



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

**RESULTADOS DE RIGIDEZ PARA VARIEDADES
TIPO-EINSTEIN**

Christopher Carlisson de Sousa Queiroz

Teresina - 2024

Christopher Carlisson de Sousa Queiroz

Tese de Doutorado:

**RESULTADOS DE RIGIDEZ PARA VARIEDADES
TIPO-EINSTEIN**

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar

Co-Orientador:

Profa. Dra. Maria de Andrade Costa e Silva

Teresina - 2024



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Resultados de rigidez para variedades tipo-Einstein

Christopher Carlisson de Sousa Queiroz

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 25 de setembro de 2024.

Banca Examinadora:

Halyson Irene Baltazar
Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar - Orientador

Barnabé Pessoa Lima
Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima - UFPI

Paulo Alexandre A. Seeger
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa - UFPI

Maria de Andrade Costa e Silva
Profª. Dra. Maria de Andrade Costa e Silva.- UFS

Benedito Leandro Neto
Prof. Dr. Benedito Leandro Neto - UnB

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

Q3r	<p>Queiroz, Christopher Carlisson de Sousa. Resultados de rigidez para variedades tipo-Einstein / Christopher Carlisson de Sousa Queiroz. -- 2024. 74 f.</p> <p>Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Piauí. Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós- Graduação em Matemática, Teresina, 2024. “Orientador: Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar. Coorientadora: Profa. Dra. Maria de Andrade Costa e Silva”.</p> <p>1. Geometria Métrica Diferencial. 2. Variedade tipo- Einstein. 3. Métricas críticas. 4. Ricci paralelo. I. Baltazar, Halyson Irene. II. Silva, Maria de Andrade Costa e. III. Título.</p> <p>CDD 516.37</p>
-----	---

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

*Dedico este trabalho ao meu pai Carlos
Magno (In memoriam), minha amada mãe
Franciane Santos e aos meus irmãos.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero expressar minha profunda gratidão a Deus por me abençoar a cada dia. Sou grato pela força que Ele me deu nos momentos em que pensei em desistir e por ter sido minha salvação nas horas de tristeza. Nunca foi sorte; sempre foi Deus. Não tenho dúvidas de que tudo de bom na minha vida é resultado de Sua bondade.

À pessoa mais especial da minha vida, que sempre cuidou de mim e fez de tudo para me proporcionar o suporte necessário em minha jornada escolar e universitária, minha amada mãe, Franciane Santos. Ela sempre colocou seus filhos em primeiro lugar, sacrificando-se para garantir nosso futuro. Sou eternamente grato a você, mãe. Seu amor e dedicação foram fundamentais para que eu pudesse seguir meus sonhos. Reconheço que suas ações e esforços formam a base do meu sucesso. Agradeço por tudo o que você fez por mim.

Ao meu pai, Carlos Magno, que agora está na graça divina, olhando por mim. Agradeço por sempre se preocupar em me proporcionar uma boa educação desde a infância e por me presentear com conselhos valiosos que contribuíram imensamente para meu crescimento. Se hoje estou colhendo os frutos do meu esforço, devo muito a ele.

Quero dedicar um agradecimento especial aos meus irmãos, Carliane Calessa e Carlos de Jesus. Meu irmão mais velho, Carlos, teve um papel fundamental na minha trajetória, oferecendo bons conselhos e se sacrificando para que eu pudesse focar nos meus estudos, abrindo mão dos próprios para me apoiar na criação, ao lado de nossa mãe. Minha irmã, Carliane, também foi essencial em meu doutorado; sua confiança em mim foi um grande motivador, e ela sempre acreditou que eu conseguiria passar na seleção. Além disso, seu apoio financeiro me permitiu dedicar-me plenamente a esse desafio. Sou imensamente grato a vocês dois por todo o amor, suporte e sacrifício. Vocês são uma parte importante do meu sucesso.

À minha noiva, Gabriella Farias, agradeço de coração por todo o companheirismo, incen-

tivo e compreensão nos momentos em que estive ausente devido aos estudos. Obrigado por todos os ensinamentos no inglês; sua participação na minha vida foi fundamental para o meu crescimento.

Agradeço ao professor Halyson Irene Baltazar por ter aceitado ser meu orientador. Sua postura profissional sempre foi um exemplo para mim, e sua orientação foi fundamental no desenvolvimento deste trabalho, repleta de valiosas dicas e um ensino de excelência. Sou grato por acreditar no meu potencial, pela paciência e por todo o incentivo que me proporcionou.

Quero expressar minha gratidão à minha coorientadora, Maria Andrade, por todo o apoio e orientação durante a minha tese. Sua dedicação, conselhos e confiança em meu trabalho foram fundamentais para meu crescimento acadêmico.

Aos professores Paulo Alexandre, Benedito Leandro e Barnabé Pessoa, meu sincero agradecimento por terem aceitado participar da minha banca examinadora. É uma enorme satisfação ter meu nome associado ao professor Barnabé; sua história na matemática é verdadeiramente inspiradora. Tenho um carinho especial pelo professor Paulo, cuja sabedoria e conselhos foram fundamentais nos momentos difíceis. A presença e a contribuição de vocês enriqueceram imensamente este momento tão importante para mim.

Aos professores da Universidade Estadual do Piauí, em especial Afonso Noberto, Pedro Soares e Pitágoras Pinheiro, meu sincero agradecimento por terem contribuído para a minha formação em Matemática. Sempre acreditaram no meu potencial e me ofereceram valiosas dicas e conselhos sobre a vida acadêmica, que, sem dúvida, fizeram toda a diferença em minha trajetória.

Agradeço a todos os professores da Pós-Graduação em Matemática da UFPI, especialmente aos que contribuíram para a minha formação acadêmica: Newton Luís, Cícero Aquino e Mykael Cardoso. Um agradecimento especial ao professor Rondinelle Marcolino, que foi fundamental na minha trajetória, oferecendo valiosos conselhos e ajuda ao longo do caminho.

A todos os meus amigos da Pós-Graduação: Edimilson, Atécio, Márcio, João Santos, Dieme, Pedro Paulo, Ruan, João Vinicius, Erisvaldo, Leonardo, Jonatas, Jaciane, Bruno Vasconcelos, Edilson, Nilson, Alexandre, Jefferson, Felipe, e especialmente Raimundo

Bruno, Gustavo, Thassio, Pedro Rodrigues e Emília, quero expressar minha profunda gratidão. Vocês foram fundamentais no início dessa trajetória. Agradeço também ao meu amigo Lázaro, por sua ajuda na minha aprovação no concurso.

Agradeço também aos meus familiares e amigos de infância pelo apoio constante. Sou grato à minha Virgem Santa Maria e ao meu Santo São Francisco, cujas bênçãos e proteção sempre estiveram comigo ao longo dessa jornada.

Agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

“Tudo posso naquele que me fortalece.”

Filipenses 4:13.

Resumo

Nesta tese de doutorado, o foco principal será o estudo das variedades tipo-Einstein, com o objetivo de resolver desafios relacionados à rigidez dessas estruturas. Inicialmente, apresentaremos um resultado de rigidez para variedades do tipo-Einstein, considerando a condição de curvatura de Ricci paralelo, o que melhora à condição de Einstein analisada por Freitas e Gomes em [27]. Além disso, estabeleceremos uma condição crucial relacionada à norma do gradiente da função potencial, visando demonstrar que essas métricas são, de fato, Einstein, ou seja, que a curvatura de Ricci é um múltiplo da métrica. Por fim, investigaremos uma condição de curvatura pinçada, inspirados por [6] e [12], com o intuito de classificar variedades compactas que possuem curvatura escalar não negativa e que atendem a uma condição especial de $L^{n/2}$ pinçada.

Palavras chaves: Métricas críticas. Variedades tipo-Einstein. Métricas Einstein. Ricci paralelo. Condição pinçada.

Abstract

In this doctoral thesis, the main focus will be the study of Einstein-type manifolds, with the goal of addressing challenges related to the rigidity of these structures. Initially, we will present a rigidity result for Einstein-type manifolds, considering the condition of parallel Ricci curvature, which improves upon the Einstein condition analyzed by Freitas and Gomes in [27]. Additionally, we will establish a crucial condition related to the norm of the gradient of the potential function, aiming to demonstrate that these metrics are indeed Einstein, meaning that the Ricci curvature is a multiple of the metric. Finally, we will investigate a pinched curvature condition, inspired by [6] and [12], with the intention of classifying compact manifolds that have non-negative scalar curvature and meet a special $L^{n/2}$ pinched condition.

Keywords: Critical metrics. Einstein-type manifolds. Einstein metrics. Parallel Ricci. Pinched condition.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução	2
2 Noções Preliminares	10
2.1 Notações e alguns tensores importantes	10
2.2 Alguns tensores importantes	13
2.3 Variedades de Einstein	15
2.4 Estimativa envolvendo o tensor de Weyl	16
3 Variedades do tipo-Einstein	22
3.1 Definições e resultados existentes	22
3.2 Fórmulas tipo Bochner	27
3.3 Resultados de Rigidez	29
4 Variedades compactas satisfazendo uma condição pinçada	37
4.1 Definições e resultados existentes	37
4.2 Fórmulas tipo Bochner para variedades compactas satisfazendo $\mathcal{L}_g^*(f) = \lambda g$	44
4.3 Resultados de integral pinçada	50
4.3.1 Métrica CPE	54
4.3.2 Tripla estática positiva	56
4.3.3 Métrica crítica de Miao-Tam	56
4.4 Métrica crítica de Miao-Tam com curvatura de Weyl pinçada	57

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho é estruturado em duas partes. Na primeira, nos aprofundaremos no estudo das variedades do tipo-Einstein, com o objetivo de alcançar resultados significativos em relação à rigidez dessa estrutura. Na segunda parte, direcionaremos nossa análise para casos especiais de métricas do tipo-Einstein amplamente reconhecidos na literatura, tais como a métrica crítica do funcional de Einstein Hilbert, a tripla estática positiva e a métrica crítica do funcional volume. A seguir, apresentaremos um breve panorama histórico dos problemas estudados, destacando os resultados alcançados nos últimos anos. Além disso, faremos uma análise detalhada de nossa própria contribuição para os problemas apresentados neste estudo. No primeiro momento do trabalho, apresentamos resultados de rigidez para variedades do tipo-Einstein, o qual é baseado no artigo “*Compact Einstein-type manifolds with parallel Ricci tensor*”, escrito pelo autor com parceria com H. Baltazar e M. Andrade ([3]).

O estudo das variedades do tipo-Einstein foi introduzido por Catino et al. [19] e emerge como uma forma de unificar algumas estruturas amplamente investigadas na literatura. No que segue (M^n, g) representa uma variedade Riemanniana conexa. Seguindo a terminologia empregada em [2, 36, 37, 49], dizemos que uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g) é uma variedade do tipo-Einstein se existem funções suaves $f, h : M \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f\text{Ric} = \nabla^2 f + hg, \tag{1.1}$$

onde $f > 0$ em $\text{int}(M)$ e $f^{-1}(0) = \partial M$. Aqui, Ric e Hess representam, respectivamente, o tensor de Ricci e a forma Hessiana em M^n .

Vamos nos referir à equação (1.1) como a equação fundamental de uma variedade do

tipo-Einstein (M^n, g, f, h) . Na verdade, tomando o traço na equação (1.1), note que

$$fR = \Delta f + nh, \quad (1.2)$$

onde Δ representa o operador laplaciano.

O raciocínio por trás do uso de (1.1) e (1.2) é que generalizam várias equações geométricas importantes, veja os exemplos a seguir:

- Equação de Einstein do vácuo estático com constante cosmológica nula ([35]):

$$fRic = \nabla^2 f \quad \text{e} \quad \Delta f = 0, \quad (1.3)$$

onde $h = 0$ e $R = 0$.

- Equação do vácuo estático com constante cosmológica não nula ([1]):

$$fRic = \nabla^2 f + \frac{Rf}{n-1}g \quad \text{e} \quad \Delta f + \frac{Rf}{n-1} = 0, \quad (1.4)$$

onde $h = Rf/(n-1)$.

- Equação estática de fluido perfeito ([50]):

$$fRic = \nabla^2 f + \frac{(\mu - \rho)f}{n-1}g \quad \text{e} \quad \Delta f + \left(\frac{(n-2)\mu + n\rho}{n-1} \right) f = 0, \quad (1.5)$$

onde $h = (\mu - \rho)f/(n-1)$, e $\mu = R/2$ e ρ são, respectivamente, as funções suaves de densidade e pressão. Mais acima, a condição de energia implica que $\mu \geq |\rho|$.

- Equação do ponto crítico ([6]):

$$(1 + f)\overset{\circ}{Ric} = \nabla^2 f + \frac{Rf}{n(n-1)}g \quad \text{e} \quad \Delta f + \frac{Rf}{n-1} = 0, \quad (1.6)$$

onde $\overset{\circ}{Ric}$ é o tensor de Ricci sem o traço. Aqui, $\partial M = \emptyset$ com $h = \frac{R}{n-1}f - \frac{R}{n(n-1)}$ e $f = 1 + F$, onde F é a função potencial na equação de ponto crítico.

- Equação V-estáticas ([9]):

$$fRic = \nabla^2 f + \frac{Rf + k}{n-1}g \quad \text{e} \quad \Delta f + \frac{Rf}{n-1} = \frac{-nk}{n-1}, \quad (1.7)$$

onde k é uma constante e $h = \frac{R}{n-1}f + \frac{k}{n-1}$.

Recentemente, Freitas e Gomes foram capazes de classificar variedades do tipo-Einstein que são Einstein, veja os Teoremas 1 e 2 em [27]. Em seu artigo, a equação fundamental das variedades do tipo-Einstein foi estudada da seguinte maneira:

$$\nabla^2 f = \frac{\mu}{\beta} f (\Lambda g - \frac{\alpha}{\beta} Ric) + \gamma g, \quad (1.8)$$

para alguma função suave Λ em M^n e constantes $\alpha, \beta, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$, com $\beta \neq 0$. Claramente, considerando $\frac{\mu\alpha}{\beta^2} = -1$ e $h = -\frac{\mu\Lambda}{\beta} f - \gamma$, obtemos a Equação (1.1). Assim, tal equação pode ser vista como um caso particular da Equação (1.8).

É importante destacar que, em toda variedade Riemanniana, o tensor métrico é paralelo (i.e., $\nabla g = 0$), imediatamente obtemos que variedades Einstein possuem tensor de Ricci paralelo (i.e., $\nabla Ric = 0$), entretanto a recíproca deste fato é falsa, como podemos constatar com o Exemplo 3.4.

Uma das estruturas mais importantes estudadas na literatura e que satisfaz a equação do tipo-Einstein para $h = -\Delta f$ são as triplas estática positiva. Para nosso propósito, vamos lembrar a classificação de tripla estática positiva para uma variedade tridimensional que satisfaz a condição de Ricci paralelo. De fato, como consequência dos resultados de Kobayashi e Lafontaine para variedades estáticas localmente conformemente planas, ver [45] e [47], respectivamente, é imediato deduzir o seguinte resultado.

Teorema 1.1 (Kobayashi [45], Lafontaine [47]). *Seja (M^3, g, f) uma tripla estática positiva com curvatura escalar $R = 6$. Suponhamos que (M^3, g) tem tensor de Ricci paralelo, então (M^3, g, f) é um recobrimento de uma tripla estática equivalente a um das seguintes triplas estáticas:*

1. *O hemisfério padrão com métrica canônica $(\mathbb{S}_+^3, g_{\mathbb{S}^3})$.*
2. *O cilindro padrão sobre \mathbb{S}^2 com métrica produto*

$$\left(M = [0, \frac{\pi}{\sqrt{3}}] \times \mathbb{S}^2, g = dt^2 + \frac{1}{3} g_{\mathbb{S}^2} \right).$$

Antes de prosseguir, vamos definir a função λ em termos de h e da função potencial f , da seguinte forma:

$$\lambda = (n-1)h - Rf = -\frac{(n-1)}{n} \left[\frac{fR}{n-1} + \Delta f \right]. \quad (1.9)$$

Essa função aparece em [36] e os autores conseguiram deduzir que a curvatura escalar é constante se, e somente se, λ for constante, conforme a Proposição 2.1 em [36].

Neste trabalho, seremos capazes de classificar variedades do tipo-Einstein que satisfazem a condição de curvatura de Ricci paralelo, e o principal ingrediente será provar que essas estruturas são, de fato, métricas V -estáticas. Mais precisamente, estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 1.2. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein com tensor de Ricci paralelo. Então, a função λ definida acima é constante e uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

- (1) se $\lambda > 0$, então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , ou \mathbb{H}^n .
- (2) se $\lambda = 0$ e $n = 3$, então (M^3, g) é coberta por uma das triplas estáticas descritas no Teorema 1.1;
- (3) se $\lambda < 0$ e M^n tem bordo conexo, então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^n .

Nosso próximo resultado foi inspirado por B. Leandro [48], onde o autor estudou uma condição necessária e suficiente sobre a norma do gradiente da função potencial para que métricas críticas do funcional curvatura escalar total sejam Einstein, e mais recentemente H. Baltazar e C. Queiroz em [4], onde resultados similares foram deduzidos para métricas críticas do funcional volume. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.3. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein satisfazendo*

$$\frac{1}{2}|\nabla f|^2 + \frac{1-2n}{2n(n-1)}Rf^2 + hf = \text{const.} \quad (1.10)$$

Então, (M^n, g) é uma variedade Einstein, desde que

$$\int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM_g \geq 0.$$

Como corolário imediato, temos que

Corolário 1.1. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade Tipo-Einstein com curvatura escalar constante satisfazendo a seguinte condição*

$$\frac{1}{2}|\nabla f|^2 + \frac{1-2n}{2n(n-1)}Rf^2 + hf = \text{const.} \quad (1.11)$$

Então a função λ definida em (1.9) é constante e uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- (1) se $\lambda > 0$, então (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , ou \mathbb{H}^n .
- (2) se $\lambda = 0$, então, a menos de um quociente finito, (M^n, g) é isométrico a um hemisfério padrão com métrica canônica $(\mathbb{S}_+^n, g_{\mathbb{S}^n})$.
- (3) se $\lambda < 0$ e M^n tem bordo conexo, então (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em \mathbb{S}^n ;

Além disso, restrito ao caso tridimensional, a condição integral pode ser enfraquecida. Na verdade, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.2. *Seja (M^3, g, f, h) uma variedade tipo-Einstein satisfazendo*

$$\frac{1}{2}|\nabla f|^2 - \frac{5}{12}Rf^2 + hf = \text{const.} \quad (1.12)$$

Então, (M^3, g) é uma variedade de Einstein desde que

$$\int_{\partial M} \langle \nabla R, \nabla f \rangle dS \geq 0.$$

A segunda parte desta tese faz referência ao artigo “*Rigidity theorem for integral pinched static manifolds and related critical spaces*”, em colaboração com H. Baltazar ([5]). Neste caso, investigamos casos particulares de variedades do tipo-Einstein, a saber, as triplas estáticas positivas, métricas críticas da funcional de volume (Métrica de Miao-Tam) e métricas críticas do funcional curvatura escalar total (Métricas CPE). Duas destas estruturas podem ser associadas a um problema clássico de análise geométrica: a investigação de métricas críticas de determinados funcionais definidos em uma variedade riemanniana.

