



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Hipersuperfícies Capilares na Bola Euclidiana:  
Estabilidade e Instabilidade**

**Isaque Felix Campos**

**Teresina - 2024**

**Isaque Felix Campos**

**Dissertação de Mestrado:**

**Hipersuperfícies Capilares na Bola Euclidiana: Estabilidade e  
Instabilidade**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

**Teresina - 2024**



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

*Hipersuperfícies Capilares na Bola Euclidiana: Estabilidade e Instabilidade*

Isaque Felix Campos

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 18 de janeiro de 2024.

**Banca Examinadora:**

Paulo Alexandre Araújo Sousa  
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa - Orientador

Halyson Irene Baltazar  
Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar - UFPI

Bruno Vasconcelos Mendes Viera  
Prof. Dr. Bruno Vasconcelos Mendes Viera – UFPI

ACESSO REMOTO  
Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes – UFMA

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI  
Biblioteca Setorial do CCN

C198h Campos, Isaque Felix.  
Hipersuperfícies capilares na bola euclidiana:  
estabilidade e instabilidade / Isaque Felix Campos. -- 2024.  
79 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí,  
Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-  
Graduação em Matemática, Teresina, 2024.

“Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.”

1. Geometria euclidiana. 2. Hipersuperfícies. 3. Índice  
de Morse. 4. Geometria de geodésicas. I. Sousa, Paulo  
Alexandre Araújo. II. Título.

CDD 516.2

*Dedico este trabalho ao meu Deus, aos meus pais Raimundo e Francisca, à minha linda esposa Tayane e filha Lia. Dedico também à, minha mui digna irmã em Cristo Jesus, Marinalva Dias da Silva Alves (In memoriam).*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Deus e Senhor da minha vida pela graça e oportunidade fazer este mestrado. Só o Senhor conhece as lágrimas que derramei, as horas que passei estudando e os desafios que enfrentei. Em meio a tantas dificuldades, até aqui o Senhor me susteve. Obrigado meu Deus.

Agradeço a minha família. A meu pai Raimundo Nonato e minha mãe Francisca, que nesse período me apoiaram. A minha irmã Isabelle e meu cunhado Douglas pelas visitas e companhia durante o período letivo. A minha linda esposa Tayane da Silva Lima Campos, que apesar da distância, esteve ao meu lado, cuidando de nosso lar e de nossa filhinha Lia, que está dormindo enquanto escrevo estas palavras, durante a gestação. Amo cada um de vocês.

Agradeço ao Prof.<sup>o</sup> Paulo Alexandre pela gentileza de aceitar meu pedido para ser meu orientador. Agradeço pela confiança, pelos ensinamentos e palavras de animo durante os momentos mais conturbados.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da Ufpi, em especial os professores Cícero, Halyson, Barnabé, Paulo Sérgio Marques e Sissy Sousa, os quais foram meus orientadores de IC durante a graduação em Parnaíba, Joel Rabelo e Antonio Wilson. Muito obrigado pelos ensinamentos passados e conversas matemáticas.

Agradeço aos amigos que fiz durante este curto período que estive em Teresina. Obrigado Suerlan, Jeferson, Danilo, Fauster, Emanuely, Ana Julia, Luzivânia, Honorio, José Vitor, Eduardo, José Alencar, Estevão, Rufino, Wilkreffy, Dieme, João Vinicius, Erisvaldo, Jonas Bloch, Lívio, Lázaro, João Victor. Ao meu amigo Paulo Henryque, mesmo em outra instituição, agradeço pela força durante este período e pela ajuda nas horas das dúvidas nas questões.

Agradeço aos membros da banca, professores Dr. Ivaldo Nunes, Dr. Halysom Baltasar e Bruno Vasconcelos por terem aceito participar da defesa desta dissertação, bem como pelas sugestões feitas que muito agregaram ao trabalho.

Reservo aqui um espaço para homenagear a tia de minha esposa e mui saudosa amiga Irmã Marinalva, a qual aprouve o Senhor levar consigo durante o período em que escrevia esta dissertação. Irmã Marinalva foi uma mulher valente, sempre cuidadosa com sua casa, seu esposo e seu filhinho. Sempre que vinha nos visitar em nossa residência em Parnaíba perguntava como iam meus estudos, dava uma palavra, vinda do Céu, de conforto. Deixará muitas saudades. Escrevo este trecho na esperança que seu filho David em algum momento possa lê-lo.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

*“Quando o SENHOR trouxe do cativeiro os que voltavam a Sião, estávamos como os que sonham. Então nossa boca se encheu de riso, e a nossa língua, de cânticos; então se dizia entre as nações: Grandes coisas fez o SENHOR a estes. Grandes coisas fez o SENHOR por nós, e, por isso estamos alegres. Faze-nos regressar outra vez do cativeiro, SENHOR, como as correntes do Sul. Os que semeiam em lágrimas segarão com alegria. Aquele que leva a preciosa semente, andando e chorando, voltará, sem dúvida, com alegria, trazendo consigo os seus molhos.”*

Salmo 126, Bíblia Sagrada.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos hipersuperfícies capilares imersas na bola euclidiana unitária, e analisamos os casos estável e instável. No caso estável, estudamos o resultado de unicidade obtido por Wang e Xia [*Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball*, 2019], segundo o qual as únicas hipersuperfícies capilares estáveis imersas na bola euclidiana unitária são os discos e as calotas esféricas. No caso instável, estudamos o índice de Morse associado a uma hipersuperfície, o qual é zero para as estáveis, e apresentamos o resultado obtido por Devyver [*Index of the critical catenoid*, 2017] onde o índice de Morse do Catenóide Crítico (superfície bordo livre) foi calculado.

**Palavras-chaves:** Curvatura Média Constante, Bordo Livre, Hipersuperfície Estável, Índice de Morse.

# Abstract

In this work, we study capillary hypersurfaces immersed in the unitary Euclidean ball, and analyze the stable and unstable cases. In the stable case, we studied the uniqueness result obtained by Wang and Xia [*Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball*,2019], according to which the only stable capillary hypersurfaces immersed in the unitary Euclidean ball are the discs and spherical caps. In the unstable case, we study the Morse index associated with a hypersurface, which is zero for stable ones, and we present the result obtained by Devyver [*Index of the critical catenoid*, 2017] where the Morse index of the Critical Catenoid (free boundary surface) was calculated.

**Keywords:** Constant Mean Curvature, Free-Boundary, Morse Index, Stable Hypersurface.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Alguns Operadores Diferenciais Importantes . . . . .	5
1.2 Imersões Isométricas . . . . .	7
1.3 Hipersuperfícies Capilares . . . . .	15
1.4 Aplicações Conformes. Invariância Conforme da Energia de Dirichlet em Duas Dimensões . . . . .	18
<b>2 A Forma de Índice para Hipersuperfícies com Bordo</b>	<b>20</b>
2.1 Variações da Energia, Estabilidade e Índice de Morse . . . . .	20
2.2 Estabilidade das Bolas Totalmente Geodésicas . . . . .	24
2.3 Estabilidade das Calotas Esféricas . . . . .	25
<b>3 Unicidade de Hipersuperfícies Capilares</b>	<b>27</b>
3.1 Uma Nova Fórmula Tipo Minkowski em $\mathbb{R}^{n+1}$ . . . . .	27
3.2 Unicidade de Hipersuperfícies Capilares Estáveis . . . . .	33
<b>4 O Índice de Morse do Catenoide Crítico</b>	<b>41</b>
4.1 Um Pouco de Instabilidade . . . . .	41
4.2 O Catenoide Crítico . . . . .	42
4.2.1 Uma Mudança de Coordenadas . . . . .	44
4.2.2 Campos de Jacobi . . . . .	47

---

4.2.3	Uma Decomposição de Fourier . . . . .	50
4.3	O Problema de Dirichlet . . . . .	52
4.4	Índice do Catenóide Crítico . . . . .	54
4.5	O que tem além? . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>64</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>

# Lista de Figuras

1.1	Semi-espaço superior fechado de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	15
1.2	Disco plano . . . . .	16
1.3	Os quatro campos normais . . . . .	17
1.4	Catenoide Crítico . . . . .	17
2.1	Disco Equatorial . . . . .	25
2.2	Calota Esférica (em verde) . . . . .	26

# Introdução

Neste trabalho, estudamos hipersuperfícies imersas na bola euclidiana unitária  $\mathbb{B}^{n+1}$  e nos baseamos em duas referências principais, a saber: a primeira parte do trabalho de Wang e Xia em (WANG; XIA, 2019), onde eles provaram um resultado de unicidade a cerca das hipersuperfícies capilares estáveis em  $\mathbb{B}^{n+1}$ , e no trabalho de Devyver em (DEVYVER, 2017), onde ele calculou Índice de Morse do Catenóide Crítico.

Hipersuperfícies capilares são pontos críticos de algum funcional variacional geométrico. Foi Young quem primeiro considerou matematicamente superfícies capilares em 1805 e introduziu o conceito matemático de curvatura média. Seu trabalho foi continuado por Laplace e mais tarde por Gauss. Para mais detalhes do desenvolvimento histórico dessa teoria veja (FINN; MCCUAN; WENTE, 2012).

Ainda sobre as superfícies mínimas com bordo livre, Ailana Fraser e Richard Schoen nos artigos (FRASER; SCHOEN, 2011) e (FRASER; SCHOEN, 2016) trouxemos um interesse nos estudos dessa temática. Precisamente, eles estudaram superfícies mínimas com bordo livre na bola unitária  $\mathbb{B}^n$  de  $\mathbb{R}^n$  e em (FRASER; SCHOEN, 2011) eles apresentaram dois exemplos interessantes, a saber, o Catenóide Crítico (parte de um catenóide em  $\mathbb{R}^3$ ) e a Faixa de Möbius Crítica (uma superfície mínima com bordo livre não-orientável em  $\mathbb{B}^4$ ).

## Estabilidade

A estabilidade de hipersuperfícies mínimas ou de curvatura média constante desempenha um papel importante na geometria diferencial. Primeiramente, observamos que Antônio Ros e Enaldo Vergasta apresentaram o seguinte resultado para superfícies com bordo livre:

**Teorema 0.1** (ROS; VERGASTA, 1995). *Suponha que  $\mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$  é uma bola e que  $\phi : M \rightarrow \mathbb{B}^3$  seja estacionária estável. Então  $\partial M$  é mergulhada e as únicas possibilidades são:*

- $\phi(M)$  é um disco totalmente geodésico;
- $\phi(M)$  é uma calota esférica;
- $g = 1$  e  $r = 1$  ou  $2$ , onde  $g$  é o gênero e  $r$  é o número de componentes conexas.

Por outro lado Ivaldo Nunes mostrou recentemente em (NUNES, 2017) que o terceiro caso não ocorre, precisamente o resultado de Nunes foi:

**Teorema 0.2** (NUNES, 2017). *Seja  $B \subset \mathbb{R}^3$  uma bola fechada. Se  $\Sigma$  é uma superfície orientável, compacta, imersa e com curvatura média constante com bordo livre, então  $\Sigma$  tem gênero zero.*

Nesses resultados percebermos que o caso capilar não foi tratado, principalmente devido o fato de que esse caso apresenta a presença de um termo que depende do bordo da hipersuperfície  $M^n$  analisada, o que torna difícil determinar se ela é ou não estável. A estabilidade de uma hipersuperfície com curvatura média constante é definida através de variações com uma condição de restrição de volume. Desse modo, podemos usar a condição de estabilidade para encontrar funções teste admissíveis convenientes. Para o problema com restrições de volume, consideramos funções teste  $\varphi$  tais que  $\int_M \varphi dA = 0$ , isto é, tem média zero ao longo de  $M$ . No trabalho de Barbosa e do Carmo em (BARBOSA; CARMO, 1984) sobre hipersuperfícies fechadas, eles usaram a clássica Fórmula de Minkowisk para uma imersão fechada  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$\int_M H\langle \chi, \mathcal{N} \rangle dA = n \int_M dA,$$

onde  $H$  é a curvatura média constante de  $M$  e  $\mathcal{N}$  é o campo normal unitário ao longo de  $M$ , a fim de encontrarem uma função teste conveniente. De fato, a função teste obtida foi  $\psi = n - \langle H, \mathcal{N} \rangle$ . A fórmula acima garante que essa é uma função teste admissível. No artigo de Ros e Vergasta (ROS; VERGASTA, 1995), eles obtiveram a seguinte Fórmula de Minkowisk

$$|\partial M| = n|M| - \int_M H\langle \chi, \mathcal{N} \rangle dA.$$

Diferente daquela fórmula clássica, esta relaciona três quantidade geométricas, a saber, a área do bordo de  $M$ , a área de  $M$  e uma integral envolvendo a curvatura média de  $M$ . Esta fórmula também revela a dificuldade que há no caso bordo livre, a presença de

um termo que depende do bordo. O caso capilar apresenta mais algumas complicações. Usando uma nova Fórmula Tipo Minkowisk, Wang e Xia conseguiram resolver completamente o problema de determinar quais hipersuperfícies capilares são estáveis na bola. Precisamente, o resultado de unicidade apresentado por Wang e Xia é o seguinte:

**Teorema 0.3** (WANG; XIA, 2019). *Suponha  $\chi : M \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$  uma hipersuperfícies capilar estável imersa na bola euclidiana unitária  $\mathbb{B}^{n+1}$  com curvatura média constante  $H \geq 0$  e ângulo de contato constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então  $\chi$  ou é uma bola totalmente geodésica ou é uma calota esférica.*

## Instabilidade

No caso instável, um conceito fundamental que aparece é o Índice de Morse de uma hipersuperfície imersa na bola  $\mathbb{B}^{n+1}$ . Guiados por uma analogia hipotética entre superfícies mínimas (fechadas) em  $S^3$  e superfícies mínimas com bordo livre em  $\mathbb{B}^3$  P. Sargent em (SARGENT, 2017) e de maneira independente L. Ambrosio, A. Carlotto e B. Sharp em (AMBROZIO; CARLOTTO; SHARP, 2016) obtiveram estimativas inferiores para Índice de Morse de superfícies em  $\mathbb{B}^3$ .

Para uma hipersuperfície  $M$  imersa em  $\mathbb{B}^{n+1}$ , temos associada a ela uma forma quadrática  $Q$ . Definiremos o Índice de Morse de  $M$ ,  $\text{Ind}(M)$ , como o índice (de Morse) da forma quadrática  $Q$ . Diremos então que  $M$  é instável quando  $\text{Ind}(M) > 0$ , e estável quando  $\text{Ind}(M) = 0$ .

O cálculo do índice de uma hipersuperfície, em geral, não é fácil, uma vez que a forma quadrática  $Q$  está definida em um espaço de dimensão infinita. Entretanto, alguns exemplos interessantes aparecem na literatura. Por exemplo, em (TRAN; ZHOU, 2023b), a partir de uma fórmula obtida pelos autores, eles calculam o índice de um cilindro imerso na bola unitária. De fato, nesse exemplo o índice depende do raio da base do cilindro.

Nesse trabalho vamos demonstrar o seguinte resultado:

**Teorema 0.4** (DEVYVER, 2017). *O Índice de Morse do Catenoide Crítico na bola unitária  $\mathbb{B}^3$  é exatamente 4.*

Contudo, esse resultado é recente e outros métodos foram utilizados para calcular o índice de uma superfície em  $\mathbb{B}^3$ . Nesse trabalho, apresentaremos a técnica de Devyver

para calcular o índice do Catenóide Crítico. Ressaltamos que outras técnicas foram usadas simultaneamente por outros autores, a saber, (TRAN, 2016) e (SMITH; ZHOU, 2019).

## Organização

No Capítulo 1, fazemos uma breve revisão de conceitos importantes para a compreensão dos demais capítulos e introduzimos a notação utilizada. Já o Capítulo 2 apresenta as variações da energia, a definição da forma de índice para uma hipersuperfície  $M$  imersa na bola euclidiana unitária, bem como o Índice de Morse de tal forma quadrática e, conseqüentemente, o índice de  $M$ . Ademais, provamos dois resultados de estabilidade de hipersuperfícies, a saber, a estabilidade dos discos e das calotas esféricas.

No Capítulo 3, apresentamos o resultado de Wang e Xia sobre a unicidade dos discos e das calotas esféricas como hipersuperfícies estáveis na bola euclidiana unitária. No Capítulo 4, expomos com detalhes o cálculo do índice do Catenóide Crítico feito por Devyver.

No Capítulo 5, fazemos algumas considerações finais e finalizamos o trabalho. No Capítulo Referências, apresentamos as que foram supracitas e mais outras que foram usadas ao longo do texto.

# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Nesse capítulo, introduziremos os conceitos usados no decorrer desse trabalho, bem como estabeleceremos as notações usadas. Ademais, por questões práticas admitiremos que o leitor tem conhecimentos prévios acerca de geometria diferencial, como as definições de Variedade Riemanniana, Espaço Tangente, Conexão Riemanniana, Curvatura Média, Hipersuperfícies, Primeira e Segunda Variação da Área, Volume. Alguns resultados aqui apresentados não serão demonstrados, contudo os referenciaremos adequadamente. No que segue, esses pré-requisitos bem como os demais conceitos estão devidamente apresentados nas referências (CARMO, 2008), (CHAVEL, 2006), (DAJCZER; TOJEIRO, 2019), (LEE, 2012).

Denotaremos por  $M^n$  (ou simplesmente  $M$ ) uma Variedade Riemanniana conexa de dimensão real  $n$  suave, isto é  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $g^M$  (ou simplesmente  $g$  quando não houver ambiguidade) sua métrica (Riemanniana) com a norma correspondente  $\|\cdot\| := \sqrt{g(\cdot, \cdot)}$ ,  $\nabla$  sua Conexão Riemanniana,  $T_pM$  o plano tangente a  $M$  em  $p \in M$  e  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores  $\mathcal{C}^\infty$  tangentes a  $M$ . No caso particular  $M = \mathbb{R}^n$  usaremos a notação convencional  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para denotar sua métrica.

### 1.1 Alguns Operadores Diferenciais Importantes

Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f$  uma função suave em  $M$ . Definimos a divergência do campo  $X$  como a função  $\operatorname{div}X : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\operatorname{div}X(p) = \text{traço da aplicação linear } Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p).$$

Observe que, considerando um referencial ortonormal geodésico  $\{E_i\}_{i=1}^n$  em  $\mathbf{p} \in M$  e escrevendo  $X = \sum_i X_i E_i$ ,  $X_i = g(X, E_i)$ , o divergente é obtido como

$$\begin{aligned} \operatorname{div}X(\mathbf{p}) &= \operatorname{tr}(\nabla_Y X(\mathbf{p})) \\ &= \sum_j g\left(\nabla_{E_j}\left(\sum_i X_i E_i\right)(\mathbf{p}), E_j(\mathbf{p})\right) \\ &= \sum_j g\left(\sum_i E_j(X_i)E_i(\mathbf{p}) + \sum_i X_i \nabla_{E_j} E_i(\mathbf{p}), E_j(\mathbf{p})\right). \end{aligned}$$

Como o referencial  $\{E_i\}$  é geodésico, isto é,  $\nabla_{E_j} E_i(\mathbf{p}) = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}X(\mathbf{p}) &= \sum_j g\left(\sum_i E_j(X_i)E_i(\mathbf{p}), E_j\right) \\ &= \sum_i E_i(X_i)(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Com respeito a função suave  $f$  definiremos o gradiente, a hessiana e o laplaciano em  $M$ . O campo gradiente de  $f$  é o (único) campo vetorial  $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$  que satisfaz  $g(\nabla f(\mathbf{p}), Y) = df_{\mathbf{p}}(Y) = Yf(\mathbf{p})$  para todo  $\mathbf{p} \in M$  e  $Y \in T_{\mathbf{p}}M$ . Essa notação é inspirada no fato de que quando  $M = \mathbb{R}^n$  a Conexão Riemanniana de  $\mathbb{R}^n$  é simplesmente a derivação usual e o vetor gradiente é a diferencial. Agora, considerando o referencial geodésico, temos

$$\begin{aligned} g(\nabla f(\mathbf{p}), Y) &= g\left(\nabla f(\mathbf{p}), \sum_i Y_i E_i\right) \\ &= \sum_i Y_i g(\nabla f(\mathbf{p}), E_i) \\ &= \sum_i Y_i E_i(f)(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

A hessiana de  $f$  é definida como o operador linear

$$\nabla^2 f : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}M, \quad (\nabla^2 f)X(\mathbf{p}) = \nabla_X \nabla f(\mathbf{p}),$$

e o laplaciano de  $f$  é definido como

$$\Delta f(\mathbf{p}) = \operatorname{tr}(\nabla^2 f(\mathbf{p})) = \operatorname{div}\nabla f(\mathbf{p}).$$

Usando as expressões do gradiente e divergente obtemos que:

$$\Delta f(\mathbf{p}) = \sum_i E_i(E_i(f))(\mathbf{p}).$$

## 1.2 Imersões Isométricas

Sejam  $(M^m, g^M)$  e  $(\bar{M}^{m+k}, g^{\bar{M}})$  variedades Riemannianas. Uma aplicação suave  $\chi : M \rightarrow \bar{M}$  é dita uma imersão isométrica se

$$g_p^M(X, Y) = g_{\chi(p)}^{\bar{M}}(d\chi_p(X), d\chi_p(Y))$$

onde  $\mathbf{p} \in M$  e  $X, Y \in T_p M$ . Quando existe uma tal imersão isométrica, dizemos que  $M$  é uma subvariedade imersa de  $\bar{M}$ , precisamente para cada  $\mathbf{p} \in M$  existe uma vizinhança  $U_p \subset M$  tal que  $\chi(U_p) = \tilde{M}_{\chi(p)} \subset \bar{M}$  tem estrutura de subvariedade (mergulhada) e  $\chi : U_p \rightarrow \tilde{M}_{\chi(p)}$  é uma bijeção. O número  $k$  é chamado a codimensão de  $M$  em  $\bar{M}$ . Pela Forma Local das Imersões podemos fazer a identificação de  $\mathbf{p}$  com  $\chi(\mathbf{p})$ , isto é, estamos identificando  $U_p$  com  $\tilde{M}_{\chi(p)}$ , e assim, consideramos “ $U_p \subset \bar{M}$ ”, isso simplificará muitos de nossos cálculos.

Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , então existe um único  $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$  tal que  $\bar{X} = d\chi_p(X)$ , o que é fato pois  $\chi$  é uma imersão. Com isso, obtemos uma forma de estender campos em  $M$  a campos em  $\bar{M}$ .

Se  $\chi : M \rightarrow \bar{M}$  é uma imersão e  $g^{\bar{M}}$  é uma métrica Riemanniana em  $\bar{M}$ , podemos definir uma métrica em  $M$ , a qual chamaremos induzida de  $\chi$ , dada por

$$g_p^M(X, Y) = g_{\chi(p)}^{\bar{M}}(d\chi(X), d\chi(Y)), \forall X, Y \in T_p M.$$

Agora, para cada  $\mathbf{p} \in M \subset \bar{M}$ , temos que o produto interno  $g_p^{\bar{M}}$  decompõe  $T_p \bar{M}$  em soma direta como

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

onde  $(T_p M)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p M$  em  $T_p \bar{M}$ . Desse modo,  $X \in T_p \bar{M}$  então

$$X = X^\top + X^\perp, \quad X^\top \in T_p M, \quad X^\perp \in (T_p M)^\perp$$

$X^\top$  é chamada componente tangencial e  $X^\perp$  é chamada componente normal. Chamaremos o espaço  $(T_p M)^\perp$  de espaço normal a  $M$ .

Seja  $\bar{\nabla}$  a conexão Riemanniana em  $\bar{M}$ . Se  $X$  e  $Y$  são campos suaves em  $M$  podemos definir a conexão Riemanniana em  $M$  como:

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X \bar{Y})^\top.$$

A componente normal de  $\bar{\nabla}_X \bar{Y}$ ,  $(\bar{\nabla}_X \bar{Y})^\perp$ , é chamada de tensor forma (DAJCZER; TOJEIRO, 2019) e denotamos como

$$\alpha^f(X, Y) = (\bar{\nabla}_X \bar{Y})^\perp.$$

Quando não houver perigo de ambiguidades podemos denotar simplesmente por  $\alpha$ . Desse modo, obtemos a Fórmula de Gauss

$$\bar{\nabla}_X \bar{Y} = \nabla_X Y + \alpha(X, Y).$$

Seja  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . A partir do 2-tensor  $\alpha$  podemos definir uma forma bilinear simétrica  $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  associada a  $\eta$  dada por

$$H_\eta(X, Y) = g^{\bar{M}}(\alpha(X, Y), \eta).$$

Em (CARMO, 2008) mostra-se que  $\alpha$  é simétrico logo podemos concluir que  $H_\eta$  é também simétrica. Assim, à forma  $H_\eta$  fica associada uma forma quadrática  $h_\eta(X) = H_\eta(X, X)$  para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , a qual chamamos a Segunda Forma Fundamental de  $M$  em  $p$  segundo o vetor  $\eta$ . Ademais, a esta forma quadrática temos associado, também, um operador linear  $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  definido por

$$g^{\bar{M}}(A_\eta X, Y) = g^{\bar{M}}(\alpha(X, Y), \eta).$$

Da simetria de  $\alpha$  obtemos que  $A_\eta$  é auto-adjunto, ou seja,  $g^{\bar{M}}(A_\eta X, Y) = g^{\bar{M}}(A_\eta Y, X)$ . O operador  $A_\eta$  será chamado de Operador de Weingarten de  $M$  no ponto  $p$  segundo o vetor  $\eta$ .

Como  $0 = \bar{X}g^{\bar{M}}(\bar{Y}, \eta) = g^{\bar{M}}(\bar{\nabla}_X \bar{Y}, \eta) + g^{\bar{M}}(\bar{\nabla}_X \eta, \bar{Y})$  implica  $g^{\bar{M}}(\bar{\nabla}_X \bar{Y}, \eta) = -g^{\bar{M}}(\bar{\nabla}_X \eta, \bar{Y})$

temos que:

$$\begin{aligned}
 g^{\overline{M}}(A_\eta X, Y) &= g^{\overline{M}}(\alpha(X, Y), \eta) \\
 &= g^{\overline{M}}(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y, \eta) \\
 &= g^{\overline{M}}(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, \eta) \\
 &= -g^{\overline{M}}(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \eta, \overline{Y}) \\
 &= -g^{\overline{M}}(\overline{\nabla}_X \eta, Y).
 \end{aligned}$$

Aqui estamos identificando  $X$  e  $Y$  com suas extensões.

Desse modo, definimos o Vetor Curvatura Média de  $M$  em  $p$  como sendo

$$\vec{H} = - \sum_i \alpha(E_i, E_i)$$

onde  $\{E_i\}$  é um referencial geodésico de  $M$ . Assim, para cada  $\eta \in (T_p M)^\perp$  temos  $g^{\overline{M}}(\vec{H}, \eta) = -\text{tr}(A_\eta)$ .

**Definição 1.1.** Dizemos que uma imersão  $x : M \rightarrow \overline{M}$  é mínima, quando  $\vec{H} = 0$ .

Segue da definição, que a imersão  $x$  é mínima se e só se,  $\text{tr}(A_\eta) = 0$  para todo  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ .

**Proposição 1.1.** Sejam  $x : M^m \rightarrow \overline{M}^{m+k}$  uma imersão isométrica e  $\varphi \in C^\infty(\overline{M})$ . Então o gradiente e a hessiana de  $\varphi$  e  $\xi = \varphi \circ x$  são relacionados por

$$dx_p(\nabla \xi) = (\nabla \varphi)^\top \tag{1.1}$$

e

$$\nabla^2 \xi(X, Y) = \nabla^2 \varphi(\overline{X}, \overline{Y}) + g^{\overline{M}}(\nabla \varphi, \alpha(X, Y)) \tag{1.2}$$

para todo  $p \in M$  e todos  $X, Y \in T_p M$ .

*Demonstração.* Pela definição de gradiente e usando que  $x$  é uma imersão isométrica,

temos que, para cada  $\mathbf{p} \in M$  e  $X \in T_{\mathbf{p}}M$ ,

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{p}}^M(\nabla\xi, X) &= X\xi = X(\varphi \circ x) \\ &= dx_{\mathbf{p}}(X)(\varphi) = \bar{X}\varphi \\ &= g_{x(\mathbf{p})}^{\bar{M}}(\nabla\varphi, \bar{X}). \end{aligned}$$

Portanto,  $dx_{\mathbf{p}}(\nabla\xi) = (\nabla\varphi)^{\top}$ . Agora, tendo provado isso e usando a Fórmula de Gauss temos que:

$$\begin{aligned} \nabla^2\xi(X, Y) &= g^M(\nabla_X(\nabla\xi), Y) = g^{\bar{M}}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}dx_{\mathbf{p}}(\nabla\xi) - \alpha(X, Y), \bar{Y}) \\ &= g^{\bar{M}}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}(\nabla\varphi)^{\top}, \bar{Y}) \\ &= g^{\bar{M}}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}(\nabla\varphi), \bar{Y}) - g^{\bar{M}}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}(\nabla\varphi)^{\perp}, \bar{Y}) \\ &= \nabla^2\varphi(\bar{X}, \bar{Y}) + g^{\bar{M}}((\nabla\varphi)^{\perp}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}) \\ &= \nabla^2\varphi(\bar{X}, \bar{Y}) + g^{\bar{M}}(\nabla\varphi, \alpha(X, Y)) \end{aligned}$$

■

Como um caso particular quando  $\bar{M}^{m+k} = \mathbb{R}^{m+k}$  temos o seguinte corolário:

**Corolário 1.1.** *Seja  $x : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$  uma imersão isométrica e  $h^{\mathbf{v}} \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$  a função altura relativa ao hiperplano normal a  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{m+k}$  dada por:*

$$h^{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \langle x(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle.$$

Então,

$$\nabla^2 h^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \mathbf{v} \rangle \tag{1.3}$$

para todo  $\mathbf{p} \in M$  e  $X, Y \in T_{\mathbf{p}}M$

*Demonstração.* Considere  $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{m+k})$  como sendo a função altura, em  $\mathbb{R}^{m+k}$ ,  $\varphi(x) = \langle x, \mathbf{v} \rangle$  para todo  $x \in \mathbb{R}^{m+k}$ . Vamos aplicar a Proposição 1.1 a essa função e a função  $h^{\mathbf{v}}$ .

Note que para todo campo suave  $X \in \mathbb{R}^{m+k}$  temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla \varphi(x), X \rangle &= X \langle x, v \rangle \\ &= \langle \nabla_X x, v \rangle \\ &= \langle x, v \rangle \\ \therefore \nabla \varphi(x) &= v \end{aligned}$$

Daí, pela Proposição 1.1 temos que  $\nabla^2 \varphi(x)(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), v \rangle$ . ■

Vamos analisar com um pouco mais de atenção o caso de codimensão  $k = 1$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ou seja para o caso de uma hipersuperfície imersa no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Primeiramente, notamos que nesse caso o espaço normal a hipersuperfície  $M$  tem dimensão 1, daí o vetor normal unitário  $\mathcal{N}$  a  $M$  é único a menos de sinal e assim, podemos definir a curvatura média de  $M$  como  $H = -\text{tr}(A)$  onde  $A$  é o Operador de Weingarten associado a  $\mathcal{N}$  e  $\vec{H} = H\mathcal{N}$ . A segunda forma também é única e denotaremos simplesmente por  $h$ . Veja que  $|h|^2 = |A|^2 = \sum_i \lambda_i^2$ , onde  $\lambda_i$  são os autovalores de  $A$ , e, por definição, de  $h$  também.

Diante dessas considerações, temos a seguinte proposição listando algumas identidades importantes que usaremos mais a frente.

**Proposição 1.2.** *Seja  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica no espaço euclidiano. As seguintes identidades valem ao longo de  $M$ :*

$$\Delta x = -H\mathcal{N} \tag{1.4}$$

$$\Delta \frac{1}{2}|x|^2 = n - H \langle x, \mathcal{N} \rangle \tag{1.5}$$

$$\Delta \mathcal{N} = \nabla H - |h|^2 \mathcal{N} \tag{1.6}$$

$$\Delta \langle x, \mathcal{N} \rangle = \langle x, \nabla H \rangle + H - |h|^2 \langle x, \mathcal{N} \rangle \tag{1.7}$$

*Demonstração.* Vamos demonstrar cada identidade separadamente.

- $\Delta x = -H\mathcal{N}$

Seja  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  fixado e considere  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle$ . Assim, temos que  $\nabla \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}$ . Daí,

$$\nabla^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle (X, Y) = \langle \mathbf{w}, \alpha(X, Y) \rangle$$

Como  $\Delta \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \text{tr}(\nabla^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle)$ , temos

$$\begin{aligned} \Delta \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}, \text{tr}(\alpha(X, Y)) \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}, -H\mathcal{N} \rangle, \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\Delta \mathbf{x} = -H\mathcal{N}$ .

- $\Delta \frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2 = \mathbf{n} - H \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle$

Seja  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} Y|\mathbf{x}|^2 &= Y \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= 2 \langle Y, \mathbf{x} \rangle \\ \therefore \nabla |\mathbf{x}|^2 &= 2\mathbf{x}^\top \end{aligned}$$

Agora, pela definição da hessiana temos

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla |\mathbf{x}|^2 &= \nabla_Y 2\mathbf{x}^\top = 2 \nabla_Y (\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N}) \\ &= 2(\nabla_Y \mathbf{x} - \nabla_Y \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N}) \\ &= 2(Y - \langle \nabla_Y \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N} - \langle \mathbf{x}, \nabla_Y \mathcal{N} \rangle \mathcal{N} - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \nabla_Y \mathcal{N}) \\ &= 2(Y - \langle \mathbf{x}, A(Y) \rangle \mathcal{N} - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle A(Y)) \\ &= 2(Y - \langle A(\mathbf{x}^\top), Y \rangle \mathcal{N} - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle A(Y)). \end{aligned}$$

Calculando traço temos

$$\begin{aligned} \text{tr} \nabla^2 |\mathbf{x}|^2 &= 2 \sum_{i=1}^n \langle E_i - \langle A(\mathbf{x}^\top), E_i \rangle \mathcal{N} - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle A(E_i), E_i \rangle \\ &= 2(\mathbf{n} - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle H). \end{aligned}$$

Pela definição do laplaciano, segue que

$$\Delta \frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2 = n - H\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle.$$

- $\Delta \mathcal{N} = \nabla H - |\mathbf{h}|^2 \mathcal{N}$

Analogamente a demonstração da primeira identidade, considere  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante. Então vamos calcular  $\Delta \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle$ . Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$  campo vetorial, temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle, X \rangle &= X \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle = \langle \nabla_X \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle A(X), \mathbf{w} \rangle = \langle A(\mathbf{w}^T), X \rangle. \end{aligned}$$

Logo,  $\nabla \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle = A(\mathbf{w}^T)$ . Ainda tomando  $X \in \mathfrak{X}(M)$  temos

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle &= \nabla_X A(\mathbf{w}^T) = (\nabla_X A)(\mathbf{w}^T) + A(\nabla_X \mathbf{w}^T) \\ &= (\nabla_X A)(\mathbf{w}^T) + A(\nabla_X \mathbf{w} - \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle \mathcal{N}) \\ &= (\nabla_X A)(\mathbf{w}^T) + A(\nabla_X \mathbf{w} - \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle \mathcal{N}) \\ &= (\nabla_X A)(\mathbf{w}^T) + A(\nabla_X \mathbf{w}) - A(\nabla_X \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle \mathcal{N}) \\ &= (\nabla_X A)(\mathbf{w}^T) - A(\langle \nabla_X \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle \mathcal{N} + \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle \nabla_X \mathcal{N}) \\ &= (\nabla_X A)(\mathbf{w}^T) - A(\langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle A(X)) \\ &= (\nabla_X A)(\mathbf{w}^T) - \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle A^2(X). \end{aligned}$$

Tomando o traço temos,

$$\begin{aligned} \Delta \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle &= \sum_{i=1}^n (\langle (\nabla_{E_i} A)(\mathbf{w}^T), E_i \rangle - \langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle \langle A^2(E_i), E_i \rangle) \\ &= -\langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle |\mathbf{h}|^2 + \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} A)(\mathbf{w}^T), E_i \rangle \\ &= -\langle \mathcal{N}, \mathbf{w} \rangle |\mathbf{h}|^2 + \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{\mathbf{w}^T} A)(E_i), E_i \rangle. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Por outro lado, como  $H = \sum_i \langle A(E_i), E_i \rangle$  temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla H, X \rangle &= XH = \sum_{i=1}^n (\langle \nabla_X (A(E_i)), E_i \rangle + \langle A(E_i), \nabla_X E_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n (\langle (\nabla_X A)(E_i), E_i \rangle + \langle A(E_i), \nabla_X E_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_X A)(E_i), E_i \rangle. \end{aligned}$$

Substituindo essa última expressão em (1.8) com  $X = w^T$  temos

$$\begin{aligned} \Delta \langle \mathcal{N}, w \rangle &= -\langle \mathcal{N}, w \rangle |h|^2 + \langle \nabla H, w^T \rangle \\ &= -\langle \mathcal{N}, w \rangle |h|^2 + \langle \nabla H, w \rangle \\ &= \langle -|h|^2 \mathcal{N} + \nabla H, w \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,  $\Delta \mathcal{N} = \nabla H - |h|^2 \mathcal{N}$ .

- $\Delta \langle x, \mathcal{N} \rangle = \langle x, \nabla H \rangle + H - |h|^2 \langle x, \mathcal{N} \rangle$

De modo similar ao que foi feito anteriormente, seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Então,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \langle x, \mathcal{N} \rangle, X \rangle &= X \langle x, \mathcal{N} \rangle = \langle \nabla_X x, \mathcal{N} \rangle + \langle x, \nabla_X \mathcal{N} \rangle \\ &= \langle x, A(X) \rangle = \langle A(x^T), X \rangle. \end{aligned}$$

Daí,  $\nabla \langle x, \mathcal{N} \rangle = A(x^T)$ . E assim, derivando novamente

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla \langle x, \mathcal{N} \rangle &= (\nabla_X A)(x^T) + A(\nabla_X x^T) \\ &= (\nabla_X A)(x^T) + A(\nabla_X (x - \langle x, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N})) \\ &= (\nabla_X A)(x^T) + A(\nabla_X x - (\nabla_X \langle x, \mathcal{N} \rangle) \mathcal{N} - \langle x, \mathcal{N} \rangle \nabla_X \mathcal{N}) \\ &= (\nabla_X A)(x^T) + A(X - \langle x, A(X) \rangle \mathcal{N} - \langle x, \mathcal{N} \rangle A(X)) \\ &= (\nabla_X A)(x^T) + A(X) - \langle x, \mathcal{N} \rangle A^2(X). \end{aligned}$$

Tomando o traço, temos

$$\begin{aligned} \Delta \langle x, \mathcal{N} \rangle &= \langle \nabla H, x^T \rangle + H - \langle x, \mathcal{N} \rangle |h|^2 \\ &= \langle \nabla H, x \rangle + H - \langle x, \mathcal{N} \rangle |h|^2. \end{aligned}$$

■

### 1.3 Hipersuperfícies Capilares

Seja  $H^n$  o semi-espço superior fechado  $H^n := \{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$ . Esse é o modelo das hipersuperfícies (e mais geralmente, variedades) com bordo, com a topologia de subespaço induzida de  $\mathbb{R}^n$ . Os pontos  $x \in H$  tais que  $x_n > 0$  são chamados pontos interiores de  $H$  e os pontos  $x \in H$  tais que  $x_n = 0$  são chamados de pontos do bordo de  $H^n$ . Esses conjuntos são disjuntos e os denotamos por

$$\text{int}(H) := \{x \in H; x \text{ é ponto interior}\}$$

$$\partial H := \{x \in H; x \text{ é ponto do bordo}\}.$$

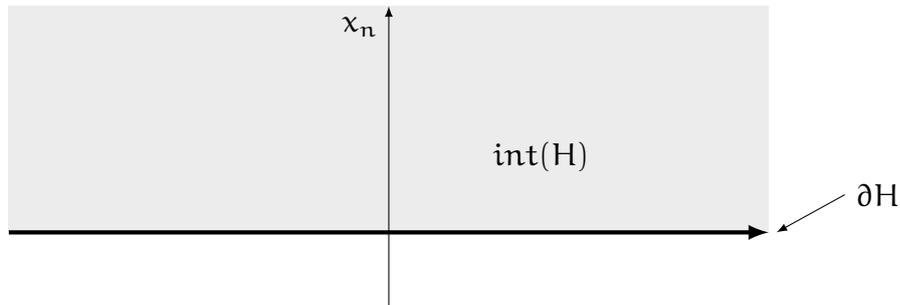


Figura 1.1: Semi-espço superior fechado de  $\mathbb{R}^n$

Uma variedade topológica com bordo  $M^n$  é então um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável que é localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  ou  $H^n$ . Uma variedade com bordo suave é um par  $(M, \mathcal{A})$ , onde  $M$  é uma variedade topológica com bordo e  $\mathcal{A}$  (atlas maximal) é uma estrutura suave para  $M$ . Para mais detalhes consultar (LEE, 2012).

