Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Algoritmo do Ponto Proximal para Problemas de Equilíbrio em $\mathbb{R}^n$

Gabriel Lopes Barbosa

Teresina - 2023

Gabriel Lopes Barbosa

Dissertação de Mestrado:

Algoritmo do Ponto Proximal para Problemas de Equilíbrio em $\mathbb{R}^n$

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

Teresina - 2023

Cópia da folha de rosto assinada pelos membros da banca examinadora.

Ficha catalográfica editada pela biblioteca setorial do CCN.

Barbosa, G L.

Algoritmo do Ponto Proximal para Problemas de Equilíbrio em $\mathbb{R}^n$

Gabriel Lopes Barbosa – Teresina: 2023.

Orientador: Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes.

1. Otimização

CDD 516.36

Dedico este trabalho ao meu querido avô Antonio Soares e ao meu querido amigo Isael Soares.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo milagre da vida, por me guiar por caminhos que eu ja mais pensei se quer existir, por todas as experiências que vivi até este momento e, o mais importante para mim, por todas as pessoas que Ele colocou em minha vida.

Agradeço aos meus pais, Antonio Soares Filho e Antonia Oneide, que sempre fizeram o máximo por mim, pelo carinho que me deram e por todos os ensinamentos. Aos meus avós maternos, Augusto Lopes e Francisca Pereira, que contribuíram tanto para a minha educação como ser humano, minha avó com o cuidado e o carinho que tanto me confortou, e meu avô por todos os ensinamentos que sempre vinham por meio de boas conversas, exemplos ou mesmo por suas próprias atitudes. Aos meus avós paternos, Antonio Soares e Raimunda Nunes, que sempre me trataram com igual carinho e amor, pelas ótimas histórias e ensinamentos.

Agradeço aos meus tios, primos, padrinhos e compadres (por ser um número bastante elevado de pessoas, não citarei cada nome) que tanto me ajudaram nessa trajetória. Sem os momentos de descontração, apoio e atenção que me proporcionaram seria impossível suportar essa trajetória tão árdua.

Em particular, agradeço à minha querida tia Gislane que foi a luz em vários aspectos da minha vida. Ela me ensinou o valor da educação, o valor de estudar, mostrou-me que eu poderia trilhar esse caminho e que tudo dependia apenas do meu esforço e dedicação. Ela me ensinou o valor da leitura e da busca pelo conhecimento, o que me fez crescer espiritualmente, sempre buscando melhorar e evoluir. Ela me tornou mais responsável, maduro e dono do meu próprio caminho. Com certeza, nunca estaria escrevendo esta dissertação se não fosse por ela.

Agradeço especialmente aos amigos que fiz na UFPI: Gustavo, Jefferson, João Victor, Paulo Sérgio, Raquel, Sillas, Suerlan e Tyffany. Eles sempre mantiveram o ambiente mais leve, agradável e suportável diante de tantas adversidades e dificuldades que existem no ambiente acadêmico. Gostaria de agradecer também à dona Aparecida (mãe do Paulo Sérgio) que não somente me recebeu diversas vezes em sua casa, sempre com muito carinho e atenção, mas também por me ceder um local de moradia, o que facilitou muito a minha vida ao longo desses anos. Agradeço também à dona Joselma (mãe do Jefferson) que igualmente me recebeu em sua casa, sempre com muito carinho e alegria.

Agradeço à minha companheira e namorada, Thyelle Silva, que sempre esteve ao meu lado, me confortando, me acolhendo com suas palavras, me distraindo quando necessário com suas longas conversas que sempre tinham muitas ramificações até sua conclusão. Os dias difíceis eram menos difíceis com você.

Agradeço aos professores: Barnabé, Cicero, Ítalo, Kelson, Leandro, Paulo Alexandre, Roger e Xavier, que contribuíram significativamente para a minha capacidade de chegar até aqui. Especialmente ao Professor Jurandir, por aceitar me orientar, pela paciência e pelos ensinamentos.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Demore o tempo que for para decidir o que você quer da vida, e depois que decidir não recue ante nenhum pretexto, porque o mundo tentará te dissuadir.

Friedrich Nietzsche.

Resumo

Neste trabalho, definimos o conceito de problema de equilíbrio e, ao considerarmos bi-funções que satisfazem certas propriedades, apresentamos resultados que asseguram a existência de soluções para tais problemas. Apresentamos também um algoritmo do ponto proximal que cumpre todas as condições pré-estabelecidas e, portanto, se mostra eficiente na resolução dos problemas de equilíbrio abordados. Os resultados obtidos demonstram a viabilidade e eficácia desse algoritmo ao encontrar soluções para tais problemas.
Palavras-Chave: Problema de Equilíbrio, Resultado de existência, Algoritmo do Ponto Proximal.

Abstract

In this work, we define the concept of equilibrium problem and, when we consider bifunction that satisfy certain properties, we present results that ensure the existence of solutions for such problems. We also present a proximal point algorithm that fulfills all the pre-established conditions and, therefore, proves to be efficient in solving the approached equilibrium problems. The results obtained demonstrate the viability and effectiveness of this algorithm in finding solutions to such problems.
Keywords: Equilibrium Problem, Result of existence, Proximal Point Algorithm.

Sumário

Introdução

Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, fechado e não vazio e $F : K \times K \to \mathbb{R}$ uma bifunção satisfazendo $F(x, x) = 0$ para todo $x \in K$. O Problema de Equilíbrio $PE(F, K)$ consiste em:

$$\text{Encontrar } \ x^* \in K \text{ tal que } \ F(x^*, y) \geqslant 0 \text{ para todo } y \in K. \tag{1}$$

O Problema de Equilíbrio foi considerado e introduzido inicialmente por Fan (1961), entretanto o mesmo ficou bastante conhecido e recebeu essa denominação "Problema de Equilíbrio", devido ao trabalho de Blum e Oettli (1984). O Problema (1) é bastante amplo, no sentido de que ele inclui, entre seus casos particulares, problemas de otimização, problemas de desigualdades variacionais, problemas de equilíbrio de Nash na teoria de jogos não cooperativos, dentre outros, para mais detalhes veja [2] e suas referências. Devido a esta vasta aplicabilidade, os problemas de equilíbrio são amplamente estudados, veja por exemplo em: [1, 4, 5, 10, 12, 13, 17, 18].

Uma das técnicas bastante utilizada para resolver o problema $PE(F, K)$, é que em cada iteração k, é resolvido um subproblema $PE(F_k, K)$ onde F_k é uma função de regularização do "tipo-proximal" da bifunção F, que cumpre as propriedades $(P1)-(P5)$ (ver no capítulo 2 suas definições), com essa regularização garantimos existência de solução para cada subproblema, como também propriedades importantes para a análise de convergência da sequência gerada pelo método. Neste sentido, usando essa técnica, Iusem e Sosa (2010) definiram a seguinte função de regularização:

$$F_k(x, y) = F(x, y) + \lambda_k \langle x - x^k, y - x \rangle, \tag{2}$$

onde $\lambda_k > 0$ e $x^k \in K$ são dados. No cenário das variedades de Hadamard Colão et al. (2012), consideraram uma extensão da função regularizadora dada em (2), definida por:

$$F_k(x, y) = F(x, y) - \lambda_k \langle \exp_x^{-1} x^k, \exp_x^{-1} y \rangle. \tag{3}$$

A função definida em (3) cumpre as propriedades $(\mathsf{P1}) - (\mathsf{P5})$, entretanto a propriedade $(\mathsf{P2})$ (convexidade de F na segunda variável) somente é válida se, a variedade de Hadamard possui curvatura seccional nula. Em Bento at al. (2018) propuseram uma nova função regularizadora em variedades de Hadamard, dada por:

$$\mathsf{F}_k(x, y) = \mathsf{F}(x, y) + \lambda_k[d^2(y, x^k) - d^2(x, x^k)]. \tag{4}$$

Cuja convexidade não impõe nenhuma hipótese restritiva sobre variedade de Hadamard, ou seja, F_k cumpre a propriedade $(\mathsf{P2})$ sem nenhuma suposição sobre a curvatura seccional da variedade de Hadamard, além também de cumprir as outras propriedades.

Neste trabalho iremos estabelecer condições necessárias e/ou suficientes para existência de solução do problema $\mathsf{PE}(\mathsf{F}, \mathsf{K})$, baseado no artigo Iusem e Sosa [12]. Além disso, iremos também resolver o problema $\mathsf{PE}(\mathsf{F}, \mathsf{K})$ usando a função regularizadora dada em (4) baseado no artigo de Bento at al. (2018), no cenário euclidiano. Observamos que mesmo em $\mathbb{R}^n$ a função regularizadora em (4) difere da função regularizadora em (2), ou seja, as propostas desses artigos são diferentes.