No capítulo 4 motivaremos o estudo de cada estrutura e investigaremos estes três tipos de variedades do tipo-Einstein, supondo uma condição de curvatura pinçada. Este estudo tem atraído muitos autores nos últimos anos, veja, por exemplo, [6, 10, 12, 20, 21, 29, 30, 32, 39, 40, 42, 51, 58, 60] e referências associadas. De fato, relacionado ao nosso trabalho, em 2017, H. Baltazar provou que, para $4 \leq n \leq 10$, uma métrica CPE (veja a Seção 4.3.1 para definição) que satisfaz uma condição de L^p pinçamento com uma restrição sobre o tensor de curvatura de Weyl é isométrica a uma esfera padrão, veja [6, Teorema 3]. Posteriormente, H. Baltazar, R. Diógenes e E. Ribeiro Jr. em [12] estudaram as métricas críticas do funcional volume em 4 dimensões e foram capazes de deduzirem uma estimativa envolvendo a constante de Yamabe, a função potencial e alguns termos de curvatura. Além disso, se a igualdade ocorrer, os autores provaram que M^4 é

isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^4 . A demonstração desses resultados fornece direções para deduzir uma condição de pinçamento geral sem hipóteses adicionais, em especial, a dependência da função potencial. Então, motivados por [6] e [12], estaremos interessados em classificar variedades compactas com curvatura escalar não negativa e uma condição especial de $L^{n/2}$ pinçamento. Mais precisamente, temos os seguintes resultados:

No caso da métrica CPE, obtemos o teorema abaixo

Teorema 1.4. *Seja $(M^n, g, f,)$ $4 \leq n \leq 38$, uma métrica CPE não trivial que satisfaça a seguinte condição pinçada*

$$\left(\int_M \left| W + \frac{\alpha(n)}{\sqrt{2n}} \mathring{Ric} \otimes g \right|^{n/2} dM_g \right)^{2/n} \leq \beta(n) \mathcal{Y}([g]),$$

onde $\alpha(n) = \frac{n[2(n-1)\sqrt{2n+4}]}{(n-2)[2(n-1)\sqrt{2n+2n}]}$ e $\beta(n) = \sqrt{\frac{(n-2)}{32(n-1)}} \frac{n}{(n-1)\sqrt{2n+n}}$. Então (M^n, g) é isométrica a esfera padrão.

Para proceder, devemos lembrar de um lema clássico devido a Gursky [34]. Tal lema fornece um limite inferior para o invariante de Yamabe e será importante para deduzir uma consequência em dimensão 4.

Lema 1.1. *([34]) Seja (M^4, g) uma variedade compacta de dimensão 4 com bordo vazio. Então, vale a seguinte estimativa*

$$\mathcal{Y}(M, [g])^2 \geq \int_M R^2 dM_g - 12 \int_M |\mathring{Ric}|^2 dM_g.$$

Além disso, a desigualdade é estrita a menos que (M^4, g) seja conformemente Einstein.

Corolário 1.3. *Toda métrica CPE não trivial de dimensão 4 que satisfaz*

$$(22 + 12\sqrt{2}) \int_M |W|^2 dM_g + (77 + 24\sqrt{2}) \int_M |\mathring{Ric}|^2 dM_g \leq \frac{1}{12} \int_M R^2 dM_g \quad (1.13)$$

é isométrica a uma esfera padrão.

Observação 1.1. *Observe que a condição de pinçamento (1.13) pode ser reescrita como*

$$\frac{121 + 48\sqrt{2}}{77 + 24\sqrt{2}} \int_M |W|^2 dM_g + \frac{38 + 12\sqrt{2}}{3(77 + 24\sqrt{2})} \int_M |\mathring{Ric}|^2 dM_g \leq 32\pi^2 \mathcal{X}(M).$$

Tal mudança se faz utilizando a conhecida fórmula de Chern-Gauss-Bonnet, a saber,

$$\int_M |W|^2 dM_g - 2 \int_M |\mathring{Ric}|^2 dM_g + \frac{1}{6} \int_M R^2 dM_g = 32\pi^2 \mathcal{X}(M).$$

Em seguida, obtemos um resultado de rigidez para o caso da tripla estática positiva e que fornece uma resposta positiva para conjectura

Conjectura 1.1 (Cosmic no-hair). [Boucher et al., [16]] *A única tripla estática compacta, simplesmente conexo, com curvatura escalar positiva e fronteira conexa é o hemisfério padrão \mathbb{S}_+^n .*

Segue abaixo esse resultado

Teorema 1.5. *A conjectura cosmic no-hair é verdade para variedades n -dimensional ($3 \leq n \leq 38$) satisfazendo a seguinte condição pinçada*

$$\left(\int_M \left| W + \frac{\alpha(n)}{\sqrt{2n}} \mathring{Ric} \otimes g \right|^{n/2} dM_g \right)^{2/n} \leq \beta(n) \mathcal{Y}([g]),$$

onde $\alpha(n) = \frac{n[2(n-1)\sqrt{2n+4}]}{(n-2)[2(n-1)\sqrt{2n+2n}]}$ e $\beta(n) = \sqrt{\frac{(n-2)}{32(n-1)}} \frac{n}{(n-1)\sqrt{2n+n}}$.

No caso da métrica crítica de Miao-Tam, temos o seguinte teorema

Teorema 1.6. *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta de dimensão n ($3 \leq n \leq 38$), com curvatura escalar positiva. Suponha que vale a seguinte condição pinçada*

$$\left(\int_M \left| W + \frac{\alpha(n)}{\sqrt{2n}} \mathring{Ric} \otimes g \right|^{n/2} dM_g \right)^{2/n} \leq \beta(n) \mathcal{Y}([g]),$$

onde $\alpha(n) = \frac{n[2(n-1)\sqrt{2n+4}]}{(n-2)[2(n-1)\sqrt{2n+2n}]}$ e $\beta(n) = \sqrt{\frac{(n-2)}{32(n-1)}} \frac{n}{(n-1)\sqrt{2n+n}}$. Então M^n é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^n .

Para concluir, com base no artigo "*Critical metrics of the volume functional with pinched curvature*", com colaboração de H. Baltazar ([4]), agora destacamos a métrica crítica de Miao-Tam.

Existem vários trabalhos sobre a classificação de métricas críticas de Miao-Tam envolvendo o tensor de curvatura de Weyl, veja, por exemplo, [11, 7, 12, 9, 53]. Portanto, motivados por [20] e com base em técnicas desenvolvidas em [6, 10], iremos fornecer uma classificação dessas métricas críticas considerando uma condição de curvatura pinçada. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.7. *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam com curvatura escalar positiva e satisfazendo a seguinte estimativa*

$$\left| W + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}(n-2)} \mathring{Ric} \otimes g \right| \leq \frac{R}{\sqrt{2(n-1)(n-2)}}. \quad (1.14)$$

Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^n .

Como o tensor de Weyl se anula na dimensão três, obtemos a seguinte consequência:

Corolário 1.4. *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam com curvatura escalar positiva e satisfazendo*

$$|\mathring{Ric}| \leq \frac{R}{\sqrt{24}}. \quad (1.15)$$

Então (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^3 .

Observação 1.2. *É fácil verificar que, a condição pinçada (1.15) torna-se neste caso*

$$|\mathring{Ric}| \leq \frac{R}{\sqrt{24}} \leq \frac{R}{\sqrt{6}}.$$

Então, basta aplicar [9, Corolário 1.5] para concluir que (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^3 .

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo, vamos estabelecer as notações e revisar brevemente os conceitos essenciais da Geometria Riemanniana, para uma boa compreensão dos capítulos que seguem. Não entraremos em detalhes sobre demonstrações, porém o leitor pode consultar como leitura complementar [22] e [25] para esclarecimentos.

2.1 Notações e alguns tensores importantes

No que segue (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana n -dimensional com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇ . O espaço das funções diferenciáveis (ou de classe C^∞) sobre M será denotado por $C^\infty(M)$. O espaço dos campos diferenciáveis sobre M denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$.

A seguir vamos definir alguns operadores diferenciais com os quais vamos trabalhar nessa trabalho de tese.

Definição 2.1. *Definamos a **derivada covariante** de um $(1, s)$ -tensor T , como sendo o $(1, s + 1)$ -tensor*

$$\nabla T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s+1} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$\begin{aligned} \nabla T(X, Y_1, \dots, Y_s) &= (\nabla_X T)(Y_1, \dots, Y_s) \\ &= \nabla_X(T(Y_1, \dots, Y_s)) - \sum_{i=1}^s T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_s). \end{aligned}$$

Dizemos que um tensor T é **paralelo** se $\nabla T \equiv 0$. Observe que uma métrica Riemanniana g é um tensor paralelo. De fato,

$$\begin{aligned} (\nabla g)(X, Y, Z) &= \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o $(1, 3)$ -tensor*

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

dado por

$$R_m(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Em coordenadas,

$$R_m \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Além disso, quando necessário, faremos a seguinte convenção $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$.

Usando o tensor métrico podemos interpretar o tensor R_m como um $(0, 4)$ -tensor, definido por

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

onde

$$R_m(X, Y, Z, W) = g(R_m(X, Y)Z, W).$$

Em coordenadas,

$$R_m(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R_{ijkl}.$$

Proposição 2.1. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades*

$$(1) \quad R_m(X, Y, Z, W) = -R_m(Y, X, Z, W) = -R_m(Y, X, W, Z).$$

$$(2) \quad R_m(X, Y, Z, W) = R_m(Z, W, X, Y).$$

(3) *Primeira identidade de Bianchi*

$$R_m(X, Y, Z, W) + R_m(Y, Z, X, W) + R_m(Z, X, Y, W) = 0.$$

Em coordenadas,

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

(4) *Segunda identidade de Bianchi*

$$(\nabla_W R_m)(X, Y, Z, U) + (\nabla_Y R_m)(W, X, Z, U) + (\nabla_X R_m)(Y, W, Z, U) = 0.$$

Em coordenadas,

$$\nabla_l R_{ijks} + \nabla_j R_{lik s} + \nabla_i R_{jlks} = 0.$$

Para a prova veja [25].

Definição 2.3. *Dados dois vetores X e Y não nulos e linearmente independentes em $T_p M$ definimos a curvatura seccional do plano σ gerado pelos vetores X e Y , por*

$$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X|^2|Y|^2 - g(X, Y)^2}.$$

Definição 2.4. *Definimos o **tensor curvatura de Ricci** o $(0, 2)$ -tensor*

$$\text{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

como sendo o traço do tensor curvatura de Riemann, i.e.,

$$\text{Ric}(X, Z) = \text{tr} \{Y \mapsto R_m(X, Y)Z\},$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Em coordenadas,

$$(\text{Ric})_{ik} = R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl}.$$

Definição 2.5. *A **curvatura escalar** de uma variedade é a função $R : M \mapsto \mathbb{R}$ dada por*

$$R = \text{tr Ric}.$$

Em coordenadas,

$$R = g^{ik} R_{ik}.$$

Proposição 2.2. *Em uma variedade Riemanniana (M^n, g) , vale*

(1) *Identidade de Ricci contraída*

$$\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = g^{ls} \nabla_l R_{ijks}.$$

(2) *Segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes*

$$g^{jk} \nabla_j R_{ik} = \frac{1}{2} \nabla_i R.$$

Para a prova veja [25].

Além disso, segue das fórmulas de comutatividade da derivada covariante (identidade Ricci), que para qualquer variedade Riemanniana M^n temos

$$\nabla_i \nabla_j R_{kl} - \nabla_j \nabla_i R_{kl} = R_{ijkm} R_{ml} + R_{ijlm} R_{km}. \quad (2.1)$$

para mais detalhes veja [22].

2.2 Alguns tensores importantes

Agora, relembremos alguns tensores para uma variedade Riemanniana (M^n, g) de dimensão n , os quais serão vistos em coordenadas locais para facilitar o entendimento do próximo capítulo. Começamos com o tensor de Weyl W que é definido, para $n \geq 3$, pela seguinte decomposição:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{n-2} (Ric \otimes g)_{ijkl} - \frac{R}{2(n-1)(n-2)} (g \otimes g)_{ijkl} + W_{ijkl},$$

onde R_{ijkl} denota o tensor de curvatura de Riemann e \otimes representa o produto Kulkarni-Nomizu, o qual é definido por

$$(A \otimes B)_{ijkl} = A_{ik} B_{jl} + A_{jl} B_{ik} - A_{il} B_{jk} - A_{jk} B_{il}.$$

Outro tensor importante é o tensor de Cotton C , definido como segue:

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}), \quad (2.2)$$

Não é difícil verificar que C_{ijk} é anti-simétrico nos dois primeiros índices e sem traço em quaisquer dois índices.

Uma relação importante entre o tensor de Weyl e o tensor de Cotton é dada pela seguinte identidade:

$$C_{ijk} = -\frac{(n-2)}{(n-3)}\nabla_l W_{ijkl}, \quad (2.3)$$

fornevido que $n \geq 4$.

Para finalizar essa seção, apresentaremos uma fórmula interessante para o Laplaciano da norma do tensor de Ricci sobre uma variedade arbitrária obtida em [7, Lema 2.1]. Para efeito de completude apresentaremos a sua demonstração. Segue abaixo esse resultado:

Lema 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Então vale a seguinte igualdade:*

$$\begin{aligned} \Delta|Ric|^2 &= 2|\nabla Ric|^2 - |C_{ijk}|^2 + 2\nabla_i(C_{ijk}R_{jk}) + 2(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ik}R_{jl}R_{ijkl}) \\ &\quad - \frac{n}{2(n-1)}|\nabla R|^2 + \frac{1}{n-1}div[(n-2)Ric(\nabla R) + R\nabla R]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Demonstração. Iniciaremos com o cálculo do laplaciano da norma ao quadrado do tensor de Ricci, para isso, lembre que

$$\frac{1}{2}\Delta|Ric|^2 = \frac{1}{2}\nabla_p\nabla_p R_{ij}^2$$

Assim, desenvolvendo o lado direito da igualdade acima e usando a expressão (2.2) do tensor de Cotton, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|Ric|^2 &= |\nabla Ric|^2 + R_{ij}\nabla_p\nabla_p R_{ij} \\ &= |\nabla Ric|^2 + R_{ij}\nabla_p(C_{pij} + \nabla_i R_{pj} + \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_p R g_{ij} - \nabla_i R g_{pj})) \\ &= |\nabla Ric|^2 + R_{ij}\nabla_p C_{pji} + R_{ij}\nabla_p\nabla_i R_{pj} + \frac{1}{2(n-1)}(R\Delta R - \nabla_i\nabla_j R R_{ij}). \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a identidade de Ricci (2.1) no termo $\nabla_p\nabla_i R_{pj}$ podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|Ric|^2 &= |\nabla Ric|^2 + R_{ij}\nabla_p C_{pij} + \nabla_i\nabla_p R_{pj}R_{ij} + (R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ik}R_{jl}R_{ijkl}) \\ &\quad + \frac{1}{2(n-1)}(R\Delta R - \nabla_i\nabla_j R R_{ij}), \end{aligned}$$

onde alteramos alguns índices por simplicidade.

Dessa forma, a partir da segunda identidade contraída de Bianchi $\frac{1}{2}\nabla_i R = g^{jk}\nabla_j R_{ki}$ obtemos uma nova expressão para igualdade acima

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|Ric|^2 &= |\nabla Ric|^2 + R_{ij}\nabla_p C_{pij} + \frac{n-2}{2(n-1)}\nabla_i\nabla_j R_{ij} + \frac{1}{2(n-1)}R\Delta R \\ &\quad + (R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ik}R_{jl}R_{ijkl}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por fim, observando que alguns termos da igualdade acima podem ser escritos da seguinte forma

- $R_{ij}\nabla_p C_{pij} = \nabla_p(C_{pij}R_{ij}) - \frac{1}{2}|C_{pij}|^2$
- $R_{ij}\nabla_i\nabla_j R = \operatorname{div}(\operatorname{Ric}(\nabla R)) - \nabla_i R_{ij}\nabla_j R = \operatorname{div}(\operatorname{Ric}(\nabla R)) - \frac{1}{2}|\nabla R|^2$
- $R\Delta R = \operatorname{div}(R\nabla R) - |\nabla R|^2$

podemos substituir na Equação (2.5) para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\operatorname{Ric}|^2 &= |\nabla\operatorname{Ric}|^2 + \nabla_p(C_{pij}R_{ij}) - \frac{1}{2}|C_{pij}|^2 + (R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ik}R_{jl}R_{ijkl}) \\ &\quad - \frac{n}{4(n-1)}|\nabla R|^2 + \frac{1}{2(n-2)}\operatorname{div}((n-2)\operatorname{Ric}(\nabla R) - R\nabla R). \end{aligned}$$

Logo, para finalizar a demonstração basta trocar $p \leftrightarrow k$ e usar que o tensor de Cotton é anti-simétrico nas primeiras duas entradas e tem traço livre quaisquer duas entradas. \square

2.3 Variedades de Einstein

Agora falaremos um pouco sobre variedades de Einstein.

Definição 2.6. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é chamada variedade de **Einstein** se o tensor de Ricci é um múltiplo da métrica g , ou seja,*

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ em que $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

Em coordenadas,

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}. \tag{2.6}$$

Observe que multiplicando (2.6) por g^{ij} e tomando o traço, temos que $R = \lambda n$. Além disso, quando uma variedade de Einstein de dimensão $n \geq 3$ e conexa, tem-se que λ é constante. A prova é uma aplicação direta da segunda Identidade de Bianchi contraída duas vezes.

2.4 Estimativa envolvendo o tensor de Weyl

Nesta seção, apresentaremos uma estimativa algébrica da curvatura que envolve o tensor de Weyl e o tensor de Ricci sem traço. Essa estimativa será fundamental para a conclusão dos principais resultados que abordaremos ao longo deste trabalho. A demonstração dessa estimativa pode ser encontrada em [41, Lemma 2.3], e recomendamos também a consulta à [21, Proposition 2.1] para uma compreensão mais aprofundada do contexto e das aplicações dessa relação. A conexão entre esses tensores é crucial para avançarmos em nossa análise e para entendermos as implicações geométricas que surgem a partir dessas relações.

Lema 2.2. *Em toda variedade Riemanniana de dimensão n , a seguinte estimativa é válida*

$$\left| \text{atr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \right| \leq \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \left(|W|^2 + \frac{2(n-2)\alpha^2}{n} |\mathring{Ric}|^2 \right)^{1/2} |\mathring{Ric}|^2,$$

onde $\alpha > 0$ é uma constante. Aqui, \mathring{Ric}^3 é um 2-tensor definido por $(\mathring{Ric}^3)_{ij} = \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{kl} \mathring{R}_{lj}$.

Demonstração. Primeiramente, observe que usando o produto de **Kulkarni-Nomizu** obtemos

$$\begin{aligned} (\mathring{Ric} \otimes g)_{ijkl} &= (\mathring{R}_{ik} g_{jl} + \mathring{R}_{jl} g_{ik} - \mathring{R}_{il} g_{jk} - \mathring{R}_{jk} g_{il}) \\ (\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl} &= 2(\mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} - \mathring{R}_{il} \mathring{R}_{jk}). \end{aligned}$$

Assim, como consequência destas expressões podemos deduzir que

$$W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} = \frac{1}{4} W_{ijkl} (\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl} \tag{2.7}$$

$$\mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{ik} = -\frac{1}{8} (\mathring{Ric} \otimes g)_{ijkl} (\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl}. \tag{2.8}$$

De fato, desenvolvendo o lado direito da Equação (2.7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} W_{ijkl} (\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl} &= \frac{1}{2} W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} - \frac{1}{2} W_{ijkl} \mathring{R}_{il} \mathring{R}_{jk} \\ &= \frac{1}{2} W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} - \frac{1}{2} \underbrace{W_{ijlk} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl}}_{l \leftrightarrow k} \\ &= \frac{1}{2} W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} + \frac{1}{2} W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \\ &= W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl}, \end{aligned}$$

e o lado direito da Equação (2.8)

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{8}(\mathring{Ric} \otimes g)_{ijkl}(\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl} &= -\frac{1}{4}(\mathring{R}_{ik}g_{jl} + \mathring{R}_{jl}g_{ik} - \mathring{R}_{il}g_{jk} - \mathring{R}_{jk}g_{il})(\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} \\
 &\quad - \mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jk}) \\
 &= \frac{1}{4}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{il}g_{jl} + \frac{1}{4}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{jk}g_{ik} + \frac{1}{4}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}g_{jk} \\
 &\quad + \frac{1}{4}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}g_{il} \\
 &= \frac{1}{4}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ij} + \frac{1}{4}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{ij} + \frac{1}{4}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jl} + \frac{1}{4}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{ij} \\
 &= \frac{1}{2}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ij} + \frac{1}{4}\underbrace{\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ij}}_{l \leftrightarrow k} + \frac{1}{4}\underbrace{\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}}_{l \leftrightarrow k} \\
 &= \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik},
 \end{aligned}$$

provamos o resultado pretendido.