Sejam  $M$  uma variedade com bordo e  $\psi : M \rightarrow H^n$  uma carta local. Dizemos que um ponto  $p \in M$  é interior quando  $\psi(p) \in \text{int}(H)$  e dizemos que é um ponto de fronteira de  $M$  quando  $\psi(p) \in \partial H$ . O conjunto dos pontos interiores de  $M$  é chamado o interior de  $M$

e o conjunto dos pontos de fronteira é chamado de bordo (ou fronteira) de  $M$ , os quais denotamos por  $\text{int}(M)$  e  $\partial M$ , respectivamente.

**Exemplo 1.1.** O disco plano  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$  é um exemplo de superfície compacta com bordo. Note que  $\partial D = S^1$

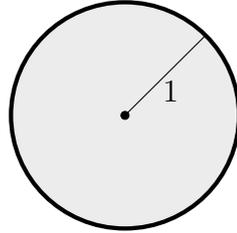


Figura 1.2: Disco plano

**Exemplo 1.2.** A bola fechada  $\mathbb{B}^3(0, r) := \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq r\}$  é uma 3-variedade compacta com bordo. Aqui temos  $\partial \mathbb{B}^3 = S^2$ .

Observe que, de maneira geral,  $S^n$  é localmente homeomorfa a um aberto de  $\mathbb{R}^n$  e, embora compacta, seu bordo é vazio.

Seja  $\mathbb{B}^{n+1}$  a bola fechada e unitária de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Uma hipersuperfície imersa  $M$  em  $\mathbb{B}$  é uma variedade de dimensão  $n$  tal que existe uma aplicação suave  $x : M \rightarrow \mathbb{B}$  que é uma imersão, isto é,  $dx_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{B} \simeq \mathbb{R}^{n+1}$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Em resumo,  $M$  é uma subvariedade de codimensão 1 de  $\mathbb{B}$ . Por um abuso de notação, vamos escrever  $M \subset \mathbb{B}$ , significando  $x(M) \subset \mathbb{B}$  e tal convenção se justifica pela Forma Local das Imersões (Teorema 4.15 (LEE, 2012)). Diremos que uma hipersuperfície  $M \subset \mathbb{B}$  com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  está propriamente imersa em  $\mathbb{B}$  quando  $\text{int}(M) \subset \text{int}(\mathbb{B})$  e  $\partial M \subset \partial \mathbb{B}$ .

Vamos estabelecer agora a seguinte convenção dos quatro campos normais unitários. Primeiramente,  $\mathcal{N}$  representa o campo normal a hipersuperfície  $M$ ;  $\overline{\mathcal{N}}$  representa o campo normal a  $\partial \mathbb{B}$  apontando para fora em  $\mathbb{B}^{n+1}$ ;  $\eta$  representa o campo normal a  $\partial M$  em  $M$  apontando para fora;  $\nu$  representa o campo normal a  $\partial M$  em  $\partial \mathbb{B}$  tal que as bases  $\{\mathcal{N}, \eta\}$  e  $\{\overline{\mathcal{N}}, \nu\}$  têm a mesma orientação, (Figura 1.3).

Diremos que uma hipersuperfície  $M \subset \mathbb{B}$  é capilar com ângulo  $\theta$  quando o bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial \mathbb{B}$  sob o ângulo constante  $\theta$ . Isso equivale dizer que  $\langle -\mathcal{N}, \overline{\mathcal{N}} \rangle = \langle \eta, \nu \rangle = \cos \theta$ . Quando o ângulo é  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dizemos que a hipersuperfície é bordo livre.

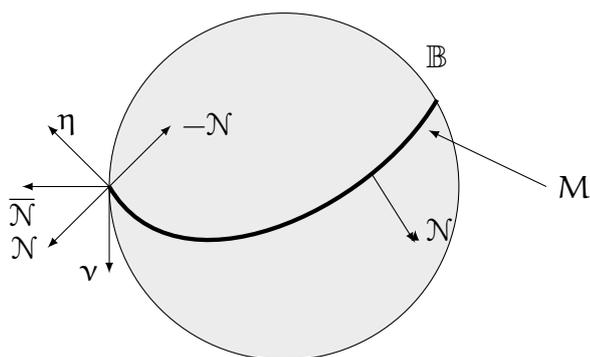


Figura 1.3: Os quatro campos normais

Esses quatro campos normais possuem também as seguintes relações:

$$\eta = \sin(\theta)\bar{N} + \cos(\theta)\nu \tag{1.9}$$

$$N = -\cos(\theta)\bar{N} + \sin(\theta)\nu \tag{1.10}$$

das quais obtemos:

$$\bar{N} = \sin(\theta)\eta - \cos(\theta)N \tag{1.11}$$

$$\nu = \cos(\theta)\eta + \sin(\theta)N \tag{1.12}$$

A seguir apresentamos um exemplo não trivial de uma superfície mínima bordo livre.

**Exemplo 1.3.** *O Catenóide Crítico (Figura 1.4) é uma superfície mínima com bordo livre mergulhada na bola  $\mathbb{B}^3$ .*

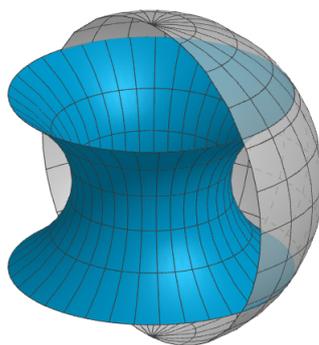


Figura 1.4: Catenóide Crítico

Veremos nos próximos capítulos que o Catenóide Crítico é uma superfície instável e calcularemos o seu índice de Morse. Esses dois últimos conceitos serão definidos no próximo capítulo.

## 1.4 Aplicações Conformes. Invariância Conforme da Energia de Dirichlet em Dimensão Dois

Sejam  $(M^n, g)$  e  $(\bar{M}^n, \bar{g})$  duas variedades Riemannianas e  $F : M \rightarrow \bar{M}$  uma aplicação suave. Dizemos que  $F$  é uma aplicação conforme, se existe uma função suave  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cada  $p \in M$  temos

$$\bar{g}_{F(p)}(dF_p(v_1), dF_p(v_2)) = \lambda^2(p)g_p(v_1, v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in T_pM.$$

A função  $\lambda$  é chamada de coeficiente conforme. Notemos que uma isometria é um caso particular de aplicação conforme, especificamente temos  $\lambda \equiv 1$ .

Geometricamente, uma aplicação conforme é uma aplicação que preserva os ângulos entre vetores tangentes. Sejam  $\alpha, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  duas curvas definidas em  $M$  que se intersectam em  $p = \alpha(0) = \beta(0)$ . Desse modo, o ângulo  $0 < \theta < \pi$  entre  $v_1 = \alpha'(0)$  e  $v_2 = \beta'(0)$  é dado por

$$\cos(\theta) = \frac{g(\alpha'(0), \beta'(0))}{|\alpha'(0)||\beta'(0)|}.$$

Agora, considere as curvas  $F \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$  e  $F \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$ , onde  $F : M \rightarrow \bar{M}$  é conforme. Elas se intersectam em  $F(p) = F \circ \alpha(0) = F \circ \beta(0)$ . Então o ângulo  $0 < \bar{\theta} < \pi$  entre  $(F \circ \alpha)'(0)$  e  $(F \circ \beta)'(0)$  é dado por

$$\begin{aligned} \cos(\bar{\theta}) &= \frac{\bar{g}((F \circ \alpha)'(0), (F \circ \beta)'(0))}{|(F \circ \alpha)'(0)|| (F \circ \beta)'(0)|} \\ &= \frac{\lambda^2(p)g(\alpha'(0), \beta'(0))}{\lambda^2(p)|\alpha'(0)||\beta'(0)|} \\ &= \cos(\theta). \end{aligned}$$

Como em  $(0, \pi)$  a função  $\cos$  é injetiva temos que  $\bar{\theta} = \theta$ .

**Definição 1.2** (Energia de Dirichlet). *Seja  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função suave no aberto  $U$ . Definimos a Energia de Dirichlet de  $u$  como*

$$\mathcal{E}(u) := \int_U |du|^2,$$

onde  $du$  representa a diferencial de  $u$  e  $|du|^2 = \text{tr}([du]^T[du])$ .

No caso particular  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  temos  $du = \nabla u$  e  $|du|^2 = \langle \nabla u, \nabla u \rangle$ .

Uma propriedade interessante de  $\mathcal{E}$  aparece no caso de  $\mathbf{n} = 2$ . Esse fato é mostrado no seguinte teorema.

**Teorema 1.1** (Invariância Conforme da Energia de Dirichlet em Dimensão Dois). *Seja  $F : V \rightarrow U$  um difeomorfismo conforme entre dois abertos de  $\mathbb{R}^2$ . Então, para cada  $\mathbf{u} \in C^\infty(U)$  vale*

$$\mathcal{E}(\mathbf{u} \circ F) = \mathcal{E}(\mathbf{u}).$$

*Demonstração.* Denote por  $\bar{\mathbf{g}} = (\bar{g}_{ij}) = (dF)^T dF$  a métrica Riemanniana induzida por  $F$ . A condição de  $F$  ser conforme implica que

$$\bar{g}_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij},$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Usando  $(dF)^T = \lambda^2 (dF)^{-1}$  calculamos

$$\begin{aligned} |d(\mathbf{u} \circ F)|^2 &= \text{tr}([dF]^T ([\nabla \mathbf{u}]^T \circ F) ([\nabla \mathbf{u}] \circ F) [dF]) \\ &= \text{tr}([dF][dF]^T ([\nabla \mathbf{u}][\nabla \mathbf{u}]^T \circ F)) \\ &= \lambda^2 (|\nabla \mathbf{u}|^2 \circ F). \end{aligned}$$

Mas  $\lambda^2 = \sqrt{\det \bar{\mathbf{g}}} = |dF|$  em dimensão dois. Portanto, pelo Teorema da Mudança de Variáveis para Integrais Múltiplas temos

$$\begin{aligned} \int_V |d(\mathbf{u} \circ F)|^2 &= \int_V (|\nabla \mathbf{u}|^2 \circ F) |\det dF| \\ &= \int_U |\nabla \mathbf{u}|^2. \end{aligned}$$

■

## Capítulo 2

# A Forma de Índice para Hipersuperfícies com Bordo

Neste capítulo, vamos introduzir os conceitos de energia de uma hipersuperfície com bordo na bola euclidiana, bem como as noções de estabilidade, instabilidade, forma de índice e provar alguns resultados acerca da estabilidade dos discos e das calotas esféricas.

### 2.1 Variações da Energia, Estabilidade e Índice de Morse

Seja  $M^n$  uma hipersuperfície capilar com bordo da bola euclidiana unitária  $\mathbb{B}^{n+1}$ . Seja  $\theta \in (0, \pi)$  o ângulo de contato entre  $\partial M$  e  $\partial \mathbb{B}$ . Considerando a imersão  $x : M \rightarrow \mathbb{B}$ , definimos uma variação de  $x$  como uma aplicação  $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , tal que para cada  $t$  a aplicação  $X(t, \cdot) = x_t : M \rightarrow \mathbb{B}$  seja uma imersão. A variação será dita admissível se  $x_t(\text{int}(M)) \subset \text{int}(\mathbb{B})$ ,  $x_t(\partial M) \subset \partial \mathbb{B}$  e  $x_0 = x$ . Para uma variação admissível de  $x$  temos associados o funcional área e o funcional volume os quais são definidos por:

$$A(t) = \int_M dA_t$$

e

$$V(t) = \int_{[0,t] \times M} X^* dV$$

onde  $dA_t$  é o elemento de área de  $M$  obtido pela métrica induzida de  $x_t$  e  $dV$  é o elemento de volume do  $\mathbb{R}^{n+1}$ . O volume  $V(t)$  corresponde ao volume da região “limitada” pelas

hipersuperfícies  $M$  e  $M_t = \chi_t(M)$ . Dizemos que a variação preserva o volume quando  $V(0) = V(t)$  para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Outro funcional área importante que está associado a  $M$  é o funcional área molhada, correspondendo a área da região em  $\partial\mathbb{B}$  entre os bordos de  $M_t$  e  $M$ , o qual definimos como

$$W(t) = \int_{[0,t] \times \partial M} X^* dA_{\partial\mathbb{B}}$$

aqui  $dA_{\partial\mathbb{B}}$  representa o elemento de área da esfera  $\mathbb{S}^n$ . Com isso, definimos a energia de  $M_t$  para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  como o funcional

$$E(t) = A(t) - \cos(\theta)W(t).$$

Considerando o campo variacional  $Y = \left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_{t=0}$  temos a seguinte fórmula da primeira variação da energia:

$$E'(0) = \int_M H\langle Y, \mathcal{N} \rangle dA + \int_{\partial M} \langle Y, \eta - \cos(\theta)\bar{\mathcal{N}} \rangle ds. \quad (2.1)$$

Uma demonstração da Fórmula 2.1 pode ser encontrada em (SILVA, 2021). Para obter a segunda variação da energia, vamos considerar apenas as variações normais de  $\chi$  cujos campos variacionais sejam da forma  $Y = f\mathcal{N}$  para  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  suave satisfazendo  $\int_M f dA = 0$ . O seguinte lema nos diz que sempre é possível obter uma variação dessa forma:

**Lema 2.1.** *Sejam  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão da hipersuperfície compacta  $M$  e  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  uma função tal que*

$$\int_M f dA = 0.$$

*Então, existe uma variação  $X$  que preserva volume e cujo campo variacional é  $Y = f\mathcal{N}$ .*

*Demonstração.* Veja (SILVA, 2021), Teorema 2.2. ■

Assim, temos a seguinte fórmula da segunda variação da energia para uma imersão isométrica  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$E''(0) = \int_M -f(\Delta f + |A|^2 f) dA + \int_{\partial M} f \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - qf \right) ds,$$

onde

$$q = \frac{1}{\sin(\theta)} + \cotan(\theta)h(\eta, \eta).$$

Agora, observe o seguinte: considerando o campo suave  $f\nabla f$ , temos  $\operatorname{div}(f\nabla f) = f\Delta f + \langle \nabla f, \nabla f \rangle = f\Delta f + |\nabla f|^2$ . Daí,  $-f\Delta f = -\operatorname{div}(f\nabla f) + |\nabla f|^2$  e substituindo em  $E''(0)$  temos:

$$E''(0) = \int_M |\nabla f|^2 - \operatorname{div}(f\nabla f) - |A|^2 f \, dA + \int_{\partial M} f \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - qf \right) ds.$$

Aplicando o Teorema da Divergência, obtemos:

$$\begin{aligned} E''(0) &= \int_M |\nabla f|^2 - |A|^2 f^2 \, dA - \int_{\partial M} \langle f\nabla f, \eta \rangle ds + \int_{\partial M} f \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - qf \right) ds \\ &= \int_M |\nabla f|^2 - |A|^2 f^2 \, dA - \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \eta} ds + \int_{\partial M} f \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - qf \right) ds \\ &= \int_M |\nabla f|^2 - |A|^2 f^2 \, dA - q \int_{\partial M} f^2 ds. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Agora observemos com mais atenção a expressão em (2.2). Primeiramente, notamos que o conjunto  $\mathbb{F} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M); \int_M f \, dA = 0\}$  tem estrutura de um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  e desse modo, pelo Lema 2.1 temos que a expressão de  $E''(0)$  define uma forma quadrática nesse espaço  $\mathbb{F}$  dada por

$$Q(f) = \int_M |\nabla f|^2 - |A|^2 f^2 \, dA - q \int_{\partial M} f^2 ds \tag{2.3}$$

também chamada de forma de índice da hipersuperfície  $M$ .

**Definição 2.1.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  e  $S : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma quadrática em  $E$ . O Índice de Morse de  $S$  em  $S$  é, por definição, a dimensão máxima de um subespaço de  $E$  no qual  $S$  é negativa definida.*

No caso das hipersuperfícies temos a seguinte definição:

**Definição 2.2** (Índice Fraco). *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície capilar com Curvatura Média Constante com bordo imersa na bola  $\mathbb{B}^{n+1}$ . Definimos o Índice de Morse (ou Índice Fraco) de  $M$  como sendo o índice da forma quadrática  $Q$  em  $\mathbb{F}$ . Denotamos por  $\operatorname{Ind}(M)$ .*

Com esses conceitos podemos classificar as hipersuperfícies capilares com bordo em  $\mathbb{B}^{n+1}$  quanto a estabilidade ou instabilidade. Para tanto temos a

**Definição 2.3.** Dizemos que uma hipersuperfície  $M$  com Curvatura Média Constante de  $\mathbb{B}^{n+1}$  é fracamente estável, quando  $\mathcal{Q}(f) \geq 0$  para toda  $f \in \mathbb{F}$ . Quando  $M$  é mínima diremos que ela é estável se  $\mathcal{Q}(f) \geq 0$  para toda  $f \in \mathcal{C}^\infty$ . Caso contrário a esses dizemos que  $M$  é instável.

Essa definição é equivalente a dizer que o índice de  $M$  é zero no caso estável.

Ainda sobre a forma  $\mathcal{Q}$ , observe que ela está associada ao seguinte operador em  $\mathbb{F}$ , dado por

$$J = \Delta + |A|^2.$$

Esse é o operador de Jacobi associado a  $M$ . Perceba que pela discussão anterior podemos escrever

$$\mathcal{Q}(f) = - \int_M f \cdot Jf dA + \int_{\partial M} f \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - qf \right) ds.$$

Desse modo, o problema de determinar o índice de  $M$  pode ser reescrito como o problema de determinar os autovalores valores negativos de:

$$\begin{cases} Jf &= -\mu f, \text{ em } M \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= qf, \text{ em } \partial M \end{cases} .$$

Os autores Tran e Zhou provaram nos trabalhos (TRAN; ZHOU, 2023a) e (TRAN; ZHOU, 2023b) que o índice  $\text{Ind}(M)$  pode ser calculado resolvendo-se dois problemas de autovalores mais simples, a saber: para variações que fixem o bordo temos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Jf &= -\mu f, \text{ em } M \\ f &= 0, \text{ em } \partial M \end{cases} . \tag{2.4}$$

Os autovalores desse problema contribuem para o índice de  $M$  quando eles são menores do que ou iguais a zero. Por outro lado, para capturarmos a influência do bordo de  $M$  consideramos o Problema de Jacobi-Steklov:

$$\begin{cases} Jf &= 0, \text{ em } M \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \lambda qf, \text{ em } \partial M \end{cases} . \tag{2.5}$$

Nessa caso, os autovalores que contribuem para o índice são aqueles menores que 1. De fato, Tran e Zhou obtiveram uma fórmula para o índice de  $M$  a qual apresentamos a seguir:

**Teorema 2.1.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície capilar de  $\mathbb{B}^{n+1}$  tal que  $q(p) \geq 0$  para todo  $p \in \partial M$ . Então,*

$$\text{Ind}(M) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

onde  $\mathbf{a}$  é número de autovalores não positivos de (2.4) e  $\mathbf{b}$  é o número de autovalores menores do que 1 de (2.5).

*Demonstração.* Veja (TRAN; ZHOU, 2023a) Teorema 5.2. ■

No decorrer deste trabalho não usaremos a fórmula dada pelo Teorema 2.1, no entanto tal fórmula foi usada para o cálculo efetivo dos índices dos catenoides capilares por Meza em (MEZA, 2022).

## 2.2 Estabilidade das Bolas Totalmente Geodésicas

Nessa seção, vamos discutir a estabilidade das bolas totalmente geodésicas de dimensão  $n$  em  $\mathbb{B}^{n+1}$ . Para tanto, utilizaremos um resultado devido a Bokowski e Sperner em (SPERNER; BOKOWSKI, 1979) o qual nos diz, adaptando para a linguagem deste texto, que o disco equatorial  $n$ -dimensional de uma bola  $B_R^{n+1}$  de raio  $R > 0$  é um mínimo, fixando o volume, para o funcional área. Como o disco equatorial intersecta o bordo de  $B^{n+1}$  ortogonalmente ao longo de seu bordo, tem que o funcional energia é o próprio funcional área. Assim, sendo mínima temos que é um ponto crítico de  $E$ , ou seja,  $E'(0) = 0$  e sendo minimizante da energia, podemos concluir que  $E''(0) \geq 0$ . Portanto, o disco  $D_R$  é estável em  $B_R$ , isto é:

$$\mathcal{Q}(f) = \int_{D_R} |\nabla f|^2 dA - \frac{1}{R} \int_{\partial D_R} f^2 ds \geq 0, \forall f \in \mathbb{F}. \quad (2.6)$$

**Proposição 2.1.** *Os discos totalmente geodésicos são hipersuperfícies capilares estáveis em  $\mathbb{B}^{n+1}$ .*

*Demonstração.* Seja  $D_R$  um disco capilar em  $\mathbb{B}^{n+1}$  de raio  $0 < R \leq 1$ , então  $\partial D_R$  intersecta  $\partial \mathbb{B}^{n+1}$  em um ângulo constante  $\theta$  tal que  $\text{sen}(\theta) = R$ .