Nesta dissertação, abordaremos um caso específico dentro do escopo desse tipo de problema. Para isso, no capítulo I apresentamos definições e resultados fundamentais de análise em $\mathbb{R}^n$ e análise convexa, que serão utilizados ao longo dos capítulos subsequentes. No capítulo II, introduzimos o Problema de Equilíbrio, estabelecendo hipóteses sobre F e demonstrando condições sob as quais é possível garantir a existência de soluções para esses problemas. No capítulo III, apresentamos um algoritmo proximal e analisamos sua convergência dentro dos parâmetros estabelecidos.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados básicos sobre o espaço $\mathbb{R}^n$, com a ressalva de que abordaremos somente o essencial para os capítulos posteriores. Como referências vejam [6, 15, 16].

1.1 Análise no $\mathbb{R}^n$

Definição 1.1.1. *Um produto interno no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma regra que faz corresponder a cada par de vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ um número real, denotado por $\langle x, y\rangle$, de modo que, para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ se tenha:*

1. $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$;

2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

3. $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$;

4. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle$;

Portanto, o produto interno é uma função $\langle . \, , . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ simétrica, bilinear e positiva definida. O produto interno canônico do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, é dado por:

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n,$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Usaremos o produto interno canônico ao longo deste trabalho.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escrevemos $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, isto é,

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

O número $||x||$ chama-se a norma euclidiana de x ou o comprimento do vetor $x \in \mathbb{R}^n$. Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ dizem-se ortogonais quando $\langle x, y\rangle = 0$.

Exemplo 1.1.1. *Dados* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *, com* $y \neq 0$ *e considerando* $\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{||y||^2}$ *, temos que* $z = x - \alpha y$ *é ortogonal a* y*. De fato,*

$$\langle z, y\rangle = \langle x - \alpha y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \alpha\langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \alpha||y||^2 = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0.$$

Teorema 1.1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, tem-se* $||\langle x, y\rangle|| \leqslant ||x|| \cdot ||y||$*. Valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores* x, y *é múltiplo escalar do outro.*

Demonstração: Veja [15, Teorema 1, página 5]. ■

A norma euclidiana $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ satisfaz as seguinte propriedades, com $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|\alpha|$ é o valor absoluto do número real α:

1. $x \neq 0 \Rightarrow ||x|| > 0$;

2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$;

3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$;

As duas últimas são evidentes e a primeira propriedade segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Através da norma obtemos a distância entre dois pontos do $\mathbb{R}^n$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, a distância de x a y é definida por:

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Das propriedades da norma mostradas anteriomente, segue que, dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ temos:

1. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$;

3. $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$;

Após as definições anteriores, podemos agora introduzir alguns elementos importantes da topologia do $\mathbb{R}^n$. Uma bola aberta de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor do que r . Denotaremos esse conjunto por $B(a;r)$. Assim,

$$B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \|x - a\| < r\},$$

analogamente definimos a bola fechada $B[a;r]$ e a esfera $S[a;r]$ ambas com centro a e raio r, denotadas por:

$$B[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leqslant r\} \text{ e } S[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$$

Observe que $B[a;r] = B(a;r) \cup S[a;r]$.

Definição 1.1.2. *Seja um subconjunto* $K \subset \mathbb{R}^n$. *Um ponto* $a \in K$ *chama-se um ponto interior a* K *quando é centro de alguma bola aberta contida em* K. *O interior de* K *denotado por* $\mathrm{int}(K)$ *é o conjunto de todos os pontos interiores a* K. *Um conjunto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores.*

Exemplo 1.1.2. *Uma bola aberta* $B(a;r) \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto aberto.*

Exemplo 1.1.3. *Considere* $K = \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3, ..., n\}$. *Então,* $\mathrm{int}(K) = \mathbb{R}^n_{++} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0, i = 1, 2, 3, ..., n\}$.

Proposição 1.1.1. *A união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto. A interseção finita de conjuntos abertos é aberto.*

Demonstração: Veja [6, Proposição 3.1, página 24]. ■

Definição 1.1.3. *Dizemos que um subconjunto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é limitado se existe* $r > 0$ *tal que* $K \subset B(0, r)$.

Definição 1.1.4. *Dizemos que* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto fechado se* K^c *é aberto, onde* $K^c = \mathbb{R}^n \setminus K = \{x \in \mathbb{R}^n |\ x \notin K\}$.

Proposição 1.1.2. *A interseção qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado. A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração: Veja [6, Proposição 3.2, página 25]. ■

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Denotaremos por $\{x^k\}$ ou $(x^1, x^2, ..., x^k, ...)$ a sequência x tal que $x(k) = x^k$, quando o contradomínio de x for $\mathbb{R}$ denotaremos por $\{x_k\}$. Uma subsequência de $\{x^k\}$ é a restrição da sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 < ...k_i < ...\} \subset \mathbb{N}$, a qual denotaremos por $\{x^{k_i}\}$ e $\{x_{k_i}\}$ no caso real. Diz-se que uma sequência $\{x^k\}$ é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado em $\mathbb{R}^n$, ou seja, quando existe um número real $c > 0$ tal que $||x^k|| \leqslant c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência de pontos $\{x^k\}$ quando para todo $\epsilon > 0$ dado, é possivel obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow ||x^k - a|| < \epsilon$. Neste caso, diz-se também que $\{x^k\}$ converge para a ou tende para a, denotaremos por $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$ ou $x^k \to a$. Quando existe $a = \lim\limits_{k\to\infty} x^k$, a sequência $\{x^k\}$ é dita convergente. Caso contrário, é dita divergente.

Definição 1.1.5. *Dizemos que* $a \in \mathbb{R}^n$ *é um valor de aderência de uma sequência* $\{x^k\}$*, quando alguma subsequência de* $\{x^{k_j}\}$ *converge para* a*.*

Observação 1.1.1. *(i) Em termos de bolas, tem-se* $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$ *se, e somente se, qualquer bola aberta de centro* a *contém todos os termos* x^k *salvo, possivelmente para um número finito de índices* k*.*
(ii) Segue da observação acima que toda sequência convergente é limitada.
(iii) Segue-se também da caracterização do limite por meio de bolas que se $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$ *então toda subsequência de* (x^k) *tem ainda limite igual a* a*, ou seja, toda subsequência de uma sequência convergente é ainda convergente e o mesmo limite.*
(iv) O limite de uma sequência convergente é único.

Exemplo 1.1.4. *A recíproca do item (ii) da observação anterior não é verdadeira, por exemplo, a sequência (a,b,a,b,a,b,...) com* $a \neq b$ *é limitada, mas não é convergente, pois possui 2 valores de aderência.*

Vejamos a seguir um resultado que garante que para toda sequência limitada o conjuntos dos pontos de aderências é não vazio.

Teorema 1.1.2. *(Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada em* $\mathbb{R}^n$ *possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Veja [15, Teorema 5, página 17]. ■

Proposição 1.1.3. *Uma sequência limitada em* $\mathbb{R}^n$ *é convergente se, e somente se, possui um único valor de aderência.*

Demonstração: Veja [15, Teorema 6, página 17]. ■

Definição 1.1.6. *Sejam* $K \subset \mathbb{R}^n$ *não-vazio e* $f : K \to \mathbb{R}$ *uma função:*

(i) f *é dita semicontínua inferiormente no ponto* $\overline{x} \in K$*, quando para qualquer sequência* $x^k \to \overline{x}$*, tem-se que:*

$$f(\overline{x}) \leqslant \liminf_{k\to\infty} f(x^k).$$

(ii) f *é dita semicontínua superiormente no ponto* $\overline{x} \in K$*, quando para qualquer sequência* $x^k \to \overline{x}$*, tem-se que:*

$$f(\overline{x}) \geqslant \limsup_{k\to\infty} f(x^k).$$

Uma função f é dita semicontínua inferiomente (superiormente) em K quando ela é semicontínua inferiormente (superiormente) em todos os pontos de K.

Definição 1.1.7. *Seja* $f : K \to \mathbb{R}$*, dizemos que* f *é contínua em* $\overline{x} \in K$ *quando para toda sequência* $\{x^k\} \subset K, x^k \to \overline{x}$ *temos que* $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(\overline{x})$.