Daí, usando as Equações (2.7) e (2.8), obtemos:

$$\begin{aligned}
 -W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} + \alpha\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik} &= -\left(\frac{1}{4}W_{ijkl}(\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl}\right) \\
 &\quad + \alpha\left(-\frac{1}{8}(\mathring{Ric} \otimes g)_{ijkl}(\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl}\right) \\
 &= -\frac{1}{4}W_{ijkl}(\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl} - \frac{\alpha}{8}(\mathring{Ric} \otimes g)_{ijkl}(\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl} \\
 &= -\frac{1}{4}\left(W + \frac{\alpha}{2}\mathring{Ric} \otimes g\right)_{ijkl}(\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl}. \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Antes de tudo, relembremos a decomposição ortogonal para o tensor $\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric}$ que é um $(0, 4)$ -tensor e tem as mesmas propriedades do tensor curvatura de Riemann. Para mais detalhes dessa decomposição veja [55, Subseção 1.4.1]. Logo, pode ser ortogonalmente decomposto como

$$\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric} = T + U + V,$$

onde T tem traço livre,

$$V_{ijkl} = -\frac{2}{n-2}(\mathring{Ric}^2 \otimes g)_{ijkl} + \frac{2}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2(g \otimes g)_{ijkl}$$

e

$$U_{ijkl} = -\frac{1}{n(n-1)}|\mathring{Ric}|^2(g \otimes g)_{ijkl}$$

em que $(\mathring{Ric}^2)_{ik} = \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{kp}$.

Agora, vamos calcular a norma ao quadrado dos tensores $\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric}$, V e U da seguinte maneira:

I)

$$\begin{aligned}
 |\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric}|^2 &= (\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl} (\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl} \\
 &= 4(\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} - \mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jk})^2 \\
 &= 4(\mathring{R}_{ik})^2(\mathring{R}_{jl})^2 - 8\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jl} + 4(\mathring{R}_{il})^2(\mathring{R}_{jk})^2 \\
 &= 8|\mathring{Ric}|^4 - 8\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\underbrace{\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}}_{l \leftrightarrow k} \\
 &= 8|\mathring{Ric}|^4 - 8|\mathring{Ric}^2|^2.
 \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned}
 |U|^2 &= U_{ijkl}U_{ijkl} \\
 &= \frac{1}{n^2(n-1)^2} |\mathring{Ric}|^4 (g \otimes g)_{ijkl}^2 \\
 &= \frac{4}{n^2(n-1)^2} |\mathring{Ric}|^4 (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})^2 \\
 &= \frac{4}{n^2(n-1)^2} |\mathring{Ric}|^4 (g_{ik}^2g_{jl}^2 - 2g_{ik}g_{il}g_{jl}g_{jk} + g_{il}^2g_{jk}^2) \\
 &= \frac{4}{n^2(n-1)^2} |\mathring{Ric}|^4 (n^2 - 2n + n^2) \\
 &= \frac{4}{n^2(n-1)^2} |\mathring{Ric}|^4 \cdot 2n(n-1) \\
 &= \frac{8}{n(n-1)} |\mathring{Ric}|^4.
 \end{aligned}$$

III)

$$\begin{aligned}
 |V|^2 &= V_{ijkl}V_{ijkl} \\
 &= \left(-\frac{2}{n-2} (\mathring{Ric}^2 \otimes g)_{ijkl} + \frac{2}{n(n-2)} |\mathring{Ric}|^2 (g \otimes g)_{ijkl} \right)^2 \\
 &= \frac{4}{(n-2)^2} (\mathring{Ric}^2 \otimes g)_{ijkl}^2 - \frac{8}{n(n-2)^2} |\mathring{Ric}|^2 (\mathring{Ric}^2 \otimes g)_{ijkl} (g \otimes g)_{ijkl} \\
 &\quad + \frac{4}{n^2(n-2)^2} |\mathring{Ric}|^4 (g \otimes g)_{ijkl}^2.
 \end{aligned}$$

Note que

$$(\mathring{Ric}^2 \otimes g)_{ijkl}^2 = \left((\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{jl} + (\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{ik} - (\mathring{Ric}^2)_{il}g_{jk} - (\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{il} \right)^2.$$

Daí, desenvolvendo a expressão do lado direito da igualdade acima teremos

$$\begin{aligned}
 & \left((\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{jl} + (\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{ik} - (\mathring{Ric}^2)_{il}g_{jk} - (\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{il} \right)^2 \\
 &= (\mathring{Ric}^2)_{ik}^2g_{jl}^2 + (\mathring{Ric}^2)_{jl}^2g_{ik}^2 + (\mathring{Ric}^2)_{il}^2g_{jk}^2 + (\mathring{Ric}^2)_{jk}^2g_{il}^2 + 2(\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{ik}(\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{jl} \\
 &\quad - 2(\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{jk}(\mathring{Ric}^2)_{il}g_{jl} - 2(\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{il}(\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{jl} - 2(\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{jk}(\mathring{Ric}^2)_{il}g_{ik} \\
 &\quad - 2(\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{il}(\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{ik} + 2(\mathring{Ric}^2)_{il}g_{il}(\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{jk} \\
 &= 4n|\mathring{Ric}^2|^2 + 4|\mathring{Ric}|^4 - 8|\mathring{Ric}^2|^2 \\
 &= 4|\mathring{Ric}^2|^2(n-2) + 4|\mathring{Ric}|^4.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\mathring{Ric}^2 \otimes g)_{ijkl}^2 = 4|\mathring{Ric}^2|^2(n-2) + 4|\mathring{Ric}|^4. \quad (2.10)$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
 (\mathring{Ric}^2 \otimes g)_{ijkl}(g \otimes g)_{ijkl} &= ((\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{jl} + (\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{ik} - (\mathring{Ric}^2)_{il}g_{jk} \\
 &\quad - (\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{il}) \cdot 2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),
 \end{aligned}$$

o que implica,

$$\begin{aligned}
 & (\mathring{Ric}^2 \otimes g)_{ijkl}(g \otimes g)_{ijkl} \\
 &= 2((\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{ik}g_{jl}^2 - (\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{jk}g_{jl}g_{il} + (\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{jl}g_{ik}^2 - (\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{ik}g_{jk}g_{il} \\
 &\quad - (\mathring{Ric}^2)_{il}g_{ik}g_{jk}g_{jl} + (\mathring{Ric}^2)_{il}g_{il}g_{jk}^2 - (\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{jl}g_{il}g_{ik} + (\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{jk}g_{il}^2) \\
 &= 8n|\mathring{Ric}^2|^2 - 8|\mathring{Ric}|^2 \\
 &= 8|\mathring{Ric}^2|^2(n-1),
 \end{aligned}$$

seque que

$$(\mathring{Ric}^2 \otimes g)_{ijkl}(g \otimes g)_{ijkl} = 8|\mathring{Ric}^2|^2(n-1). \quad (2.11)$$

Logo, pelas Equações (2.10) e (2.11), temos

$$\begin{aligned}
 |V|^2 &= \frac{4}{(n-2)^2} \left(4|\mathring{Ric}^2|^2(n-2) + 4|\mathring{Ric}|^4 \right) - \frac{8}{n(n-2)^2} |\mathring{Ric}^2|^2 \left(8|\mathring{Ric}^2|^2(n-1) \right) \\
 &\quad + \frac{4}{n^2(n-2)^2} |\mathring{Ric}|^4 (8n(n-1)) \\
 &= \frac{16}{n-2} |\mathring{Ric}^2|^2 + \frac{16}{(n-2)^2} |\mathring{Ric}|^4 - \frac{32(n-1)}{n(n-2)} |\mathring{Ric}^2|^2 \\
 &= \frac{16}{n-2} |\mathring{Ric}^2|^2 - \frac{16}{n(n-2)} |\mathring{Ric}|^4.
 \end{aligned}$$

Em particular, usando os itens *I*), *II*) e *III*) obtemos

$$\begin{aligned}
 |T|^2 + \frac{n}{2}|V|^2 &= (|\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric}|^2 - |V|^2 - |U|^2) + \frac{n}{2}|V|^2 \\
 &= |\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric}|^2 + \frac{(n-2)}{2}|V|^2 - |U|^2 \\
 &= (8|\mathring{Ric}|^4 - 8|\mathring{Ric}^2|^2) + \frac{(n-2)}{2} \left(\frac{16}{n-2}|\mathring{Ric}^2|^2 - \frac{16}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^4 \right) \\
 &\quad - \left(\frac{8}{n(n-1)}|\mathring{Ric}|^4 \right) \\
 &= 8|\mathring{Ric}|^4 - \frac{8}{n}|\mathring{Ric}|^4 - \frac{8}{n(n-1)}|\mathring{Ric}|^4 \\
 &= \frac{8(n-2)}{n-1}|\mathring{Ric}|^4. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Agora, pelo fato de W e T terem traço livre e V ter componentes $(\mathring{Ric}^2 \otimes g)_{ijkl}$ e $(g \otimes g)_{ijkl}$ concluímos então que $W_{ijkl}V_{ijkl} = 0$ e $T_{ijkl} \cdot (\mathring{Ric} \otimes g)_{ijkl} = 0$. Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
 \left(W + \frac{\alpha}{2}\mathring{Ric} \otimes g \right)_{ijkl} \cdot U &= \left(W + \frac{\alpha}{2}\mathring{Ric} \otimes g \right)_{ijkl} \left(-\frac{1}{n(n-1)}|\mathring{Ric}|^2(g \otimes g)_{ijkl} \right) \\
 &= -\frac{\alpha|\mathring{Ric}|^2}{n(n-1)}(\mathring{R}_{ik}g_{jl} + \mathring{R}_{jl}g_{ik} - \mathring{R}_{il}g_{jk} - \mathring{R}_{jk}g_{il})(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \\
 &= -\frac{\alpha|\mathring{Ric}|^2}{n(n-1)}(-\mathring{R}_{ik}g_{jl}g_{il}g_{jk} - \mathring{R}_{jl}g_{ik}g_{il}g_{jk} - \mathring{R}_{il}g_{jk}g_{ik}g_{jl} - \mathring{R}_{jk}g_{il}g_{ik}g_{jl}) \\
 &= 0 \quad \text{e que}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(W + \frac{\sqrt{2}\alpha}{2\sqrt{n}}\mathring{Ric} \otimes g \right)_{ijkl} \left(T + \sqrt{\frac{n}{2}}V \right)_{ijkl} &= W_{ijkl} \cdot T_{ijkl} + \sqrt{\frac{n}{2}}W_{ijkl} \cdot V_{ijkl} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}\alpha}{2\sqrt{n}}T_{ijkl}(\mathring{Ric} \otimes g)_{ijkl} \\
 &\quad + \frac{1}{n-2}V_{ijkl}(\mathring{Ric} \otimes g)_{ijkl} \\
 &= W_{ijkl} \cdot T_{ijkl} + \frac{\alpha}{2}V_{ijkl}(\mathring{Ric}^2 \otimes g)_{ijkl} \\
 &= \left(W + \frac{\alpha}{2}\mathring{Ric} \otimes g \right)_{ijkl} (T + V)_{ijkl}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, iremos estimar (2.9) aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Equação (2.12) e as observações feitas acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(W + \frac{\alpha}{2} \mathring{Ric} \otimes g \right)_{ijkl} (\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl} \right|^2 = \left| \left(W + \frac{\alpha}{2} \mathring{Ric} \otimes g \right)_{ijkl} (T + U + V)_{ijkl} \right|^2 \\
 & = \left| \left(W + \frac{\alpha}{2} \mathring{Ric} \otimes g \right)_{ijkl} (T + V)_{ijkl} \right|^2 \\
 & = \left| \left(W + \frac{\sqrt{2}\alpha}{2\sqrt{n}} \mathring{Ric} \otimes g \right)_{ijkl} \left(T + \sqrt{\frac{n}{2}} V \right)_{ijkl} \right|^2 \\
 & \leq \left| \left(W + \frac{\sqrt{2}\alpha}{2\sqrt{n}} \mathring{Ric} \otimes g \right)_{ijkl} \right|^2 \left| \left(T + \sqrt{\frac{n}{2}} V \right)_{ijkl} \right|^2 \\
 & = \left(|W|^2 + \frac{\alpha^2}{2n} |\mathring{Ric} \otimes g|^2 \right) \left(|T|^2 + \frac{n}{2} |V|^2 \right) \\
 & = \left(|W|^2 + \frac{\alpha^2}{2n} \cdot 4(n-2) |\mathring{Ric}|^2 \right) \cdot \frac{8(n-2)}{n-1} |\mathring{Ric}|^4 \\
 & = \frac{8(n-2)}{n-1} \left(|W|^2 + \frac{2(n-2)\alpha^2}{n} |\mathring{Ric}|^2 \right) |\mathring{Ric}|^4.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
 \left| -W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} + \alpha \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{ik} \right|^2 & = \frac{1}{16} \left| \left(W + \frac{\alpha}{2} \mathring{Ric} \otimes g \right)_{ijkl} (\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl} \right|^2 \\
 & \leq \frac{(n-2)}{2(n-1)} \left(|W|^2 + \frac{2(n-2)\alpha^2}{n} |\mathring{Ric}|^2 \right) |\mathring{Ric}|^4,
 \end{aligned}$$

podendo ser escrito como

$$\left| -W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} + \alpha \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{ik} \right| \leq \sqrt{\frac{(n-2)}{2(n-1)} \left(|W|^2 + \frac{2(n-2)\alpha^2}{n} |\mathring{Ric}|^2 \right)^{1/2}} |\mathring{Ric}|^2,$$

concluindo a demonstração. □

Capítulo 3

Variedades do tipo-Einstein

Neste capítulo, deduzimos uma identidade do tipo Bochner para variedades compactas do tipo-Einstein gradiente e com fronteira. Como consequência, somos capazes de demonstrar um resultado de rigidez para variedades do tipo-Einstein, assumindo a condição de curvatura de Ricci paralelo. Além disso, fornecemos uma condição sobre a norma do gradiente da função potencial para classificar tais estruturas.

3.1 Definições e resultados existentes

Primeiramente, recordemos a definição de variedade do tipo-Einstein.

Definição 3.1. *Uma variedade do tipo-Einstein é uma variedade Riemanniana (M^n, g) com $n \geq 3$ que admite funções suaves $f, h : M \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$f\text{Ric} = \nabla^2 f + hg, \quad (3.1)$$

onde $f > 0$ em $\text{int}(M)$ e $f^{-1}(0) = \partial M$. Aqui, Ric e $\nabla^2 f$ representam, respectivamente, o tensor de Ricci e a forma Hessiana em M^n .

Vamos nos referir à equação (3.1) como a equação fundamental de uma variedade do tipo-Einstein (M^n, g, f, h) .

Observe que a função h é determinada por f e a curvatura escalar na métrica g denotada por R . De fato, veja que a equação fundamental de uma variedade do tipo Einstein pode ser reescrita na linguagem tensorial da seguinte forma

$$fR_{jk} = \nabla_j \nabla_k f + hg_{jk}. \quad (3.2)$$

Tomando o traço em (3.2), obtemos

$$fR = \Delta f + nh. \quad (3.3)$$

Além disso, com um cálculo direto envolvendo (3.1) e (3.3), não é difícil verificar que

$$f\mathring{Ric} = \mathring{\nabla}^2 f, \quad (3.4)$$

onde \mathring{T} representa o traço-livre do tensor T .

Prosseguindo, precisamos encontrar uma expressão para ∇h e Δh que será importante para esse capítulo. Antes de tudo, lembre que é possível relacionar a curvatura tensorial com uma função suave $f \in C^\infty(M)$ usando a identidade de Ricci (2.1),

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f = R_{ijkl} \nabla_l f. \quad (3.5)$$

Por outro lado, derivando em i a equação (3.2), inferimos que

$$\nabla_i f R_{jk} + f \nabla_i R_{jk} = \nabla_i \nabla_j \nabla_k f + \nabla_i h g_{jk}. \quad (3.6)$$

Dessa forma, combinando as equações (3.5) e (3.6), obtemos:

$$\nabla_i f R_{jk} + f \nabla_i R_{jk} = \nabla_j \nabla_i \nabla_k f + R_{ijkl} \nabla_l f + \nabla_i h g_{jk}.$$

Podemos concluir a partir da identidade contraída de Bianchi $\frac{1}{2} \nabla_i R = g^{jk} \nabla_j R_{ki}$ e contraindo em i e k , que

$$\frac{1}{2} f \nabla_j R = \nabla_j \Delta f + \nabla_j h.$$

Substituindo (3.3) na igualdade acima, concluímos que

$$(n-1) \nabla_j h = R \nabla_j f + \frac{1}{2} f \nabla_j R. \quad (3.7)$$

Isso implica que

$$(n-1) \nabla_i \nabla_j h = \nabla_i R \nabla_j f + R \nabla_i \nabla_j f + \frac{1}{2} \nabla_i f \nabla_j R + \frac{1}{2} f \nabla_i \nabla_j R. \quad (3.8)$$

Portanto, tomando o traço de (3.8) em i e j resulta em

$$(n-1) \Delta h = \frac{3}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + R \Delta f + \frac{1}{2} f \Delta R. \quad (3.9)$$

Com essa notação, obteremos a seguinte fórmula para uma variedade do tipo-Einstein, vale ressaltar que tal equação pode ser encontrada em [49, Lema 1]. Por completez faremos sua demonstração.

Lema 3.1. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade tipo-Einstein. Então vale a seguinte igualdade*

$$fC_{ijk} = R_{ijkl}\nabla_l f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}). \quad (3.10)$$

Demonstração. Primeiro, observe que trocando i por j na Equação (3.6) obtemos

$$\nabla_j f R_{ik} + f \nabla_j R_{ik} = \nabla_j \nabla_i \nabla_k f + \nabla_j h g_{ik}. \quad (3.11)$$

Por outro lado, subtraindo as equações (3.6) e (3.11) temos

$$\begin{aligned} \nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik} + f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= \nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f + (\nabla_i h g_{jk} - \nabla_j h g_{ik}) \\ &= R_{ijkl} \nabla_l f + (\nabla_i h g_{jk} - \nabla_j h g_{ik}), \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos a Equação (3.5).

Para finalizar, basta combinar a expressão (2.9) para o ∇h e a definição do tensor de Cotton

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}),$$

para concluir a demonstração. □

A seguir, veremos alguns exemplos de variedades do tipo-Einstein em bolas geodésicas das formas espaciais simplesmente conexas. O primeiro, trata-se das bolas geodésicas do espaço Euclidiano com a métrica canônica.

Exemplo 3.1. *Considere $B^n \subset \mathbb{R}^n$ uma bola geodésica unitária centrada na origem e as funções f e h definidas por*

$$f(x) = \frac{1}{2(n-1)}(1 - |x|^2) \quad e \quad h(x) = \frac{1}{n-1}.$$

Note que, $f > 0$ no $\text{int}(B)$ e $f^{-1}(0) = \partial B$. Além disso, Considerando em \mathbb{R}^n a métrica canônica g e em B^n a métrica restrita, temos que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{n-1}$. Logo, obtemos que

$$\nabla^2 f = -\frac{1}{n-1}g \quad e \quad \Delta f = -\frac{n}{n-1}.$$

Portanto,

$$\nabla^2 f + h g = -\frac{1}{n-1}g + \frac{1}{n-1}g = f \text{Ric},$$

Logo (B^n, g, f, h) é uma métrica do tipo Einstein.

Exemplo 3.2. Considere $\mathbb{L}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, ds^2)$, onde $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 - dt^2$. Considere $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{L}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_n^2 - t^2 = -1, t \geq 1\}$ mergulhado em \mathbb{L}^{n+1} e seja g a métrica induzida. Nessas condições g é uma métrica Riemanniana. Agora fixe $p = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{H}^n$ e considere $B^n \subset \mathbb{H}^n$ uma bola geodésica centrada em p e raio r_0 e as funções f e h definidas por

$$f(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{\cosh r}{\cosh r_0} \right) = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{t}{\cosh r_0} \right)$$

e

$$h(x_1, \dots, x_n, t) = -1 + \frac{nt}{(n-1) \cosh r_0},$$

onde r é a distância geodésica de (x_1, \dots, x_n, t) à p . Note que, $t = \cosh r$ e t é a função altura relativa a p . Daí,

$$\nabla^2 f = -\frac{1}{(n-1) \cosh r_0} \nabla^2(t) = -\frac{t}{(n-1) \cosh r_0} g.$$

Portanto, lembrando que $Ric = -(n-1)g$ segue que

$$\nabla^2 f + hg = -\frac{t}{(n-1) \cosh r_0} g - g + \frac{nt}{(n-1) \cosh r_0} g = f Ric,$$

e $f^{-1}(0) = \partial M$. Assim, (B^n, g, f, h) é uma métrica tipo-Einstein.