Como  $|A|^2 = 0$ , segue que a forma quadrática  $\mathcal{Q}$  em  $D_R$  é escrita como

$$\mathcal{Q}(u) = \int_{D_R} |\nabla u|^2 - \frac{1}{R} \int_{\partial D_R} u^2.$$

assim, devemos mostrar que

$$\int_{D_R} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{R} \int_{\partial D_R} u^2. \quad (2.7)$$

Agora, considere a bola  $B_R^{n+1}$  que tem  $D_R$  com seu disco equatorial, pela observação feita acima sabemos que ele é estável em  $B_R$ , mas a condição de estabilidade em  $B_R$  é exatamente (2.7). Portanto,  $D_R$  é estável em  $\mathbb{B}^{n+1}$ . ■

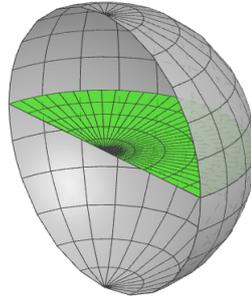


Figura 2.1: Disco Equatorial

## 2.3 Estabilidade das Calotas Esféricas

Nessa seção, veremos que as calotas esféricas (parte de uma esfera) são, também, hipersuperfícies capilares estáveis em  $\mathbb{B}^{n+1}$ , em verdade veremos no próximo capítulo que elas e as bolas totalmente geodésicas da seção anterior são as únicas hipersuperfícies capilares (ou bordo livre) com curvatura média constante que são estáveis em  $\mathbb{B}^{n+1}$ .

**Proposição 2.2.** *Sejam  $\mathbb{B}^{n+1}$  a bola euclidiana unitária e  $M^n$  uma calota esférica (figura 2.2) imersa em  $\mathbb{B}$  cujo bordo intersecta  $\partial\mathbb{B}$  sob um ângulo constante  $\theta$ . Então  $M$  é estável.*

*Demonstração.* Para esta proposição, poderíamos proceder com a mesma ideia da Proposição 2.1. Entretanto, isso só funciona para calotas esféricas que estejam contidas em um dos hemisférios. Por outro lado, vamos considerar a intersecção de  $\mathbb{B}$  com um hiperplano  $S$  tal que  $\partial M \subset S$ . Desse modo, sejam  $\theta'$  o ângulo de intersecção entre  $M$  e  $S$ , e

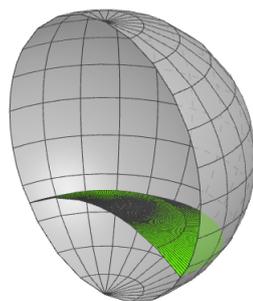


Figura 2.2: Calota Esférica (em verde)

$R$  o raio de  $M$ . Por um cálculo simples de trigonometria temos que  $\theta'$  satisfaz a seguinte relação:

$$q = \frac{1}{\text{sen}(\theta)} + \frac{\text{cotan}(\theta)}{R} = \frac{\text{cotan}(\theta')}{R}.$$

Sabemos de (TAMANINI, 1984) e (GONZALEZ; MASSARI; TAMANINI, 1980) que as calotas esféricas contidas no semiespaço superior definido por  $S$  são minimizantes dos funcional energia  $e$ , desse modo, são capilares estáveis. Além disso como em  $S$  a segunda forma fundamental é identicamente nula, temos que

$$\int_M |\nabla f|^2 - |A|^2 f^2 dA \geq \frac{\text{cotan}(\theta')}{R} \int_{\partial M} f^2 ds, \forall f \in \mathbb{F}$$

daí,

$$\int_M |\nabla f|^2 - |A|^2 f^2 dA \geq q \int_{\partial M} f^2 ds, \forall f \in \mathbb{F}$$

isso implica que  $E''(0) \geq 0$  e portanto  $M$  é estável em  $\mathbb{B}$ . ■

# Capítulo 3

## Unicidade de Hipersuperfícies Capilares

Nesse capítulo, seguindo (WANG; XIA, 2019), vamos provar que as únicas hipersuperfícies capilares estáveis numa bola euclidiana são os discos totalmente geodésicos e as calotas esféricas. Seja  $\chi : (M^n, g) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \bar{g})$  uma imersão isométrica da variedade Riemanniana  $(M, g)$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### 3.1 Uma Nova Fórmula Tipo Minkowski em $\mathbb{R}^{n+1}$

Consideremos um campo vetorial constante  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ . A partir desse campo, definimos um novo campo  $X_{\mathbf{a}}$  dado por:

$$X_{\mathbf{a}} = \langle \chi, \mathbf{a} \rangle \chi - \frac{1}{2}(|\chi|^2 + 1)\mathbf{a}.$$

Observamos que o campo  $X_{\mathbf{a}}$  tem algumas propriedades:

**Proposição 3.1.** *Sejam  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo vetorial constante e  $X_{\mathbf{a}}$  o campo definido acima. Então,*

(i)  $X_{\mathbf{a}}$  é um campo conforme, ou seja,  $\mathcal{L}_{X_{\mathbf{a}}}\bar{g} = 2\langle \chi, \mathbf{a} \rangle \bar{g}$ .

(ii)  $X_{\mathbf{a}}|_{\mathbb{S}^n}$  é tangente a  $\mathbb{S}^n$ .

*Demonstração.* (i) Sejam  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , temos que  $\bar{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ , daí

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{X_a} \bar{g})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= X_a \bar{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \bar{g}(\mathcal{L}_{X_a} \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \bar{g}(\mathbf{u}, \mathcal{L}_{X_a} \mathbf{v}) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_a} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \bar{g}(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_{X_a} \mathbf{v}) - \bar{g}(\mathcal{L}_{X_a} \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \bar{g}(\mathbf{u}, \mathcal{L}_{X_a} \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Pela equação de Codazzi, temos que  $\bar{\nabla}_{X_a} \mathbf{u} = \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} X_a + [X_a, \mathbf{u}] = \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} X_a + \mathcal{L}_{X_a} \mathbf{u}$  e  $\bar{\nabla}_{X_a} \mathbf{v} = \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} X_a + \mathcal{L}_{X_a} \mathbf{v}$ . Daí,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{X_a} \bar{g})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} X_a, \mathbf{v}) + \bar{g}(\mathcal{L}_{X_a} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \bar{g}(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} X_a) + \bar{g}(\mathbf{u}, \mathcal{L}_{X_a} \mathbf{v}) \\ &\quad - \bar{g}(\mathcal{L}_{X_a} \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \bar{g}(\mathbf{u}, \mathcal{L}_{X_a} \mathbf{v}) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} X_a, \mathbf{v}) + \bar{g}(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} X_a). \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular  $\bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} X_a, \mathbf{v})$  e  $\bar{g}(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} X_a)$  separadamente. Assim,

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} X_a, \mathbf{v}) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \left(\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} - \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 + 1) \mathbf{a}\right), \mathbf{v}\right) \\ &= \bar{g}(\langle \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{x} - \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a}, \mathbf{v}) \\ &= \bar{g}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Pela definição de  $\bar{g}$ , segue-se:

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} X_a, \mathbf{v}) &= \langle \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente, concluímos que

$$\bar{g}(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} X_a) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle.$$

Somando as duas expressões acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} X_a, \mathbf{v}) + \bar{g}(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} X_a) &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle \\ &= 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ &= 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \bar{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Portanto, o campo  $X_a$  é conforme.

- (ii) Agora, considere o campo  $X_a$  restrito a esfera unitária  $\mathbb{S}^n$ . Daí, temos que  $|x|^2 = 1$ , logo  $X_a = \langle x, a \rangle x - a$ . Daí,

$$\begin{aligned} \langle X_a, x \rangle|_{\mathbb{S}^n} &= \langle \langle x, a \rangle x - a, x \rangle \\ &= \langle x, a \rangle |x|^2 - \langle x, a \rangle \\ &= \langle x, a \rangle - \langle x, a \rangle = 0. \end{aligned}$$

■

**Proposição 3.2** (Fórmula de Minkowski em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). *Seja  $x : M \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$  uma imersão isométrica, que intersecta  $\partial\mathbb{B}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$  ao longo de  $\partial M$ . Seja  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo vetorial constante e  $X_a$  o campo definido anteriormente. Então,*

$$\int_M n \langle x + \cos(\theta) \mathcal{N}, a \rangle dA = \int_M H \langle X_a, \mathcal{N} \rangle dA. \quad (3.1)$$

*Demonstração.* Primeiramente, observamos que: se  $X_a^T$  é a componente tangente do campo  $X_a$  e  $\{e_i\}_{i=1}^n$  é uma base ortonormal de  $T_p M$  para cada  $p \in M$ , então

$$\frac{1}{2} [\langle \nabla_{e_i} X_a^T, e_j \rangle + \langle \nabla_{e_j} X_a^T, e_i \rangle] = \langle x, a \rangle g_{ij} - h_{ij} \langle X_a, \mathcal{N} \rangle. \quad (3.2)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_i} X_a^T, e_j \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a^T, e_j \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} (X_a - \langle X_a, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N}), e_j \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_j \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} \langle X_a, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N}, e_j \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_j \rangle - (\langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, \mathcal{N} \rangle + \langle X_a, \bar{\nabla}_{e_i} \mathcal{N} \rangle) \langle \mathcal{N}, e_j \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\langle \mathcal{N}, e_j \rangle = 0$  para todo  $1 \leq j \leq n$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_i} X_a^T, e_j \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_j \rangle - \langle X_a, \mathcal{N} \rangle \langle A(e_i), e_j \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_j \rangle - \langle X_a, \mathcal{N} \rangle h(e_i, e_j). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Analogamente, concluímos que

$$\langle \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{X}_a^T, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_j} \mathbf{X}_a, \mathbf{e}_i \rangle - \langle \mathbf{X}_a, \mathcal{N} \rangle h(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i). \quad (3.4)$$

Somando as equações (3.3) e (3.4) e dividindo por 2, temos :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\langle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{X}_a^T, \mathbf{e}_j \rangle + \langle \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{X}_a^T, \mathbf{e}_i \rangle] &= \frac{1}{2} [\langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{X}_a, \mathbf{e}_j \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_j} \mathbf{X}_a, \mathbf{e}_i \rangle] \\ &- \frac{1}{2} [\langle \mathbf{X}_a, \mathcal{N} \rangle h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + \langle \mathbf{X}_a, \mathcal{N} \rangle h(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)] \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle g_{ij} - h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \langle \mathbf{X}_a, \mathcal{N} \rangle. \end{aligned}$$

Agora, tomando o traço em (3.2) segue que:

$$\operatorname{div}(\mathbf{X}_a^T) = \mathbf{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle - H \langle \mathbf{X}_a, \mathcal{N} \rangle. \quad (3.5)$$

Integrando (3.5) temos:

$$\int_M \operatorname{div}(\mathbf{X}_a^T) dA = \int_M (\mathbf{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle - H \langle \mathbf{X}_a, \mathcal{N} \rangle) dA$$

Pelo Teorema da Divergência, segue-se:

$$\int_M (\mathbf{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle - H \langle \mathbf{X}_a, \mathcal{N} \rangle) dA = \int_{\partial M} \langle \mathbf{X}_a^T, \boldsymbol{\eta} \rangle ds$$

Por outro lado, em  $\partial M$ , vemos que  $\mathbf{X}_a^T = \mathbf{X}_a - \langle \mathbf{X}_a, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} - \mathbf{a}$ , logo:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}_a^T, \boldsymbol{\eta} \rangle &= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} - \mathbf{a}, \boldsymbol{\eta} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta} \rangle - \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\eta} \rangle \\ &= \langle \bar{\mathcal{N}}, \mathbf{a} \rangle \langle \bar{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\eta} \rangle - \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\eta} \rangle \\ &= \langle \bar{\mathcal{N}} \langle \bar{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\eta} \rangle - \boldsymbol{\eta}, \mathbf{a} \rangle \\ &= \langle \bar{\mathcal{N}} \operatorname{sen}(\theta) - \bar{\mathcal{N}} \operatorname{sen}(\theta) - \cos(\theta) \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a} \rangle \\ &= -\cos(\theta) \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu} \rangle. \end{aligned}$$

Então,

$$\int_M (\mathbf{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle - H \langle \mathbf{X}_a, \mathcal{N} \rangle) dA = -\cos(\theta) \int_{\partial M} \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu} \rangle ds.$$

Agora, usemos as relações entre campos normais dadas em (1.9), (1.10), (1.11) e (1.12) e percebendo que

$$\begin{aligned} \langle \eta, \nu \rangle &= \langle \eta, \mathbf{x} \rangle = \text{sen}(\theta) \\ \langle \mathcal{N}, \nu \rangle &= \langle \mathcal{N}, \mathbf{x} \rangle = -\text{cos}(\theta) \end{aligned} ,$$

temos  $\langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle = \langle \eta, \mathbf{x} \rangle \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathcal{N}, \mathbf{x} \rangle \langle \eta, \mathbf{a} \rangle$ , pois, em  $\partial M$ ,  $\mathbf{x} = \bar{\mathcal{N}}$ . Daí,

$$\langle \mathbf{a}, \nu \rangle = \langle \langle \nu, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \nu \rangle \mathbf{a}, \eta \rangle.$$

Defina  $Z_{\mathbf{a}} = \langle \nu, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \nu \rangle \mathbf{a}$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \langle \mathbf{a}, \nu \rangle ds &= \int_{\partial M} \langle Z_{\mathbf{a}}, \eta \rangle ds \\ &= \int_{\partial M} \langle Z_{\mathbf{a}}^T, \eta \rangle ds \\ &= \int_M \text{div} Z_{\mathbf{a}}^T dA. \end{aligned}$$

Afirmamos que  $\text{div} Z_{\mathbf{a}}^T = \mathbf{n} \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle$ .

De fato,

$$\begin{aligned} \text{div} Z_{\mathbf{a}}^T &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} Z_{\mathbf{a}}^T, \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} (\langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x}^T - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \mathbf{a}^T), \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{\mathbf{e}_i} \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle) \mathbf{x}^T + \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{x}^T, \mathbf{e}_i \rangle \\ &\quad - \langle (\nabla_{\mathbf{e}_i} \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle) \mathbf{a}^T + \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{a}^T, \mathbf{e}_i \rangle. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{\mathbf{e}_i} \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle) \mathbf{x}^T, \mathbf{e}_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{A}(\mathbf{e}_i), \mathbf{a} \rangle \mathbf{x}^T, \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{a}^T), \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}^T, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{A}(\mathbf{a}^T), \mathbf{x}^T \rangle \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{a}^T, \mathbf{x}^T), \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \langle \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{x}^T, \mathbf{e}_i \rangle &= \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} (\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N}), \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{x} - (\nabla_{\mathbf{e}_i} \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle) \mathcal{N} - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathcal{N}, \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{e}_i - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \mathbf{A}(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle (\mathbf{n} - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \mathbf{H}),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{\mathbf{e}_i} \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle) \mathbf{a}^T, \mathbf{e}_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle (\langle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle + \langle \mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathcal{N} \rangle) \mathbf{a}^T, \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}(\mathbf{e}_i) \rangle \mathbf{a}^T, \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{x}^T), \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{a}^T, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \right\rangle \\
 &= \mathbf{h}(\mathbf{x}^T, \mathbf{a}^T)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

e

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \langle \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{a}^T, \mathbf{e}_i \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} (\mathbf{a} - \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N}), \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{a} - \nabla_{\mathbf{e}_i} (\langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N}), \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= -\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{\mathbf{e}_i} \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle) \mathcal{N} + \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathcal{N}, \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= -\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \sum_{i=1}^n \langle \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \mathbf{A}(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= -\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{A}(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= -\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \mathbf{H}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Substituindo (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.6) temos:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{Z}_{\mathbf{a}}^T &= \mathbf{h}(\mathbf{a}^T, \mathbf{x}^T) + \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle (\mathbf{n} - \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \mathbf{H}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}^T, \mathbf{a}^T) + \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \mathbf{H} \\
 &= \mathbf{n} \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle.
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Divergência, segue que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{n} \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle dA &= \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div} Z_{\mathbf{a}}^T dA \\ &= \int_{\partial \mathcal{M}} \langle Z_{\mathbf{a}}^T, \boldsymbol{\eta} \rangle ds \\ &= \int_{\partial \mathcal{M}} \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a} \rangle ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{n} \langle \boldsymbol{x}, \mathbf{a} \rangle - H \langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle) dA &= -\cos(\theta) \int_{\partial \mathcal{M}} \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu} \rangle ds \\ &= -\cos(\theta) \int_{\mathcal{M}} \mathbf{n} \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle dA \end{aligned}$$

o que implica,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathbf{n} \langle \boldsymbol{x} + \cos(\theta) \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle dA = \int_{\mathcal{M}} H \langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle dA.$$

■

## 3.2 Unicidade de Hipersuperfícies Capilares Estáveis

**Proposição 3.3.** *Seja  $\boldsymbol{x} : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{B}}^{n+1}$  uma imersão isométrica na bola euclidiana unitária com bordo  $\partial \mathcal{M}$ , intersectando  $\partial \mathbb{B}$  sob um ângulo constante  $\theta$ . Seja  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante. Então, ao longo de  $\partial \mathcal{M}$ ,*

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} \langle \boldsymbol{x} + \cos(\theta) \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle &= \mathbf{q} \langle \boldsymbol{x} + \cos(\theta) \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle, \\ \overline{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} \langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle &= \mathbf{q} \langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle, \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{q} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} + \cotan(\theta)h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})$ .