Observação 1.1.2. *(i) A aplicação f é contínua no ponto* $\overline{x} \in K$ *se, e somente se, ela for semicontínua inferiormente e semicontínua superiormente em* $\overline{x}$*.*
(ii) A aplicação f é contínua em K*, quando ela é contínua em todos os pontos de* K *.*

Proposição 1.1.4. *Sejam* $K \subset \mathbb{R}^n$ *não-vazio e* $f, g, h : K \to \mathbb{R}$ *funções tais que* f *é contínua,* g *semicontínua inferiomente e* h *semicontínua superiormente em* K*. Então,*

(i) $f + g$ *é semicontínua inferiomente;*

(ii) $f + h$ *é semicontínua superiormente.*

Demonstração: (i) Sejam f contínua e g semicontínua inferiomente em K. Assim, para $\overline{x} \in K$, temos que $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(\overline{x}) = \liminf_{k\to\infty} f(x^k)$ e $g(\overline{x}) \leqslant \liminf_{k\to\infty} g(x^k)$. Assim,

$$(f+g)(\overline{x}) \leqslant \liminf_{k\to\infty} f(x^k) + \liminf_{k\to\infty} g(x^k) \leqslant \liminf_{k\to\infty} (f+g)(x^k).$$

Sendo que na última desigualdade acima usamos propriedades do $\liminf$.
(ii) Sejam f contínua e h semicontínua superiormente em K. Assim, para $\overline{x} \in K$, temos que $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(\overline{x}) = \limsup_{k\to\infty} f(x^k)$ e $h(\overline{x}) \geqslant \limsup_{k\to\infty} h(x^k)$. Assim,

$$(f+h)(\overline{x}) \geqslant \limsup_{k\to\infty} f(x^k) + \limsup_{k\to\infty} h(x^k) \geqslant \limsup_{k\to\infty} (f+h)(x^k).$$

■

Sendo que na última desigualdade acima usamos propriedades do $\limsup$.

Definição 1.1.8. *Dado um conjunto não vazio* $K \subset \mathbb{R}^n$ *e um ponto* $y \in \mathbb{R}^n$*, a distância de* y *a* K *, denotada por* $d_K(y)$*, é dada por:*

$$d_K(y) = \inf_{z \in K} ||y - z||$$

Vejamos adiante que a distância sempre existe quando um conjunto em questão é não vazio e fechado.

Proposição 1.1.5. *Dado* $x \in \mathbb{R}^n$*. Se* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é fechado e não vazio, então existe* $y_0 \in K$ *tal que* $d_K(x) = ||x - y_0||$

Demonstração: Veja [15, Corolário 1, página 52]. ■

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto . Uma coleção $(F_\lambda)_{\lambda \in I}$ de subconjunto de K é dita uma cobertura de K se:

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in I} F_\lambda.$$

A cobertura $(F_\lambda)_{\lambda \in I}$ é dita finita se I tem uma quantidade finita de elementos. A cobertura $(F_\lambda)_{\lambda \in I}$ é dita aberta se, todo F_λ é aberto para todo $\lambda \in I$.

Definição 1.1.9. *Um conjunto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é dito compacto quando toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.*

Teorema 1.1.3. *Todo conjunto compacto é fechado e limitado.*

Demosntração: Veja [6, Proposição 3.4, página 26]. ■

Proposição 1.1.6. *Seja* $F \subset K \subset \mathbb{R}^n$ *com F fechado e K compacto. Então, F é compacto.*

Demonstração: Veja [6, Proposição 3.5, página 27]. ■

Definição 1.1.10. *Uma coleção* $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de subconjuntos de* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é dito ter a propriedade de interseção finita se para todo subconjunto finito* $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\} \subset L$ *tem-se que a interseção* $\bigcap_{i=1}^{m} F_{\lambda_i} \neq \emptyset$.

Teorema 1.1.4. *Um subconjunto* $F \subset \mathbb{R}^n$ *é compacto se, e somente se, para qualquer coleção* $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de conjuntos fechados em* F *tem-se a propriedade de interseção finita.*

Demonstração: Veja [16, Páginas 169-170]. ■

1.2 Análise Convexa

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de conjuntos convexos, funções convexas e subdiferencial. Lembrando que nosso objetivo não é expor um curso do mesmo, e sim, destacar as ferramentas que nos serão úteis posteriomente. Para mais detalhes sobre as definições e resultados veja [14].

Definição 1.2.1. *Um conjunto* $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^n$ *é convexo se para quaisquer* $x, y \in \mathsf{K}$ *e* $\lambda \in [0,1]$, *tem-se que* $\lambda x + (1+\lambda)y \in \mathsf{K}$.

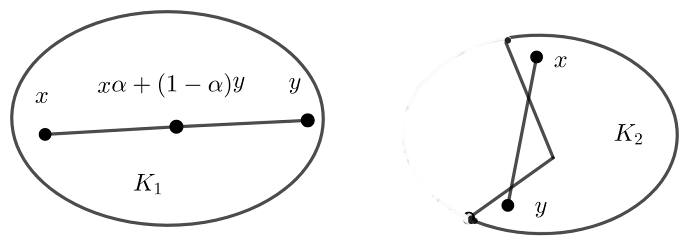

Figura 1.1: O conjunto K_1 é convexo; O conjunto K_2 não é convexo.

Exemplo 1.2.1. *Todo subespaço de* $\mathbb{R}^n$ *e toda bola são conjuntos convexos em* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.2.2. *Sejam* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *e* $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^m$. *Então,* $\mathsf{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathsf{A}x = \mathsf{b}\}$ *é um conjunto convexo em* $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.2.1. *Sejam* $\mathsf{K}_i \subset \mathbb{R}^n, \mathsf{K}_i$ *sunconjuntos convexos,* $i \in \mathrm{I}$, *onde* I *é um conjunto qualquer (possivelmente infinito). Então a interseção* $\mathsf{K} = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathsf{K}_i$ *também é um conjunto convexo.*

Demonstração: Ver [14, Proposição 3.2.1, página 70]. ■

Proposição 1.2.2. *Seja* $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo. Então o* $\mathrm{int}(\mathsf{K})$ *é um conjunto convexo.*

Demonstração: Veja [14, Proposição 3.2.4, página 71]. ■

Definição 1.2.2. *Dados* $z^i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \in [0,1]$ $i = 1,2,...,p$ *tais que* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, *o ponto* $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i z^i$ *chama-se combinação convexa dos pontos* $z^i \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.1. *Um conjunto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é convexo se, e somente se, para quaisquer* $p \in \mathbb{N}, z^i \in K$ *e* $\lambda_i \in [0,1], i = 1,2,3,...,p$ *tais que* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ *a combinação convexa* $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i z^i$ *pertence a K.*

Demonstração: Veja [14, Teorema 3.2.8, página 73]. ■

Definição 1.2.3. *Seja* $K \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto qualquer. O fecho convexo de D, denotado por* $\text{conv}(K)$ *é o menor conjunto convexo em* $\mathbb{R}^n$ *que contém K.*

A figura a seguir ilustra a Definição 1.2.3.

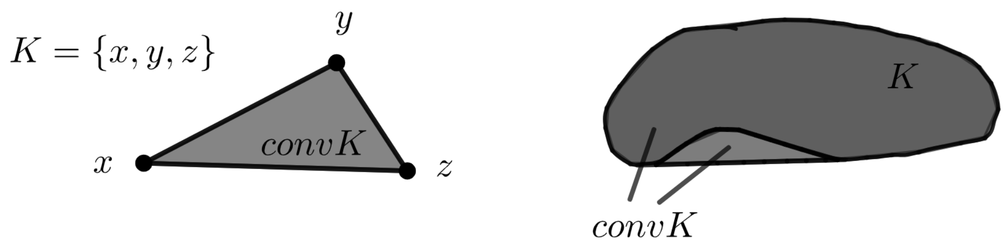

Figura 1.2: Exemplos de fecho convexo de conjuntos.

Proposição 1.2.3. *Seja* $K \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto qualquer. O fecho convexo de K é o conjunto de todas as combinações convexas de pontos de K.*

Demonstração: Veja [14, Proposição 3.2.13, página 78]. ■

Proposição 1.2.4. *Seja* $K \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto compacto. Então conv*(K) *é compacto.*

Demonstração: Veja [14, Proposição 3.2.14, página 79]. ■

Definição 1.2.4. *Se* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto convexo, dizemos que a função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é convexa em* K *quando, para quaisquer* $x, y \in K$ *e* $\lambda \in [0,1]$ *tem-se que:*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

O resultado abaixo segue-se direto da definição acima.

Proposição 1.2.5. *Sejam* $K \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo e* $f_i : K \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, ..., p$ *funções convexas no conjunto* K. *Então para quaisquer* $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, ..., p$, *a função* $f : K \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(x),$$

é convexa em K.