Exemplo 3.3. Considere $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $p = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$. Sejam $B^n \subset \mathbb{S}^n$ uma bola geodésica centrada em p e raio $r_0 < \frac{\pi}{2}$ e as funções f e h definidas por

$$f(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{n-1} \left(\frac{\cos r}{\cos r_0} - 1 \right) = \frac{1}{n-1} \left(\frac{t}{\cos r_0} - 1 \right)$$

e

$$h(x_1, \dots, x_n, t) = -1 + \frac{nt}{(n-1) \cos r_0}$$

onde r é a distância geodésica de (x_1, \dots, x_n, t) à p . Assim, $t = \cos r$ e t é a função altura relativa a p . Daí,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{(n-1) \cos r_0} \nabla^2(t) = -\frac{t}{(n-1) \cos r_0} g.$$

Portanto, lembrando que $Ric = (n-1)g$ segue que

$$\nabla^2 f + hg = -\frac{t}{(n-1) \cos r_0} g - g + \frac{nt}{(n-1) \cos r_0} g = f Ric,$$

e $f^{-1}(0) = \partial M$. Assim, (B^n, g, f, h) é uma métrica tipo Einstein.

Esses exemplos são variedades de Einstein com bordo conexo e são inspirados por casos particulares de métricas discutidas em nossa introdução, a saber, métricas V-estáticas. Destacamos que uma vasta área de pesquisa tentou obter a rigidez de tais métricas para um desses exemplos, dadas certas restrições geométricas. Recentemente, Freitas e Gomes em [27], estudaram a equação fundamental das variedades do tipo-Einstein da seguinte maneira:

$$\nabla^2 f = \frac{\mu}{\beta} f (\Lambda g - \frac{\alpha}{\beta} Ric) + \gamma g, \quad (3.12)$$

para alguma função suave Λ em M^n e constantes $\alpha, \beta, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$, com $\beta \neq 0$. Claramente, considerando $\frac{\mu\alpha}{\beta^2} = -1$ e $h = -\frac{\mu\Lambda}{\beta} f - \gamma$, obtemos a Equação (3.1). Assim, tal equação pode ser vista como um caso particular da Equação (3.12). Dessa forma, foram capazes de classificar variedades do tipo-Einstein que são Einstein. Mais precisamente, obtiveram o seguinte resultado

Teorema 3.1 ([27], Teorema 1, Teorema 2). *Seja (M^n, g) uma variedade compacta tipo-Einstein gradiente com bordo conexo ∂M . Se (M^n, g) é uma variedade de Einstein, então M^n é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa quando $\gamma \neq 0$ ou é isométrico a um hemisfério de uma esfera redonda quando $\gamma = 0$.*

Vale ressaltar que os Exemplos 3.1, 3.2 e 3.3 são casos explícitos onde o Teorema acima se aplica.

Prosseguindo, uma das estruturas mais importantes estudadas na literatura e que satisfaz a equação do tipo-Einstein para $h = -\Delta f$ são as triplas estática positiva. Além disso, é importante lembrar que, em toda variedade Riemanniana, o tensor métrico é paralelo (i.e., $\nabla g = 0$), imediatamente obtemos que variedades Einstein possuem tensor de Ricci paralelo (i.e., $\nabla Ric = 0$). No entanto, é importante ressaltar que a recíproca desse fato não é verdadeira, como ilustrado no exemplo a seguir:

Exemplo 3.4. *Cilindro sobre \mathbb{S}^{n-1} com métrica produto,*

$$\left(M = \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right] \times S^{n-1}, g = dt^2 + \frac{n-2}{n} g_{S^{n-1}}, f(t) = \text{sen}(\sqrt{nt}), h = -\Delta f \right),$$

onde $g_{S^{n-1}}$ representa a métrica canônica de \mathbb{S}^{n-1} . Tal estrutura define uma variedade do tipo-Einstein não-Einstein, conformemente plana e que satisfaz a condição de Ricci paralelo (veja mais detalhes no Capítulo 2, Seção 2.3 em [14].)

Portanto, concluímos que a hipótese de Ricci paralelo é uma condição mais fraca do que a de Einstein. Assim, com o objetivo de entender melhor a geometria de uma variedade do tipo-Einstein sobre a condição Ricci paralelo veremos na próxima seção fórmulas tipo Bochner.

3.2 Fórmulas tipo Bochner

Prosseguindo, obteremos uma fórmula divergente para uma variedade tipo-Einstein.

Lema 3.2. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade tipo-Einstein. Então vale a seguinte igualdade*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \nabla_i (f C_{ijk} R_{jk}) + \left(\frac{Rf}{n-1} + \Delta f \right) |\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{n-1} Ric(\nabla R, \nabla f) \\ &\quad + \frac{n-4}{4n(n-1)} \langle \nabla R^2, \nabla f \rangle + \langle \nabla |\mathring{Ric}|^2, \nabla f \rangle, \end{aligned}$$

onde $X_i = R_{ik} R_{kj} \nabla_j f + R_{ijkl} \nabla_l f R_{jk}$.

Demonstração. Começamos substituindo a Equação (3.10) em $\operatorname{div} X$, ou seja,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \nabla_i \left[R_{ik} R_{kj} \nabla_j f + f C_{ijk} R_{jk} - \frac{R}{n-1} (\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) R_{jk} \right. \\ &\quad \left. + (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) R_{jk} \right] \\ &= \nabla_i \left[f C_{ijk} R_{jk} - \frac{R^2}{n-1} \nabla_i f + \frac{R}{n-1} R_{ij} \nabla_j f + \nabla_i f |\mathring{Ric}|^2 \right] \\ &= \nabla_i (f C_{ijk} R_{jk}) - \frac{3}{4(n-1)} \langle \nabla R^2, \nabla f \rangle + \left(|\mathring{Ric}|^2 - \frac{R^2}{n-1} \right) \Delta f \\ &\quad + \frac{1}{n-1} Ric(\nabla R, \nabla f) + \frac{R}{n-1} R_{ij} \nabla_i \nabla_j f + \langle \nabla f, \nabla |\mathring{Ric}|^2 \rangle, \end{aligned}$$

que pode ser reescrita usando (3.2), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \nabla_i (f C_{ijk} R_{jk}) + \left(\frac{Rf}{n-1} + \Delta f \right) |\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{n-1} Ric(\nabla R, \nabla f) \\ &\quad + \frac{R^2}{n(n-1)} (-\Delta f - nh + Rf) + \frac{n-4}{4n(n-1)} \langle \nabla R^2, \nabla f \rangle + \langle \nabla f, \nabla |\mathring{Ric}|^2 \rangle. \end{aligned}$$

Para concluir, basta aplicar (3.3). □

Agora, vamos fornecer outra fórmula para $\operatorname{div} X$.

Lema 3.3. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein. Então temos que*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}R_{il}R_{jk}) + \frac{n}{2(n-1)}\operatorname{Ric}(\nabla R, \nabla f) + \frac{f}{2}|C_{ijk}|^2 \\ &\quad + C_{ijk}R_{ik}\nabla_j f - \frac{1}{2n(n-1)}\langle \nabla R^2, \nabla f \rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla |\mathring{\operatorname{Ric}}|^2 \rangle, \end{aligned}$$

onde $X_i = R_{ik}R_{kj}\nabla_j f + R_{ijkl}\nabla_l f R_{jk}$.

Demonstração. Por meio de um cálculo direto usando a equação fundamental de uma variedade do tipo Einstein, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \nabla_i \nabla_j f R_{ik} R_{jk} + \frac{1}{2} \operatorname{Ric}(\nabla R, \nabla f) + \nabla_j f R_{ik} \nabla_i R_{jk} \\ &\quad + R_{ijkl} \nabla_i \nabla_l f R_{jk} + \nabla_i R_{ijkl} \nabla_l f R_{jk} + R_{ijkl} \nabla_l f \nabla_i R_{jk} \\ &= f(R_{ij}R_{ik}R_{kj} + R_{ijkl}R_{il}R_{jk}) + \frac{1}{2} \operatorname{Ric}(\nabla R, \nabla f) - \frac{1}{2} \langle \nabla f, \nabla |\operatorname{Ric}|^2 \rangle \\ &\quad + 2 \nabla_j f R_{ik} \nabla_i R_{jk} + R_{ijkl} \nabla_l f \nabla_i R_{jk}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde na última igualdade usamos a identidade de Bianchi uma vez contraída.

Agora, usando (2.2) e (3.10), podemos reescrever (3.13) como

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= f(R_{ij}R_{ik}R_{kj} + R_{ijkl}R_{il}R_{jk}) + \frac{1}{2} \operatorname{Ric}(\nabla R, \nabla f) + \frac{f}{2} |C_{ijk}|^2 \\ &\quad - \frac{1}{4(n-1)} \langle \nabla f, \nabla R^2 \rangle + \nabla_i R_{jk} R_{ik} \nabla_j f \end{aligned} \quad (3.14)$$

Finalmente, é suficiente substituir (2.2) em (3.14) para obter o resultado solicitado. \square

Lema 3.4. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein. Então temos:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X) &= - \left(\frac{Rf}{n-1} + \Delta f \right) |\mathring{\operatorname{Ric}}|^2 - \langle \nabla f, \nabla |\mathring{\operatorname{Ric}}|^2 \rangle + \frac{n-2}{n-1} \mathring{\operatorname{Ric}}(\nabla R, \nabla f) \\ &\quad + f \left(|C_{ijk}|^2 - |\nabla \operatorname{Ric}|^2 + \frac{n}{4(n-1)} |\nabla R|^2 \right), \end{aligned}$$

onde $X_i = -\frac{f}{2} \nabla_i |\mathring{\operatorname{Ric}}|^2 + 2f C_{ijk} R_{jk} + \frac{n-2}{2(n-1)} f R_{ij} \nabla_j R - \frac{n-2}{4n(n-1)} f \nabla_i R^2$.

Demonstração. Primeiro, comparando a Lema 3.2 e a Lema 3.3, podemos deduzir

$$\begin{aligned} &f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}R_{il}R_{jk}) \\ &= \nabla_i (f C_{ijk} R_{jk}) - C_{ijk} R_{ik} \nabla_j f + \left(\frac{Rf}{n-1} + \Delta f \right) |\mathring{\operatorname{Ric}}|^2 + \frac{1}{2} \langle \nabla f, \nabla |\mathring{\operatorname{Ric}}|^2 \rangle \\ &\quad - \frac{n-2}{2(n-1)} \operatorname{Ric}(\nabla R, \nabla f) + \frac{n-2}{4n(n-1)} \langle \nabla R^2, \nabla f \rangle - \frac{f}{2} |C_{ijk}|^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por outro lado, com um cálculo direto, podemos reescrever a Equação (2.4) como

$$\begin{aligned} & f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}R_{il}R_{jk}) \\ &= f\nabla_i \left(\frac{1}{2}\nabla_i|\mathring{Ric}|^2 - C_{ijk}R_{jk} - \frac{1}{2(n-1)} \left((n-2)R_{ij}\nabla_j R + \frac{1}{2}\nabla_i R^2 \right) \right) \\ & - f|\nabla Ric|^2 + \frac{1}{2}f|C_{ijk}|^2 + \frac{n}{4(n-1)}f|\nabla R|^2. \end{aligned}$$

Usando que $|\mathring{Ric}|^2 = |Ric|^2 - \frac{R^2}{n}$, obtemos ainda que

$$\begin{aligned} & f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}R_{il}R_{jk}) \\ &= f\nabla_i \left(\frac{1}{2}\nabla_i|\mathring{Ric}|^2 - C_{ijk}R_{jk} - \frac{n-2}{2(n-1)} \left(\frac{1}{2n}\nabla_i R^2 - R_{ij}\nabla_j R \right) \right) \\ & - f|\nabla Ric|^2 + \frac{1}{2}f|C_{ijk}|^2 + \frac{n}{4(n-1)}f|\nabla R|^2. \end{aligned}$$

Agora, observando que $f\operatorname{div}X = \operatorname{div}(fX) - \langle \nabla f, X \rangle$, onde

$$X = \frac{1}{2}\nabla_i|\mathring{Ric}|^2 - C_{ijk}R_{jk} - \frac{n-2}{2(n-1)} \left(\frac{1}{2n}\nabla_i R^2 - R_{ij}\nabla_j R \right),$$

podemos concluir a seguinte expressão

$$\begin{aligned} & f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}R_{il}R_{jk}) \\ &= \nabla_i \left(\frac{f}{2}\nabla_i|\mathring{Ric}|^2 - fC_{ijk}R_{jk} + \frac{n-2}{2(n-1)}f \left(\frac{1}{2n}\nabla_i R^2 - R_{ij}\nabla_j R \right) \right) \\ & - \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla|\mathring{Ric}|^2 \rangle + C_{ijk}R_{jk}\nabla_i f - f|\nabla Ric|^2 + \frac{f}{2}|C_{ijk}|^2 \\ & + \frac{n-2}{2(n-1)} \left(Ric(\nabla f, \nabla R) - \frac{1}{2n}\langle \nabla f, \nabla R^2 \rangle \right) + \frac{n}{4(n-1)}f|\nabla R|^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para finalizar, basta comparar as expressões (3.15) e (3.16). \square

3.3 Resultados de Rigidez

Nesta seção apresentaremos os principais resultados deste capítulo, os quais foram obtidos no artigo "*Compact Einstein-type manifolds with parallel Ricci tensor*", escrito pelo autor com parceria com H. Baltazar e M. Andrade. Iniciaremos com um teorema que classifica as variedades do tipo-Einstein com tensor de Ricci paralelo.

Antes de prosseguir, vamos definir a função λ em termos de h e da função potencial f , da seguinte forma:

$$\lambda = (n-1)h - Rf = -\frac{(n-1)}{n} \left[\frac{fR}{n-1} + \Delta f \right]. \quad (3.17)$$

Observe que derivando a Equação (3.17), temos que

$$\nabla\lambda = (n - 1)\nabla h - \nabla(Rf).$$

Usando a expressão (3.7) para o ∇h , concluimos que

$$\nabla\lambda = \frac{1}{2}f\nabla R.$$

Portando, como $f > 0$ no $\text{int}(M)$ segue que, se R é constante então a função λ é constante.

Essa função λ aparece em [36] e os autores conseguiram deduzir na verdade que a curvatura escalar é constante se, e somente se, λ for constante, conforme Proposição 2.1.

Agora estamos em posição de apresentar o nosso primeiro resultado que classifica as variedades do tipo-Einstein com Ricci paralelo. Segue abaixo o seu enunciado:

Teorema 3.2. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein com tensor de Ricci paralelo. Então, a função λ definida acima é constante e uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

- (1) *se $\lambda > 0$, então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , ou \mathbb{H}^n .*
- (2) *se $\lambda = 0$ e $n = 3$, então (M^3, g) é coberta por uma das triplas estáticas descritas no Teorema 1.1;*
- (3) *se $\lambda < 0$ e M^n tem bordo conexo, então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^n .*

Demonstração. Para começar, podemos usar (3.2) e (3.3) para deduzir

$$\begin{aligned} -\Delta f g + \text{Hess}f - f\text{Ric} &= (-\Delta f - h)g \\ &= ((n - 1)h - Rf)g \\ &= \lambda g, \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde λ foi definido em (3.17).

Agora, como estamos assumindo a condição de curvatura de Ricci paralelo, isso implica que M^n tem curvatura escalar constante e a função λ é constante. Como consequência, a identidade (3.18) nos diz que (M^n, g, f) é uma métrica V -estática.

Portanto, se $\lambda > 0$, até a normalização, temos as métricas críticas de Miao-Tam introduzidas por Miao e Tam em [52, 53], e a classificação para o caso de curvatura de

Ricci paralelo foi obtida por Baltazar e Ribeiro Jr. em [8]. Ou seja, estamos em posição de usar o Corolário 1 em [8] para concluir que (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , ou \mathbb{H}^n . Caso contrário, se $\lambda = 0$, temos os espaços estáticos bem conhecidos e a classificação segue diretamente do Teorema 1.1 anunciado na introdução. Finalmente, se $\lambda < 0$, com um cálculo direto, temos que

$$-\left(\frac{Rf}{n-1} + \Delta f\right) = \frac{n}{n-1}\lambda,$$

e levando em conta o Lema 3.4 e nossa suposição de que (M^n, g) tem curvatura de Ricci paralela, imediatamente temos

$$\frac{n}{n-1}\lambda|\mathring{Ric}|^2 = 0$$

e isso força (M^n, g) a ser Einstein. Agora, é importante notar que a equação V-estática satisfaz

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= fRic + \Delta fg + \lambda g \\ &= fRic + \left(-\frac{Rf}{n-1} - \frac{n}{n-1}\lambda\right)g + \lambda g \\ &= fRic - \frac{R}{n-1}fg - \frac{\lambda}{n-1}g, \end{aligned}$$

que é a Equação (1.8) para

$$\frac{\mu\alpha}{\beta^2} = -1, \quad \frac{\mu\Lambda}{\beta} = \frac{-R}{n-1} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{-\lambda}{n-1}.$$

Como já sabemos que (M^n, g) é Einstein e estamos assumindo que o bordo é conexo, basta aplicar o Teorema 3.1 para concluir que M^n é isométrico a uma bola geodésica em \mathbb{S}^n . □

Prosseguindo, estudaremos um dos problemas abordados recentemente, que procura obter uma condição necessária e suficiente sobre a norma do gradiente da função potencial para que uma métrica seja Einstein.

Em 2015, Leandro Benedito [48] contribuiu significativamente nesse sentido, ao estabelecer uma condição desse tipo para métricas CPE em qualquer dimensão. Seu resultado representa um marco importante no entendimento das métricas riemannianas e fornece uma ferramenta crucial para a classificação dessas estruturas. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3. (Benedito, L., 2015) *Seja (M^n, g, f) uma métrica CPE n -dimensional. Então M^n é Einstein se, e somente se, vale a seguinte igualdade*

$$|\nabla f|^2 + \frac{Rf^2}{n(n-1)} = \Lambda,$$

onde Λ é uma constante.

Utilizando uma abordagem semelhante àquela utilizada na demonstração do teorema mencionado acima, H. Baltazar e C. Queiroz em [4] apresentam uma condição necessária e suficiente para classificar uma métrica crítica de Miao-Tam. A escolha da hipótese que envolve a função potencial será detalhada no Capítulo 4. Nesse contexto, a seguir, no Teorema 3.5 iremos apresentar a generalização desses resultados para variedades tipo-Einstein.

Antes de tudo, com base nos resultados mencionados anteriormente, encontraremos a condição para que (M^n, g, f, h) , uma variedade do tipo-Einstein, seja uma variedade Einstein. Para fazer isso, usaremos (3.4) e (3.3) para obter

$$f \left(R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij} \right) = \nabla_i \nabla_j f + \left(-\frac{fR}{n} + h \right) g_{ij}.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} f \overset{\circ}{R}_{ij} \nabla_j f &= \nabla_i \nabla_j f \nabla_j f + \left(-\frac{fR}{n} + h \right) \nabla_i f \\ &= \frac{1}{2} \nabla_i |\nabla f|^2 + \nabla_i (hf) - f \nabla_i h - \frac{fR}{n} \nabla_i f \end{aligned}$$

Agora, de (3.7), concluímos que

$$f \overset{\circ}{R}_{ij} \nabla_j f = \nabla_i \left(\frac{1}{2} |\nabla f|^2 + hf + c_n R f^2 \right) + \frac{f^2}{2n} \nabla_i R, \quad (3.19)$$

onde $c_n = (1 - 2n)/(2n(n - 1))$. É fácil ver que se (M^n, g) é uma variedade Einstein, então

$$\frac{1}{2} |\nabla f|^2 + hf + c_n R f^2 = \Lambda$$

é constante. Agora, estudamos a função Λ para obter alguma classificação para variedades do tipo-Einstein.

