Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Variedades do tipo-Einstein satisfazendo a condição fracamente Einstein.

Honório de Oliveira Soares

Teresina - 2024

Honório de Oliveira Soares

Dissertação de Mestrado:

Variedades do tipo-Einstein satisfazendo a condição fracamente Einstein.

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar

Teresina - 2024

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Variedades tipo-Einstein satisfazendo a condição fracamente Einstein

Honório de Oliveira Soares

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 17 de julho de 2024.

Banca Examinadora:

Halyson Irene Baltazar
Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar - Orientador

Rondinelle Marcolino Batista
Prof. Dr. Rondienelle Marcolino Batista - UFPI

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior - UFC

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Divisão de Representação da Informação

S676v Soares, Honório de Oliveira.
Variedades do tipo-Einstein satisfazendo a condição fracamente Einstein / Honório de Oliveira Soares. -- 2024.
50 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
"Orientador: Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar".

1. Métricas críticas. 2. Métricas Einstein. 3. Variedades fracamente Einstein. I. Baltazar, Halyson Irene. II. Título.

CDD 510

Bibliotecária: Francisca das Chagas Dias Leite – CRB3/1004

Soares,H.

Variedades do tipo-Einstein satisfazendo a condição fracamente Einstein..

Honório de Oliveira Soares– Teresina: 2024.

Orientador: Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar.

Co-Orientador: Prof. Dr. XXXXXXXXXX.

1. Área de Concentração

CDD 516.36

Dedico este trabalho ao meu Deus Altíssimo, sem Ele nada poderia ter feito.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, meu Senhor e Salvador, por ser o meu rochedo e meu sustento. Ele sempre vem em meu socorro e, até aqui, tem me sustentado. Agradeço também à minha mãe, Maria Santíssima, por sua intercessão e cuidado.

Agradeço a toda a minha família por ter sido meu refúgio e sustento. Agradeço à minha mãe, Maria Antônia, e ao meu pai, Honorato, que não mediram esforços para me proporcionar uma boa educação, por terem me ensinado tantas virtudes com seus exemplos e por serem aqueles que mais torceram pelos meus sonhos. Agradeço também à minha irmã, Rosinha, e ao meu irmão, Haziel, pelo apoio e incentivo.

Agradeço ao meu amor, Ana Cristina, pelo apoio, por ter sido um abrigo nos dias difíceis e por me inspirar a ser um homem cada vez melhor. Agradeço por ter estendido a mão quando precisei e pela compreensão durante este período tão corrido do mestrado.

Agradeço aos meus amigos do mestrado pelo apoio e incentivo nesses tempos. Em especial, agradeço aos meus queridos amigos da salinha: Ana Júlia, José Alencar, Vini Black, Eduardo, Emanuelly, Suerlan, Jefferson, Danilo, Fáustere, Isaque e Luiz Estevão.

Agradeço a todos do meu grupo de oração Sarça Ardente pelas orações, incentivo, fraternidade e acolhida quando cheguei em Teresina. Agradeço também aos meus queridos amigos do Pizza de Deus pelo incentivo e pela fraternidade: Valdelice, Arthur, Juliete, Antônio, Nayara, Elielson, Carol, Camila, Gabriel e Carla.

Agradeço ao meu professor orientador, Halyson Baltazar, pela paciência e compreensão durante todos esses anos, e por ter me orientado com grande maestria. Agradeço também a todos os professores que me auxiliaram e incentivaram durante a pós-graduação e a graduação, entre eles: Professor Roger, Professor Kelton, Professor Isaías, Professor Sandoel, Professor Mário, Professor Cícero, Professor Newton, Professor Paulo Alexandre e Professor Wilson. Agradeço também aos membros da banca, Professor Rondinelle Batista e Professor Ernani Ribeiro Jr, por suas valiosas contribuições a este trabalho.

Agradeço aos meus grandes amigos e irmãos, Tarcio e Alane, por todo o incentivo durante minha jornada educacional. Além disso, agradeço a todos os meus professores do ensino básico que, mesmo diante dos desafios e limitações do ensino público, foram fundamentais na minha formação, entre eles: Professora Lúcia Batista, Professor Oduvaldo Melo e Professora Alice.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI) pelo apoio financeiro.

"A Matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o Universo".

Galileu Galilei.