*Demonstração.* Usando que  $\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{N} = h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}$  temos que:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} \langle \boldsymbol{x} + \cos(\theta) \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{x} + \cos(\theta) \overline{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\eta} + \cos(\theta)h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}, \mathbf{a} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\eta}(1 + \cos(\theta)h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})), \mathbf{a} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 + \cos(\theta)h(\eta, \eta))\langle \eta, \mathbf{a} \rangle \\
 &= q\text{sen}(\theta)\langle \eta, \mathbf{a} \rangle.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, e lembrando que  $\mathbf{x} = \bar{\mathcal{N}}$  em  $\partial\mathcal{M} \cap \partial\mathbb{B}^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{x} + \cos(\theta)\mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle &= \langle \mathbf{x} + \cos(\theta)(-\cos(\theta)\bar{\mathcal{N}} + \text{sen}(\theta)\mathbf{v}), \mathbf{a} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{x} - \cos^2(\theta)\bar{\mathcal{N}} + \cos(\theta)\text{sen}(\theta)\mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{x} + \text{sen}^2(\theta)\bar{\mathcal{N}} - \bar{\mathcal{N}} + \cos(\theta)\text{sen}(\theta)\mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{x} + \text{sen}^2(\theta)\bar{\mathcal{N}} - \mathbf{x} + \cos(\theta)\text{sen}(\theta)\mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \\
 &= \langle \text{sen}^2(\theta)\bar{\mathcal{N}} + \cos(\theta)\text{sen}(\theta)\mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \\
 &= \text{sen}(\theta)\langle \text{sen}(\theta)\bar{\mathcal{N}} + \cos(\theta)\mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \\
 &= \text{sen}(\theta)\langle \text{sen}(\theta)\bar{\mathcal{N}} + \cos(\theta)\mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \\
 &= \text{sen}(\theta)\langle \eta, \mathbf{a} \rangle.
 \end{aligned}$$

Por comparação, segue que  $\bar{\nabla}_\eta\langle \mathbf{x} + \cos(\theta)\mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle = q\langle \mathbf{x} + \cos(\theta)\mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle$ . Agora, para  $\bar{\nabla}_\eta\langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle$  temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_\eta\langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle &= \langle \bar{\nabla}_\eta X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle + \langle X_{\mathbf{a}}, \bar{\nabla}_\eta \mathcal{N} \rangle \\
 &= \left\langle \bar{\nabla}_\eta \left( \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} - \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 + 1)\mathbf{a} \right), \mathcal{N} \right\rangle + \langle X_{\mathbf{a}}, \bar{\nabla}_\eta \mathcal{N} \rangle \\
 &= \langle \langle \eta, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \eta - \langle \eta, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle + \langle X_{\mathbf{a}}, \bar{\nabla}_\eta \mathcal{N} \rangle \\
 &= \langle \eta, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \eta, \mathcal{N} \rangle - \langle \eta, \mathbf{x} \rangle \langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle + \langle X_{\mathbf{a}}, \bar{\nabla}_\eta \mathcal{N} \rangle \\
 &= -\cos(\theta)\langle \eta, \mathbf{a} \rangle - \text{sen}(\theta)\langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle + \langle X_{\mathbf{a}}, \bar{\nabla}_\eta \mathcal{N} \rangle
 \end{aligned}$$

Novamente, como estamos em  $\partial\mathcal{M} \cap \partial\mathbb{B}^{n+1}$ , segue que

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_\eta\langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle &= -\cos(\theta)\langle \eta, \mathbf{a} \rangle - \text{sen}(\theta)\langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle + \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} - \mathbf{a}, h(\eta, \eta) \eta \rangle \\
 &= -\cos(\theta)\langle \eta, \mathbf{a} \rangle - \text{sen}(\theta)\langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle + (\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{x}, \eta \rangle - \langle \mathbf{a}, \eta \rangle)h(\eta, \eta) \\
 &= -\cos(\theta)\langle \eta, \mathbf{a} \rangle - \text{sen}(\theta)\langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle + (\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \text{sen}(\theta) - \langle \mathbf{a}, \eta \rangle)h(\eta, \eta) \\
 &= \langle \eta, \mathbf{a} \rangle(-\cos(\theta) - h(\eta, \eta)) + \text{sen}(\theta)(-\langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle h(\eta, \eta)).
 \end{aligned}$$

Como em  $\partial M \cap \partial \mathbb{B}^{n+1}$  temos

$$\bar{\mathcal{N}} = \mathbf{x} = \text{sen}(\theta)\boldsymbol{\eta} - \text{cos}(\theta)\mathcal{N} \Rightarrow \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\text{sen}(\theta)}\mathbf{x} + \text{cotan}(\theta)\mathcal{N},$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}}\langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\text{sen}(\theta)}\mathbf{x} + \text{cotan}(\theta)\mathcal{N}, \mathbf{a} \right\rangle (-\text{cos}(\theta) - \mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})) \\ &+ \text{sen}(\theta)(-\langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})) \\ &= \left( -\text{cotan}(\theta) + \left( \text{sen}(\theta) - \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \right) \mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \right) \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \\ &+ \left( -\text{sen}(\theta) - \frac{\text{cos}^2(\theta)}{\text{sen}(\theta)} - \text{cotan}(\theta)\mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \right) \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \\ &= \left( -\text{cotan}(\theta) - \frac{\text{cos}^2(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \right) \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \\ &+ \left( -\text{sen}(\theta) - \frac{\text{cos}^2(\theta)}{\text{sen}(\theta)} - \text{cotan}(\theta)\mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \right) \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \\ &= -\left( \frac{1}{\text{sen}(\theta)} + \text{cotan}(\theta)\mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \right) (\text{cos}(\theta)\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle) \\ &= -\mathbf{q}(\text{cos}(\theta)\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle). \end{aligned}$$

Por sua vez, considerando em  $\partial M \cap \partial \mathbb{B}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle &= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \\ &= -(\text{cos}(\theta)\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle). \end{aligned}$$

Assim, por comparação temos  $\bar{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}}\langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle = \mathbf{q}\langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle$ . ■

**Proposição 3.4.** *Seja  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica no espaço euclidiano. Seja  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante. A seguinte identidade vale ao longo de  $M$ :*

$$\Delta\langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle = \langle X_{\mathbf{a}}, \nabla H \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle H - |\mathbf{h}|^2\langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle - \mathbf{n}\langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle. \quad (3.11)$$

*Demonstração.* Primeiramente, note que:

$$\Delta\langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle = \langle \Delta X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle + 2\langle \nabla X_{\mathbf{a}}, \nabla \mathcal{N} \rangle + \langle X_{\mathbf{a}}, \Delta \mathcal{N} \rangle.$$

Fazendo por partes e usando as relações (1.4),(1.5),(1.6) e (1.7), temos

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle &= \left\langle \Delta \left( \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} - \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 + 1)\mathbf{a} \right), \mathcal{N} \right\rangle \\
 &= \left\langle \langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \Delta \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{a} \Delta |\mathbf{x}|^2, \mathcal{N} \right\rangle \\
 &= \langle -H\langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle - H\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathcal{N} - (\mathbf{n} - H\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle)\mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle \\
 &= -H\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle - \mathbf{n}\langle \mathbf{a}, \mathcal{N} \rangle.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla X_{\mathbf{a}}, \nabla \mathcal{N} \rangle &= \sum_i \langle \nabla_{E_i} X_{\mathbf{a}}, \nabla_{E_i} \mathcal{N} \rangle = \sum_i \left\langle \nabla_{E_i} \left( \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} - \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 + 1)\mathbf{a} \right), \mathbf{A}(E_i) \right\rangle \\
 &= \sum_i \langle E_i(\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle) \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \nabla_{E_i} \mathbf{x} - \langle \nabla_{E_i} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a}, \mathbf{A}(E_i) \rangle \\
 &= \sum_i \langle \langle E_i, \mathbf{a} \rangle \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle E_i - \langle E_i, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a}, \mathbf{A}(E_i) \rangle \\
 &= \sum_i \langle \mathbf{A}(\mathbf{x}^T), \langle E_i, \mathbf{a} \rangle E_i \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle E_i, \mathbf{A}(E_i) \rangle - \langle \mathbf{A}(\mathbf{a}^T), \langle \mathbf{x}, E_i \rangle E_i \rangle \\
 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle H.
 \end{aligned}$$

Agora, usando que

$$\langle X_{\mathbf{a}}, \Delta \mathcal{N} \rangle = \langle X_{\mathbf{a}}, \nabla H \rangle - |\mathbf{h}|^2 \langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \Delta \langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle &= -H\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle - \mathbf{n}\langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle + 2H\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle + \langle X_{\mathbf{a}}, \nabla H \rangle - |\mathbf{h}|^2 \langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle \\
 &= \langle X_{\mathbf{a}}, \nabla H \rangle + H\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle - |\mathbf{h}|^2 \langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle - \mathbf{n}\langle \mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle.
 \end{aligned}$$

■

**Proposição 3.5.** *Seja  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$  uma imersão isométrica na bola euclidiana unitária, cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial \mathbb{B}^{n+1}$  sob um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Para cada campo constante  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$  defina*

$$\varphi_{\mathbf{a}} = \mathbf{n}\langle \mathbf{x} + \cos(\theta)\mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle - H\langle X_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle$$

ao longo de  $\mathcal{M}$ . Então  $\varphi_\alpha$  satisfaz

$$\int_{\mathcal{M}} \varphi_\alpha d\mathcal{A} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \eta} - \mathfrak{q} \varphi_\alpha = 0 \quad (3.13)$$

Se, além disso,  $\mathcal{M}$  tem curvatura média constante, então  $\varphi_\alpha$  satisfaz também

$$\Delta \varphi_\alpha + |\mathfrak{h}|^2 \varphi_\alpha = (\mathfrak{n}|\mathfrak{h}|^2 - H^2) \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle. \quad (3.14)$$

*Demonstração.* Vemos que (3.12) e (3.13) seguem diretamente das Proposições 3.2 e 3.3, respectivamente. Agora, suponha que  $H$  seja constante, assim:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_\alpha &= \Delta(\mathfrak{n} \langle \mathfrak{x} + \cos(\theta) \mathcal{N}, \mathfrak{a} \rangle - H \langle \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{N} \rangle) \\ &= \mathfrak{n}(\langle -H \mathcal{N}, \mathfrak{a} \rangle + \cos(\theta) \langle \nabla H - |\mathfrak{h}|^2 \mathcal{N}, \mathfrak{a} \rangle) \\ &\quad - H(\langle \mathcal{X}_\alpha, \nabla H \rangle + H \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle - |\mathfrak{h}|^2 \langle \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{N} \rangle - \mathfrak{n} \langle \mathcal{N}, \mathfrak{a} \rangle). \end{aligned}$$

Fazendo as simplificações adequadas e observando que  $\nabla H = 0$  temos:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_\alpha &= -\mathfrak{n}|\mathfrak{h}|^2 \cos(\theta) \langle \mathcal{N}, \mathfrak{a} \rangle - H^2 \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle + H|\mathfrak{h}|^2 \langle \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{N} \rangle - \mathfrak{n}|\mathfrak{h}|^2 \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle + \mathfrak{n}|\mathfrak{h}|^2 \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle \\ &= -|\mathfrak{h}|^2(\mathfrak{n} \langle \mathfrak{x} + \cos(\theta) \mathcal{N}, \mathfrak{a} \rangle - H \langle \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{N} \rangle) + (\mathfrak{n}|\mathfrak{h}|^2 - H^2) \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle \\ &= -|\mathfrak{h}|^2 \varphi_\alpha + (\mathfrak{n}|\mathfrak{h}|^2 - H^2) \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$\Delta \varphi_\alpha + |\mathfrak{h}|^2 \varphi_\alpha = (\mathfrak{n}|\mathfrak{h}|^2 - H^2) \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle.$$

■

Agora provaremos a Unicidade das Hipersuperfícies Capilares Estáveis.

**Teorema 3.1** (WANG; XIA, 2019). *Suponha  $\mathfrak{x} : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{B}}^{n+1}$  uma hipersuperfícies capilar estável imersa na bola euclidiana unitária  $\overline{\mathbb{B}}^{n+1}$  com curvatura média constante  $H \geq 0$  e ângulo de contato constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então  $\mathfrak{x}$  ou é uma bola totalmente geodésica ou é uma calota esférica.*

*Demonstração.* A condição de estabilidade nos diz que

$$-\int_{\mathcal{M}} \varphi(\Delta\varphi + |h|^2\varphi) d\mathcal{A} + \int_{\partial\mathcal{M}} \varphi \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - q\varphi \right) ds \geq 0, \quad (3.15)$$

para todas as funções  $\varphi \in \mathbb{F}$  e  $q = \frac{1}{\sin(\theta)} + \cotan(\theta)h(\eta, \eta)$ .

Agora, pela Proposição 3.5, temos que  $\varphi_{\mathbf{a}}$  é uma função admissível para cada campo vetorial constante  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Daí,

$$\begin{aligned} & -\int_{\mathcal{M}} \varphi_{\mathbf{a}}(\Delta\varphi_{\mathbf{a}} + |h|^2\varphi_{\mathbf{a}}) d\mathcal{A} + \int_{\partial\mathcal{M}} \varphi_{\mathbf{a}} \left( \frac{\partial\varphi_{\mathbf{a}}}{\partial\eta} - q\varphi_{\mathbf{a}} \right) ds \geq 0 \\ \Rightarrow & \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{n}\langle \mathbf{x} + \cos(\theta)\mathcal{N}, \mathbf{a} \rangle - H\langle \mathcal{X}_{\mathbf{a}}, \mathcal{N} \rangle)(\mathbf{n}|h|^2 - H^2)\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle d\mathcal{A} \leq 0, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

Tomemos então  $\mathbf{a} \in \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{n+1}$ , onde  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$  é um vetor da base canônica, logo somando de 1 a  $n+1$  temos:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{n}\langle \mathbf{x} + \cos(\theta)\mathcal{N}, \mathbf{e}_i \rangle - H\langle \mathcal{X}_{\mathbf{e}_i}, \mathcal{N} \rangle)(\mathbf{n}|h|^2 - H^2)\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle d\mathcal{A} \leq 0 \\ \Rightarrow & \int_{\mathcal{M}} \left( \sum \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \rangle + \mathbf{n} \cos(\theta) \sum \langle \mathcal{N}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \rangle \right. \\ & \left. - H \sum \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \rangle \mathbf{x} - \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 + 1)\mathbf{e}_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle, \mathcal{N} \right) (\mathbf{n}|h|^2 - H^2) d\mathcal{A} \leq 0 \\ \Rightarrow & \int_{\mathcal{M}} [\mathbf{n}|\mathbf{x}|^2 + \mathbf{n} \cos(\theta)\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle - \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 - 1)H\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle](\mathbf{n}|h|^2 - H^2) d\mathcal{A} \leq 0 \quad (3.16) \end{aligned}$$

Se  $\mathbf{x}$  é uma imersão mínima com bordo livre, i.e.,  $H = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , então

$$\int_{\mathcal{M}} \mathbf{n}^2 |\mathbf{x}|^2 |h|^2 d\mathcal{A} \leq 0 \Rightarrow |h|^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{h} \equiv 0.$$

Portanto,  $\mathbf{x}$  é totalmente geodésica.

Agora, se  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  ou  $H > 0$ , não podemos concluir diretamente de (3.16) o resultado desejado, pois o termo

$$\gamma := \mathbf{n}|\mathbf{x}|^2 + \mathbf{n} \cos(\theta)\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle - \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 - 1)H\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle$$

pode não ter um sinal definido.

Para contornar tal situação, considere a função auxiliar

$$\Phi = \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 - 1)H - \mathbf{n}(\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle + \cos(\theta)).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= H\Delta\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2 - \mathbf{n}\Delta\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \\ &= H(\mathbf{n} - H\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle) - \mathbf{n}(\langle \mathbf{x}, \nabla H \rangle + H - |\mathbf{h}|^2\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle) \\ &= (\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2)\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Pela Fórmula de Green temos

$$\int_{\mathcal{M}} \Delta\frac{1}{2}\Phi^2 d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{M}} \Phi\Delta\Phi + |\nabla\Phi|^2 d\mathcal{A} = \int_{\partial\mathcal{M}} \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} ds,$$

como em  $\partial\mathcal{M}$  temos  $|\mathbf{x}| = 1$  e  $\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle = -\cos(\theta)$  segue que  $\Phi|_{\partial\mathcal{M}} \equiv 0$ , daí

$$\int_{\mathcal{M}} \Delta\frac{1}{2}\Phi^2 d\mathcal{A} = \int_{\partial\mathcal{M}} \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} ds = 0.$$

Desse modo, sabendo que  $|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}^T + \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle\mathcal{N}|^2 = |\mathbf{x}^T|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle^2$ , temos de (3.16):

$$0 \geq \int_{\mathcal{M}} \left[ \mathbf{n}|\mathbf{x}^T|^2 + \mathbf{n}\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle^2 + \mathbf{n}\cos(\theta)\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle - \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 - 1)H\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle \right] (\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2) + \Delta\frac{1}{2}\Phi^2 d\mathcal{A}.$$

Organizando expressão acima e substituindo as expressões de  $\Phi$  e  $\Delta\Phi$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\mathcal{M}} \mathbf{n}|\mathbf{x}^T|^2(\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2) + \left[ \mathbf{n}\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle + \mathbf{n}\cos(\theta) - \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 - 1)H \right] \langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle(\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2) \\ &\quad + \Phi\Delta\Phi + |\nabla\Phi|^2 d\mathcal{A} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \mathbf{n}|\mathbf{x}^T|^2(\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2) + |\nabla\Phi|^2 d\mathcal{A}. \end{aligned}$$

Como  $H^2 = (\sum \langle \mathbf{A}(\mathbf{E}_i), \mathbf{E}_i \rangle)^2$  segue da Desigualdade de Cauchy-Shwarz que  $\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2 \geq 0$ , logo

$$0 \geq \int_{\mathcal{M}} \mathbf{n}|\mathbf{x}^T|^2(\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2) + |\nabla\Phi|^2 d\mathcal{A} \geq 0.$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathbf{n}|\mathbf{x}^T|^2(\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2) + |\nabla\Phi|^2 d\mathcal{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{n}|\mathbf{x}^T|^2(\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2) + |\nabla\Phi|^2 = 0.$$

Como cada parcela da última identidade acima é não-negativa, temos que  $|\nabla\Phi| = 0$ , assim,  $\Phi$  é constante. Desse fato, juntamente com (3.17), segue que  $\langle \mathbf{x}, \mathcal{N} \rangle (\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2) = 0$ . Daí, como  $|\mathbf{x}^T|^2(\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2) = 0$  temos

$$|\mathbf{x}|^2(\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2) = 0.$$

Portanto,

$$\mathbf{n}|\mathbf{h}|^2 - H^2 = 0 \Rightarrow H^2 = \mathbf{n}|\mathbf{h}|^2$$

em  $\mathcal{M}$ . Assim,  $\mathbf{x}$  é totalmente umbílica. ■

# Capítulo 4

## O Índice de Morse do Catenoide Crítico

Continuando nossos estudos, vamos agora atentar para o caso fortemente instável. Assim, estamos interessados em analisar o problema de determinar o Índice de Morse de uma superfície não estável na bola unitária  $\mathbb{B}^3$ .

### 4.1 Um Pouco de Instabilidade

Recordando a forma de índice para uma hipersuperfície em  $\mathbb{B}^{n+1}$  temos

$$Q(f) = \int_M |\nabla f|^2 - |A|^2 - q \int_{\partial M} f^2.$$

Se  $M$  é uma hipersuperfície com Curvatura Média Constante, dizemos que  $M$  é estável se  $Q(f) \geq 0$  para toda  $f \in \mathbb{F} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M); \int_M f = 0\}$ . Quando  $M$  é mínima,  $H = 0$ , podemos relaxar essa definição e dizemos que  $M$  é estável se  $Q(f) \geq 0$  para toda  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Ainda sobre a forma  $Q$ , temos a ela associado o Índice de Morse de uma hipersuperfície capilar CMC (respectivamente mínima) que corresponde a dimensão máxima de um subespaço de  $\mathbb{F}$  (respectivamente  $\mathcal{C}^\infty(M)$ ) no qual  $Q$  é negativa definida.

Desse modo, considerando um disco totalmente geodésico  $D^n$  capilar em  $\mathbb{B}^{n+1}$  com ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$  temos pela sua minimalidade que, sendo  $\mathbf{1}_M \in \mathcal{C}^\infty(M)$  a

função identicamente 1 em  $M$ ,

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{1}_M) &= -q \int_{\partial M} 1 \\ &= -\frac{1}{\text{sen}(\theta)} L(\partial M) < 0. \end{aligned}$$

Assim,  $D^n$  é uma hipersuperfície mínima capilar instável em  $\mathbb{B}^{n+1}$ . Portanto, o disco equatorial  $\mathbb{D}^n$  também é instável e pelos Teorema 1 e Lema 5 de (FRASER, 2007) temos que o índice de  $\mathbb{D}^n$  em  $\mathbb{B}^{n+1}$  é 1. Além disso, pela Proposição 6.2 de (DEVYVER, 2017) temos que se  $M^2$  é uma superfície mínima com bordo livre em  $\mathbb{B}^3$  e que não é o disco equatorial, então seu índice é pelo menos 4. Assim, a única superfície mínima com bordo livre em  $\mathbb{B}^3$  com índice 1 é o disco equatorial  $\mathbb{D}^2$ . Desse modo, é natural a busca por exemplos de superfícies, e caracterização destas, que tenham índice igual a 4.

## 4.2 O Catenoide Crítico

Vamos calcular o índice do Catenoide Crítico. Para esse fim, seguiremos (DEVYVER, 2017).

Considere a catenária  $\gamma_c(t) = (c \cosh(t/c), 0, t)$ , onde  $c > 0$  está fixado. Desse modo, o catenoide  $\Sigma_c$  em  $\mathbb{R}^3$  é obtido como superfície de revolução a partir da rotação da catenária  $\gamma_c$  em torno do eixo  $z$ . Assim, sua parametrização é dada por

$$X_c(t, v) = (c \cosh(t/c) \cos(v), c \cosh(t/c) \text{sen}(v), t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad e \quad v \in [0, 2\pi).$$

Fazendo a mudança  $s = t/c$ , temos

$$X_c(s, v) = c(\cosh(s) \cos(v), \cosh(s) \text{sen}(v), s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad e \quad v \in [0, 2\pi).$$

Agora, vamos determinar o campo normal unitário ao longo de  $\Sigma_c$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_c}{\partial s} &= c(\text{senh}(s) \cos(v), \text{senh}(s) \text{sen}(v), 1), \\ \frac{\partial X_c}{\partial v} &= c(-\cosh(s) \text{sen}(v), \cosh(s) \cos(v), 0). \end{aligned}$$

Daí,

$$\mathcal{N}(s, \mathbf{v}) = \frac{\frac{\partial X_c}{\partial s} \wedge \frac{\partial X_c}{\partial \mathbf{v}}}{\left| \frac{\partial X_c}{\partial s} \wedge \frac{\partial X_c}{\partial \mathbf{v}} \right|} = \left( -\frac{\cos(\mathbf{v})}{\cosh(s)}, -\frac{\text{sen}(\mathbf{v})}{\cosh(s)}, \tanh(s) \right).$$

A próxima proposição nos dá uma caracterização do Catenoide Crítico.