Lema 3.5. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein. Consideremos a função*

$$\Lambda = \frac{1}{2} |\nabla f|^2 + hf + c_n R f^2,$$

onde $c_n = (1 - 2n)/(2n(n - 1))$. Então,

$$\operatorname{div}(f \nabla \Lambda) - 2 \langle \nabla \Lambda, \nabla f \rangle = f^3 |\overset{\circ}{R}ic|^2 + \frac{1}{2} f^2 \langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{1}{2n} \operatorname{div}(f^3 \nabla R).$$

Demonstração. Assumimos que (M^n, g, f, h) é tipo-Einstein e Λ é definida acima, aplicando a derivada covariante na expressão de Λ , obtemos

$$\nabla_k \Lambda = \frac{1}{2} \nabla_k |\nabla f|^2 + \nabla_k (hf) + c_n \nabla_k (Rf^2). \quad (3.20)$$

Tomando a segunda derivada em (3.20) e usando a expressão (3.7) para o ∇h , temos

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_k \Lambda &= \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_k |\nabla f|^2 + \frac{1}{n-1} \left(R \nabla_i f \nabla_k f + \frac{1}{2} f \nabla_i f \nabla_k R \right) + f \nabla_i \nabla_k h \\ &+ \frac{1}{n-1} \left(R \nabla_i f \nabla_k f + \frac{1}{2} f \nabla_k f \nabla_i R \right) + h \nabla_i \nabla_k f \\ &+ c_n (2f \nabla_i f \nabla_k R + f^2 \nabla_i \nabla_k R + 2R \nabla_i f \nabla_k f + 2f \nabla_i R \nabla_k f + 2f R \nabla_i \nabla_k f). \end{aligned}$$

Tomando o traço em i e k , chegamos a

$$\begin{aligned} \Delta \Lambda &= \frac{1}{2} \Delta |\Delta f|^2 + \frac{R}{n(n-1)} |\nabla f|^2 + \frac{(-3n+2)}{n(n-1)} f \langle \nabla f, \nabla R \rangle + f \Delta h + c_n f^2 \Delta R \\ &+ (2c_n f R + h) \Delta f. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por outro lado, lembramos da fórmula clássica de Bochner

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle.$$

Assim, substituindo as expressões (3.3) para o Δf e (3.7) para o ∇h na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 &= |\nabla^2 f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(fR - nh) \rangle \\ &= |\nabla^2 f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) - \frac{R}{n-1} |\nabla f|^2 \\ &+ \frac{n-2}{2(n-1)} f \langle \nabla R, \nabla f \rangle. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dessa forma, substituindo a expressão (3.9) para o Δh e a Equação (3.22) na igualdade (3.21), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta \Lambda &= |\overset{\circ}{\nabla}^2 f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) - \frac{R}{n} |\nabla f|^2 + \frac{n-4}{2n} f \langle \nabla R, \nabla f \rangle \\ &+ \left(\frac{Rf}{n-1} + h + 2c_n f R \right) \Delta f - \frac{1}{2n} f^2 \Delta R. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Observando que $fR = \Delta f + nh$, $f\overset{\circ}{Ric} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f$ e

$$f\overset{\circ}{Ric}(\nabla f, \nabla f) = \langle \nabla \Lambda, \nabla f \rangle + \frac{f^2}{2n} \langle \nabla R, \nabla f \rangle,$$

podemos reescrever a igualdade (3.23) da seguinte forma

$$f \Delta \Lambda = f^3 |\overset{\circ}{Ric}|^2 + \langle \nabla \Lambda, \nabla f \rangle + \frac{(n-1)}{2n} f^2 \langle \nabla f, \nabla R \rangle - \frac{f^2}{2n} \operatorname{div}(f \nabla R).$$

Usando que $\operatorname{div}(f^3 \nabla R) = 2f^2 \langle \nabla f, \nabla R \rangle + f^2 \operatorname{div}(f \nabla R)$, terminamos a prova. \square

Uma consequência imediata do Lema 3.5 é a seguinte:

Corolário 3.1. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein. Se $\int_M f^2 \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM_g \geq 0$ e a função Λ é constante ao longo do fluxo de ∇f . Então, (M^n, g) é Einstein.*

Demonstração. Na verdade, uma vez que estamos admitindo que $\langle \nabla \Lambda, \nabla f \rangle = 0$ e $\int_M f^2 \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM_g \geq 0$, integramos a expressão no Lema 3.5 e usando que $f > 0$ em $\text{int}(M)$ e $f = 0$ em ∂M , concluímos que $\mathring{Ric} = 0$, ou seja, (M^n, g) é Einstein. \square

Em particular, se considerarmos $f = 1 + F$, onde F é o função potencial na equação do ponto crítico, obtemos o Corolário 1 em [17], porque R é constante. Mais precisamente, F. Benjamin obteve o seguinte resultado:

Teorema 3.4. *(Benjamin, F., [17]) Seja (M^n, g, F) uma métrica CPE. Se a função $h = |\nabla F|^2 + \frac{R}{n(n-1)} F^2$ é constante ao longo do fluxo do ∇F . Então M é isométrica à esfera redonda e F é a primeira autofunção do operador Laplaciano.*

Além disso, considerando que o gradiente da função potencial é um autovetor do tensor de Ricci, temos mais uma consequência do Lema 3.5.

Corolário 3.2. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein. Se $Ric(\nabla f) = \frac{R}{n} \nabla f$ e $\int_M f^2 \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM_g \geq 0$. Então, (M^n, g) é Einstein.*

Demonstração. Por (3.19), obtemos que $\langle \nabla \Lambda, \nabla f \rangle = -\frac{f^2}{2n} \langle \nabla R, \nabla f \rangle$. usando o lema 3.5, segue que

$$\text{div}(f \nabla \Lambda) = f^3 |\mathring{Ric}|^2 + \frac{(n-2)}{2n} f^2 \langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{1}{2n} \text{div}(f^3 \nabla R).$$

Novamente, integrando sobre M e usando que $f > 0$ em $\text{int}(M)$ e $f = 0$ em ∂M , terminamos a prova. \square

Por fim, ao considerar que a função Λ é constante, obtemos uma condição que relaciona a função potencial de uma variedade do tipo-Einstein, resultando no seguinte teorema de rigidez.

Teorema 3.5. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein satisfazendo*

$$\frac{1}{2} |\nabla f|^2 + \frac{1-2n}{2n(n-1)} R f^2 + h f = \text{const.} \quad (3.24)$$

Então, (M^n, g) é uma variedade Einstein, desde que

$$\int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM_g \geq 0.$$

Demonstração. Como Λ é constante, do Lema 3.5 e $f > 0$ em M , obtemos

$$\operatorname{div}(f\nabla R) = 2nf|\overset{\circ}{Ric}|^2 + (n-2)\langle \nabla R, \nabla f \rangle. \quad (3.25)$$

Integrando sobre M , usando que $\int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM_g \geq 0$ e $f = 0$ em ∂M , concluímos que $\overset{\circ}{Ric} = 0$, ou seja, (M^n, g) é Einstein. \square

Como corolário imediato, temos que

Corolário 3.3. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade tipo-Einstein com curvatura escalar constante satisfazendo a seguinte condição*

$$\frac{1}{2}|\nabla f|^2 + \frac{1-2n}{2n(n-1)}Rf^2 + hf = \text{const}. \quad (3.26)$$

Então a função λ definida em (3.17) é constante se, e somente se, algum dos itens abaixo é satisfeito

- (1) *se $\lambda > 0$, então (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , ou \mathbb{H}^n .*
- (2) *se $\lambda = 0$, então, a menos de um quociente finito, (M^n, g) é isométrico a um hemisfério padrão com métrica canônica $(\mathbb{S}_+^n, g_{\mathbb{S}^n})$.*
- (3) *se $\lambda < 0$ e M^n tem bordo conexo, então (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em \mathbb{S}^n ;*

Além disso, restrito ao caso tridimensional, a condição integral pode ser enfraquecida. Na verdade, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.4. *Seja (M^3, g, f, h) uma variedade tipo-Einstein satisfazendo*

$$\frac{1}{2}|\nabla f|^2 - \frac{5}{12}Rf^2 + hf = \text{const}. \quad (3.27)$$

Então, (M^3, g) é uma variedade de Einstein desde que

$$\int_{\partial M} \langle \nabla R, \nabla f \rangle dS \geq 0.$$

Demonstração. Antes de prosseguir, observe que a Equação (3.25) pode ser reescrita como

$$f\Delta R = 2nf|\overset{\circ}{Ric}|^2 + (n-3)\langle \nabla R, \nabla f \rangle.$$

Então, considerando o caso tridimensional, imediatamente temos

$$\Delta R = 6|\overset{\circ}{Ric}|^2.$$

Portanto, ao integrar esta última expressão sobre M^3 , aplicamos a fórmula de Stokes para chegar em

$$\int_{\partial M} \langle \nabla R, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle dS + 6 \int_M |Ric|^2 dM_g = 0,$$

onde o vetor normal em ∂M é definido por $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Como $|\nabla f|_{\partial M}$ é constante e $\int_{\partial M} \langle \nabla R, \nabla f \rangle dS \geq 0$, obtemos uma variedade Einstein. Portanto, a prova está concluída. \square

Além disso, podemos deduzir o seguinte:

Corolário 3.5. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein com curvatura escalar constante e suponha que $Ric(\nabla f) = \frac{R}{n}\nabla f$. Então, (M^n, g) é Einstein.*

Demonstração. Na verdade, como R é constante, $Ric(\nabla f) = \frac{R}{n}\nabla f$ e $f > 0$, então por (3.19), obtemos que Λ é constante. Esse resultado segue pelo Teorema 3.5. \square

Outra consequência do Teorema 3.5 é o Teorema 3.3 provado por Leandro [48], que fornece uma condição necessária e suficiente para a Conjectura de Besse ou equação CPE ser verdadeira em termos da norma da função potencial F . Mais precisamente, seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein com $h = \frac{R}{n-1}f - \frac{R}{n(n-1)}$, $f = 1 + F$ e R constante, onde F é a função potencial na equação do ponto crítico, veja [48], neste caso, obtemos

Corolário 3.6. *Seja (M^n, g, f, h) uma variedade do tipo-Einstein com R constante e $\partial M = \emptyset$. Então (M^n, g) é Einstein se e somente se*

$$\Lambda = \frac{1}{2}|\nabla f|^2 + hf + c_n R f^2 = \frac{1}{2}|\nabla F|^2 + \frac{R}{2n(n-1)}F^2$$

é constante.

Capítulo 4

Variedades compactas satisfazendo uma condição pinçada

Neste capítulo, estudaremos casos particulares de variedades do tipo-Einstein, a saber, as triplas estáticas positivas, métricas críticas da funcional de volume (Métrica de Miao-Tam) e métricas críticas do funcional de curvatura escalar total (Métricas CPE). Mais precisamente, deduziremos algumas fórmulas de divergência para variedades compactas com curvatura escalar constante e que admitem uma solução não constante para a equação $\mathcal{L}_g^*(f) = \lambda g$. Tais fórmulas foram previamente obtidas no contexto da Equação do Ponto Crítico (CPE) e métricas V -estáticas em [6] e [9], respectivamente. Esses fatos têm mostrado perspectivas interessantes para deduzir resultados de classificação e algumas respostas parciais de rigidez de métricas críticas envolvendo condições L^p pinçada, veja, por exemplo, [6, 12, 61].

4.1 Definições e resultados existentes

Apresentaremos aqui, alguns resultados já conhecidos de triplas estáticas positivas, Métrica de Miao-Tam e Métricas CPE.

• Métrica CPE

Seja M uma variedade compacta (sem fronteira) de dimensão n , e seja \mathcal{M} o conjunto de estruturas Riemannianas suaves em M^n de volume 1. A funcional de curvatura escalar total ou funcional de Einstein-Hilbert, $\mathcal{R} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, é definido por

$$\mathcal{R}(g) = \int_M R_g dM_g,$$

onde R_g e dM_g representam, respectivamente, a curvatura escalar de M^n e a forma de volume determinada pela métrica e orientação. A derivada do funcional \mathcal{R} na métrica $g \in \mathcal{M}$ na direção de um 2-tensor u é dada por

$$\mathcal{R}'_g(u) = \int_M \langle -Ric + \frac{R}{n}g, u \rangle_g dM_g.$$

Portanto, os pontos críticos do funcional \mathcal{R} são precisamente métricas de Einstein, veja por exemplo [15, Capítulo 4]. Agora, considerando o conjunto $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{M}; R_g \text{ é constante}\}$, Koiso [46] conseguiu mostrar que, sob condições genéricas, \mathcal{C} é uma variedade de dimensão infinita. Motivado por esse fato, segue que a equação de Euler-Lagrange de \mathcal{R} restrita a \mathcal{C} pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_g^*(F) = Ric_g - \frac{R}{n}g \tag{4.1}$$

para alguma função F definida em M^n e \mathcal{L}_g^* é L^2 -adjunto formal da linearização do operador curvatura escalar \mathcal{L}_g dado por

$$\mathcal{L}_g^*(F) = -(\Delta F)g + \nabla^2 F - F Ric.$$

Em particular, comparando as duas últimas equações, obtemos exatamente a Equação (3.1) para $h = \frac{R}{n-1}f - \frac{R}{n(n-1)}$ e $f = 1 + F$.

Foi conjecturado que os pontos críticos da funcional de Einstein-Hilbert \mathcal{R} restrita a \mathcal{C} , por simplicidade, métricas CPE, devem ser Einstein. Além disso, segue do teorema de Obata que qualquer métrica CPE não trivial (ou seja, F não é constante) que seja Einstein deve ser isométrica a uma esfera padrão. A conjectura foi formulada em [15, p.128] e gostaríamos de apresentá-la aqui da seguinte forma.

Conjectura 4.1. [Besse Conjecture] *Uma métrica CPE é sempre Einstein.*

Vale ressaltar que usando (3.3) com $h = \frac{R}{n-1}f - \frac{R}{n(n-1)}$ e $f = 1 + F$, imediatamente temos F como uma autofunção do Laplaciano e, como já sabemos que o Laplaciano tem espectro não positivo, podemos concluir que R deve ser positivo. Além disso, assumindo F constante na equação fundamental das métricas CPE, então $F = 0$ e g é claramente Einstein.

Algumas respostas positivas foram dadas para essa conjectura. Em particular, a **Conjectura 4.1** é válida para variedades localmente conformemente plana e variedades Bach-flat, veja Lafontaine [47], e Qing e Yuan [54], respectivamente. Mais tarde, Baltazar em

[6] estudou métricas de CPE sob a suposição de que a variedade tenha curvatura de Weyl radialmente nula (ou seja, $\iota_{\nabla f}W = W(\cdot, \cdot, \cdot, \nabla f) = 0$) e conseguiu provar que uma métrica CPE com curvatura seccional não negativa deve ser isométrica a uma esfera padrão. Também provou que uma métrica CPE n -dimensional, com $4 \leq n \leq 10$, que satisfaça uma condição $L^{\frac{n}{2}}$ pinçada será isométrica a uma esfera padrão. Mais precisamente, obteve o seguinte resultado:

Teorema 4.1 (Baltazar, [6]). *Seja (M^n, g, f, \cdot) , $4 \leq n \leq 10$, uma métrica CPE com curvatura de Weyl radialmente nula satisfazendo a seguinte condição pinçada*

$$\left(\int_M \left| W + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}(n-2)} \mathring{Ric} \otimes g \right|^{n/2} dM_g \right)^{2/n} \leq \sqrt{\frac{n-2}{72(n-1)}} \mathcal{Y}(M, [g]),$$

onde $\mathcal{Y}(M, [g])$ é a constante de Yamabe associada a variedade Riemanniana (M^n, g) . Então (M^n, g) é isométrica a esfera padrão.

Em 2020, Baltazar provou em [10] a conjectura considerando apenas uma condição de pinçamento pontual sobre a norma do tensor de Weyl. Mais precisamente, estabeleceu o seguinte resultado.

Teorema 4.2 (Baltazar, [10]). *A conjectura de Besse é verdadeira para qualquer métrica de CPE que satisfaça*

$$|W| \leq \sqrt{\frac{n}{2(n-2)}} \left(\frac{R}{\sqrt{n(n-1)}} - 2|\mathring{Ric}| \right).$$

Portanto, motivado pelo estudo recente das métricas CPE, vamos obter na Seção 4.3 uma resposta positiva à Conjectura de Besse sob a condição $L^{n/2}$ pinçada (4.19) a qual retira a condição de curvatura de Weyl radialmente nula do Teorema (4.1) e melhora a dimensão da variedade Riemanniana. Além disso, inspirado no Teorema (4.2), vamos mostrar na Seção 4.4 uma versão para o de métricas críticas de Miao-Tam.

• **Tripla Estática Positiva**

As triplas estáticas positivas são estruturas definidas em uma variedade Riemanniana compacta M com fronteira suave ∂M que admite uma solução não trivial f para o sistema elíptico determinado abaixo

$$\mathcal{L}_g^* f = -\Delta f g + \nabla^2 f - f Ric = 0. \tag{4.2}$$

Além disso, o potencial estático f é não negativo e se anula precisamente em ∂M . Observe que a última igualdade é exatamente a Equação (3.1) para $h = \frac{R}{n-1} f$.

Abaixo, apresentamos um exemplo clássico de tripla estática positiva com bordo não vazio.

Exemplo 4.1. *Um exemplo de tripla estática positiva com fronteira conexa é obtido escolhendo $(\mathbb{S}_+^n(r), g)$, onde $\mathbb{S}_+^n(r)$ é o hemisfério superior aberto de raio r em \mathbb{R}^{n+1} , dotado com a métrica euclidiana g . Assim, $\partial M = \mathbb{S}^{n-1}(r)$ é o equador, a função altura f sobre $\mathbb{S}_+^n(r)$ é positiva, anula-se precisamente sobre $\partial M = \mathbb{S}^{n-1}(r)$, e satisfaz à Equação (4.2).*

O estudo de espaços estáticos atraiu o interesse de muitos matemáticos após a formulação da *conjectura Cosmic no-hair* por Boucher, Gibbons e Horowitz em [16]. Esta conjectura foi proposta em 1984 e afirma que o único espaço-tempo estático com constante cosmológica positiva e horizonte de eventos conexo é o espaço de de Sitter de raio r . Ou de forma similar, este problema pode ser formulado da seguinte maneira:

Conjectura 4.2. *(Cosmic no-hair) A única tripla estática compacta, simplesmente conexa, com curvatura escalar positiva e fronteira conexa é o hemisfério padrão \mathbb{S}_+^n .*

As investigações que têm sido desenvolvidas para obter uma solução para esta conjectura estão aumentando e atraem atenção tanto do ponto de vista físico quanto matemático, veja, por exemplo, [1, 11, 13, 9, 18, 45, 47, 54]. É importante destacar que apenas respostas parciais foram fornecidas e, como por exemplo, assumindo que (M^n, g) é de Einstein, é suficiente aplicar o teorema do tipo Obata devido a Reilly [56] para concluir que a conjectura é verdadeira. Além disso, Kobayashi [45] e Lafontaine [47] provaram independentemente que tal conjectura também é verdadeira sob a condição de ser conformalmente plana. Qing e Yuan [54] provaram a Conjectura do *cosmic no-hair* considerando uma hipótese mais fraca sobre o tensor de Cotton. No trabalho [33], Gibbons, Hartnoll e Pope construíram contraexemplos à Conjectura *cosmic no-hair* nos casos de dimensão $4 \leq n \leq 8$, mas seus contraexemplos não são simplesmente conexos. Mais recentemente, em [24], Costa, Diógenes, Pinheiro e Ribeiro Jr forneceram um contraexemplo simplesmente conexo à Conjectura *cosmic no-hair* para dimensões arbitrárias $n \geq 4$. Abaixo, apresentamos esse exemplo.

Exemplo 4.2 ([24]). *Considere $M^n = S_+^{p+1} \times S^q$, com $q > 1$, e a métrica do produto dada por*

$$g = dr^2 + \sin^2(r) g_{S^p} + \frac{q-1}{p+1} g_{S^q},$$

onde $r(x, y) = r(x)$ é a função altura de S_+^{p+1} . Considerando a função potencial $f(r) = \cos(r)$ e $r \leq \frac{\pi}{2}$, obtém-se que (M^n, g) tem curvatura escalar constante positiva e satisfaz a Equação 4.2.

No entanto, é interessante estudar em que condições esta conjectura permanece verdadeira. Motivados a esse estudo, vamos obter na Seção 4.3 uma resposta parcial para a Conjectura *cosmic no-hair* sob a condição $L^{n/2}$ pinçada.