Resumo

Este trabalho está baseado no artigo *"Compact gradient Einstein-type manifolds with boundary satisfying the weakly Einstein condition"* do autor Xiaomin Chen [8], e tem por objetivo investigar variedades tipo-Einstein gradiente, compactas, com bordo não vazio e que satisfazem a condição fracamente Einstein. Tais estrutura foram introduzidas por Catino et al. [6], e aqui estudaremos resultados de rigidez para o caso de variedades com curvatura escalar constante. Concluiremos que, sob certas restrições, essas variedades serão isométricas a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{S}^n$ ou a um hemisfério de uma esfera redonda.

Abstract

This work is based on the article "Compact Gradient Einstein-Type Manifolds with Boundary Satisfying the Weakly Einstein Condition" by Xiaomin Chen [8] and aims to investigate gradient Einstein-type manifolds that are compact, have non-empty boundaries, and satisfy the weakly Einstein condition. These structures were introduced by Catino et al. [6], and here we will study rigidity results for the case of manifolds with constant scalar curvature. We will conclude that, under certain constraints, these manifolds will be isometric to a geodesic ball in a simply connected space $\mathbb{S}^n$ or to a hemisphere of a round sphere.

Conteúdo

Introdução

Em 2022, considerando (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta n-dimensional, com $n \geqslant 3$, Freitas e Gomes [12] investigaram uma família de métricas do tipo Einstein gradiente em variedades com bordo não vazio. Em particular, eles consideraram a existência de uma função suave não constante f em M^n que satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} \nabla^2 f = \frac{\mu}{\beta} f(\Lambda g - \frac{\alpha}{\beta}Ric) + \gamma g, \\ f > 0 \in int(M), \\ f = 0 \text{ em } \partial M, \end{cases} \tag{1}$$

para alguma função suave Λ e constantes $\alpha, \beta, \mu, \gamma$ com $\beta \neq 0$. Neste caso, dizemos que (M^n, g) é uma variedade do tipo Einstein gradiente.

Esta família de métricas é um caso particular da estrutura do tipo Einstein introduzida por Catino et al. [6]. Na verdade, de acordo com a definição em [6], uma estrutura do tipo Einstein em (M^n, g) ocorre quando uma função u suave em M e uma constante real $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ satisfazem

$$\alpha Ric + \beta \nabla^2 + \mu du \otimes du = (\rho R + \lambda) g \tag{2}$$

onde α, β, μ são constantes com $(\alpha, \beta, \mu) \neq 0$, λ é uma função suave e R é a curvatura escalar da méttrica g. Considere $f = e^{\frac{\mu}{\beta}u}$, assim a equação (2) é equivalente a

$$\nabla^2 f = \frac{\mu f}{\beta}(\Lambda g - \frac{\alpha}{\beta} Ric),$$

onde $\Lambda = \frac{1}{\beta}(\rho R + \lambda)$.

A seguir observamos que as variedades do tipo Einstein unifica várias estruturas que são amplamente estudadas na literatura, a saber,

(1) Variedade Einstein : $(\alpha, \beta, \mu, \rho) = \left(1, 0, 0, \frac{1}{m}\right), \lambda = 0$ (ou, equivalente para $m \geqslant 3, \rho = 0$ e $\lambda = \frac{S}{m}\right)$;

(2) Sólitos de Ricci : $(\alpha, \beta, \mu, \rho) = (1, 1, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}$;

(3) Quase-sólitons de Ricci: $(\alpha, \beta, \mu, \rho) = (1, 1, 0, 0), \lambda \in C^{\infty}(M)$;

(4) Sólitos de Yamabe: $(\alpha, \beta, \mu, \rho) = (0, 1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$;

(5) quasi-sólitons de Yamabe: $(\alpha, \beta, \mu, \rho) = \left(0, 1, -\frac{1}{k}, 1\right), k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \lambda \in \mathbb{R}$;

Em particular, se $(\alpha, \beta, \mu, \rho) = (1, 1, -\frac{1}{m}, \rho), \lambda \in \mathbb{R}, 0 < m \leqslant \infty$, ou seja,

$$\mathrm{Ric} + \nabla^2 u - \frac{1}{m} du \otimes du = (\rho R + \lambda) g,$$

então (M^n, g) é chamada de uma variedade (m, ρ)-quasi-Einstein (ver [13]).

Para o caso Einstein, o próximo resultado foi obtido por Freitas e Gomes para esta família de variedades do tipo Einstein com bordo não vazio. Este resultado será fundamental nas demonstrações dos resultados apresentados nesse trabalho.