Demonstração: Sejam $x, y \in K$ e $\lambda \in [0, 1]$ tem-se que

$$f_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f_i(x) + (1 - \lambda)f_i(y).$$

para $i = 1, 2, 3, ..., p$. Sendo $\alpha_i \geqslant 0$, obtemos que

$$\alpha_i f_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda\alpha_i f_i(x) + (1 - \lambda)\alpha_i f_i(y).$$

Daí, segue que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(x) + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(y).$$

Portanto, f é convexa em K. ■

Exemplo 1.2.3. *As funções* $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f_1(x) = ||x||^2$ *e* $f_2(x) = -\langle x, a\rangle + ||a||^2$ *com* $a \in \mathbb{R}^n$, *são funções convexas. De fato, para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in [0, 1]$, *temos que*

$$\begin{aligned} f_1((1 - \lambda)x + \lambda y) &= f_1(x + \lambda(y - x)) = ||x + \lambda(y - x)||^2 \\ &= ||x||^2 + 2\lambda\langle x, y - x\rangle + \lambda^2||y - x||^2 \\ &\leqslant ||x||^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle - 2\lambda||x||^2 + \lambda||y - x||^2 \\ &\leqslant ||x||^2 + \lambda(||y||^2 - ||x||^2) = f_1(x) + \lambda(f_1(y) - f_1(x)). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2((1 - \lambda)x + \lambda y) &= -\langle(1 - \lambda)x + \lambda y, a\rangle + ||a||^2 \\ &= -(1 - \lambda)\langle x, a\rangle - \lambda\langle y, a\rangle + (1 - \lambda)||a||^2 + \lambda||a||^2 \\ &= (1 - \lambda)[-\langle x, a\rangle + ||a||^2] + \lambda[-\langle y, a\rangle + ||a||^2] \\ &= (1 - \lambda)f_2(x) + \lambda f_2(y). \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 1.2.5 temos que $d^2(x, a) = ||x - a||^2 = ||x||^2 - \langle x, a\rangle + ||a||^2$ *é também convexa.*

Definição 1.2.5. *O epígrafo de uma função* $f : K \to \mathbb{R}$ *é o conjunto*

$$E_f = \{(x, \alpha) \in K \times \mathbb{R}; f(x) \leqslant \alpha\}.$$

O teorema abaixo estabelece uma relação entre a convexidade de uma função e seu epígrafo.

Teorema 1.2.2. *Seja* $K \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo. Uma função* $f : K \to \mathbb{R}$ *é convexa em K se, e somente se, o epígrafo de f é um conjunto convexo em* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Demonstração: Veja [14, Teorema 3.1.15, página 67]. ∎

Decorre dos Teoremas 1.2.1 e 1.2.2, o seguinte corolário.

Corolário 1.2.1. *(Desigualdade de Jesen) Sejam* $K \subset \mathbb{R}^n$ *e* $f : K \to \mathbb{R}$ *uma função convexa em K. Então para quaisquer* $p \in \mathbb{N}$, $z^i \in K$ *e* $\lambda_i \geqslant 0, i = 1, 2, ..., p$ *tais que* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ *tem-se que*

$$f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i z^i) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(z^i).$$

Demonstração: Veja [14, corolário 3.2.9, página 74]. ∎

1.2.1 O subdiferencial de funções Convexas

Definição 1.2.6. *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Dizemos que* $y \in \mathbb{R}^n$ *é um subgradiente de* f *no ponto* $x \in \mathbb{R}^n$ *se*

$$f(z) \geqslant f(x) + \langle y, z - x \rangle, \ \forall \ z \in \ \mathbb{R}^n.$$

O subconjunto de todos os subgradientes de f *chama-se subdiferencial de* f *em* x*, denotado por:*

$$\partial f(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid f(z) \geqslant f(x) + \langle y, z - x \rangle \ \forall \ z \in \mathbb{R}^n\}.$$

Em outras palavras o subgradiente define uma aproximação linear de f cujo gráfico fica abaixo do gráfico de f e cujo valor coincide com f no ponto x.

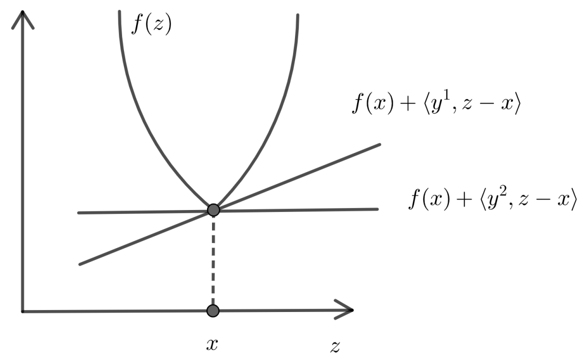

Figura 1.3: Os elementos y^1 e y^2 são subgradientes de f em x, isto é, para todo z tem-se que $f(z) \geqslant f(x) + \langle y^i, z - x\rangle$, $i = 1, 2$.

Teorema 1.2.3. *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Então, para todo* $x \in \mathbb{R}^n$, *o conjunto* $\partial f(x)$ *é convexo, compacto e não-vazio.*

Demonstração: Veja [14, Teorema 3.4.52, página 154]. ■

Proposição 1.2.6. *Uma função convexa* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é diferenciável no ponto* $x \in \mathbb{R}^n$ *se, e somente se, o conjunto* $\partial f(x)$ *contém um elemento só. Neste caso,* $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

Demonstração. Veja [14, Proposição 3.4.53, página 156]. ■

Proposição 1.2.7.*(O subdiferencial da soma de funções convexas)Sejam* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., p$ *funções convexas. Então,*

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{p} f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{p} \partial f_i(x).$$

Demonstração: Veja [14, Proposição 3.4.53 página 156]

■

Teorema 1.2.4. *(Condição de Otimalidade para minimização de função em conjunto convexo) Sejam* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função convexa e* $K \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo. Então* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *é um minimizador de* f *em* K *se, e somente se,*

$$\textit{Existe } y \in \partial f(x^*) \textit{ tal que } \langle y, x - x^*\rangle \geqslant 0 \ \forall \ x \ \in K. \tag{1.1}$$

Demonstração. Veja [14, Teorema 3.4.54, página 57]. ■

Capítulo 2

Problema de Equilíbrio

Neste capítulo, baseado em Iusem e Sosa (2009), apresentamos uma condição suficiente para a existência de soluções de problemas de equilíbrio.

2.1 Definição do Problema

Para os nossos estudos vamos considerar $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, fechado e não vazio. Dada uma bifunção $F : K \times K \to \mathbb{R}$, o problema de equilíbrio $PE(F, K)$ consiste em :

$$\textit{Encontrar} \;\; x^* \in K \textit{ tal que } F(x^*, y) \;\geqslant\; 0 \;\; \forall\, y \in K.$$

Essa formulação foi proposta por Blum e Oetlli (1994), e F foi denominada de bifunção de equilíbrio se satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $F(x, x) = 0$, para todo $x \in K$;

(P2) $F(x, \cdot) : K \to \mathbb{R}$ é convexa e semicontínua inferiormente para todo $x \in K$;

(P3) $F(\cdot, y) : K \to \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente para todo $y \in K$.

O conjunto solução do problema de equilíbrio $PE(F, K)$ será denotado como $S(F, K)$. Estamos interessados agora no problema de viabilidade convexa, a ser denotado por $PVC(F, K)$, e sua relação com $PE(F, K)$. O Problema $PVC(F, K)$ consiste em:

$$\text{Encontrar } x^* \in \bigcap_{y \in K} L_F(y), \;\text{ onde } L_F(y) = \{x \in K : F(y, x) \leqslant 0\}.$$

Vamos denotar o conjunto solução de $PVC(F, K)$ por $S_V(F, K)$.

Observação 2.1.1. *Note que, para cada* $y \in K$ *o conjunto* $L_F(y)$ *é não-vazio, convexo e fechado. De fato, por* $(P1)$ *temos que* $F(y, y) = 0$*, e por* $(P2)$*, isto é,* $F(y, \cdot)$ *é convexa e semicontínua inferiormente, e unidando ao fato de que* K *é fechado e convexo, obtemos o afirmado.*

O próximo resultado estabelece uma relação entre $PVC(F, K)$ e $PE(F, K)$.

Proposição 2.1.1. *Se* F *satisfaz* $(P1) - (P3)$*, então* $S_V(F, K) \subset S(F, K)$*.*

Demonstração: Sejam $x \in S_V(F, K)$ e $y \in K$. Defina $w_t = (1 - t)x + ty$ onde $t \in (0, 1)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} 0 = F(w_t, w_t) &= F(w_t, (1-t)x + ty) \\ &\leqslant (1-t)F(w_t, x) + tF(w_t, y) \;\forall\; t \in (0,1). \end{aligned}$$

Sendo que $x \in S_V(F, K)$ e $w_t \in K$ (pois K é convexo), então $F(w_t, x) \leqslant 0$ para todo $t \in (0, 1)$, daí $0 \leqslant tF(w_t, y)$ para todo $t \in (0, 1)$. Logo, $0 \leqslant F(w_t, y)$ para todo $t \in (0, 1)$. Escolha a sequência $t_k = \dfrac{1}{k} \in (0, 1)$, como $t_k \to 0$ quando $k \to \infty$ temos que $(1 - t_k)x + t_k y \to x$. Logo, por $(P3)$

$$0 \leqslant \limsup_{k\to\infty} F(w_{t_k}, y) \leqslant F(x, y) \quad \forall\; y \in K. \tag{2.1}$$

Portanto, $x \in S(F, K)$. ■

Consideraremos as seguintes propriedades adicionais sobre F, afim de garantir a igualade entre os conjuntos $S(F, K)$ e $S_V(F, K)$.