• **Métrica de Miao-Tam**

Finalmente, gostaríamos de relatar aqui outro exemplo de variedades do tipo Einstein para $h = \frac{R}{n-1}f + \frac{1}{n-1}$ na Equação (3.1), ou seja, vamos considerar uma variedade Riemanniana (M^n, g) compacta com bordo suave ∂M que admite solução não constante para equação

$$-\Delta f g + \nabla^2 f - f Ric = g. \tag{4.3}$$

Este estudo foi iniciado por Miao e Tam em [52], veja também [53], onde os autores foram capazes de deduzir que essas estruturas surgem como pontos críticos da funcional de volume em M^n sob o espaço de métricas g com curvatura escalar constante prescrita e tal que $g|_{T\partial M} = u$ para uma métrica Riemanniana prescrita u na fronteira, para mais detalhes, veja [52, Teorema 5]. Devemos nos referir a essas métricas como métricas críticas de Miao-Tam, isto é, uma tripla (M^n, g, f) , onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana conexa e compacta com bordo suave ∂M , f é uma função suave em M tal que $f^{-1}(0) = \partial M$ e satisfaz à equação (4.3).

Os primeiros exemplos de métricas críticas de Miao-Tam foram inicialmente identificados em [52]. Estes exemplos compreendem as bolas geodésicas nos espaços formas $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ e \mathbb{S}^n . Para uma análise mais aprofundada, os Exemplos 3.1, 3.2 e 3.3 no Capítulo 3 são recomendados, para o caso que $h = \frac{R}{n-1}f - \frac{1}{n-1}$.

Neste mesmo trabalho em [52], Miao e Tam provaram que os únicos domínios nos espaços formas tais que as métricas padrão são pontos críticos da funcional de volume, devem ser bolas geodésicas. Motivados por esse fato, no mesmo artigo, os autores levantaram a seguinte questão:

Questão 1. As bolas geodésicas das formas espaciais simplesmente conexas

$\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ e \mathbb{S}^n são as únicas métricas críticas de Miao-Tam simplesmente conexas?

Em busca de respostas para a pergunta acima, Miao-Tam [53] consideraram este problema com a hipótese da métrica ser de Einstein e obtiveram a seguinte resposta

Teorema 4.3. *(Miao e Tam, 2011) Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam Einstein e bordo ∂M suave. Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n e \mathbb{S}^n .*

Em 2017, Baltazar e Ribeiro Jr. [8] mostraram que a hipótese Einstein sobre a variedade pode ser substituída pela condição do tensor de Ricci ser paralelo, melhorando o Teorema acima. Existem várias respostas parciais relacionadas a esse problema, algumas delas envolvendo condições geométricas e restrições de curvatura, como podemos ver em [11, 13, 12, 8, 9, 18, 12, 38, 53, 57].

Entre as referências mencionadas, destacaremos dois trabalhos que fornecem respostas parciais para o problema em questão. Esses estudos desempenharam um papel fundamental na obtenção dos resultados principais desta tese. O primeiro trabalho, se encontra em [4] e nele o autor desta tese com com parceira com H. Baltazar obtiveram uma resposta para questão considerando uma hipótese envolvendo a função potencial. Mais precisamente, estudamos os exemplos clássicos de métricas críticas de Miao-Tam e uma propriedade envolvendo sua função potencial. O primeiro analisado é a bola euclidiana de raio r_0 em \mathbb{R}^n com métrica padrão g_0 e função potencial

$$f(x) = \frac{1}{2(n-1)}(r_0^2 - |x|^2).$$

Agora, como a curvatura escalar é nula e $|\nabla f|_{\partial M} = \frac{r_0}{n-1}$, podemos deduzir que no ∂M ,

$$|\nabla f|^2 + \frac{Rf^2}{n(n-1)} + \frac{2f}{n-1} = \frac{r_0^2}{(n-1)^2} = |\nabla f|_{\partial M}^2.$$

Ao mesmo tempo, tomando $h = \frac{R}{n-1}f + \frac{1}{n-1}$ no Exemplo 3.3, temos que a bola geodésica de raio r_0 na esfera padrão com métrica canônica g_0 , é uma métrica crítica de Miao-Tam com função potencial

$$f(x) = \frac{1}{n-1} \left(\frac{\cos r}{\cos r_0} - 1 \right),$$

onde r is a distância geodésica do ponto $(0, \dots, 1)$ e raio $r_0 \neq \frac{\pi}{2}$. Além disso, com um cálculo simples obtemos a mesma identidade, ou seja,

$$|\nabla f|^2 + \frac{Rf^2}{n(n-1)} + \frac{2f}{n-1} = \frac{\sin^2 r_0}{(n-1)^2 \cos^2 r_0} = |\nabla f|_{\partial M}^2.$$

Finalmente, o último exemplo interessante é o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n mergulhado no conhecido espaço de Minkowski $(\mathbb{R}^{n+1}, dx_1^2 + \dots + dx_n^2 - dt^2)$,

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n, t) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 - t^2 = -1, t > 0\}.$$

A bola geodésica em \mathbb{H}^n centrada em $(0, \dots, 0, 1)$ é uma métrica crítica de Miao-Tam com função potencial

$$f(x) = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{\cosh(r)}{\cosh(r_0)} \right).$$

Esse fato segue do Exemplo 3.2, uma vez que estamos restringindo o nosso estudo para métrica crítica de Miao-Tam. Da mesma forma, a função potencial satisfaz a seguinte expressão

$$|\nabla f|^2 + \frac{Rf^2}{n(n-1)} + \frac{2f}{n-1} = \frac{\sinh^2 r_0}{(n-1)^2 \cosh^2 r_0} = |\nabla f|_{\partial M}^2.$$

É natural perguntar se esses exemplos são as únicas métricas críticas de Miao-Tam que satisfazem tal propriedade. Nesse sentido, inspirados por ideias desenvolvidas por Leandro em [48], forneceremos uma resposta completa a essa questão. Mais precisamente, o autor dessa tese e Baltazar em [4], provaram o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Seja (M^n, g, f) , uma métrica crítica de Miao-Tam*

$$|\nabla f|^2 + \frac{Rf^2}{n(n-1)} + \frac{2f}{n-1} = |\nabla f|_{\partial M}^2. \tag{4.4}$$

Então M^n é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n ou \mathbb{S}^n .

Como as métricas críticas de Miao-Tam é um caso particular de variedades tipo-Einstein, observe que a condição (4.4) garante a hipótese do Teorema 3.5 apresentado no capítulo 3 e como R é constante, segue a prova do teorema acima.

Observação 4.1. *Ressaltamos que, para que a igualdade (4.4) faça sentido, é necessário lembrar que uma métrica crítica de Miao-Tam tem $|\nabla f|$ constante ao longo do bordo ∂M , veja [12, Seção 3] para mais detalhes. Então, a hipótese significa que $|\nabla f|$ assume a mesma constante sobre cada componente conexa do seu bordo.*

O segundo trabalho que destaremos, resolve parcialmente a **Questão 1** considerando uma condição $L^{\frac{n}{2}}$ pinçada. Neste trabalho, os autores H. Baltazar, R. Diógenes e E. Ribeiro Jr. em [12] estudaram as métricas críticas do funcional volume em dimensão 4

e obtiveram uma classificação de tal métrica crítica considerando uma condição pinçada ponto a ponto que envolve a constante de Yamabe, a função potencial e alguns termos de curvatura. Mais precisamente, como aplicação direta do Teorema 4.7 combinado com a classificação das métricas críticas de Einstein de Miao-Tam, obtida em [53, Teorema 1.1], temos o seguinte resultado.

Teorema 4.5 (Baltazar, Diógenes, Ribeiro Jr, [12]). *Seja (M^4, g, f) uma métrica crítica Miao-Tam compacta e simplesmente conexa com curvatura escalar positiva. Então temos:*

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(M, \partial M, [g])\phi(M) &\leq 4\sqrt{3} \left(\int_M (|W|^2 + |\mathring{Ric}|^2) dV_g \right)^{\frac{1}{2}} \phi(M) \\ &\quad + 3(3\sqrt{2} - 1) \int_M |\mathring{Ric}|^2 |\nabla f|^2 dV_g, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{Y}(M, \partial M, [g])$ é a constante de Yamabe associada a variedade Riemanniana (M^n, g) e $\phi(M) = \left(\int_M f^4 |\mathring{Ric}|^4 dV_g \right)^{\frac{1}{2}}$. Além disso, se a igualdade ocorre, então M^4 é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^4 .

Ao analisar o teorema acima, podemos identificar limitações associadas a dimensão da variedade Riemanniana e dependência da função potencial na condição pinçada. Diante desse cenário, vamos resolver na Seção 4.3 a **Questão 1** parcialmente aumentando a dimensão da variedade Riemanniana e retirando a dependência da função potencial na condição pinçada.

4.2 Fórmulas tipo Bochner para variedades compactas satisfazendo $\mathcal{L}_g^*(f) = \lambda g$

Primeiramente, para simplificar, faremos uma adaptação focada principalmente nas estruturas mencionadas na Seção 4.1 deste capítulo. Mais especificamente, iremos estudar variedades Riemannianas compactas (M, g) que admitem uma solução não constante f para o sistema de equações

$$\mathcal{L}_g^*(f) = \lambda g, \tag{4.5}$$

onde λ é uma constante e \mathcal{L}_g^* é a forma L^2 -adjunto da linearização do operador curvatura escalar \mathcal{L}_g , ou seja, denotando \mathcal{M} o espaço de métricas Riemannianas em M e u um tensor simétrico $(0, 2)$ em M , a linearização \mathcal{L}_g do operador curvatura escalar $\mathcal{R} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$\mathcal{L}_g(u) = -\Delta_g(\text{tr}_g u) + \text{div}_g \text{div}_g u - \langle u, \mathring{Ric}_g \rangle,$$

e a forma L^2 -adjunto é dado por

$$\mathcal{L}_g^* f = -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - f Ric_g.$$

Portanto, podemos reescrever (4.5) como

$$f Ric = \nabla^2 f - (\Delta f + \lambda)g. \quad (4.6)$$

Assim, a Equação (4.6) pode ser vista como um caso particular da Equação (3.1), para $h = -(\Delta f + \lambda)$. A principal razão para estudar tal estrutura vem da relação direta com uma classe de espaços bem conhecida na literatura. Para ser mais preciso, considerando a equação fundamental associada a cada estrutura, temos que:

- Tripla estática positiva: $\lambda = 0$ e $\partial M \neq \emptyset$;
- Métricas críticas de Miao-Tam: $\lambda = 1$ e $\partial M \neq \emptyset$;
- Métricas CPE: $\lambda = -R/n$ e $\partial M = \emptyset$, com $f = 1 + F$ e F é a função potencial na equação de ponto crítico.

Na última igualdade, R é constante e denota a curvatura escalar de uma métrica CPE.

Primeiramente, observamos que (4.6) pode ser reescrita na linguagem tensorial da seguinte forma:

$$-\Delta f g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - f R_{ij} = \lambda g_{ij}. \quad (4.7)$$

Tomando o traço em (4.7) temos

$$\Delta f = -\frac{R}{n-1}f - \frac{n\lambda}{n-1}. \quad (4.8)$$

Além disso, utilizando (4.8), não é difícil verificar que

$$f \overset{\circ}{Ric} = \overset{\circ}{\nabla}^2 f, \quad (4.9)$$

onde $\overset{\circ}{T}$ representa a parte sem traço de T .

Após essa informação preliminar, o primeiro resultado que gostaríamos de relatar é uma consequência direta das seguintes fórmulas do tipo Bochner obtidas por Baltazar e Ribeiro Jr. em [9].

Lema 4.1 (Lema 3.1, [9]). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa com curvatura escalar constante e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave definida em M . Então temos que:*

$$\operatorname{div}(f \nabla |Ric|^2) = -f |C_{ijk}|^2 + 2f |\nabla Ric|^2 + \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2n}{n-2} f R_{ij} R_{ik} R_{jk} - \frac{4n-2}{(n-1)(n-2)} f R |Ric|^2 - \frac{2fR^3}{n(n-2)} \\
 & + 2\nabla_i (f C_{ijk} R_{jk}) + 2C_{ijk} \nabla_j f R_{ik} - 2f W_{ijkl} R_{jk} R_{il}.
 \end{aligned}$$

Lema 4.2 (Lema 3.2, [9]). *Seja (M^n, g, f, λ) um espaço V -estático. Então temos que*

$$\frac{1}{2} \operatorname{div}(f \nabla |Ric|^2) = -f |C_{ijk}|^2 + f |\nabla Ric|^2 + \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2 \rangle - \frac{n\lambda}{n-1} |\mathring{Ric}|^2 + 2\nabla_i (f C_{ijk} R_{jk}).$$

De fato, não é difícil verificar que o Lema 3.1 e o Lema 3.2 em [9] assumem as mesmas expressões, a saber,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(f \nabla |\mathring{Ric}|^2) &= -f |C_{ijk}|^2 + 2f |\nabla \mathring{Ric}|^2 + \langle \nabla f, \nabla |\mathring{Ric}|^2 \rangle \\
 &+ 2f \left(\frac{R}{n-1} |\mathring{Ric}|^2 + \frac{n}{n-2} \operatorname{tr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \right) \\
 &+ 2\nabla_i (f C_{ijk} R_{jk}) + 2C_{ijk} \nabla_j f R_{ik}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \operatorname{div}(f \nabla |\mathring{Ric}|^2) &= -f |C_{ijk}|^2 + f |\nabla \mathring{Ric}|^2 + \langle \nabla f, \nabla |\mathring{Ric}|^2 \rangle \\
 &- \frac{n\lambda}{n-1} |\mathring{Ric}|^2 + 2\nabla_i (f C_{ijk} R_{jk}).
 \end{aligned}$$

Em seguida, multiplicando essas novas expressões pela função f e após um cálculo direto, chegamos a

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X_1 &= -|\nabla f|^2 |\mathring{Ric}|^2 + f^2 \left(\frac{n-3}{2(n-1)} |C_{ijk}|^2 + |\nabla \mathring{Ric}|^2 \right) \\
 &+ \frac{2}{n-1} R f^2 |\mathring{Ric}|^2 + \frac{n\lambda}{n-1} f |\mathring{Ric}|^2 \\
 &+ f^2 \left(\frac{n}{n-2} \operatorname{tr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \right) \\
 &- \frac{n-2}{n-1} f C_{ijk} W_{ijkl} \nabla_l f,
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde $(X_1)_i = \frac{f^2}{2} \nabla_i |\mathring{Ric}|^2 - f^2 C_{ijk} R_{jk} - f |\mathring{Ric}|^2 \nabla_i f$, e

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X_2 &= -\frac{3}{2} |\nabla f|^2 |\mathring{Ric}|^2 + f^2 \left(-\frac{1}{n-1} |C_{ijk}|^2 + |\nabla \mathring{Ric}|^2 \right) \\
 &+ \frac{3}{2(n-1)} R f^2 |\mathring{Ric}|^2 + \frac{n\lambda}{2(n-1)} f |\mathring{Ric}|^2 \\
 &- \frac{n-2}{n-1} f C_{ijk} W_{ijkl} \nabla_l f,
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde $(X_2)_i = \frac{f^2}{2} \nabla_i |\mathring{Ric}|^2 - 2f^2 C_{ijk} R_{jk} - \frac{3}{2} f |\mathring{Ric}|^2 \nabla_i f$. Finalmente, a diferença entre as Eqs (4.10) e (4.11) nos permite concluir o seguinte resultado.

Lema 4.3. *Seja (M^n, g, f) uma variedade compacta com curvatura escalar constante satisfazendo (4.5). Então vale*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X_3 &= |\mathring{Ric}|^2 |\nabla f|^2 + f^2 |C|^2 + \frac{n\lambda}{n-1} f |\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{n-1} f^2 R |\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + 2f^2 \left(\frac{n}{n-2} \operatorname{tr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} R_{ik} R_{jl} \right), \end{aligned}$$

onde $X_3 = 2(X_1 - X_2)$.

Antes de apresentar nosso próximo resultado, é importante lembrar que em [12], inspirados por um resultado obtido em [9], Baltazar, Diógenes e Ribeiro Jr. deduziram uma fórmula integral chave para uma métrica crítica de Miao-Tam, veja [12, Lema 4]. Aqui, para nosso propósito, anunciamos sua versão divergente.

Lema 4.4. *Seja (M^n, g, f) uma variedade compacta com curvatura escalar positiva satisfazendo (4.5). Então temos*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X_4 &= f^2 |\nabla \mathring{Ric}|^2 + \frac{(n+4)\lambda}{2(n-1)} f |\mathring{Ric}|^2 + \frac{3n+4}{2n(n-1)} R f^2 |\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + f^2 \left(\frac{4}{n-2} \operatorname{tr}(\mathring{Ric}^3) - 2W_{ijkl} R_{ik} R_{jl} \right) + \frac{1}{2} |\nabla f|^2 |\mathring{Ric}|^2 - 2|\mathring{Ric}(\nabla f)|^2, \end{aligned}$$

onde $(X_4)_i = \frac{1}{2} f^2 \nabla_i |\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{2} f |\mathring{Ric}|^2 \nabla f - 2f \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{kj} \nabla_j f$.

Demonstração. De fato, podemos usar (4.7) e (4.8) para deduzir

$$\begin{aligned} f \nabla_i \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{ik} \nabla_j f &= \nabla_i (f \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{ik} \nabla_j f) - |\mathring{Ric}(\nabla f)|^2 \\ &\quad - f \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{ik} \nabla_i \nabla_j f \\ &= \nabla_i (f \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{ik} \nabla_j f) - |\mathring{Ric}(\nabla f)|^2 - f^2 \operatorname{tr}(\mathring{Ric}^3) \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \lambda f |\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{n(n-1)} R f^2 |\mathring{Ric}|^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por outro lado, é fácil verificar que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \langle \nabla |\mathring{Ric}|^2, f \nabla f \rangle &= -\frac{1}{4} \operatorname{div}(|\mathring{Ric}|^2 \nabla f^2) + \frac{1}{2} |\mathring{Ric}|^2 (f \Delta f + |\nabla f|^2) \\ &= -\frac{1}{4} \operatorname{div}(|\mathring{Ric}|^2 \nabla f^2) + \frac{1}{2} |\nabla f|^2 |\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)} f^2 R |\mathring{Ric}|^2 - \frac{n}{2(n-1)} \lambda f |\mathring{Ric}|^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Por fim, é crucial lembrar uma fórmula do tipo Böchner para métricas V-estáticas obtida em [12] (cf. Lema 3 em [12]). Mais precisamente, Baltazar, Diógenes e Ribeiro Jr.

provaram que uma variedade Riemanniana conexa e suave M^n e uma função suave f em M^n que satisfaçam a equação V-estática devem satisfazer

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\operatorname{div}(f^2\nabla|\mathring{Ric}|^2) &= f^2|\nabla\mathring{Ric}|^2 + \frac{n}{n-1}\lambda f|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2}{n-1}Rf^2|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + 2f\nabla_i\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik}\nabla_j f - \frac{1}{2}\langle f\nabla|\mathring{Ric}|^2, \nabla f \rangle \\ &\quad - 2f^2W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} + \frac{2n}{n-2}f^2\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ki}. \end{aligned}$$

Assim, substituindo as duas identidades (4.12) e (4.13) na fórmula divergente acima obtida em [9], obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\operatorname{div}(f^2\nabla|\mathring{Ric}|^2) &= f^2|\nabla\mathring{Ric}|^2 + \frac{n+4}{n-1}\lambda f|\mathring{Ric}|^2 + \frac{3n+4}{2(n-1)}Rf^2|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}|\nabla f|^2|\mathring{Ric}|^2 - \frac{1}{4}\operatorname{div}(|\mathring{Ric}|^2\nabla f^2) - 2|\mathring{Ric}(\nabla f)|^2 \\ &\quad - 2f^2W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} + \frac{4}{n-2}f^2\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ki} + 2\nabla_i(f\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{kj}\nabla_j f). \end{aligned}$$

Por fim, tomando $(X_4)_i = \frac{1}{2}f^2\nabla_i|\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{2}f|\mathring{Ric}|^2\nabla f - 2f\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{kj}\nabla_j f$ e reescrevendo a expressão acima concluímos a demonstração. \square

Para encerrar esta seção, vamos combinar os lemas anteriores para deduzir uma estimativa fundamental, que desempenha um papel fundamental em nossos principais resultados.

Lema 4.5. *Seja (M^n, g, f) uma variedade compacta com curvatura escalar positiva satisfazendo (4.5). Então vale*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}X_5 &\geq f^2|\nabla|\mathring{Ric}||^2 + \frac{(n+4+2(n-1)\sqrt{2n})\lambda}{2(n-1)}f|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + \frac{(n-1)\sqrt{2n}}{n}f^2|C_{ijk}|^2 + \frac{3n+4+2(n-1)\sqrt{2n}}{2n(n-1)}Rf^2|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + f^2\left(\frac{4+2(n-1)\sqrt{2n}}{n-2}\operatorname{tr}(\mathring{Ric}^3) - \frac{2n+2(n-1)\sqrt{2n}}{n}W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}\right), \end{aligned}$$

onde $X_5 = X_4 + \frac{(n-1)\sqrt{2n}}{n}X_3$.

