*Remarks on scalar curvature of gradient Yamabe solitons with non-positive Ricci curvature*, Differ. Geom. Appl., 101843 (80), 2022.

[14] Cunha, A.W.; Roing, F.; Lemos, R.S.:*On Ricci-Bourguignon solitons: triviality, uniqueness and scalar curvature estimates*, J. Math. Anal. Appl., 127333 (526), 2023.

[15] Das, S.; Kar, S.: *Bach flows of product manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.,(9) 1250039, 2012.

[16] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[17] Derdziń, A.: *Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four*, Compos. Math., (49) 405–433, 1983.

[18] DeTurck, D.: *Deforming metrics in the dirction of their Ricci tensors*, J. Differential Geom., (18) 157-162, 1983.

[19] Fernández-López, M., García-Río, E.: *A remark on compact Ricci solitons*, Basel, Math. Ann., (91) 284-288, 2008.

[20] Fiedler, B., Schimming, R.: *Exact solutions of the Bach field equations of general relativity*, Rep. Math. Phys., 15 (17), 1980.

[21] Griffin, E. R.: *Ambient Obstruction Solitons And Homogeneous Gradient Bach Solitons*, Dissertations - ALL. 1309, 2021.

[22] Grigor'yan, A.:*Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. Am. Math. Soc., (36) 135–249, 1999.

[23] Güneysu, B.:*Sequences of Laplacian cut-off functions*, J. Geom. Anal., (26) 1171–184, 2016.

[24] He, C.; Petersen, P.; Wylie, W.: *On the classification of warped product Einstein metrics*, Commun. Anal. Geom., (20) 271–312, 2012.

[25] Ho, P.T.: *Bach flow.* J. Geom. Phys.,133 1–9, 2018.

[26] Ho, P.T.: *A remark on complete non-expanding Ricci solitons*, Arch. Math. (Bss (18) 157-162, 1983.

[27] Isenberg, J.; Jackson, M.; Lu, P.: *Ricci flow on locally homogeneous closed 4-manifolds*,Comm. Anal. Geom., (14) 345–386, 2006.

[28] Karp, L.: *On Stokes´s theorem for noncompact manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., (82) 487–490, 1981.

[29] Kim, J.: *On a classification of* 4*-d gradient Ricci solitons with harmonic Weyl curvature*, J. Geom. Anal., (27) 986–1012, 2017.

[30] Lee, J.M.: *Introduction to smooth manifolds*, University of Washington Departament of Mathematics, second edition, 2000.

[31] Lemos, R. S.: *Caracterização da Curvatura Escalar de Sólitons de Yamabe e Sólitons de Ricci-Bourguignon*, Dissertação de mestrado, UFPI, 2022.

[32] Ma, L.; Miquel, V.: *Remarks on scalar curvature of Yamabe solitons*, Ann. Glob. Anal. Geom, (42) 195–205, 2012.

[33] Mannheim, P.D.: *Alternatives to Dark Matter and Dark Energy*, Prog. Part. and Nucl. Phys., 2 (56), 2006.

[34] Mannheim, P.D.; Kazanas, D.: *Newtonian Limit of Conformal Gravity and the Lack of Necessity of the Second Order Poisson Equation*, Gen. Rel. and Grav., 4 (26), 1994.

[35] Munteanu, O.; Sesum, N.: *On gradient Ricci solitons*, J. Geom. Anal., (23) 539–561, 2013.

[36] Queiroz, C. C. S.: *Sóliton de Ricci Contrátil com integral pinçada*, Dissertação de mestrado, UFPI, 2020.

[37] Shin, J.: *A note on gradient Bach solitons*, Differ. Geom. Appl., (80) 101842, 2022.

[38] Wylie, W.: *Complete shrinking Ricci solitons have finite fundamental group*, Proc. Amer. Math. Soc., (136) 803–1806, 2008.

[39] Yang, N.: *A note on nonnegative Bakry-Emery Ricci curvature*, Arch. Math., (93) 491–496, 2009.

[40] Yano, K.; Bochner, S.: *Curvature and Betti Numbers*, Princeton University Press, 1949.

[41] Yau, S.T.:*Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry*. Indiana Univ. Math. J., 25 (7) 659–670, 1976.