(P4) $F(x, y) + F(y, x) \leqslant 0 \; \forall (x, y) \in K \times K$, isto é, F é monótona;

(P4*) Se para cada $(x, y) \in K \times K$, $F(x, y) \geqslant 0$ implica $F(y, x) \leqslant 0$, isto é, F é pseudo-monótona.

Observação 2.1.2. *Se vale* $(P4)$*, então vale* $(P4^*)$*.*

Exemplo 2.1.1. *Considere* $K = \mathbb{R}^n_+$ *e a bifunção* $F : K \times K \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x, y) = \langle x, y - x\rangle = \langle x, y\rangle - ||x||^2.$$

Então, F *sastifaz* $(P1) - (P4)$ *e* $S_V(F, K) = S(F, K)$*. Vejamos,*

$(P1)$ $F(x, x) = \langle x, x - x\rangle = 0$.

$(\mathsf{P2})$ *Pois a função* $y \mapsto \langle x, y - x\rangle$ *é afim, portanto convexa e contínua.*

$(\mathsf{P3})$ *Pois a função* $x \mapsto \langle x, y - x\rangle$, *é contínua.*

$(\mathsf{P4})$ *Observe que,*

$$\begin{aligned} F(x,y) + F(y,x) &= \langle x, y\rangle - ||x||^2 + \langle y, x\rangle - ||y||^2 \\ &= -||x||^2 + 2\langle x, y\rangle - ||y||^2 \\ &= -(||x|| - ||y||)^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Agora vamos encontrar $S_V(F,K)$ *e* $S(F,K)$. *Seja* $x \in K$ *tal que* $\forall\ y \in K$ *temos,*

$$F(y,x) \leqslant 0 \Rightarrow \langle y, x\rangle - ||y||^2 \leqslant 0 \Rightarrow \langle y, x\rangle \leqslant ||y||^2,$$

daí concluimos que $S_V(F,K) = \{0\}$. *Por outro lado, seja* $x \in K$ *tal que* $\forall\ y \in K$

$$F(x,y) \geqslant 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle - ||x||^2 \geqslant 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle \geqslant ||x||^2,$$

donde concluimos que $S(F,K) = \{0\}$.

O exemplo abaixo (veja [9, Exemplo 3.1]) temos que F satisfaz $(\mathsf{P4}^*)$, mas não satisfaz $(\mathsf{P4})$.

Exemplo 2.1.2. *Considere* $K = [-3, \infty)$ *e a bifunção de equilíbrio* $F : K \times K \to \mathbb{R}$ *definida por* $F(x,y) = \dfrac{1}{a}(x^2+2)(y-x)$ *com* $a > 0$. *Então,* F *sastifaz* $(\mathsf{P4}^*)$, *mas não satisfaz* $(\mathsf{P4})$. *Vejamos,*

$(\mathsf{P4}^*)$ *Para cada* $x, y \in K$ *tal que*

$$F(x,y) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{a}(x^2+2)(y-x)0 \Rightarrow y \geqslant x.$$

Sendo, $y \geqslant x \Rightarrow x - y \leqslant 0$, *temos*

$$F(y,x) = \frac{1}{a}(y^2+2)(x-y) \Rightarrow F(y,x) \leqslant 0.$$

$(\mathsf{P4})$ *Para todo* $x, y \in K$ *tal que*

$$F(x,y) + F(y,x) = \frac{1}{a}(x^2+2)(y-x) + \frac{1}{a}(y^2+2)(x-y) = \frac{1}{a}\Big[-(x+y)(x-y)^2\Big].$$

Portanto, existem $x, y \in K$ *tal que* $F(x,y) + F(y,x) > 0$.

A propriedade que nos garante a igualdade entre os conjuntos $S(F,K)$ e $S_V(F,K)$ é a propriedade $(\mathsf{P4}^*)$. Vejamos.

Proposição 2.1.2. *Se F satisfaz* $(\mathsf{P1}) - (\mathsf{P3})$ *e* $(\mathsf{P4}^*)$, *então* $\mathsf{S}(\mathsf{F},\mathsf{K}) = \mathsf{S}_\mathsf{V}(\mathsf{F},\mathsf{K})$.

Demonstração: Seja $x \in \mathsf{S}(\mathsf{F},\mathsf{K})$ então $\mathsf{F}(x,y) \geqslant 0 \ \forall \ y \in \mathsf{K}$, pela pseudomonotonicidade temos $\mathsf{F}(y,x) \leqslant 0$, o que implica que $x \in \mathsf{S}_\mathsf{V}(\mathsf{F},\mathsf{K})$. Isso junto a Proposição 2.1.1 mostra que os conjuntos $\mathsf{S}(\mathsf{F},\mathsf{K}) = \mathsf{S}_\mathsf{V}(\mathsf{F},\mathsf{K})$. ∎

O exemplo a seguir (veja [12]) de uma função de equilíbrio (isto é, satisfaz $(\mathsf{P1})-(\mathsf{P3})$) mostra que a inclusão pode ser própria.

Exemplo 2.1.3. *Considere* $\mathsf{K} = [0,a]$ *com* $a > 0$ *e defina* $\mathsf{F} : \mathsf{K} \times \mathsf{K} \to \mathbb{R}$ *pondo*

$$\mathsf{F}(x,y) = \begin{cases} -\frac{y}{x} + 1, & \textit{se} \quad x > 0, \\ 0, & \textit{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Sejam $(x,y) \in \mathsf{K} \times \mathsf{K}$ tal que $\mathsf{F}(x,y) \geqslant 0$. Temos que

(i) Se $x = 0$, então $\mathsf{F}(x,y) = 0 \geqslant 0$ para todo $y \in \mathsf{K}$, daí conclui-se que $0 \in \mathsf{S}(\mathsf{F},\mathsf{K})$;

(ii) Se $x > 0$, então $\mathsf{F}(x,y) = -\frac{y}{x} + 1 \geqslant 0 \Rightarrow y \leqslant x \ \forall \ y \in \mathsf{K}$, daí conclui-se que $a \in \mathsf{S}(\mathsf{F},\mathsf{K})$;

Logo, $\mathsf{S}(\mathsf{F},\mathsf{K}) = \{0,a\}$. Agora, vamos determinar $\mathsf{PVC}(\mathsf{F},\mathsf{K})$, isto é

$$\begin{aligned} \bigcap_{y \in \mathsf{K}} \mathsf{L}_\mathsf{F}(y) &= \bigcap_{y \in [0,a]} \{x \in \mathsf{K}; \mathsf{F}(y,x) \leqslant 0\} \\ &= \bigcap_{y \in [0,a]} \{x \in \mathsf{K}; y \leqslant x\} \\ &= \bigcap_{y \in [0,a]} [y,a] = \{a\}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathsf{S}_\mathsf{V}(\mathsf{F},\mathsf{K}) = \{a\}$, implicando que $\mathsf{S}_\mathsf{V}(\mathsf{F},\mathsf{K}) \subsetneq \mathsf{S}(\mathsf{F},\mathsf{K})$. Esse fato ocorreu devido a F não satisfazer $(\mathsf{P4}^*)$, com efeito, $\mathsf{F}(0,a) = 0 \geqslant 0$, entretanto $\mathsf{F}(a,0) = -\dfrac{0}{a} + 1 = 1 \geqslant 0$.

Agora, para cada $p \in \mathbb{N}$ considere os seguintes conjuntos

$$\mathsf{K}_p := \{x \in \mathsf{K} \ ; \|x\| \leqslant p\} \text{ e } \mathsf{K}_p^0 := \{x \in \mathsf{K} \ ; \|x\| < p\}.$$

Defina também para cada $y \in \mathsf{K}$

$$\mathsf{L}_\mathsf{F}(p,y) = \{x \in \mathsf{K}_p \ ; \mathsf{F}(y,x) \leqslant 0\}.$$

Lema 2.1.1. *Suponha que F satisfaça* (P1) − (P3)*. Se para algum* $p \in \mathbb{N}$ *e algum* $\overline{x} \in \bigcap_{y \in K_p} L_F(p, y)$*, existe* $\overline{y} \in K_p^0$ *tal que* $F(\overline{x}, \overline{y}) \leqslant 0$*, então* $F(\overline{x}, y) \geqslant 0$ *para todo* $y \in K$*, isto é,* $\overline{x} \in S(F, K)$.