Demonstração. Primeiramente, precisamos lembrar a desigualdade

$$|\mathring{Ric}(\nabla f)|^2 \leq \frac{(n-1)\sqrt{2n}}{2n}|\mathring{Ric}|^2|\nabla f|^2, \quad (4.14)$$

cuja a prova detalhada pode ser encontrada em [12, Equação 3.19]. Para garantir a completude, apresentaremos a demonstração completa abaixo.

Para provar essa desigualdade, observe primeiro que um cálculo direto dá

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{8} ((df \otimes df) \otimes g)_{ijkl} (\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric})_{ijkl} \\
 & = -\frac{1}{8} (\nabla_i f \nabla_k f g_{jl} + \nabla_j f \nabla_l f g_{ik} - \nabla_i f \nabla_l f g_{jk} - \nabla_j f \nabla_k f g_{il}) (2\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} - 2\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jk}) \\
 & = -\frac{1}{8} (-2\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\nabla_i f \nabla_k f - 2\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{ji}\nabla_j f \nabla_l f - 2\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jl}\nabla_i f \nabla_l f - 2\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{ji}\nabla_j f \nabla_k f) \\
 & = |\mathring{Ric}(\nabla f)|^2
 \end{aligned}$$

e

$$\left| ((df \otimes df) \otimes g)_{ijkl} (\mathring{Ric} \circ \mathring{Ric})_{ijkl} \right|^2 \leq |(df \otimes df) \otimes g|^2 |\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric}|^2.$$

Além disso, temos

$$|(df \otimes df) \otimes g|^2 = 4(n-1)|\nabla f|^4$$

e

$$|\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric}|^2 = 8|\mathring{Ric}|^4 - 8|\mathring{Ric}^2|^2.$$

onde $(\mathring{Ric}^2)_{ik} = (\mathring{R})_{ip}(\mathring{R})_{kp}$. Em particular, é fácil verificar que $\text{tr}(\mathring{Ric}^2) = |\mathring{Ric}|^2$, e então imediatamente temos $|\mathring{Ric}^2|^2 \geq \frac{|\mathring{Ric}|^4}{n}$, o que nos permite deduzir que

$$|\mathring{Ric} \otimes \mathring{Ric}|^2 \leq \frac{8(n-1)}{n} |\mathring{Ric}|^4.$$

Daí, segue que

$$\left| ((df \otimes df) \otimes g)_{ijkl} (\mathring{Ric} \circ \mathring{Ric})_{ijkl} \right|^2 \leq \frac{32(n-1)^2}{n} |\mathring{Ric}|^4 |\nabla f|^4.$$

Com isso, obtemos imediatamente

$$|\mathring{Ric}(\nabla f)|^2 \leq \frac{(n-1)\sqrt{2n}}{2n} |\mathring{Ric}|^2 |\nabla f|^2,$$

o que conclui a prova da desigualdade.

Agora, podemos substituir (4.14) e a desigualdade clássica de Kato, $|\nabla|\mathring{Ric}|| \leq |\nabla\mathring{Ric}|$, no Lema 4.4 para chegar a

$$\begin{aligned}
 \text{div} X_4 & \geq f^2 |\nabla|\mathring{Ric}||^2 + \frac{(n+4)\lambda}{2(n-1)} f |\mathring{Ric}|^2 + \frac{3n+4}{2n(n-1)} R f^2 |\mathring{Ric}|^2 \\
 & \quad + f^2 \left(\frac{4}{n-2} \text{tr}(\mathring{Ric}^3) - 2W_{ijkl} R_{ik} R_{jl} \right) - \frac{(n-1)\sqrt{2n}}{n} |\mathring{Ric}|^2 |\nabla f|^2.
 \end{aligned}$$

Agora, substituindo a expressão de $|\mathring{Ric}|^2|\nabla f|^2$ obtida no Lema 4.3 para deduzimos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X_4 \geq & f^2|\nabla|\mathring{Ric}||^2 + \frac{(n+4)\lambda}{2(n-1)}f|\mathring{Ric}|^2 + \frac{3n+4}{2n(n-1)}Rf^2|\mathring{Ric}|^2 \\ & + f^2\left(\frac{4}{n-2}\operatorname{tr}(\mathring{Ric}^3) - 2W_{ijkl}R_{ik}R_{jl}\right) \\ & - \frac{(n-1)\sqrt{2n}}{n}\left[\operatorname{div} X_3 - f^2|C|^2 - \frac{n\lambda}{n-1}f|\mathring{Ric}|^2 - \frac{1}{n-1}f^2R|\mathring{Ric}|^2\right. \\ & \left. - 2f^2\left(\frac{n}{n-2}\operatorname{tr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}R_{ik}R_{jl}\right)\right]. \end{aligned}$$

Por fim, tomando $X_5 = X_4 + \frac{(n-1)\sqrt{2n}}{n}X_3$ e simplificando alguns termos obtemos a demonstração desejada. \square

4.3 Resultados de integral pinçada

Para estabelecer nossos principais resultados, vamos introduzir a definição da constante de Yamabe associada a uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g) ,

$$\mathcal{Y}(M, \partial M, [g]) = \inf_{\phi \neq 0} \frac{\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2}|\nabla\phi|^2 + R\phi^2\right) dM_g + 2 \int_{\partial M} H\phi^2 d\sigma}{\left(\int_M |\phi|^{\frac{2n}{n-2}} dM_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}, \quad (4.15)$$

onde H é a curvatura média de ∂M e ϕ é uma função suave e positiva em M^n . Além disso, ao considerarmos a variedade sem fronteira, o termo de fronteira desaparece e a expressão assume a seguinte forma:

$$\mathcal{Y}(M, [g]) = \inf_{\phi \neq 0} \frac{\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2}|\nabla\phi|^2 + R\phi^2\right) dM_g}{\left(\int_M |\phi|^{\frac{2n}{n-2}} dM_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}. \quad (4.16)$$

Aqui, para simplicidade, devemos denotar a constante de Yamabe como $\mathcal{Y}([g])$, mas se precisarmos explicar detalhadamente algum cálculo, adotaremos a notação acima. Para detalhes sobre este assunto, sugerimos ao leitor consultar [26] e as referências ali presentes.

Continuando, seja (M^n, g, f) uma variedade compacta com curvatura escalar constante satisfazendo (4.5). Se $\partial M \neq \emptyset$, considere o conjunto de nível $f^{-1}(0)$ que é precisamente o bordo de M , ou seja, $\partial M = \{x \in M^n; f(x) = 0\}$. Então, considerando a função $\phi = f|\mathring{Ric}|$, é imediato verificar, usando a definição da constante de Yamabe, que

$$\int_M |\nabla(f|\mathring{Ric})|^2 dM_g \geq \frac{n-2}{4(n-1)}\mathcal{Y}([g])\tilde{\phi} - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Rf^2|\mathring{Ric}|^2 dM_g,$$

onde $\tilde{\phi} = \left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}} |\mathring{Ric}|^{\frac{2n}{n-2}} dM_g \right)^{\frac{n-2}{n}}$. Tal expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_M f^2 |\nabla |\mathring{Ric}|^2| dM_g &\geq \frac{n-2}{4(n-1)} \mathcal{Y}([g]) \tilde{\phi} - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R f^2 |\mathring{Ric}|^2 dM_g \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_M \langle \nabla |\mathring{Ric}|^2, \nabla f^2 \rangle dM_g - \int_M |\mathring{Ric}|^2 |\nabla f|^2 dM_g. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por outro lado, um cálculo direto usando (4.8) fornece a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \nabla |\mathring{Ric}|^2, \nabla f^2 \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{div}(|\mathring{Ric}|^2 \nabla f^2) - |\mathring{Ric}|^2 (f \Delta f + |\nabla f|^2) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{div}(|\mathring{Ric}|^2 \nabla f^2) + \frac{1}{n-1} f^2 R |\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + \frac{n\lambda}{n-1} f |\mathring{Ric}|^2 - |\nabla f|^2 |\mathring{Ric}|^2. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo esses dados em (4.17), obtemos

$$\begin{aligned} \int_M f^2 |\nabla |\mathring{Ric}|^2| dM_g &\geq \frac{n-2}{4(n-1)} \mathcal{Y}([g]) \tilde{\phi} - \frac{n+2}{4(n-1)} \int_M R f^2 |\mathring{Ric}|^2 dM_g \\ &\quad - \frac{n\lambda}{n-1} \int_M f |\mathring{Ric}|^2 dM_g. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Agora, estamos em posição de apresentar nosso primeiro resultado de compressão $L^{n/2}$.

Teorema 4.6. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n ($4 \leq n \leq 38$), compacta sem bordo satisfazendo (4.5) com $\lambda \neq 0$. Se $R > 0$ e a seguinte desigualdade é satisfeita*

$$\left(\int_M \left| W + \frac{\alpha(n)}{\sqrt{2n}} \mathring{Ric} \otimes g \right|^{n/2} dM_g \right)^{2/n} \leq \beta(n) \mathcal{Y}([g]), \quad (4.19)$$

onde $\alpha(n) = \frac{n[2(n-1)\sqrt{2n+4}]}{(n-2)[2(n-1)\sqrt{2n+2n}]}$ e $\beta(n) = \sqrt{\frac{(n-2)}{32(n-1)}} \frac{n}{(n-1)\sqrt{2n+n}}$, então M^n é Einstein.

Demonstração. Primeiro, observe que o conjunto de nível $B = \{x \in M^n; f(x) = 0\}$ tem medida zero. De fato, procedendo como em [43] (veja também [48]), podemos denotar $B' = \{p \in B; \nabla f(p) = 0\}$ e usando (4.7) e (4.8), é fácil verificar que

$$\nabla^2 f(X, X) = -\frac{\lambda}{n-1} g(X, X) \neq 0,$$

para todo $p \in B'$ e vetor não nulo $X \in T_p M$. Isso significa que p é um ponto crítico não degenerado de f e, conseqüentemente, todos os pontos críticos em B são isolados. Portanto, o conjunto B' deve ser finito. Para concluir, é suficiente observar que $B = B' \cup (B \setminus B')$, onde $B \setminus B'$ é uma união de hipersuperfícies. Conseqüentemente, ao tomarmos a divergência de ambos os lados de (4.7), obtemos

$$f \nabla R = 0$$

e claramente R deve ser constante em M .

A seguir, ao integrando a expressão obtida no Lema 4.5 sobre M , obtemos

$$\begin{aligned}
 0 \geq & \int_M f^2 |\nabla |\mathring{Ric}||^2 dM_g + \frac{(n+4+2(n-1)\sqrt{2n})\lambda}{2(n-1)} \int_M f |\mathring{Ric}|^2 dM_g \\
 & + \frac{(n-1)\sqrt{2n}}{n} \int_M f^2 |C_{ijk}|^2 dM_g + \frac{3n+4+2(n-1)\sqrt{2n}}{2n(n-1)} \int_M R f^2 |\mathring{Ric}|^2 dM_g \\
 & + \frac{4+2(n-1)\sqrt{2n}}{n-2} \int_M f^2 \text{tr}(\mathring{Ric}^3) dM_g - \frac{2n+2(n-1)\sqrt{2n}}{n} \int_M W_{ijkl} R_{ik} R_{jl} dM_g
 \end{aligned}$$

e por (4.18) chegamos

$$\begin{aligned}
 0 \geq & \frac{n-2}{4(n-1)} \mathcal{Y}([g]) \tilde{\phi} + \frac{(n-1)\sqrt{2n}}{n} \int_M f^2 |C_{ijk}|^2 dM_g \\
 & + \frac{2(n-1)\sqrt{2n} - n + 4}{2(n-1)} \lambda \int_M f |\mathring{Ric}|^2 dM_g \\
 & + \frac{4(n-1)\sqrt{2n} - n^2 + 4n + 8}{4n(n-1)} R \int_M f^2 |\mathring{Ric}|^2 dM_g \\
 & + \frac{2n+2(n-1)\sqrt{2n}}{n} \int_M f^2 \left(\alpha(n) \text{tr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} R_{ik} R_{jl} \right) dM_g \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando o Lema 2.2, temos que

$$\begin{aligned}
 & \int_M f^2 \left(\alpha(n) \text{tr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} R_{ik} R_{jl} \right) dM_g \\
 \geq & - \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \int_M f^2 |\mathring{Ric}|^2 \left(|W|^2 + \frac{2(n-2)\alpha^2(n)}{n} |\mathring{Ric}|^2 \right)^{1/2} dM_g \\
 = & - \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \int_M f^2 |\mathring{Ric}|^2 \left| W + \frac{\alpha(n)}{\sqrt{2n}} \mathring{Ric} \otimes g \right| dM_g,
 \end{aligned}$$

que pode ser reescrito usando a desigualdade de Hölder como

$$\begin{aligned}
 & \int_M f^2 \left(\alpha(n) \text{tr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} R_{ik} R_{jl} \right) dM_g \\
 \geq & - \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \tilde{\phi} \left(\int_M \left| W + \frac{\alpha(n)}{\sqrt{2n}} \mathring{Ric} \otimes g \right|^{n/2} dM_g \right)^{2/n}.
 \end{aligned}$$

Portanto, pela nossa condição pinçada, é imediato verificar que

$$\frac{n-2}{4(n-1)} \mathcal{Y}([g]) \tilde{\phi} + \frac{2n+2(n-1)\sqrt{2n}}{n} \int_M f^2 \left(\alpha(n) \text{tr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} R_{ik} R_{jl} \right) dM_g \geq 0.$$

Isso aplicado em (4.20) torna-se

$$\begin{aligned}
 0 \geq & \frac{(n-1)\sqrt{2n}}{n} \int_M f^2 |C_{ijk}|^2 dM_g \\
 & + \frac{2(n-1)\sqrt{2n} - n + 4}{2(n-1)} \lambda \int_M f |\mathring{Ric}|^2 dM_g \\
 & + \frac{4(n-1)\sqrt{2n} - n^2 + 4n + 8}{4n(n-1)} R \int_M f^2 |\mathring{Ric}|^2 dM_g. \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Antes de prosseguir, é importante lembrar a seguinte identidade, obtida, por exemplo, em [6, Equação 3.9],

$$\int_M fR|\mathring{Ric}|^2 dM_g = 0. \quad (4.22)$$

Além disso, fazendo $g(n) = 4(n - 1)\sqrt{2n} - n^2 + 4n + 8$ podemos estudar o sinal dessa função por meio do seu gráfico. Mais precisamente,

$$g(n) = 4(n - 1)\sqrt{2n} - n^2 + 4n + 8$$

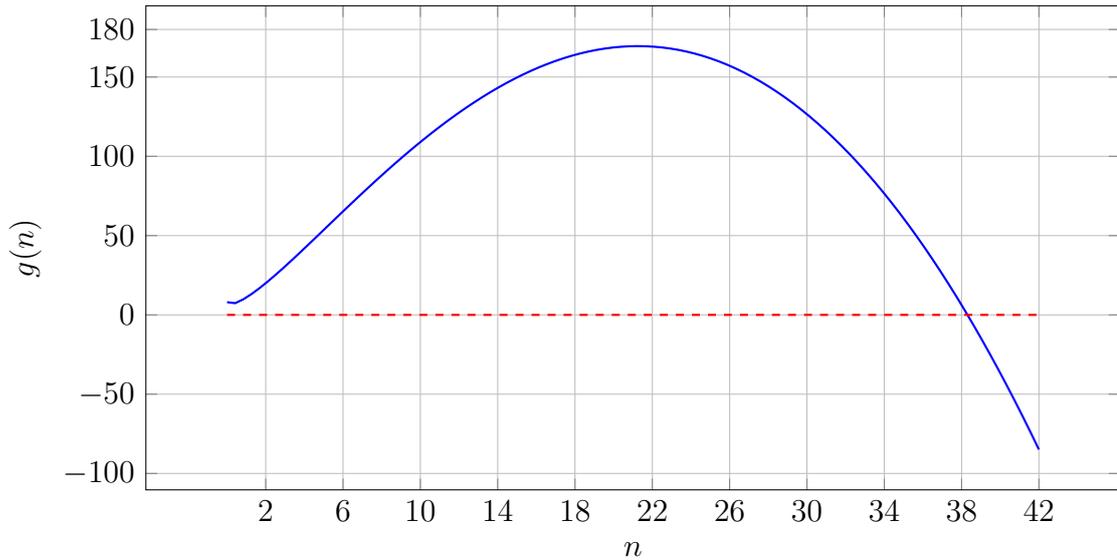


Figura 4.1: Gráfico da função $g(n) = 4(n - 1)\sqrt{2n} - n^2 + 4n + 8$.

Portanto, ao observar a Figura 4.1, podemos ver que a função g assume valores positivos no intervalo $4 \leq n \leq 38$. Para valores de $n > 38$, a função g passa a assumir valores cada vez mais negativos. Assim, podemos voltar à última desigualdade e deduzir que M é uma variedade de Einstein para $4 \leq n \leq 38$. \square

Em nosso próximo resultado, abordaremos o caso $\partial M \neq \emptyset$, onde o conjunto de níveis $f^{-1}(0)$ deve ser precisamente o bordo de M e a função f é positiva no interior de M . Com essa consideração em mente, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.7. *Seja (M^n, g) uma variedade compacta de dimensão n ($4 \leq n \leq 38$), com fronteira suave satisfazendo (4.5) tal que $\lambda \geq 0$, $f \geq 0$ e $\{f = 0\} = \partial M$. Se $R > 0$ e a seguinte desigualdade é satisfeita*

$$\left(\int_M \left| W + \frac{\alpha(n)}{\sqrt{2n}} \mathring{Ric} \otimes g \right|^{n/2} dM_g \right)^{2/n} \leq \beta(n) \mathcal{Y}([g]),$$

onde $\alpha(n) = \frac{n[2(n-1)\sqrt{2n+4}]}{(n-2)[2(n-1)\sqrt{2n+2n}]}$ e $\beta(n) = \sqrt{\frac{(n-2)}{32(n-1)}} \frac{n}{(n-1)\sqrt{2n+n}}$. Então M^n é Einstein.

Demonstração. É imediato verificar que R é constante e, similarmente ao resultado anterior, a desigualdade (4.21) também é verdadeira. A diferença agora é que não temos garantia da validade de (4.22), mas como estamos considerando o caso $\lambda \geq 0$ e $f \geq 0$, tal termo deve ser não negativo. Novamente, (4.21) força M^n a ser Einstein. Portanto, a prova está completa. \square

Como aplicação dos Teoremas 4.6 e 4.7, consideraremos a constante especial λ que têm sido estudadas por muitos matemáticos nas últimas décadas.

4.3.1 Métrica CPE

Portanto, motivados pelo estudo recente das métricas CPE, podemos deduzir diretamente do Teorema 4.6, uma resposta positiva à Conjectura de Besse sob uma condição $L^{\frac{n}{2}}$ pinçada.

Teorema 4.8. *Seja (M^n, g, F) , $4 \leq n \leq 38$, seja uma métrica CPE não trivial que satisfaz a condição pinçada*

$$\left(\int_M \left| W + \frac{\alpha(n)}{\sqrt{2n}} Ric \otimes g \right|^{n/2} dM_g \right)^{2/n} \leq \beta(n) \mathcal{Y}([g]), \quad (4.23)$$

onde $\alpha(n) = \frac{n[2(n-1)\sqrt{2n+4}]}{(n-2)[2(n-1)\sqrt{2n+2n}]}$ e $\beta(n) = \sqrt{\frac{(n-2)}{32(n-1)}} \frac{n}{(n-1)\sqrt{2n+n}}$. Então (M^n, g) é isométrica a uma esfera padrão.

Demonstração. Tomando $\lambda = -\frac{R}{n}$ e $f = 1 + F$ onde F é função potencial na equação do ponto crítico, temos que (M^n, g, F) satisfaz a Equação (4.5). Portanto, considerando as hipóteses que $4 \leq n \leq 38$ e a estimativa (4.23), segue como aplicação do 4.6 que (M^n, g, F) é uma variedade de Einstein. Como (M^n, g, F) tem curvatura escalar $R > 0$, segue que (M^n, g) é isométrica a uma esfera padrão. \square

Para prosseguir, devemos lembrar de um lema clássico devido a Gursky [34]. Tal lema fornece um limite inferior para o invariante de Yamabe e será importante para deduzir uma consequência do Teorema 4.8 ao considerar uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 4.