**Proposição 4.1.** *Seja  $\{\Sigma_c\}$  uma família de catenoides. Existe um único valor de  $c$  tal que  $\Sigma_c$  intersecta a esfera  $\mathbb{S}^2$  ortogonalmente.*

*Demonstração.* Note que, se  $\Sigma_c$  intersecta  $\mathbb{S}^2$ , então existe uma solução da equação  $c^2(\cosh^2(s) + s^2) = 1$ . Chamemos essa solução de  $T_0$ , daí

$$c = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(T_0) + T_0^2}}.$$

Por outro lado, como em  $\mathbb{S}^2$  o vetor normal a  $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^2$  é identificado com  $\mathbf{p}$ , temos que  $\partial\Sigma_c$  intersecta  $\mathbb{S}^2$  ortogonalmente se, e somente se, em coordenadas

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{N}(s, \mathbf{v}), X_c(s, \mathbf{v}) \rangle &= 0 \\ \iff c(-1 + T_0 \tanh(T_0)) &= 0 \\ \stackrel{c > 0}{\iff} T_0 \tanh(T_0) &= 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Assim,  $T_0 \text{senh}(T_0) = \cosh(T_0)$  e portanto  $c$  fica definido por

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(T_0) + T_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{T_0^2 \text{senh}^2(T_0) + T_0^2}} \\ &= \frac{1}{T_0 \sqrt{\text{senh}^2(T_0) + 1}} = \frac{1}{T_0 \cosh(T_0)}. \end{aligned}$$

Para completar a demonstração basta mostrarmos que existe uma única solução positiva da equação (4.1).

**Afirmção.** A função  $\tau = T \tanh(T) - 1$  tem um único zero positivo.

Considere a seguinte função  $f(T) = T \tanh(T)$ , daí

$$f'(T) = \tanh(T) + \frac{T}{\cosh^2(T)}.$$

Desse modo,  $f'(T) = 0$  é equivalente a

$$\begin{aligned} \tanh(T) &= -\frac{T}{\cosh^2(T)} \\ \iff \sinh(T) \cosh(T) &= -T \\ \iff \frac{e^{2T} - e^{-2T}}{4} &= -T \\ \iff e^{4T} + 4Te^{2T} &= 1 \quad . \end{aligned}$$

É fácil ver que  $T = 0$  é uma solução da equação  $f'(T) = 0$ , portanto  $0$  é um ponto crítico de  $f$ . Por outro lado, dado  $\varepsilon > 0$  temos  $e^{4\varepsilon} + 4\varepsilon e^{2\varepsilon} > 1$  e  $e^{-4\varepsilon} - 4\varepsilon e^{-2\varepsilon} < 1$  portanto  $0$  é o único ponto crítico de  $f$ . Mais do que isso,  $T > 0$  então  $f'(T) > 0$  o que implica  $f$  ser injetiva em  $\mathbb{R}_+$ , logo existe um único  $T_0 > 0$  tal que  $f(T_0) = 1$ , provando a afirmação. Assim finalizamos a prova da Proposição 4.1. ■

A partir dessa proposição, vemos que existe um único catenoide  $\Sigma_c$  que intersecta  $\mathbb{S}^2$  ortogonalmente. A parte de  $\Sigma_c$  contida em  $\mathbb{B}^3$  é chamada de Catenoide Crítico o qual denotaremos de agora em diante somente por  $\Sigma$ .

### 4.2.1 Uma Mudança de Coordenadas

Nas coordenadas  $(s, v)$  podemos escrever a métrica de  $\Sigma$  como

$$g = c^2 \cosh^2(s)(ds^2 + dv^2),$$

com  $s \in [-T_0, T_0]$  e  $v \in [0, 2\pi)$ . Desse modo, temos o operador laplaciano

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^2 (\partial_i (g^{ij} \sqrt{\det g} \partial_j u)) \\ &= \frac{1}{c^2 \cosh^2(s)} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{c^2 \cosh^2(s)} c^2 \cosh^2(s) \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{c^2 \cosh^2(s)} c^2 \cosh^2(s) \frac{\partial u}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{c^2 \cosh^2(s)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \right). \end{aligned}$$

A norma ao quadrado do operador forma é

$$|A|^2 = k_1^2 + k_2^2 = \left(-\frac{1}{c \cosh^2(s)}\right)^2 + \left(\frac{1}{c \cosh^2(s)}\right)^2 = \frac{2}{c^2 \cosh^4(s)}.$$

Assim, o operador de Jacobi é obtido nessa métrica como

$$J\mathbf{u} = -\frac{1}{c^2 \cosh^2(s)} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial v^2} \right) - \frac{2}{c^2 \cosh^4(s)} \mathbf{u}.$$

Agora, vamos calcular a forma quadrática nessas coordenadas. A primeira parcela é dada por

$$\int_{[-T_0, T_0] \times S^1} \left[ \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v} \right|^2 - \frac{2}{c^2 \cosh^4(s)} \mathbf{u}^2 \right] ds dv.$$

Para a segunda parcela observe que o bordo de  $\Sigma$  é formado por dois círculos com as seguintes parametrizações  $\alpha = \mathbf{R}(\cos(v), \sin(v), cT_0)$  e  $\beta = \mathbf{R}(\cos(v), \sin(v), -cT_0)$ . Daí, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - R^2} &= cT_0 \\ \Rightarrow 1 - R^2 &= \operatorname{sech}^2(T_0) \\ \Rightarrow R^2 &= 1 - \operatorname{sech}^2(T_0) \\ \Rightarrow R &= \tanh(T_0) \\ &= \frac{1}{T_0}. \end{aligned}$$

Portanto, a integral sobre o bordo de  $\Sigma$  é dada por

$$\int_{\partial \Sigma} \mathbf{u}^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}^2(T_0, v) + \mathbf{u}^2(-T_0, v) dv.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}(s, v)) &= \int_0^{2\pi} \int_{-T_0}^{T_0} \left[ \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v} \right|^2 - \frac{2}{c^2 \cosh^4(s)} \mathbf{u}^2 \right] ds dv \\ &\quad - \frac{1}{T_0} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}^2(T_0, v) + \mathbf{u}^2(-T_0, v) dv. \end{aligned}$$

Agora, consideremos a métrica  $\bar{g} = (\cosh(s))^{-2}(ds^2 + dv^2)$  conforme a métrica  $g$ . De fato,  $\bar{g} = (c^2 \cosh^4(s))^{-1}g = K_g \cdot g$ , aqui  $K_g$  representa a curvatura gaussiana de  $\Sigma$  na métrica  $g$ . Portanto,  $(\Sigma, \bar{g})$  tem curvatura gaussiana constante e igual a 1.

Além disso, observamos que  $(\Sigma, \bar{g})$  é isométrica a um anel na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ . De fato, seja  $\phi = 2 \tan^{-1}(e^{-s})$  temos:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\phi) &= 2\text{sen}(\tan^{-1}(e^{-s})) \cos(\tan^{-1}(e^{-s})) \\ &= 2 \tan(\tan^{-1}(e^{-s})) \cos^2(\tan^{-1}(e^{-s})) \\ &= 2e^{-s} \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1}(e^{-s}))} \\ &= 2 \frac{e^{-s}}{1 + e^{-2s}} \\ &= \frac{2}{e^s + e^{-s}} \\ &= (\cosh(s))^{-1}. \end{aligned}$$

Assim, fazendo a substituição de  $s$  por  $\phi$ , obtemos

$$\begin{aligned} d\phi &= 2 \frac{1}{1 + e^{-2s}} (-e^{-s}) ds = (-\cosh(s))^{-1} ds = -\text{sen}(\phi) ds \\ \Rightarrow d\phi^2 &= \text{sen}^2(\phi) ds^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\bar{g} = d\phi^2 + \text{sen}^2(\phi) dv^2,$$

que é a métrica canônica da esfera  $\mathbb{S}^2$  escrita em coordenada esféricas  $(\phi, v)$ .

Desse modo, obtemos que  $(\Sigma, \bar{g})$  é isométrica ao anel  $\Omega = \{\phi^* \leq \phi \leq \pi - \phi^*, 0 \leq v < 2\pi\}$  da esfera unitária, onde  $\phi^* = \tan^{-1}(e^{-T_0})$ . Além disso, notemos que

$$\begin{aligned} \cos^2(\phi) &= 1 - \text{sen}^2(\phi) \\ &= 1 - \text{sech}^2(s) \\ &= \tanh^2(s) \\ \therefore \cos(\phi) &= \tanh(s). \end{aligned}$$

Portanto, como  $-T_0 \leq s \leq T_0$  e  $T_0 \tanh(T_0) = 1$  temos que

$$(\phi, v) \in \Omega \Leftrightarrow -\frac{1}{T_0} \leq \cos(\phi) \leq \frac{1}{T_0}.$$

Com respeito a forma quadrática  $\Omega$ , usando a invariância conforme da energia de

Dirichlet em duas dimensões, veja (JOST, 1991) e (BESSE, 2007), podemos escrever:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (|\nabla \mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{u}^2) - \frac{\cosh(T_0)}{T_0} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^2,$$

onde todas as quantidades (gradiente, volume) são calculadas na métrica canônica de  $\mathbb{S}^2$ . Assim, o operador de Jacobi associado a forma  $\mathcal{Q}$  escreve-se de uma maneira mais simplificada como

$$J = \Delta_{\mathbb{S}^2} + 2.$$

### 4.2.2 Campos de Jacobi

Uma função em  $\Sigma$  é chamada um Campo de Jacobi se  $J\mathbf{u} = 0$ . Para o Catenóide Crítico existem diversos campos de Jacobi interessantes, alguns deles são os da forma  $\mathbf{v}^\perp = \langle \mathcal{N}, \mathbf{v} \rangle$ , onde  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  é fixo. De fato, se  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  é fixo, então algum campo  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$

$$\langle \nabla \mathbf{v}^\perp, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X} \langle \mathbf{v}, \mathcal{N} \rangle = \langle \mathbf{A}(\mathbf{X}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{A}(\mathbf{v}^\top), \mathbf{X} \rangle$$

$$\Rightarrow \nabla \mathbf{v}^\perp = \mathbf{A}(\mathbf{v}^\top).$$

Novamente, tomando  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$  temos

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} \nabla \mathbf{v}^\perp &= \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A} \mathbf{v}^\top = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^\perp \mathcal{N}) \\ &= (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}) (\mathbf{v}^\top) + \mathbf{A} (\nabla_{\mathbf{X}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^\perp \mathcal{N})) \\ &= (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}) (\mathbf{v}^\top) + \mathbf{A} (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v} - \mathbf{X} \mathbf{v}^\perp \mathcal{N} - \mathbf{v}^\perp \mathbf{A}(\mathbf{X})) \\ &= (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}) (\mathbf{v}^\top) - \mathbf{v}^\perp \mathbf{A}^2(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Tomando o traço na última equação e observando que  $\Sigma$  é mínima, temos

$$\Delta \mathbf{v}^\perp = -\mathbf{v}^\perp |\mathbf{A}|^2.$$

Portanto,  $J\mathbf{v}^\perp = 0$ .

Agora, considerando a base canônica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  do  $\mathbb{R}^3$ , obtemos os campos de Jacobi  $\mathbf{e}_1^\perp, \mathbf{e}_2^\perp, \mathbf{e}_3^\perp$ , os quais têm a propriedade extra de serem autovalores de Steklov do Problema

de Dirichlet

$$\begin{cases} \int u = 0, \text{ em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda u, \text{ em } \partial \Sigma, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde  $\eta$  é o conormal em  $\partial \Sigma$  que é o vetor posição pela condição de Free-Boundary.

A seguir, faremos os cálculos de  $\partial_\eta e_i^\perp$ . Primeiramente notemos que, nas coordenadas  $(s, \nu)$ ,  $e_1^\perp = -\frac{\cos(\nu)}{\cosh(s)}$ ,  $e_2^\perp = -\frac{\sin(\nu)}{\cosh(s)}$  e  $e_3^\perp = \tanh(s)$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial e_1^\perp}{\partial \eta} &= T_0 \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=T_0} \left( -\frac{\cos(\nu)}{\cosh(s)} \right) = T_0 \frac{\cos(\nu) \sinh(T_0)}{\cosh^2(T_0)} = \frac{\cos(\nu)}{\cosh(T_0)} = -1 e_1^\perp \\ \bullet \frac{\partial e_2^\perp}{\partial \eta} &= T_0 \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=T_0} \left( -\frac{\sin(\nu)}{\cosh(s)} \right) = T_0 \frac{\sin(\nu) \sinh(T_0)}{\cosh^2(T_0)} = \frac{\sin(\nu)}{\cosh(T_0)} = -1 e_2^\perp \\ \bullet \frac{\partial e_3^\perp}{\partial \eta} &= T_0 \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=T_0} (\tanh(s)) = T_0 \frac{1}{\cosh^2(T_0)} = \frac{1}{T_0 \sinh^2(T_0)} = \frac{1}{\sinh^2(T_0)} \tanh(T_0) \\ &= \frac{1}{\sinh^2(T_0)} e_3^\perp. \end{aligned}$$

Em (BÉRARD; EARP, 2009) temos as seguintes proposições:

**Proposição 4.2** (Campo de Jacobi Killing). *Sejam  $\chi : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão mínima ou de curvatura média constante e  $\mathcal{K}$  um campo Killing sobre  $\bar{M}$ . A função  $f_{\mathcal{K}} = \bar{g}(\mathcal{K}, \mathcal{N})$  é um campo de Jacobi.*

**Proposição 4.3** (Campo de Jacobi Variacional). *Seja  $\chi_a : M \rightarrow \bar{M}$  uma família suave de imersões isométricas, com a mesma curvatura média  $H$ , para  $\mathbf{a}$  pertencente a um intervalo em torno de  $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}$ . Então a função  $\nu = \bar{g} \left( \frac{\partial \chi_a}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a}_0), \mathcal{N} \right)$  é um campo de Jacobi em  $\chi(\mathbf{a}_0, M)$ .*

Pela Proposição 4.2 temos que as seguintes funções sobre  $\Sigma$  são campos de Jacobi:

$$\begin{aligned} \nu_{(x,z)}^\perp &= \langle -z e_1 + x e_3, \mathcal{N} \rangle, \\ \nu_{(x,y)}^\perp &= \langle -y e_1 + x e_2, \mathcal{N} \rangle, \\ \nu_{(y,z)}^\perp &= \langle -z e_2 + y e_3, \mathcal{N} \rangle. \end{aligned}$$

E pela Proposição 4.3 temos que a seguinte função é um campo de Jacobi associado ao parâmetro  $c$

$$\xi = - \left\langle \frac{\partial X_c}{\partial c}, \mathcal{N} \right\rangle.$$

Em coordenadas, as funções  $v_{(x,z)}^\perp$ ,  $v_{(x,y)}^\perp$ ,  $v_{(y,z)}^\perp$  e  $\xi$  são escritas como

$$v_{(x,z)}^\perp = \Lambda(s) \cos(v)$$

$$v_{(x,y)}^\perp = 0$$

$$v_{(y,z)}^\perp = \Lambda(s) \sin(v),$$

onde  $\Lambda(s) = c \left( \frac{s}{\cosh(s)} + \tanh(s) \cosh(s) \right)$ , e  $\xi = 1 - s \tanh(s)$ .

Usando essas expressões em coordenadas, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} v_{(x,z)}^\perp(T_0, v) &= T_0 \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=T_0} (\Lambda(s) \cos(v)) \\ &= T_0 c \left( \frac{\cosh(T_0) - T_0 \sinh(T_0)}{\cosh^2(T_0)} + \frac{\cosh(T_0)}{\cosh^2(T_0)} + \tanh(T_0) \sinh(T_0) \right) \cos(v) \\ &= c \left( \frac{T_0}{\cosh(T_0)} + \tanh(T_0) \cosh(T_0) \right) \cos(v) \\ &= \Lambda(T_0) \cos(v) \\ &= v_{(x,z)}^\perp(T_0, v) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \eta} v_{(x,z)}^\perp(-T_0, v) = v_{(x,z)}^\perp(-T_0, v).$$

Portanto,  $\frac{\partial}{\partial \eta} v_{(x,z)}^\perp = v_{(x,z)}^\perp|_{\partial \Sigma}$ . De modo totalmente análogo, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \eta} v_{(y,z)}^\perp = v_{(y,z)}^\perp|_{\partial \Sigma}.$$

Agora, pela expressão em coordenadas de  $\xi$  segue que  $\xi > 0$  em  $\text{int} \Sigma$  e  $\xi = 0$  em  $\partial \Sigma$ . Assim, ela é a primeira autofunção de  $J$  com as condições de bordo de Dirichlet do seguinte problema

$$\begin{cases} Ju = 0, & \text{em } \Sigma \\ u = 0, & \text{em } \partial \Sigma \end{cases}.$$

Escrevendo o espectro de  $J$  como  $\lambda_1(J) \leq \lambda_2(J) \leq \dots \leq \lambda_n(J) \leq \dots$ , temos que  $\lambda_1(J) = 0$ . Assim,  $\Sigma$  é um domínio maximal (fracamente) estável do catenoide, veja (BÉRARD; EARP, 2009).

### 4.2.3 Uma Decomposição de Fourier

Agora, introduziremos uma decomposição de Fourier natural para Campos de Jacobi. Para este fim, usaremos as coordenadas  $(\phi, \nu)$  em  $\Sigma$ , introduzidas na Subseção 4.1.1, e supondo  $\mathbf{u}$  uma função suave definida em  $\Sigma$  podemos escrever a função  $\mathbf{u}(\phi, \cdot)$  como uma série de Fourier em  $\nu$  dada por:

$$\mathbf{u}(\phi, \nu) = \mathbf{a}_0(\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{a}_n(\phi) \cos(n\nu) + \mathbf{b}_n(\phi) \text{sen}(n\nu)). \quad (4.3)$$

Usando a fórmula  $\Delta_{\bar{g}} = \lambda^{-2} \Delta_g$  relacionando o laplaciano  $\Delta_{\bar{g}}$  na métrica  $\bar{g} = \lambda^2 g$  conforme a  $g$ , obtemos

$$\bar{J} = \lambda^{-2} J.$$

De acordo com os cálculos feitos na Subseção 4.1.1,  $\bar{J} = \Delta_{(\mathbb{S}^2, c_{an})} - 2$ . Portanto,  $J\mathbf{u} = 0$  se e somente se, nas coordenadas  $(\phi, \nu)$ ,  $(\Delta_{(\mathbb{S}^2, c_{an})} - 2)\mathbf{u}(\phi, \nu) = 0$ . Relembrando, a expressão do laplaciano da esfera unitária em coordenadas esféricas:

$$-\Delta = \frac{1}{\text{sen}(\phi)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \text{sen}(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2(\phi)} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2}.$$

Desse modo,  $J\mathbf{u} = 0$  equivale a  $\bar{J}\mathbf{u} = 0$  o que implica:

$$(\Delta_{(\mathbb{S}^2, c_{an})} - 2)\mathbf{u} = \bar{J}\mathbf{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{J}(\mathbf{a}_n(\phi) \cos(n\nu)) + \bar{J}(\mathbf{b}_n(\phi) \text{sen}(n\nu)) = 0.$$

Assim, vemos que uma função  $\mathbf{u}$  é um Campo de Jacobi se para todo  $n \geq 0$  (respectivamente  $n \geq 1$ ) temos  $\mathbf{a}_n(\phi)$  (respectivamente  $\mathbf{b}_n(\phi)$ ) solução da seguinte EDO, conhecida na literatura como Equação de Legendre associada com índices  $(1, n)$  (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964),

$$\left\{ -\frac{1}{\text{sen}(\phi)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \text{sen}(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \left( \frac{n^2}{\text{sen}^2(\phi)} - 2 \right) \right\} \mathbf{a}_n(\phi) = 0 \quad (4.4)$$

para  $\phi \in [\phi^*, \pi - \phi^*]$ , onde  $\phi^* = 2 \tanh^{-1}(e^{-T_0})$ . Segue então de (4.4) que podemos definir os seguintes operadores diferenciais

$$L_n = -\frac{1}{\text{sen}(\phi)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \text{sen}(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \left( \frac{n^2}{\text{sen}^2(\phi)} - 2 \right).$$

Observe que  $L_0 = -\frac{1}{\text{sen}(\phi)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \text{sen}(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} - 2 \right)$  corresponde a parte radial do operador de Jacobi  $J$ , ou seja, se  $\mathbf{u}$  depender apenas de  $s$ , e portanto apenas de  $\phi$ , temos que  $J\mathbf{u} = 0$  se e somente se  $L_0\mathbf{u} = 0$ . Por outro lado, como  $L_0\mathbf{a}_0 = 0$  é uma equação linear de segunda ordem homogênea, temos que o espaço das soluções tem dimensão igual a 2 e como as funções  $\xi$  e  $\mathbf{e}_3^\perp$  são Campos de Jacobi que dependem apenas de  $s$  e são linearmente independentes, segue que  $\{\xi, \mathbf{e}_3^\perp\}$  é uma base para esse espaço de soluções. Assim, o coeficiente de Fourier de ordem 0 é uma combinação linear de  $\xi$  e  $\mathbf{e}_3^\perp$ :

$$\mathbf{a}_0 = \alpha \mathbf{e}_3^\perp + \mathbf{b} \xi$$

Para a equação  $L_1\mathbf{a}(\phi) = 0$ , observamos as expressões em coordenadas das funções  $\mathbf{e}_1^\perp$  e  $\mathbf{e}_2^\perp$  por um lado e das funções  $\mathbf{v}_{(x,z)}^\perp$  e  $\mathbf{v}_{(y,z)}^\perp$  por outro, e percebemos que:

$$\mathbf{e}_1^\perp = -\chi(s) \cos(\nu) \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_2^\perp = -\chi(s) \text{sen}(\nu),$$

com  $\chi(s) = \frac{1}{\cosh(s)} = \text{sen}(\phi)$ . Como  $\mathbf{e}_1^\perp$  é um Campo de Jacobi temos:

$$\begin{aligned} 0 = \bar{J}\mathbf{e}_1^\perp(\phi, \nu) &= -\frac{1}{\text{sen}(\phi)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \text{sen}(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} (\text{sen}(\phi)) \right) \cos(\nu) + \frac{\text{sen}(\phi)}{\text{sen}^2(\phi)} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} (\cos(\nu)) \\ &\quad + 2\text{sen}(\phi) \cos(\nu) \\ &= (L_1(-\chi(\phi))) \cos(\nu). \end{aligned}$$

Portanto,  $L_1\chi = 0$ .