Demonstração: Se $\overline{x} \in \bigcap_{y \in K_p} L(p, y)$ então, temos que $F(y, \overline{x}) \leqslant 0 \ \forall \ y \in K_p$. Logo, pela Proposição 2.1.1 obtemos que $F(\overline{x}, y) \geqslant 0 \ \forall \ y \in K_p$. Assim necessitamos apenas provar que $F(\overline{x}, y) \geqslant 0 \ \forall \ y \in K \setminus K_p$. Dado $y \in K \setminus K_p$ e seja $\overline{y} \in K_p^0$, assim existe $t \in (0, 1)$ tal que $z = (1 - t)y + t\overline{y} \in K_p$. De (P2) e do fato $F(\overline{x}, \overline{y}) \leqslant 0$, obtemos que,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant F(\overline{x}, z) &\leqslant (1 - t)F(\overline{x}, y) + tF(\overline{x}, \overline{y}) \\ &\leqslant (1 - t)F(\overline{x}, y). \end{aligned}$$

Portanto, $F(\overline{x}, y) \geqslant 0$ e $y \in K \setminus K_p$, do qual segue o afirmado. ■

O lema a seguir foi provado por Fan em 1961, que dará uma condição suficiente para a existência de soluções de $PVC(F, K)$.

Lema 2.1.2. *Seja* $K \subset \mathbb{R}^n$ *fechado, convexo , não vazio e* $F : K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *uma aplicação ponto-conjunto tal que, para* $y \in K$*,* $F(y)$ *é fechado. Suponha que*

(i) $\forall \ y_1, y_2, ..., y_m \in K, \mathrm{conv}(\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} F(y_j)$

(ii) Existe $y_0 \in K$ *tal que* $F(y_0)$ *é compacto.*

Então $\bigcap_{y \in K} F(y) \neq \emptyset$.

Através do lema acima e uma hipótese adicional sobre a F, iremos estabelecer uma propriedade necessária e suficiente para garanntir a existência de soluções para $PE(F, K)$. (P5) Para qualquer sequência $\{z^p\} \subset$ K tal que $\lim_{p \to \infty} ||z^p|| = +\infty$ existe $u \in K$ e $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F(z^p, u) \leqslant 0$ para todo $p > p_0$.

Observação 2.1.3. *Os Exemplos (2.1.3) e (2.1.1)satisfazem a propriedade acima.*

1. *No Exemplo 2.1.3 segue do fato de que, o conjunto* $K = [0, a]$ *é compacto.*

2. *No Exemplo 2.1.1 temos que*

$$F(x, y) = \langle x, y \rangle - ||x||^2 \Rightarrow F(x, y) \leqslant ||x||||y|| - ||x||^2.$$

Portanto, segue-se da desigualdade acima que F *satisfaz* $(P5)$.

Teorema 2.1.1. *Supondo que* F *satisfaz as propriedades* $(P1)-(P3)$ *e* $(P4^*)$. *Então* $PE(F,K)$ *tem solução se, e somente se,* $(P5)$ *é valida.*

Demonstração: $(\Leftarrow)$ Suponha que $(P5)$ seja válida. Vamos usar o Lema 2.1.2, com $K = K_p$ e $F(y) = L_F(p,y)$ para isto devemos verificar a validade de suas hipóteses.

Afirmação: $F(y) = L(p,y) = \{x \in K_p; F(y,x) \leqslant 0\}$ é fechado $\forall\ y \in K_p$.

De fato, dado $\{w^p\} \subset F(y)$ tal que $w^p \to x$, como K_p é fechado, $x \in K_p$ e por $(P2)$, tem-se $F(y,w^p) \leqslant 0 \Rightarrow F(y,x) \leqslant \liminf_{p\to\infty} F(y,w^p) \leqslant 0$, ou seja, $x \in F(y)$.

Verifiquemos as condições (i) e (ii) do lema.

(i) Sejam $w_1, w_2, ..., w_m \in K_p$ e $\overline{x} \in conv(\{w_1, w_2, ..., w_m\})$, então existem $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in [0,1]$ com $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$ tal que $\overline{x} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j$. Mostremos que $\overline{x} \in \bigcup_{j=1}^{m} L_F(p,w_j)$, isto é, $\overline{x} \in K_p$ e $F(w_j,\overline{x}) \leqslant 0$ para algum $j = 1,2,3,...,m$.

(1) $\overline{x} \in K_p$, segue do Teorema 1.2.1 pois K_p é convexo.

(2) $0 = F(\overline{x},\overline{x}) = F(\overline{x}, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F(\overline{x},w_j) \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant k} F(\overline{x},w_j)$, na desigualdade usamos a Desigualdade de Jensen e $(P2)$. Então $0 \leqslant F(\overline{x},w_j)$ para algum j. Da pseudomonotonicidade, segue que $F(w_j,\overline{x}) \leqslant 0$. Portanto, o fecho convexo de $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ está contindo em $\bigcup_{j=1}^{m} L_F(p,w_j)$.

(ii) $F(y)$ é compacto. Com efeito, Segue da Proposição 1.1.6, usando o fato de que $F(y) \subset K_p$, como K_p é compacto e $F(y)$ é fechado.

Logo, pelo Lema 2.1.2, temos que $\bigcap_{y\in K_p} L_F(p,y) \neq \emptyset$ para cada $p \in \mathbb{N}$.

Agora, para cada $p \in \mathbb{N}$ escolha $z^p \in \bigcap_{y\in K_p} L_F(p,y)$. Teremos dois casos a considerar:

(a) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|z^p\| < p$. Assim, $\|x^p\| \to +\infty$ quando $p \to \infty$. Neste caso $z^p \in K_p^0$ tal que $F(z^p,z^p) = 0$, assim pelo Lema 2.1.1, segue que z^p é solução do $PE(F,K)$.

(b) $\|z^p\| = p$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Neste caso, $(P5)$ assegura a existência de $u \in K$ e $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F(z^p,u) \leqslant 0$ para todo $p \geqslant p_0$. Escolha $p^* > p_0$ tal que $\|u\| < p^*$. Então $F(z^{p^*},u) \leqslant 0$ e $u \in K_{p^*}^0$, novamente, aplicando o Lema 2.1.1, concluimos que z^{p^*} é solução do $EP(F,K)$

($\Rightarrow$) Agora assuma que $\mathsf{EP}(F, K)$ tenha solução. Devemos verificar (P5). Escolha qualquer sequência $\{z^p\} \subset K \setminus \{0\}$ com $\|z^p\| \to \infty$. Seja x^* solução do $\mathsf{EP}(F, K)$, pela Proposição 2.1.2 temos que x^* é também solução de $\mathsf{PVC}(F, K)$, então $u = x^*$ temos que $F(z^p, u) \leqslant 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$ assim (P5) se verifica. ■

O resultado anterior é válido supondo a propriedade (P4). Diante dos resultados deste capítulo, já estamos em condição de definir um algoritmo para resolver o problema de equlíbrio, o qual faremos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Algoritmo do Ponto Proximal para Problema de Equilíbrio

Neste capítulo apresentaremos o algoritmo do ponto proximal para Problema de Equilíbrio, proposto por Bento et al [1], o qual faremos no cenário Euclideano.

3.1 Algoritmo do Ponto proximal

Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, fechado e não-vazio, e uma bifunção $F : K \times K \to \mathbb{R}$, o problema de equilíbrio (1), consiste em:

$$\textit{Encontrar} \ \ x^* \in K \ \textit{tal que} \ F(x^*, y) \ \geqslant \ 0 \ \ \forall \ y \in K.$$

A bifunção de equilíbrio F satisfaz $(P1) - (P3)$. Além disso, de agora em diante, vamos supor que F satifaz $(P4)$ e que o conjunto $S(F, K) \neq \emptyset$.

Antes de apresentar o algoritmo, vamos estudar algumas propriedades da função de regularização definida em (4), ou seja,

$$F_{\lambda,z}(x, y) = F(x, y) + \lambda \Big[||y - z||^2 - ||x - z||^2 \Big], \ \forall \ x, y \in K. \tag{3.1}$$

para $\lambda > 0$ e $z \in K$ fixos.

O próximo resultado será muito importante para garantir a boa definição do algoritmo

Lema 3.1.1. *A bifunção* $F_{\lambda,z}$ *satisfaz as propriedades* $(P1) - (P5)$.