Lema 4.6 (Gursky,[34]). *Seja (M^4, g) uma variedade compacta de dimensão 4 sem fronteira. Então, a seguinte estimativa vale*

$$\mathcal{Y}(M, [g])^2 \geq \int_M R^2 dM_g - 12 \int_M |\mathring{Ric}|^2 dM_g.$$

Além disso, a desigualdade é estrita a menos que (M^4, g) seja conformemente Einstein.

Então, com este lema em mente, somos capazes de obter o seguinte resultado.

Corolário 4.1. *Toda métrica CPE não trivial de quatro dimensões que satisfaz*

$$(22 + 12\sqrt{2}) \int_M |W|^2 dM_g + (77 + 24\sqrt{2}) \int_M |\mathring{Ric}|^2 dM_g \leq \frac{1}{12} \int_M R^2 dM_g \quad (4.24)$$

é isométrica a uma esfera padrão.

Demonstração. Substituindo a expressão do Lema 4.6 na condição de integral pinçada do Teorema 4.8, obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \int_M (|W|^2 + \alpha^2 |\mathring{Ric}|^2) dM_g - \beta^2 \mathcal{Y}([g])^2 &\leq \int_M |W|^2 dM^2 - \beta^2 \int_M R^2 dM_g \\ &\quad + (12\beta^2 + \alpha^2) \int_M |\mathring{Ric}|^2 dM_g, \end{aligned}$$

onde α e β são constantes escolhidas de acordo com (4.23), ou seja, $\alpha = \frac{2(3\sqrt{2}+1)}{3\sqrt{2}+2}$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{12(3\sqrt{2}+2)}}$. Mais precisamente, temos

$$\begin{aligned} \int_M |W|^2 dM_g + \frac{76 + 24\sqrt{2}}{22 + 6\sqrt{2}} \int_M |\mathring{Ric}|^2 dM_g - \frac{1}{12(22 + 12\sqrt{2})} \mathcal{Y}([g])^2 &\leq \\ \frac{1}{22 + 12\sqrt{2}} \left[(22 + 12\sqrt{2}) \int_M |W|^2 dM^2 + (77 + 24\sqrt{2}) \int_M |\mathring{Ric}|^2 dM_g - \frac{1}{12} \int_M R^2 dM_g \right]. \end{aligned}$$

Para concluir a prova, basta aplicar (4.24) para obter o lado direito da desigualdade acima é não negativo. Consequentemente, (4.23) é válida e o resultado segue do Teorema 4.8. \square

Observação 4.2. *Note que a condição de pinçamento (4.24) pode ser reescrita como*

$$\frac{121 + 48\sqrt{2}}{77 + 24\sqrt{2}} \int_M |W|^2 dM_g + \frac{38 + 12\sqrt{2}}{3(77 + 24\sqrt{2})} \int_M R^2 dM_g \leq 32\pi^2 \mathcal{X}(M)$$

onde usamos a conhecida fórmula de Chern-Gauss-Bonnet, ou seja,

$$\int_M |W|^2 dM_g - 2 \int_M |\mathring{Ric}|^2 dM_g + \frac{1}{6} \int_M R^2 dM_g = 32\pi^2 \mathcal{X}(M).$$

4.3.2 Tripla estática positiva

Após estas considerações, estamos preparados para apresentar nossa segunda aplicação, agora relacionada ao Teorema 4.7. O resultado a seguir nos fornece as condições para a validade da **Conjectura Cosmic No-Hair**. Abaixo, apresentamos o enunciado e sua demonstração.

Teorema 4.9. *A conjectura cosmic no-hair é verdadeira para variedades ($3 \leq n \leq 38$) de dimensão n que satisfazem a condição de pinçamento*

$$\left(\int_M \left| W + \frac{\alpha(n)}{\sqrt{2n}} \mathring{Ric} \otimes g \right|^{n/2} dM_g \right)^{2/n} \leq \beta(n) \mathcal{Y}([g]),$$

onde $\alpha(n) = \frac{n[2(n-1)\sqrt{2n+4}]}{(n-2)[2(n-1)\sqrt{2n+2n}]}$ e $\beta(n) = \sqrt{\frac{(n-2)}{32(n-1)}} \frac{n}{(n-1)\sqrt{2n+n}}$.

Demonstração. Tomando $\lambda = 0$, do Teorema 4.7, deduzimos imediatamente que (M^n, g) é uma variedade de Einstein. Portanto, basta aplicar o Lema 3 em [56] para concluir que M^n é isométrico a um hemisfério de \mathbb{S}^n . \square

4.3.3 Métrica crítica de Miao-Tam

Aqui, motivados por [12], forneceremos uma classificação de uma tal métrica crítica considerando uma condição $L^{\frac{n}{2}}$ pinçada ponto a ponto. Mais precisamente, como aplicação direta do Teorema 4.7 combinado com a classificação das métricas críticas de Einstein de Miao-Tam, obtida em [53, Teorema 1.1], temos o seguinte resultado.

Teorema 4.10. *Seja (M, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam compacta de dimensão n ($3 \leq n \leq 38$), com curvatura escalar positiva. Suponha que vale a condição pinçada*

$$\left(\int_M \left| W + \frac{\alpha(n)}{\sqrt{2n}} \mathring{Ric} \otimes g \right|^{n/2} dM_g \right)^{2/n} \leq \beta(n) \mathcal{Y}([g]),$$

onde $\alpha(n) = \frac{n[2(n-1)\sqrt{2n+4}]}{(n-2)[2(n-1)\sqrt{2n+2n}]}$ e $\beta(n) = \sqrt{\frac{(n-2)}{32(n-1)}} \frac{n}{(n-1)\sqrt{2n+n}}$, é satisfeita. Então, M^n é isométrico a uma bola geodésica em \mathbb{S}^n .

Demonstração. Tomando $\lambda = 1$, segue que a métrica crítica de Miao-Tam (M^n, g, f) satisfaz a Equação (4.5). Portanto, segue do Teorema 4.7 que (M^n, g) é uma variedade de Einstein e, conseqüentemente, usando o fato que a curvatura escalar R na métrica g é positiva segue pelo Teorema 4.3 que (M^n, g) é isométrico a uma bola geodésica em \mathbb{S}^n . \square

4.4 Métrica crítica de Miao-Tam com curvatura de Wely pinçada

Nesta seção, vamos provar o Teorema 1.7 anunciado na introdução e destacamos que existem vários trabalhos sobre a classificação de métricas críticas de Miao-Tam envolvendo o tensor de curvatura de Weyl, veja, por exemplo, [11, 7, 12, 9, 53]. Portanto, motivados por [20] e com base em técnicas desenvolvidas em [6, 10], iremos fornecer uma classificação dessas métricas críticas considerando uma condição pinçada. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.11. *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam com curvatura escalar positiva e satisfazendo a seguinte estimativa*

$$\left| W + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}(n-2)} \mathring{Ric} \otimes g \right| \leq \frac{R}{\sqrt{2(n-1)(n-2)}}. \quad (4.25)$$

Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^n .

Demonstração. Primeiramente, usando o Lema 4.3 para caso $\lambda = 1$, temos a seguinte fórmula divergente para uma métrica crítica de Miao-Tam

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X_3 &= |\mathring{Ric}|^2 |\nabla f|^2 + f^2 |C|^2 + \frac{n}{n-1} f |\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{n-1} f^2 R |\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + 2f^2 \left(\frac{n}{n-2} \operatorname{tr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \right), \end{aligned}$$

onde $(X_3)_i = 2f^2 C_{ijk} R_{jk} + f |\mathring{Ric}|^2 \nabla_i f$.

Integrando sobre M^n a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M |\mathring{Ric}|^2 |\nabla f|^2 dM_g + \int_M f^2 |C_{ijk}|^2 dM_g + \frac{n}{n-1} \int_M f |\mathring{Ric}|^2 dM_g \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \int_M f^2 R |\mathring{Ric}|^2 dM_g \\ &\quad + 2 \int_M f^2 \left(\frac{n}{n-2} \operatorname{tr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \right) dM_g. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Antes de prosseguir, é importante lembrar da seguinte desigualdade vista no Lema 2.2 para $\alpha = \frac{n}{n-2}$, a saber,

$$\left| \frac{n}{n-2} \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{ik} - W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \right| \leq \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \left(|W|^2 + \frac{2n}{n-2} |\mathring{Ric}|^2 \right)^{1/2} |\mathring{Ric}|^2, \quad (4.27)$$

que é verdadeira para uma variedade riemanniana de dimensão arbitrária.

Por outro lado, como W tem traço livre temos

$$\left| W + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}(n-2)} \mathring{Ric} \otimes g \right|^2 = |W|^2 + \frac{2n}{n-2} |\mathring{Ric}|^2.$$

Portanto, combinando a igualdade acima com a desigualdade (4.27) e utilizando a nossa estimativa de curvatura (4.25), é imediato verificar que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n-1} R |\mathring{Ric}|^2 + 2 \left(\frac{n}{n-2} \text{tr}(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \right) \\ & \geq \left[\frac{1}{n-1} R - 2 \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \left| W + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}(n-2)} \mathring{Ric} \otimes g \right| \right] |\mathring{Ric}|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Como consequência, ao retornar à Identidade (4.26), forçamos M^n a ser uma variedade de Einstein. Em seguida, estamos em posição de usar o Teorema 4.3 obtido em [53] para concluir que (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^n . Portanto, a prova está completa. \square

Como o tensor de Weyl se anula na dimensão três, obtemos a seguinte consequência:

Corolário 4.2. *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam com curvatura escalar positiva e satisfazendo*

$$|\mathring{Ric}| \leq \frac{R}{\sqrt{24}}. \tag{4.28}$$

Então (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^3 .

Observação 4.3. *É fácil verificar que, a condição pinçada (4.28) torna-se neste caso*

$$|\mathring{Ric}| \leq \frac{R}{\sqrt{24}} \leq \frac{R}{\sqrt{6}}.$$

Então, basta aplicar [9, Corolário 1.5] para concluir que (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{S}^3 .

Referências Bibliográficas

- [1] Ambrozio, L.: On static three-manifolds with positive scalar curvature. *J. Diff. Geom.* **107** (1) (2017), 1–45.
- [2] Andrade, M. and de Melo, A.: Some characterizations of compact Einstein-type manifolds. *Lett. Math. Phys.* **114** (35), 1–18 (2024).
- [3] Andrade, M., Baltazar, H. and Queiroz, C.: Compact Einstein-type manifolds with parallel Ricci tensor. *Arxiv:2403.02447[math.DG]*, (2024).
- [4] Baltazar, H. and Queiroz, C.: Critical metrics of the volume functional with pinched curvature. *Illinois J. of Math.* **67** (4) (2023), 705–713.
- [5] Baltazar, H. and Queiroz, C.: Rigidity theorem for integral pinched static manifolds and related critical Spaces, *J. Geom. Anal.* (2024).
- [6] Baltazar, H.: On critical point equation of compact manifolds with zero radial Weyl curvature. *Geom. Dedicata* 202, 337–355 (2017)
- [7] Baltazar, H., Batista, R., Bezerra, K.: On the volume functional of compact manifolds with harmonic Weyl tensor. *Math. Nachr.* **296** (2023), 1366–1379.
- [8] Baltazar, H. and Ribeiro Jr., E.: Critical metrics of the volume functional on manifolds with boundary. *Proc. of the Amer. Math. Soc.* 145, 3513–3523 (2017).
- [9] Baltazar, H. and Ribeiro Jr., E. Remarks on critical metrics of the scalar curvature and volume functionals on compact manifolds with boundary. *Pacific J. Math.* 1, 29–45 (2018).
- [10] Baltazar, H.: Besse conjecture for compact manifolds with pinched curvature. *Arch. Math.* **115**, no. 2, (2020) 229-239.

-
- [11] Baltazar, H., Barros, A., Batista, R. and Viana, E.: On static manifolds and related critical spaces with zero radial Weyl curvature. *Monatsh. Math.* 191, no. 3, 449–463 (2020).
- [12] Baltazar, H., Diógenes, R. and Ribeiro Jr., E.: Volume functional of compact 4-manifolds with a prescribed boundary metric, *J. Geom. Anal.* **31**, (2021) 4703–4720.
- [13] Baltazar, H. and de Silva, A.: On static manifolds and related critical spaces with cyclic parallel Ricci tensor. *Adv. Geom.* **21**, (2021) 407–416.
- [14] Baltazar, H., Métricas críticas do funcional volume e não-existência de múltiplos buracos negros em espaço-tempo estático. 2017. 67 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.
- [15] Besse, A.: *Einstein Manifolds*. Springer, Berlin (1987)
- [16] Boucher, W., Gibbons, G. and Horowitz, G.: Uniqueness theorem for anti-de Sitter spacetime. *Phys. Rev. D (3)* **30**, (1984) 2447–2451.
- [17] Benjamim, F.: Remarks on critical point metrics of the total scalar curvature functional. *Archiv der Mathematik* 104.5 (2015): 463-470.
- [18] Barros, A. and da Silva, A.: Rigidity for critical metrics of the volume functional. *Math. Nachr.* **292**, (2019) 709–719.
- [19] Catino, G., Mastrolia, P., Monticelli, M. and Rigoli, M.: On the geometry of gradient Einstein-type manifolds. *Pacific J. Math.* **286** (1) (2017), 39–67.
- [20] Catino, G.: Complete gradient shrinking Ricci solitons with pinched curvature. *Math. Ann.* **355**, (2013) 629–635.
- [21] Catino, G.: Integral pinched shrinking Ricci solitons, *Advances in Mathematics* **303**, (2016) 279–294.
- [22] Chow, B. et al.: *The Ricci flow: techniques and applications. Part I. Geometric aspects*, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol 135. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

-
- [23] Chang, J., Hwang, S. and Yun, G.: Total scalar curvature and harmonic curvature, *Taiwanese J. Math.* **18**, (2014) 1439–1458.
- [24] Costa, J.; Diógenes, R.; Pinheiro, N.; Ribeiro Jr, E. Geometry of static perfect fluid space-time. 2023 *Class. Quantum Grav.* 40 205012.
- [25] do Carmo, M. P.: *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.
- [26] Escobar, J.: The Yamabe problem on manifolds with boundary. *J. Diff. Geom.* **34**, (1992) 21–84.
- [27] Freitas, A. and Gomes, J.N.: Compact gradient Einstein-type manifolds with boundary. arXiv:2205.07827[math.DG].
- [28] Freitas, A. and Santos, M.: Boundary topology and rigidity results for generalized $(\lambda, n + m)$ -Einstein manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 199(6), 2511-2520 (2020).
- [29] Fu, H. P. and Peng, J.K.: Conformally flat Riemannian manifolds with finite L^p -norm curvature. *Annali di Matematica*. **196**, (2017) 1903–1912.
- [30] Fu, H. P. and Xiao L. Q.: Einstein manifolds with finite L^p -norm of the Weyl curvature. *Differ. Geom. Appl.* **53**, (2017) 293–305.
- [31] Fu, H. P. and Xiao L. Q.: Rigidity theorem for integral pinched shrinking Ricci solitons. *Monatsh. Math.* **183**, (2017) 487–494.
- [32] Fu, H. P. and Xiao L. Q.: Some L^p rigidity results for complete manifolds with harmonic curvature. *Potential Anal.* **48**, (2017) 239–255.
- [33] Gibbons, G., Hartnoll, S., Pope, C.: Bohm and Einstein?Sasaki metrics, black holes and cosmological event horizons. *Phys. Rev. D* **67**, 84024 (2003)
- [34] Gursky, M.: Locally conformally flat four-and six-manifolds of positive scalar curvature and positive Euler characteristic, *Indiana Univ. Math. J.* **43** (3) (1994) 747–774.
- [35] Hwang, J., Chang, J. and Yun, G.: Nonexistence of multiple black holes in static space-times and weakly harmonic curvature. *Gen. Rel. Grav.* **49** (9) (2016), 1–16.

- [36] Hwang, S. and Yun, G.: Einstein-type manifolds with complete divergence of Weyl an Riemann tensor. *Bull. Korean. Math. Soc.* **59** 5 (2022), 1167–1176
- [37] Hwang, S. and Yun, G.: On the geometry of Einstein-type manifolds with some structural conditions. *J. Math. Anal. Appl.* **516** (2) (2022), 126527.
- [38] He, H.: Critical metrics of the volume functional on three-dimensional manifolds. *Mathematische Nachrichten* **296**, (7) 2838-2849 (2023).
- [39] Hebey, E. and Vaugon, M.: Effective L^p pinching for the concircular curvature. *J. Geom. Anal.* **6**, (1996) 531–553.
- [40] Huang, G.: Integral pinched gradient shrinking ρ -Einstein solitons. *J. Math. Anal. Appl.* **451**, (2017) 1045–1055.
- [41] Huang, G.: Rigidity of Riemannian manifolds with positive scalar curvature. *Ann. Glob. Anal. Geom.* **54**, (2018) 257-272.
- [42] Huang, G. and Zeng, Q.: Rigidity characterization of complete Riemannian manifolds with α -Bach-flat. *J. Korean Math. Soc.* **58**, (2021) 401–418.
- [43] Hwang, S.: Critical points of the total scalar curvature functional on the space of metrics of constant scalar curvature. *Manuscripta Math.* **103**, (2) (2000) 135–142.
- [44] Itoh, M. and Stoh, H.: Isolation of the Weyl conformal tensor for Einstein manifolds. *Proc. Jpn. Acad. A Math. Sci.* **78**, (2002) 140–142.
- [45] Kobayashi, O.: A differential equation arising from scalar curvature function. *J. Math. Soc. Japan.* **34** (1982), 665–675.
- [46] Koiso, N.: A decomposition of the space of Riemannian metrics on a manifolds. *Osaka J. Math.* **16**, (1979) 423–429.
- [47] Lafontaine, J.: Sur la géométrie d’une généralisation de l’équation différentielle d’Obata. *J. Math. Pures Appliquées.* **62** (1983), 63–72.
- [48] Leandro, B.: A note on critical point metrics of the total scalar curvature functional. *J. Math. Anal. Appl.* **424** (2015) 1544–1548.

- [49] Leandro, B.: Vanishing conditions on Weyl tensor for Einstein-type manifolds. *Pacific J. Math.* **314** (1) (2021), 99–113.
- [50] Shen, Y.: A note on Fischer-Marsden’s conjecture. *Proceedings AMS.* **125** (3) (1997), 901–905.
- [51] Ma, B., Huang, G., Li, X. and Chen, Y.: Rigidity of Einstein metrics as critical points of quadratic curvature functionals on closed manifolds, *Nonlinear Anal.* **175**, (2018) 237–248.
- [52] Miao, P., Tam, L.-F.: On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature. *Calc. Var. PDE.* **36**, 141–171 (2009)
- [53] Miao, P. and Tam, L.-F.: Einstein and conformally at critical metrics of the volume functional. *Trans. Amer. Math. Soc.* **363**, 2907–2937 (2011).
- [54] Qing, J., Yuan, W.: A note on static spaces and related problems. *J. Geom. Phys.* **74**, (2013) 18–27.
- [55] Queiroz, C.: Sóliton de Ricci contrátil com integral pinçada. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal do Piauí. Teresina, 2020.
- [56] Reilly, R.: Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold. *Indiana Univ. Math. J.* **26**, (1977) 459–472.
- [57] Sheng, W. and Wang, L.: Critical metrics with cyclic parallel Ricci tensor for volume functional on manifolds with boundary. *Geom. Dedic.* **201**, (2019) 243–251.
- [58] Singer, M.: Positive Einstein metrics with small $L^{n/2}$ -norm of the Weyl tensor. *Differ. Geom. Appl.* **2**, (1992) 269–274.
- [59] Viaclovsky, J.: *Course Web Page: Math 865, Advanced Topics in Geometry*, 2011. Fall, Topics course in Riemannian Geometry.
- [60] Xu, H. W. and Zhao, E. T.: L^p Ricci curvature pinching theorems for conformally flat Riemannian manifolds. *Pacific J. Math.* **245**, (2010) 381–396.
- [61] Yun, G. and Hwang, S.: Gap theorems on critical point equation of the total scalar curvature with divergence-free Bach tensor. *Taiwanese J. Math.* **23**, (2019) 841–855.