Analogamente, temos

$$\mathbf{v}_{(x,z)}^\perp = \Lambda(s) \cos(\nu) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{(y,z)}^\perp = \Lambda(s) \text{sen}(\nu).$$

Daí,

$$0 = \bar{J}\mathbf{v}_{(x,z)}^\perp = (L_1\Lambda(\phi)) \cos(\nu). \Rightarrow L_1\Lambda = 0$$

Assim, o coeficiente de Fourier de ordem 1, a saber,  $\mathbf{a}_1(\phi) \cos(\nu) + \mathbf{b}_1(\phi) \text{sen}(\nu)$  se escreve como combinação linear das quatro funções  $\mathbf{e}_1^\perp$ ,  $\mathbf{e}_2^\perp$ ,  $\mathbf{v}_{(x,z)}^\perp$  e  $\mathbf{v}_{(y,z)}^\perp$ ,

$$\mathbf{a}_1(\phi) \cos(\nu) + \mathbf{b}_1(\phi) \text{sen}(\nu) = \alpha \mathbf{e}_1^\perp + \beta \mathbf{e}_2^\perp + \gamma \mathbf{v}_{(x,z)}^\perp + \delta \mathbf{v}_{(y,z)}^\perp.$$

Desse modo, a decomposição de Fourier na variável  $\nu$  de um campo de Jacobi  $\mathbf{u}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \alpha e_3^\perp + b\xi + \alpha e_1^\perp + \beta e_2^\perp + \gamma v_{(x,z)}^\perp + \delta v_{(y,z)}^\perp \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(\phi) \cos(n\nu) + b_n(\phi) \text{sen}(n\nu), \end{aligned}$$

onde  $\alpha, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  são números reais e  $a_n(\phi)$  e  $b_n(\phi)$  são soluções de (4.4).

### 4.3 O Problema de Dirichlet

Seguindo em direção para o cálculo do índice do Catenoide Crítico  $\Sigma$ , vamos demonstrar nessa seção um lema chave para esse cálculo. Para esse fim, introduziremos a condição de fluxo zero no bordo para uma função suave  $\mathbf{u}$  em  $\Sigma$

**Definição 4.1** (Fluxo Zero). *Para uma função suave  $\mathbf{u}$  em  $\Sigma$  definimos seu fluxo no bordo como:*

$$\Phi(\mathbf{u}) = \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta}.$$

*Diremos que  $\mathbf{u}$  tem fluxo zero no bordo se  $\Phi(\mathbf{u}) = 0$ .*

**Lema 4.1.** *Seja  $\mathbf{u}$  uma função suave em  $\partial\Sigma$ . Então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} J\hat{\mathbf{u}} = 0, & \text{em } \Sigma \\ \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} & \text{em } \partial\Sigma \end{cases}$$

*tem solução se e somente se  $\int_{\partial\Sigma} \mathbf{u} = 0$ , e nesse caso tem uma única solução  $\hat{\mathbf{u}}$  com fluxo zero no bordo.*

*Demonstração.* Seja  $\tilde{\mathbf{u}}$  uma extensão de  $\mathbf{u}$  a  $\Sigma$  com suporte numa vizinhança tubular de  $\partial\Sigma$ . Então escrevendo  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{f} = -J\tilde{\mathbf{u}}$ , vemos que resolver o Problema de Dirichlet é equivalente a resolver o problema:

$$\begin{cases} J\mathbf{w} = \mathbf{f}, & \text{em } \Sigma \\ \mathbf{w} = 0, & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (4.5)$$

Pela Alternativa de Fredholm (veja Teorema 6.2.4 de (EVANS, 2010)) existe uma solução de (4.5) se e somente se

$$\int_{\partial\Sigma} f\omega = 0,$$

para toda  $\omega$  tal que  $J^*\omega = 0$  e  $\omega|_{\partial\Sigma} = 0$ . É sabido que  $J$  é um operador auto-adjunto, ou seja,  $J^* = J$  e 0 o menor elemento do espectro de  $J$  com condições de bordo de Dirichlet, ele tem multiplicidade 1 como autovalor de  $J$ . Portanto, (4.5) tem solução se e somente se:

$$\int_{\Sigma} (J\tilde{u})\xi = 0.$$

Mas, pela fórmula de Green,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} (J\tilde{u})\xi - (J\xi)\tilde{u} \\ &= \int_{\Sigma} (\Delta\tilde{u} + |A|^2\tilde{u})\xi - (\Delta\xi + |A|^2\xi)\tilde{u} \\ &= \int_{\Sigma} \xi\Delta\tilde{u} - \tilde{u}\Delta\xi \\ &= \int_{\partial\Sigma} \xi\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta} - \tilde{u}\frac{\partial\xi}{\partial\eta}, \end{aligned}$$

como  $\xi|_{\partial\Sigma} = 0$  e  $\tilde{u}|_{\partial\Sigma} = \mathbf{u}$ , temos

$$-\int_{\partial\Sigma} \mathbf{u}\frac{\partial\xi}{\partial\eta} = 0.$$

Portanto, (4.5) tem solução se e somente se  $\int_{\partial\Sigma} \mathbf{u}\frac{\partial\xi}{\partial\eta} = 0$ . Mas  $\frac{\partial\xi}{\partial\eta}$  é constante em  $\partial\Sigma$ , logo (4.5) tem solução se e somente se

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{u} = 0.$$

Para a unicidade, considere  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  duas soluções do mesmo problema de Dirichlet, então  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  satisfaz  $J\mathbf{u} = 0$  e  $\mathbf{u}|_{\partial\Sigma} = 0$  o que implica  $\mathbf{u}$  ser um múltiplo de  $\xi$ . Como  $\int_{\partial\Sigma} \frac{\partial\xi}{\partial\eta} \neq 0$ , se  $\Phi(\mathbf{u}_1) = \Phi(\mathbf{u}_2) = 0$  teremos:

$$\begin{aligned} 0 &\neq \Phi(\mathbf{u}) = \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta} \\ &= \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\eta} - \frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial\eta}. \end{aligned}$$

Portanto,  $0 \neq \Phi(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}_1) - \Phi(\mathbf{u}_2) = 0$ . Absurdo! Assim, finalizamos a demonstração do Lema 3.1. ■

## 4.4 Índice do Catenóide Crítico

Nessa seção demonstraremos o resultado principal de (DEVYVER, 2017), onde o índice do Catenóide Crítico foi efetivamente calculado.

**Teorema 4.1** ((DEVYVER, 2017)). *O Índice de Morse do Catenóide Crítico na bola unitária  $\mathbb{B}^3$  é exatamente 4.*

*Demonstração.* A ideia da demonstração é basicamente determinar um subespaço vetorial  $\mathcal{W}$  de dimensão 4 no qual a forma quadrática  $\mathcal{Q}$  seja negativa definida e provar que esse é um subespaço maximal com essa propriedade. Para tanto, vamos mostrar que as funções  $\mathbf{1}_\Sigma$  (constante igual 1 em  $\Sigma$ ) e  $\mathbf{v}^\perp$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , geram um subespaço de dimensão 4 onde  $\mathcal{Q}$  é negativa definida (fácil), depois provaremos que esse subespaço é maximal em relação a essa propriedade (difícil). A demonstração se dará em duas etapas as quais apresentamos a seguir.

- $\text{Ind}(\Sigma) \geq 4$

Sejam  $\mathbf{u}$  um campo de Jacobi para  $\Sigma$ ,  $J\mathbf{u} = 0$ , e  $w \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ , temos então

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\mathbf{u}, w) &= \int_{\Sigma} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla w \rangle - |\mathcal{A}|^2 \mathbf{u}w - \int_{\partial \Sigma} \mathbf{u}w \\ &= \int_{\Sigma} \text{div}(w \nabla \mathbf{u}) - w \Delta \mathbf{u} - |\mathcal{A}|^2 \mathbf{u}w - \int_{\partial \Sigma} \mathbf{u}w \\ &= \int_{\Sigma} \text{div}(w \nabla \mathbf{u}) - w J\mathbf{u} - \int_{\partial \Sigma} \mathbf{u}w. \end{aligned}$$

Usando que  $\mathbf{u}$  é campo de Jacobi e pelo Teorema da Divergência segue que

$$\mathcal{Q}(\mathbf{u}, w) = \int_{\partial \Sigma} w \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} - \mathbf{u} \right).$$

Se  $\mathbf{u}$  for uma autofunção de Steklov para o Problema (4.2), então temos que

$$\mathcal{Q}(\mathbf{u}, w) = (\lambda - 1) \int_{\partial \Sigma} \mathbf{u}w.$$

Desse modo, os campos de Jacobi que contribuem para o índice de  $\Sigma$  são aqueles cujos autovalores  $\lambda < 1$ . Por outro lado, veja que as funções  $e_1^\perp, e_2^\perp$  e  $e_3^\perp$  são duas a duas  $L^2$ -ortogonais no bordo  $\partial\Sigma$ , isto é:

$$0 = \mathcal{Q}(e_1^\perp, e_2^\perp) = \mathcal{Q}(e_1^\perp, e_3^\perp) = \mathcal{Q}(e_2^\perp, e_3^\perp).$$

E como vimos, seus autovalores de Steklov são menores do que 1, logo  $\text{Ind}(\Sigma) \geq 3$ , o que já é conhecido. Agora, observe que a função  $\mathbf{1}_\Sigma$  constante igual a 1 em  $\Sigma$  satisfaz

$$\mathcal{Q}(\mathbf{1}_\Sigma) = \int_\Sigma -|\mathcal{A}|^2 - \int_{\partial\Sigma} 1 = - \left( L(\partial\Sigma) + \int_\Sigma |\mathcal{A}|^2 \right) < 0.$$

Desde que,

$$0 = \int_{\partial\Sigma} e_1^\perp = \int_{\partial\Sigma} e_2^\perp = \int_{\partial\Sigma} e_3^\perp,$$

temos:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{1}_\Sigma, e_1^\perp) = \mathcal{Q}(\mathbf{1}_\Sigma, e_2^\perp) = \mathcal{Q}(\mathbf{1}_\Sigma, e_3^\perp) = 0.$$

Portanto, obtemos que a forma quadrática  $\mathcal{Q}$  é negativa definida no espaço  $\mathcal{W} = \text{span}\{\mathbf{1}_\Sigma, e_1^\perp, e_2^\perp, e_3^\perp\}$ . Como esse espaço tem dimensão 4, segue que  $\text{Ind}(\Sigma) \geq 4$ .

- $\text{Ind}(\Sigma) \leq 4$

Para garantirmos que  $\text{Ind}(\Sigma) = 4$  basta mostrarmos que se um campo Jacobi  $\mathbf{u}$  é tal que  $\mathcal{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^\perp) = \mathcal{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{1}_\Sigma) = 0$ , então  $\mathcal{Q}(\mathbf{u}) \geq 0$ .

**Proposição 4.4.** *Seja  $\mathbf{u}$  um campo de Jacobi em  $\Sigma$  tal que*

$$0 = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{u} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{u}w^\perp, \quad w \in \mathbb{R}^3$$

então  $\mathcal{Q}(\mathbf{u}) \geq 0$ .

*Demonstração da Proposição 4.4.* Usaremos as coordenadas  $(\phi, \mathbf{v})$  e a decomposição de Fourier na variável  $\mathbf{v}$  do campo de Jacobi  $\mathbf{u}$ , assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{a}e_3^\perp + \mathbf{b}\xi + \alpha e_1^\perp + \beta e_2^\perp + \gamma \mathbf{v}_{(x,z)}^\perp + \delta \mathbf{v}_{(y,z)}^\perp \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{a}_n(\phi) \cos(n\mathbf{v}) + \mathbf{b}_n(\phi) \text{sen}(n\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Como  $J\mathbf{u} = 0$ ,  $Q(\mathbf{e}_1^\perp, \mathbf{e}_3^\perp) = Q(\mathbf{e}_2^\perp, \mathbf{e}_3^\perp) = 0$  e  $\mathbf{e}_3^\perp$  é constante em  $\partial\Sigma$  e, por hipótese, temos  $\int_{\partial\Sigma} \mathbf{u}\mathbf{e}_3^\perp = 0$ , segue-se que

$$0 = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{u}\mathbf{e}_3^\perp = \mathbf{a} \int_{\partial\Sigma} |\mathbf{e}_3^\perp|^2 \Rightarrow \mathbf{a} = 0.$$

Da mesma forma, pelas propriedades de ortogonalidade das funções trigonométricas

$$0 = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{u}\mathbf{e}_1^\perp = \alpha \int_{\partial\Sigma} |\mathbf{e}_1^\perp|^2 + \gamma \int_{\partial\Sigma} \mathbf{e}_1^\perp \mathbf{v}_{(y,z)}^\perp,$$

uma vez que  $\mathbf{e}_1^\perp = -\chi(s)\cos(v)$ , onde  $\chi$  é uma função par, os termos  $\mathbf{a}_n$  e  $\mathbf{b}_n$  são constantes no bordo  $\partial\Sigma$  e este é formado por duas componentes conexas. Ademais, como  $\mathbf{v}_{(y,z)}^\perp = \Lambda(s)\cos(v)$  e sendo  $\Lambda$  uma função ímpar, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \mathbf{e}_1^\perp \mathbf{v}_{(y,z)}^\perp &= \frac{1}{T_0} \int_0^{2\pi} (-\chi(T_0)\Lambda(T_0) - \chi(-T_0)\Lambda(-T_0)) \cos^2(V) \, dv \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{2\pi} (-\chi(T_0)\Lambda(T_0) + \chi(T_0)\Lambda(T_0)) \cos^2(v) \, dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$0 = \alpha \int_{\partial\Sigma} |\mathbf{e}_1^\perp|^2 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Analogamente, obtemos  $\beta = 0$ .

Agora, uma vez que  $\mathbf{a} = \alpha = \beta = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}) &= Q(\mathbf{a}\mathbf{e}_3^\perp + \mathbf{b}\xi + \alpha\mathbf{e}_1^\perp + \beta\mathbf{e}_2^\perp + \gamma\mathbf{v}_{x,z}^\perp + \delta\mathbf{v}_{y,z}^\perp) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (\mathbf{a}_n(\varphi) \cos(nv) + \mathbf{b}_n(\varphi) \sin(nv)) \\ &= \mathbf{b}^2 Q(\xi) + \gamma^2 Q(\mathbf{v}_{x,z}^\perp) + \delta^2 Q(\mathbf{v}_{y,z}^\perp) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [Q(\mathbf{a}_n(\varphi) \cos(nv)) + Q(\mathbf{b}_n(\varphi) \sin(nv))] \\ &\quad + P(\xi, \mathbf{v}_{x,z}^\perp, \mathbf{v}_{y,z}^\perp, \mathbf{a}_n \cos(nv) + \mathbf{b}_n \sin(nv)) \end{aligned}$$

onde  $P(\xi, \mathbf{v}_{x,z}^\perp, \mathbf{v}_{y,z}^\perp, \mathbf{a}_n \cos(nv) + \mathbf{b}_n \sin(nv))$  representa as demais combinações dois a dois entre os termos  $\xi, \mathbf{v}_{x,z}^\perp, \mathbf{v}_{y,z}^\perp$  e  $\mathbf{a}_n \cos(nv) + \mathbf{b}_n \sin(nv)$ . Pelas propriedades das funções trigonométricas e sabendo que  $Q(\xi) = Q(\mathbf{v}_{(x,z)}^\perp) = Q(\mathbf{v}_{(y,z)}^\perp) = 0$ , podemos concluir que

$P(\xi, v_{x,z}^\perp, v_{y,z}^\perp, a_n \cos(nv) + b_n \sin(nv)) = 0$ . Dese modo,

$$Q(u) = \sum_{n=2}^{\infty} Q(a_n(\varphi) \cos(nv)) + Q(b_n(\varphi) \sin(nv)).$$

Para  $n \geq 2$ , definimos uma forma quadrática  $Q_n$  de uma função suave  $f(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\varphi^*, \pi - \varphi^*]$  dada por:

$$Q_n(f(\varphi)) = Q(f(\varphi) \cos(nv)) = Q(f(\varphi) \sin(nv)).$$

Explicitamente,

$$2Q_n(f(\varphi)) = \int_{\varphi^*}^{\pi - \varphi^*} (|f'(\varphi)|^2 + \left(\frac{n^2}{\sin^2(\varphi)}\right) f^2(\varphi)) \sin(\varphi) d\varphi - \frac{1}{I_0} (f(\pi - \varphi^*)^2 + f(\varphi^*)^2).$$

Desse modo,

$$Q(u) = \sum_{n=2}^{\infty} Q_n(a_n(\varphi)) + Q_n(b_n(\varphi)).$$

Percebemos que  $Q_n(f(\varphi)) \geq Q_2(f(\varphi))$  para todo  $n \geq 2$ . Assim, provando que  $Q_2$  é positiva definida, temos a prova da Proposição 4.4.

**Afirmção.**  $Q_2$  é positiva definida. Para provarmos essa afirmação necessitamos do seguinte

**Lema 4.2.** *Seja  $S$  uma forma quadrática agindo em funções  $f(\varphi)$ ,  $\varphi \in [a, b]$ , definida por*

$$S(f) = \int_a^b [(f')^2 + Vf^2] m(\varphi) d\varphi - \alpha [f(a)^2 + f(b)^2],$$

onde  $m$  é uma função suave positiva,  $\alpha$  é um número real e  $V$  é uma função potencial em  $[a, b]$ . Suponha que exista uma função positiva  $h(\varphi)$ ,  $\varphi \in [a, b]$  tal que:

$$\left( \frac{1}{m} \frac{d}{d\varphi} \left( m \frac{d}{d\varphi} \right) - V \right) h \leq 0$$

e

$$-m(a) \frac{d}{d\varphi} \Big|_{\varphi=a} (\log h) > \alpha, \quad m(b) \frac{d}{d\varphi} \Big|_{\varphi=b} (\log h) > \alpha.$$

Nessas condições,  $S$  é positiva definida.