Demonstração: Como F satisfaz $(P1)$, isto é, $F(x, x) = 0$, segue que

$$F_{\lambda,z}(x, x) = F(x, x) + \lambda \Big[||x - z||^2 - ||x - z||^2 \Big] = 0,$$

logo $F_{\lambda,z}$ satistaz (P1). A função $y \mapsto ||y-z||^2 - ||x-z||^2$ é convexa (veja Exemplo 1.2.3) e contínua para todo $x \in K$, sendo $F(x,\cdot)$ convexa e contínua para todo $x \in K$, pois vale (P2) para F, então pelas Proposições 1.2.5 e 1.1.4 segue que $F_{\lambda,z}$ satistaz (P2). Temos também que a função $x \mapsto ||y-z||^2 - ||x-z||^2$ é contínua para todo $y \in K$ e como vale (P3) para F, segue da Proposição 1.2.5 que $F_{\lambda,z}$ satistaz (P3). Agora, vamos mostrar que $F_{\lambda,z}$ satisfaz (P4), pela definição de $F_{\lambda,z}$ temos que,

$$\begin{aligned} F_{\lambda,z}(x,y) + F_{\lambda,z}(y,x) &= F(x,y) + \lambda\Big[||y-z||^2 - ||x-z||^2\Big] + F(y,x) + \lambda\Big[||x-z||^2 - ||y-z||^2\Big] \\ &= F(x,y) + F(y,x) + \lambda\Big[||y-z||^2 - ||x-z||^2 + \ ||x-z||^2 - ||y-z||^2\Big] \\ &= F(x,y) + F(y,x). \end{aligned}$$

Assim, da monotonicidade de F (isto é, vale (P4)), segue o resultado.

Por fim, vamos verificar que $F_{\lambda,z}$ satisfaz (P5), para isto, considere a sequência $\{z^k\} \subset K$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} ||z^k|| = +\infty$ e $x^* \in S(F,K)$. Usando a definição de $F_{\lambda,z}$ em $x = z^k$ e $y = x^*$, nós temos

$$F_{\lambda,z}(z^k, x^*) = F(z^k, x^*) + \lambda\Big[||x^* - z||^2 - ||z^k - z||^2\Big].$$

Como $\{||z^k||\} \to \infty$ quando $k \to \infty$, em particular $\{||z^k - z||\} \to \infty$, assim obtemos que $\lambda\left[||x^* - z||^2 - ||z^k - z||^2\right] \to -\infty$ quando $k \to \infty$. Além disso, como $\{z^k\} \subset K$ e $x^* \in PE(F,K)$, obtemos que $F(\overline{x}, z^k) \geqslant 0$. Agora, pela monotonicidade de F temos que $F(z^k, x^*) \leqslant 0$. Assim, segue o resultado. ■

Agora vamos descrever o Algoritmo do Ponto Proximal para Problema de Equilíbrio, e vamos denotar por Algoritmo PPPE.

Algoritmo PPPE.

Passo 0: Dado um ponto inicial $x^0 \in K$ e uma sequência de números reais positivos e limitados $\{\lambda_k\}$.

Passo 1: Dado $x^k \in K$, se $x^k \in PE(F,K)$, pare. Caso contrário, ir para o passo 2.

Passo 2: Dado $x^k \in K$, tome qualquer $x^{k+1} \in K$ tal que

$$x^{k+1} \in S(F_k, K), \text{ onde } F_k := F_{\lambda_k, x^k}. \tag{3.2}$$

Passo 3: Faça $k := k+1$ e retorne ao passo 1.

Corolário 3.1.1. *O Algoritmo PPPE está bem definido.*

Demonstração. Fazendo $\lambda_k := \lambda$ e $x^k := z$ segundo Lema 3.1.1 F_k satisfaz $(P1) - (P5)$, e usando Teorema 2.1.1, segue-se que $S(F_k, K) \neq \emptyset$. ■

No restante deste trabalho, assumimos que $\{x^k\}$ é uma sequência gerada a partir do Algoritmo PPPE. Levando em conta que se o Algoritmo termina após um número finito de iterações, o mesmo termina em um ponto solução do problema de equilíbrio (1). Assim, de agora em diante assumimos que $\{x^k\}$ é uma sequência infinita.

3.2 Análise de Convergência

Nesta seção apresentamos a análise de convergência da sequência $\{x^k\}$. Vamos iniciar apresentando o conceito de convergência de Féjer, um resultado bastante utilizado na análise de convergência.

Definição 3.2.1. *Uma sequência $\{y^k\} \subset \mathbb{R}^n$ é chamada Féjer convergente para um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, com respeito a norma euclidiana se*

$$||y^{k+1} - y|| \leqslant ||y^k - y||, \quad \forall y \in K. \tag{3.3}$$

Vejamos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.1. *Se $\{y^k\}$ é Féjer convergente em $K \neq \emptyset$ então $\{y^k\}$ é limitada. Além disso, se algum ponto de acumulação de $\{y^k\}$ pertence a K, então $\lim_{k\to\infty} y^k = y$.*

Demonstração: Pela definição de Fejér convergência, temos:

$$||y^k - y|| \leqslant ||y^{k-1} - y|| \leqslant ||y^{k-2} - y|| \leqslant ... \leqslant ||y^0 - y||, \quad \forall y \in K. \tag{3.4}$$

Então, $\{y^k\}$ está contida na bola de centro y e raio $||y^0 - y||$, donde segue que $\{y^k\}$ é limitada. Agora, considere $\{y^{k_j}\}$ uma subsequência de $\{y^k\}$ tal que $\lim_{j\to\infty} y^{k_j} = y$. Como $y \in K$, pela definição, temos que a sequência de números reais não negativos $\{||y^k - y||\}$ é decrescente e possui uma subsequência, $\{||y^{k_j} - y||\}$ que converge a zero. Logo, $\lim_{k\to\infty} ||y^k - y|| = 0$, e portanto, $\lim_{k\to\infty} y^k = y$. ■

Precisaremos definir também o subdiferencial de uma bifunção.

Definição 3.2.2. *O subdiferencial* $\partial f(x,x)$ *de uma bifunção f em* $x \in K$ *é dada por*

$$\begin{aligned}\partial f(x,x) &:= \{u \in \mathbb{R}^n : f(x,y) \geqslant f(x,x) + \langle u, y-x\rangle \ \forall\ y \in \mathbb{R}^n\}\\ &= \{u \in \mathbb{R}^n : f(x,y) \geqslant \langle u, y-x\rangle \ \forall\ y \in \mathbb{R}^n\}.\end{aligned}$$

Nos resultados a seguir levaremos em consideração a definição de subdiferencial apresentada acima, que pode ser encontrada em [17] . Esta definição satisfaz todas as propriedades de subdiferencial apresentadas no Capítulo I.

Proposição 3.2.2. *Para cada* $x^* \in S(F,K)$ *vale que*

$$\langle x^k - x^{k+1}, x^* - x^{k+1}\rangle \leqslant 0.$$

Demonstração: A partir da definição de x^{k+1} e F_k temos que,

$$F_k(x^{k+1}, y) = F(x^{k+1}, y) + \lambda_k\left[\|y - x^k\|^2 - \|x^{k+1} - x^k\|^2\right] \geqslant\ 0\ \forall\ y \in K.$$

Por (P1), temos que $F_k(x^{k+1}, x^{k+1}) = 0$, segue então que

$$x^{k+1} = \arg\min_{y \in K} F_k(x^{k+1}, y),$$

Assim, pelo Teorema 2.1.1 existe,

$$w^{k+1} \in \partial F_k(x^{k+1}, x^{k+1}) = \partial F(x^{k+1}, x^{k+1}) + 2\lambda_k(x^{k+1} - x^k)$$

tal que $\langle w^{k+1}, y - x^{k+1}\rangle \geqslant 0\ \ \forall\ y \in K$.

Portanto, $w^{k+1} = u^{k+1} + 2\lambda_k(x^{k+1} - x^k)$ onde $u^{k+1} \in \partial F(x^{k+1}, x^{k+1})$. Segue então da última desigualdade que $\langle u^{k+1} + 2\lambda_k(x^{k+1} - x^k), y - x^{k+1}\rangle \geqslant 0\ \ \forall\ y \in K$. Logo,

$$\langle u^{k+1}, y - x^{k+1}\rangle \geqslant 2\lambda_k\langle x^k - x^{k+1}, y - x^{k+1}\rangle\ \ \forall\ y \in K. \tag{3.5}$$

Por outro lado, da convexidade de $F(x^{k+1}, \cdot)$, ou seja, da propriedade (P2), para todo $y \in K$ temos que

$$F(x^{k+1}, y) \geqslant F(x^{k+1}, x^{k+1}) + \langle u^{k+1}, y - x^{k+1}\rangle = \langle u^{k+1}, y - x^{k+1}\rangle. \tag{3.6}$$

Seja $x^* \in S(F,K)$. então $F(x^*, x^{k+1}) \geqslant 0 \Rightarrow F(x^{k+1}, x^*) \leqslant 0$. Assim, de (3.6)

$$0 \geqslant F(x^{k+1}, x^*) \geqslant \langle u^{k+1}, x^* - x^{k+1}\rangle.$$

Agora, por (3.5), obtemos que

$$\langle x^k - x^{k+1}, x^* - x^{k+1}\rangle \leqslant 0.$$

Como queriamos mostrar. ■

Teorema 3.2.1. *A sequência* $\{x^k\}$ *converge para um ponto em* $S(F, K)$.

Demonstração: Seja $x^* \in PE(F, K)$. Usando a regra do paralelogramo temos que

$$\begin{aligned} \|x^k - x^*\|^2 &= \|x^k - x^{k+1} + x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &= \|x^k - x^{k+1}\|^2 + \|x^{k+1} - x^*\|^2 + 2\langle x^k - x^{k+1}, x^{k+1} - x^*\rangle \end{aligned} \tag{3.7}$$

da Proposição 3.2.2, temos que

$$\|x^k - x^*\|^2 \geqslant \|x^k - x^{k+1}\|^2 + \|x^{k+1} - x^*\|^2. \tag{3.8}$$

Assim, $\|x^k - x^*\|^2 \geqslant \|x^{k+1} - x^*\|^2 \Rightarrow \|x^k - x^*\| \geqslant \|x^{k+1} - x^*\|$. Portanto, $\{x^k\}$ é Féjer convergente ao conjunto $S(F, K)$. Vejamos agora que, $\|x^k - x^{k+1}\| \to 0$. De fato, $\{x^k\}$ é Féjer convergente ao conjunto $S(F, K)$, então a sequência $\{\|x^k - x^*\|\}$ é convergente, ou seja $\|x^{k+1} - x^*\| \to a$ com $a \geqslant 0$. De (3.8), segue que

$$\|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 \geqslant \|x^k - x^{k+1}\|^2 \geqslant 0.$$

Passando ao limite quando $k \to \infty$, obtemos

$$0 = a^2 - a^2 \geqslant \|x^k - x^{k+1}\|^2 \geqslant 0.$$

Portanto, segue que $\|x^k - x^{k+1}\| \to 0$. Por último, vamos mostrar que os pontos de acomulação de $\{x^k\}$ pertecem a $S(F, K)$. Como mostramos $\{x^k\}$ é Féjer convergente, em particular, $\{x^k\}$ é limitada. Portanto, por Bolzano-Weierstrass, $\{x^k\}$ possui subsequência convergente e pelo menos um ponto de acomulação. Suponhamos então que $x^{k_j} \to \overline{x}$ quando $j \to \infty$, temos também $x^{k_j+1} \to \overline{x}$, pois $\|x^k - x^{k+1}\| \to 0$. Segue de (3.5) e (3.6) que,

$$2\langle x^k - x^{k+1}, y - x^{k+1}\rangle \leqslant \frac{1}{\lambda_k} F(x^{k+1}, y).$$

Logo, de (3.7) para $y = x^*$

$$F(x^{k+1}, y) \geqslant \lambda_k(\|x^k - x^*\|^2 + \|x^k - x^{k+1}\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2).$$

Assim, usando as propriedades de $\limsup$, $x^{k_j} \to \overline{x}, x^{k_j+1} \to \overline{x}$, $\|x^k - x^{k+1}\| \to 0$ e o fato de que λ_k é limitada. Então, segue de $(P3)$ que

$$0 \leqslant \limsup_{j\to\infty} F(x^{k_j}, y) \leqslant F(\overline{x}, y) \ \forall y \in K.$$

Logo, $\overline{x} \in S(F, K)$, da Proposição 3.2.1 temos $x^k \to \overline{x}$. E assim segue o resultado.

∎

Capítulo 4

Considerações finais

Neste trabalho estudamos o conceito de problema de equilíbrio estudado em Blum e Oettli (1984), que abreviadamente representamos por $\mathsf{PE}(\mathsf{F},\mathsf{K})$, e seu conjunto solução por $\mathsf{S}(\mathsf{F},\mathsf{K})$. Destacamos sua importância e abragência em relação a outros problemas que em certas condiçoes podem ser visto como problemas de equilíbrio, a saber: problemas de desigualdade variacional, equilíbrio de Nash em jogos não cooperativos, otimização convexa, dentre outros. A bifunção de equilíbrio F satisfaz as propriedades$(\mathsf{P}1)-(\mathsf{P}3)$, dessa forma, o problema $\mathsf{PE}(\mathsf{F},\mathsf{K})$ contém o problema de viabidade convexa $\mathsf{PVC}(\mathsf{F},\mathsf{K})$, cujo o conjunto solução denotamos por $\mathsf{S}_\mathsf{V}(\mathsf{F},\mathsf{K})$. O problema $\mathsf{PVC}(\mathsf{F},\mathsf{K})$ nos auxilia na demonstração de resultados de existência para problema de equilíbrio, e sob a propriedade $(\mathsf{P}4)$ ou $(\mathsf{P}4^*)$, garantimos a igualdade entre os conjuntos $\mathsf{S}(\mathsf{F},\mathsf{k})=\mathsf{S}_\mathsf{V}(\mathsf{F},\mathsf{K})$. Além disso, sob as propriedades descritas anteriormente, mostramos $\mathsf{PE}(\mathsf{F},\mathsf{K})$ possui solução se, e somente se, vale a propriedade $(\mathsf{P}5)$.

Diante desses resultados, apresentamos um algoritmo do ponto proximal para problema de que equilíbrio com um novo termo de regularização, que foi proposto por Bento et al. [1]. Mostramos que a função regularizadora do algoritmo satisfaz as propriedades $(\mathsf{P}1)-(\mathsf{P}5)$, e com isto, garantimos a boa definição do algoritmo. E por fim, fizemos a análise de convergência da sequência gerada pelo algoritmo, mostrando sua convergência para uma solução do problema proposto.

Referências Bibliográficas

[1] Bento, G.C., Neto, J.X.C., Soares, P.A. et al. A new regularization of equilibrium problems on Hadamard manifolds: applications to theories of desires. Ann Oper Res 316, 1301–1318 (2022).

[2] Blum, E., Oettli, W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. The Mathematics Student (63) 123–145, (1994).

[3] Colao, V., López, G., Marino, G., & Martín-Márquez, V. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 388, 61–77, (2012).

[4] Cruz Neto, J. X., Santos, P. S. M., & Soares, P. A, Jr. An extragradient method for equilibrium problems on Hadamard manifolds. Optimization Letters, 10, 1327–1336, (2016).

[5] Cruz Neto, J.X. ; Lopes, J.O. ; Soares, P.A. . A minimization algorithm for equilibrium problems with polyhedral constraints. Optimization, v. 1, p. 1-8, (2015).

[6] Cipolatti, R. Cálculo Avançado 2ª ed. Coleção Textos Universitários. SBM, Rio de Janeiro, (2018).

[7] Fan, K. A generalization of Tychonoff's fixed point theorem. Mathematische Annalen, v. 142, n. 3, p. 305-310, (1961).

[8] Fan, K. A minimax inequality and its applications. Inequalities 3, 103–113 (1972)

[9] Hung, P. G.. Muu, L. D. The Tikhonov regularization extended to equilibrium problems involving pseudomonotone bifunctions . Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 74(17) 6121-6129. (2011).

[10] Iusem, A. N., Kassay, G., & Sosa, W. (2009). On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems. Mathematical Programming Series B, 116, 259–273, (2009)

[11] Iusem, A.N - Métodos de Ponto Proximal em Otimização. 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (1995).

[12] Iusem, A. N., & Sosa, W. New existence results for equilibrium problems. Nonlinear Analysis, 52, 621–635, (2003)

[13] Iusem, A. N., & Sosa, W. On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces. Optimization, 59, 1259–1274,(2010).

[14] Izmailov, A., Solodov, M., Otimização - Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade, IMPA, Rio de Janeiro. vol.1, (2020)

[15] Lima, E.L. Curso de Análise vol.2. 11ª ed. Coleção Projeto Euclides. IMPA, (2018).

[16] Munkres, J.R. Topology. 2 ed. New Jersey, Prentice-Hall, (2000).

[17] Santos, P.S.M. and Scheimberg, S. An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems, J. Comput. Appl. Math., 30:91–107, (2011).

[18] Santos, P. J. S.; Santos, P. S. M. ; Scheimberg, S. A proximal Newton-type method for equilibrium problems. Optimization Letters, v. 12, p. 997-1009, (2018).