*Prova do Lema 4.2* Como  $h$  é positiva, podemos escrever  $f(\varphi)$  como

$$f(\varphi) = g(\varphi)h(\varphi).$$

Pela Regra de Leibniz temos  $\frac{df}{d\varphi} = \frac{dg}{d\varphi}h + g\frac{dh}{d\varphi}$ , o que implica

$$\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2 h^2 + 2g\frac{dg}{d\varphi}h\frac{dh}{d\varphi} + g^2\left(\frac{dh}{d\varphi}\right)^2.$$

Mas, como  $\left(\frac{dg^2}{d\varphi}\right)\left(\frac{dh^2}{d\varphi}\right) = 4g\frac{dg}{d\varphi}h\frac{dh}{d\varphi}$  temos:

$$\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2 h^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dg^2}{d\varphi}\right)\left(\frac{dh^2}{d\varphi}\right) + g^2\left(\frac{dh}{d\varphi}\right)^2.$$

Daí, aplicando na forma  $S$  temos:

$$S(f) = \int_a^b \left[ \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2 h^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dg^2}{d\varphi}\right)\left(\frac{dh^2}{d\varphi}\right) + g^2\left(\frac{dh}{d\varphi}\right)^2 + Vf^2 \right] m(\varphi) d\varphi - \alpha[f(a)^2 + f(b)^2].$$

Agora, vamos analisar a expressão acima. Primeiramente, pela técnica de integração por partes temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{dg^2}{d\varphi}\right)\left(\frac{dh^2}{d\varphi}\right) m d\varphi &= \frac{1}{2} \left[ g^2 \frac{dh^2}{d\varphi} m \right]_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b g^2 \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dh^2}{d\varphi} m \right) d\varphi \\ &= mg^2 h \frac{dh}{d\varphi} \Big|_a^b - \int_a^b g^2 \frac{d}{d\varphi} \left( h \frac{dh}{d\varphi} m \right) d\varphi \\ &= mg^2 h \frac{dh}{d\varphi} \Big|_a^b - \int_a^b g^2 m \left( \frac{dh}{d\varphi} \right)^2 + g^2 h \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dh}{d\varphi} m \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Desse modo, substituindo essa última igualdade na expressão de  $S(f)$ , temos:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_a^b \left[ mh^2 \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2 + mg^2 \left(\frac{dh}{d\varphi}\right)^2 + mVf^2 \right. \\ &\quad \left. - mg^2 \left(\frac{dh}{d\varphi}\right)^2 - g^2 h \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dh}{d\varphi} m \right) \right] d\varphi \\ &\quad + mg^2 h \frac{dh}{d\varphi} \Big|_a^b - \alpha[f(a)^2 + f(b)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \left( \frac{dg}{d\varphi} \right)^2 h^2 m + Vf^2 m - g^2 h \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dh}{d\varphi} m \right) d\varphi \\
 &\quad + mg^2 h \frac{dh}{d\varphi} \Big|_a^b - \alpha[f(a)^2 + f(b)^2].
 \end{aligned}$$

Fazendo manipulações convenientes e colocando o termo  $g^2 h m$  em evidencia no integrando da última igualdade temos

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \int_a^b \left[ -\frac{1}{m} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dh}{d\varphi} m \right) + Vh \right] g^2 h m d\varphi + \int_a^b \left( \frac{dg}{d\varphi} \right)^2 h^2 m d\varphi \\
 &\quad + mg^2 h \frac{dh}{d\varphi} \Big|_a^b - \alpha[f(a)^2 + f(b)^2].
 \end{aligned}$$

Agora, pela primeira hipótese sobre a função  $h$  temos que

$$-\frac{1}{m} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dh}{d\varphi} m \right) + Vh = -\left( \frac{1}{m} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{d}{d\varphi} m \right) - V \right) h \geq 0.$$

Daí

$$\begin{aligned}
 S(f) &\geq \int_a^b \left( \frac{dg}{d\varphi} \right)^2 h^2 m d\varphi + mg^2 h \frac{dh}{d\varphi} \Big|_a^b - \alpha[f(a)^2 + f(b)^2] \\
 &= \int_a^b \left( \frac{dg}{d\varphi} \right)^2 h^2 m d\varphi + m \left( \frac{f}{h} \right)^2 h \frac{dh}{d\varphi} \Big|_a^b - \alpha[f(a)^2 + f(b)^2] \\
 &= \int_a^b \left( \frac{dg}{d\varphi} \right)^2 h^2 m d\varphi + mf^2 \frac{1}{h} \frac{dh}{d\varphi} \Big|_a^b - \alpha[f(a)^2 + f(b)^2].
 \end{aligned}$$

Note que  $\frac{d}{d\varphi} \log(h) = \frac{1}{h} \frac{dh}{d\varphi}$ , assim:

$$\begin{aligned}
 S(f) &\geq \int_a^b \left( \frac{dg}{d\varphi} \right)^2 h^2 m d\varphi + mf^2 \frac{d}{d\varphi} \log(h) \Big|_a^b - \alpha[f(a)^2 + f(b)^2] \\
 &\geq m(b)f(b)^2 \frac{d}{d\varphi} \log(h) \Big|_{\varphi=b} - \alpha f(b)^2 \\
 &\quad - \left( m(a)f(a)^2 \frac{d}{d\varphi} \log(h) \Big|_{\varphi=a} + \alpha f(a)^2 \right).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a segunda hipótese sobre a função  $h$  temos:

$$S(f) > \alpha f(b)^2 - \alpha f(b)^2 + \alpha f(a)^2 - \alpha f(a)^2 = 0.$$

Assim, provamos que  $S$  é positiva definida.

□

Agora podemos provar nossa afirmação sobre a forma  $\mathcal{Q}_2$ . Primeiramente, fazendo a mudança de variável  $x = \cos(\varphi)$  obtemos de (4.4) a seguinte equação:

$$\left\{ -\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} \right) + \frac{4}{1-x^2} - 2 \right\} a(x) = 0, \quad \frac{1}{T_0} \leq x \leq \frac{1}{T_0}$$

Vamos resolver esta equação. Começemos “abrindo” as derivadas:

$$2xa' - (1-x^2)a'' + 2a \frac{1+x^2}{1-x^2} = 0.$$

Isolando o termo  $a''$  no segundo membro da equação temos:

$$\begin{aligned} a'' &= \frac{2xa' + 2a \frac{1+x^2}{1-x^2}}{1-x^2} \\ &= \frac{2x}{1-x^2} a' + 2 \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} a \\ &= \frac{2x}{1-x^2} a' + \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)' a \\ &= \left( \frac{2x}{1-x^2} a \right)' . \end{aligned}$$

Assim, integrando  $a''$  e  $\left( \frac{2x}{1-x^2} a \right)'$  em  $\varphi$  temos  $a' = \frac{2x}{1-x^2} a$ .

Agora, separando e integrando obtemos:

$$\int \frac{a'}{a} = \int \frac{2x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \log a = -\log(1-x^2) = \log(1-x^2)^{-1}.$$

Assim,  $a(x) = (1-x^2)^{-1}$  é solução da equação. Retornando a variável  $\varphi$  temos:

$$a(\varphi) = (\sin^2(\varphi))^{-1} = \cosh^2(s).$$

Note ainda que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \log(\mathbf{a}(\varphi)) &= \operatorname{sen}^2(\varphi) \frac{-2\operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi)}{\operatorname{sen}^4(\varphi)} \\ &= -2\operatorname{cotan}(\varphi). \end{aligned}$$

Para  $\varphi = \varphi^*$ , temos

$$\begin{aligned} -2\operatorname{cotan}(\varphi^*) &= -\frac{2}{\tan(2 \tan^{-1}(e^{-T_0}))} = -\frac{2}{\frac{2 \tan(\tan^{-1}(e^{-T_0}))}{1 - \tan^2(\tan^{-1}(e^{-T_0}))}} \\ &= -\frac{1 - e^{2T_0}}{e^{-T_0}} = -(e^{T_0} - e^{-T_0}) \\ &= -2 \tanh(T_0) \cosh(T_0) = -2\operatorname{senh}(T_0). \end{aligned}$$

Para  $\varphi = \pi - \varphi^*$  temos:

$$\begin{aligned} -2\operatorname{cotan}(\pi - \varphi^*) &= \frac{2}{\tan(2 \tan^{-1}(e^{-T_0}))} \\ &= 2\operatorname{senh}(T_0) > \frac{\cosh(T_0)}{T_0}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$-\frac{1}{\cosh(T_0)} \frac{d}{d\varphi} (\log \mathbf{a}(\varphi)) > \frac{1}{T_0} \text{ e } \frac{1}{\cosh(T_0)} \frac{d}{d\varphi} (\log \mathbf{a}(\varphi)) > \frac{1}{T_0}.$$

Agora, observando a expressão de  $\mathcal{Q}_2$ :

$$\mathcal{Q}_2(f) = \int_{\varphi^*}^{\pi - \varphi^*} ((f')^2 + \left( \frac{4}{\operatorname{sen}^2(\varphi)} - 2 \right) f^2) \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi - \frac{1}{T_0} (f(\pi - \varphi^*)^2 - f(\varphi^*)^2),$$

tomemos  $\alpha = \frac{1}{T_0}$ ,  $\mathbf{a} = \varphi^*$ ,  $\mathbf{b} = \pi - \varphi^*$ ,  $\mathbf{m}(\varphi^*) = \operatorname{sen}(\varphi^*) = \frac{1}{\cosh(T_0)}$ ,  $\mathbf{m}(\pi - \varphi^*) = \operatorname{sen}(\pi - \varphi^*) = \frac{1}{\cosh(T_0)}$ ,  $\mathbf{V} = \frac{4}{\operatorname{sen}^2(\varphi)} - 2$  e como  $\mathbf{a}(\varphi) = (\operatorname{sen}^2(\varphi))^{-1}$  satisfaz as hipóteses do Lema 4.2, concluimos que  $\mathcal{Q}_2$  é positiva definida. Assim, finalizamos a prova da Proposição 4.4.

□

*Finalização da prova do Teorema 4.1*

De posse da Proposição 4.4 provaremos que  $\operatorname{Ind}(\Sigma) \leq 4$  e, conseqüentemente a igual-

dade  $\text{Ind}(\Sigma) = 4$ . Relembrando, queremos mostrar que se  $\mathbf{u}$  é tal que  $\mathcal{Q}(\mathbf{1}_\Sigma, \mathbf{u}) = \mathcal{Q}(\mathbf{e}_1^\perp, \mathbf{u}) = \mathcal{Q}(\mathbf{e}_2^\perp, \mathbf{u}) = \mathcal{Q}(\mathbf{e}_3^\perp, \mathbf{u}) = 0$ , então  $\mathcal{Q}(\mathbf{u}) \geq 0$ . Considere a seguinte função auxiliar  $\mathbf{f} = \mathbf{u} + \mathbf{c}\mathbf{1}_\Sigma$ , onde  $\mathbf{c}$  é tal que  $\int_{\partial\Sigma} \mathbf{f} = 0$ . Assim, como  $\mathcal{Q}(\mathbf{v}^\perp, \mathbf{1}_\Sigma) = 0$  para todo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , temos que  $\mathcal{Q}(\mathbf{f}, \mathbf{v}^\perp) = 0$ . Ademais, como  $\mathcal{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{1}_\Sigma) = 0$  temos:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{u}) = \mathcal{Q}(\mathbf{f}) - \mathbf{c}^2 \mathcal{Q}(\mathbf{1}_\Sigma).$$

Como  $\mathcal{Q}(\mathbf{1}_\Sigma) < 0$ , para provarmos que  $\mathcal{Q}(\mathbf{u}) \geq 0$  é suficiente provar que  $\mathcal{Q}(\mathbf{f}) \geq 0$ . Desse modo, seja  $\mathbf{h}$  o único Campo de Jacobi com fluxo zero em  $\partial\Sigma$  tal que  $\mathbf{h}|_{\partial\Sigma} = \mathbf{f}|_{\partial\Sigma}$  cuja existência garantimos pela Proposição 4.1. Então, podemos escrever  $\mathbf{f}$  como uma extensão de  $\mathbf{h}$  numa vizinhança tubular de  $\partial\Sigma$  como

$$\mathbf{f} = \mathbf{h} + \mathbf{g},$$

onde  $\mathbf{g}|_{\partial\Sigma} \equiv 0$ . Pela Fórmula de Green temos:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \int_\Sigma -\mathbf{g}(\mathbf{J}\mathbf{h}) + \int_{\partial\Sigma} \mathbf{g} \left( \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \eta} - \mathbf{h} \right) = 0.$$

Agora, como  $\mathbf{g}|_{\partial\Sigma} \equiv 0$ , temos que  $\mathcal{Q}(\mathbf{g}) = \int_\Sigma |\nabla \mathbf{g}|^2 - |\mathbf{A}|^2 \mathbf{g}^2$ , a qual é não-negativa pois  $\lambda_1(\mathbf{J}) \geq 0$ , ou seja,  $\Sigma$  é estável para  $\mathbf{J}$  com condições de Dirichlet. Além disso, por integração por partes temos:

$$0 = \mathcal{Q}(\mathbf{f}, \mathbf{v}^\perp) = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{f} \left( \frac{\partial \mathbf{v}^\perp}{\partial \eta} - \mathbf{v}^\perp \right).$$

Como  $\mathbf{e}_1^\perp, \mathbf{e}_2^\perp, \mathbf{e}_3^\perp$  são auto-funções de Steklov com auto-valores diferentes de 1, a condição  $\mathcal{Q}(\mathbf{f}, \mathbf{v}^\perp) = 0, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  é equivalente a

$$0 = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{f} \mathbf{v}^\perp, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Portanto,

$$0 = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{h} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{h} \mathbf{v}^\perp, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Pela Proposição 4.4 concluímos que  $\mathcal{Q}(\mathbf{h}) \geq 0$  e então  $\mathcal{Q}(\mathbf{f}) \geq 0$ . Daí,  $\mathcal{Q}(\mathbf{u}) \geq 0$  e o Teorema 4.1 está provado. ■

## 4.5 O que tem além?

Ainda sobre o Catenoide Crítico, Devyver apresenta alguns resultados a cerca da seguinte conjectura:

**Conjectura 1.** *Seja  $\Sigma$  uma superfície mínima com bordo livre imersa na bola unitária  $\mathbb{B}^3$  com Índice de Morse igual a 4. Então  $\Sigma$  é isométrica ao Catenoide Crítico.*

Essa conjectura é baseada no seguinte teorema provado por Urbano em 1990 no paper (URBANO, 1990).

**Teorema 4.2** (URBANO, 1990). *Seja  $M$  uma superfície em  $\mathbb{S}^3$  compacta, orientável e não totalmente geodésica. Então,  $\text{Ind}(M) \geq 5$  e a igualdade vale se, e somente se  $M$  é o Toro de Clifford.*

Devyver provou o seguinte lema

**Lema 4.3.** *Se  $\Sigma$  é uma superfície mínima com bordo livre em  $\mathbb{B}^3$  com índice 4, então  $\sigma_1(\Sigma)$  o primeiro auto valor de Steklov para o laplaciano  $\Delta$  é 1.*

Como consequência imediata do Lema 4.3 e do Teorema 6.6 de (FRASER; SCHOEN, 2016) temos o seguinte corolário.

**Corolário 4.1.** *Seja  $\Sigma$  um superfície mínima orientada e com bordo livre em  $\mathbb{B}^3$ . Suponha que  $\Sigma$  com índice 4 e topologicamente um anel. Então  $\Sigma$  é congruente ao Catenoide Crítico.*

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Em resumo, dada uma hipersuperfície  $M$  mínima ou com curvatura média constante imersa numa bola euclidiana  $\mathbb{B}$ , podemos indagar a respeito de sua estabilidade. Como visto, se podemos provar que  $M$  é fracamente estável então pelo Teorema 3.1 garantimos que  $M$  deve ser um disco ou uma calota esférica em  $\mathbb{B}$ . No caso de  $M$  ser instável, estudamos o Catenoide Crítico (caso  $n = 3$ ) como feito em (DEVYVER, 2017) e calculamos seu Índice de Morse como sendo 4 no Teorema 4.1.

Agora, existem algumas questões que não foram tratadas nesse trabalho. No quesito da estabilidade fraca, o paper de Wang e Xia ainda trata de hipersuperfícies imersas em bolas unitárias em outras formas espaciais, a saber, na Esfera Unitária  $\mathbb{S}^{n+1}$  ( $K = 1$ ) e no Espaço Hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  ( $K = -1$ ). Nesses casos, eles usaram uma técnica semelhante a que foi apresentada e concluíram um resultado similar, ou seja, as únicas hipersuperfícies mínimas ou com curvatura média constante imersas numa bola unitária nesses espaços são as umbílicas.

No quesito da instabilidade forte, apenas citamos uma fórmula para o cálculo do Índice de Morse apresentada por Tran e Zhou em 2023. Na verdade, eles a obtiveram antes, em 2020. Tal fórmula foi usada por Meza para calcular o índice do catenoide capilar e obter os índices para os ângulos de contato em diferentes intervalos, veja (MEZA, 2022).

# Referências Bibliográficas

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. [S.l.]: US Government Printing Office, 1964. v. 55.
- AMBROZIO, L.; CARLOTTO, A.; SHARP, B. Index estimates for free boundary minimal hypersurfaces. *arXiv e-prints*, p. arXiv-1605, 2016.
- BARBOSA, J. L.; CARMO, M. do. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 185, p. 339–353, 1984.
- BÉRARD, P.; EARP, R. S. Lindelöf’s theorem for catenoids revisited. 2009.
- BESSE, A. L. *Einstein manifolds*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- CARMO, M. P. do. *Geometria riemanniana*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- CHAVEL, I. *Riemannian geometry: a modern introduction*. [S.l.]: Cambridge university press, 2006. v. 98.
- DAJCZER, M.; TOJEIRO, R. *Submanifold theory*. [S.l.]: Springer, 2019.
- DEVYVER, B. Index of the critical catenoid. 2017.
- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010. v. 19.
- FINN, R.; MCCUAN, J.; WENTE, H. C. Thomas young’s surface tension diagram: its history, legacy, and irreconcilabilities. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, Springer, v. 14, p. 445–453, 2012.
- FRASER, A. Index estimates for minimal surfaces and k-convexity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 135, n. 11, p. 3733–3744, 2007.
- FRASER, A.; SCHOEN, R. The first steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces. *Advances in Mathematics*, Elsevier, v. 226, n. 5, p. 4011–4030, 2011.
- FRASER, A.; SCHOEN, R. Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball. *Inventiones mathematicae*, Springer, v. 203, n. 3, p. 823–890, 2016.
- GONZALEZ, E.; MASSARI, U.; TAMANINI, I. Existence and regularity for the problem of a pendent liquid drop. *Pacific Journal of Mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 88, n. 2, p. 399–420, 1980.

- JOST, J. Two-dimensional geometric variational problems. *Pure Appl. Math.(NY)*, John Wiley and Sons, Ltd., 1991.
- LEE, J. M. *Smooth manifolds*. [S.l.]: Springer, 2012.
- MEZA, W. B. *Índice do catenoide capilar imerso na bola unitária Euclidiana*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Belo Horizonte, 2022.
- NUNES, I. On stable constant mean curvature surfaces with free boundary. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 287, n. 1-2, p. 473–479, 2017.
- ROS, A.; VERGASTA, E. Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary. *Geometriae Dedicata*, Springer, v. 56, n. 1, p. 19–33, 1995.
- SARGENT, P. Index bounds for free boundary minimal surfaces of convex bodies. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 145, n. 6, p. 2467–2480, 2017.
- SILVA, J. V. da. *Superfícies de Curvatura Média Constante com Bordo Livre*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2021.
- SMITH, G.; ZHOU, D. The morse index of the critical catenoid. *Geometriae Dedicata*, Springer, v. 201, p. 13–19, 2019.
- SPERNER, E.; BOKOWSKI, J. Zerlegung konvexer körper durch minimale trennflächen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 0311\_0312, p. 80–100, 1979. Disponível em: <http://eudml.org/doc/152166>.
- TAMANINI, I. On the sphericity of liquid droplets. *Astérisque*, v. 118, p. 235–241, 1984.
- TRAN, H. Index characterization for free boundary minimal surfaces. *arXiv preprint arXiv:1609.01651*, 2016.
- TRAN, H.; ZHOU, D. On the morse index with constraints: An abstract formulation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 526, n. 1, p. 127317, 2023.
- TRAN, H.; ZHOU, D. On the morse index with constraints for capillary surfaces. *The Journal of Geometric Analysis*, Springer, v. 33, n. 4, p. 110, 2023.
- URBANO, F. Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 108, n. 4, p. 989–992, 1990.
- WANG, G.; XIA, C. Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 374, p. 1845–1882, 2019.