Teorema 1. *([12, Teorema 1, Teorema 2]) Seja (M^n, g) uma variedade compacta do tipo Einstein gradiente com bordo conexo ∂M. Se (M^n, g) é uma variedade Einstein, então ela é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo se $\gamma \neq 0$ ou a um hemisfério de uma esfera redonda se $\gamma = 0$.*

Em seguida, exibiremos dois exemplos apresentados em [12] de métricas do tipo Einstein gradiente em bolas geodésicas de formas espaciais simplesmente conexas.

Exemplo 1. *Seja $\mathbb{S}^n_+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o hemisfério superior cuja o bordo é a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$. A métrica euclidiana g é uma métrica Einstein. De fato, dado uma constante α e constantes não nulas β e μ. Considere $\Lambda = \frac{\alpha}{\beta}(n-1) - \frac{\beta}{\mu}$ e função altura $h_\nu(x) = \langle \vec{x}, \nu \rangle$ com respeito ao vetor $\nu = e_{n+1}$. Agora, basta notar que $h_\nu > 0$ no interior de $\mathbb{S}^n_+$, $h_\nu = 0$ em $\mathbb{S}^{n-1}$, $\mathrm{Ric}_g = (n-1)g$ e $\nabla^2 h_\nu = h_\nu g$, além disso, γ deve ser zero.*

Exemplo 2. *Seja B^n a bola geodésica unitária em $\mathbb{R}^n$. É fácil ver que a métrica euclidiana é uma métrica tipo Einstein em B^n . Para isso, considere a função $u(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|x|^2$. Assim, dado uma constante α e constantes não nulas β e μ, podemos escolher $\Lambda = 0$ e $\gamma = -1$.*

A partir disso, podemos investigar se a condição Einstein pode ser enfraquecida. No que segue, Euh, Park e Sekigawa [10], em 2013, introduziram o conceito de métricas fracamente Einstein. Mais precisamente, temos a seguinte definição

Definição 1. *Uma métrica Riemanniana* g *em uma variedade* M^n *é dita fracamente Einstein se seu tensor curvatura Riemanniano* Rm *satisfaz*

$$\breve{R} = \frac{|Rm|^2}{n} g, \tag{3}$$

onde $\breve{R}$ *é um* $(0,2)$ *tensor definido como*

$$\breve{R}(X,Y) = \sum_{i,j,k=1}^{n} R(X, e_i, e_j, e_k) R(Y, e_i, e_j, e_k)$$

para uma base ortonormal $\{e_i\}, i = 1, 2, \cdots, n$ *e* $X, Y \in TM$. *Em coordenadas temos,*

$$\breve{R}_{ij} = R_{ipqr} R_{jpqr}. \tag{4}$$

Destacamos agora que se $\mathcal{M}_1$, o espaço das classes de equivalência de métricas Riemannianas suaves com volume unitário em M, então uma métrica Einstein é crítica para o funcional

$$g \mapsto \int_M R^2 dV_g,$$

restrito para $\mathcal{M}_1$ se, e somente se, g é fracamente Einstein, isto pode ser verificado em [3]. Em 2015, Catino [5] investigou o funcional

$$\mathcal{F}_{t,s}(g) = \int |Ric|^2 dM + t \int R^2 dV_g + s \int |Rm|^2 \tag{5}$$

com constantes reais t e s, Ele demonstrou que uma métrica de Einstein é uma métrica crítica para o funcional $\mathcal{F}_{t,s}$ se, e somente se, a variedade for fracamente Einstein, veja Corolário 6.2 em [5]. Além disso, em quatro dimensões, qualquer variedade de Einstein é automaticamente fracamente Einstein, como destacado no comentário após o Lema 3. No entanto, quando $dim(M) > 4$, uma métrica Einstein genérica não é necessariamente uma métrica fracamente Einstein. Em 2016, com base nesse fato, Hwang e Yun investigaram se uma métrica fracamente Einstein n-dimensional, que é uma solução não trivial para a equação do ponto crítico, é uma métrica de Einstein. (ver [14]). Continuando, Baltazar, Silva e Oliveira [2], em 2020, classificaram as métricas crítica do funcional volume e algumas suposições sobre a curvatura escalar, considerando uma variedade fracamente Einstein. Neste estudo, inspirados em [8], consideramos uma variedade do tipo Einstein gradiente que satisfaz a condição fracamente Einstein (3) e exigimos que Λ na Eq. (1)

seja uma função constante. Para facilitar os cálculos, reescrevemos a equação da seguinte forma:

$$\begin{cases} \delta f \mathrm{Ric} + \nabla^2 f = hg, \\ f > 0 \text{ in } \mathrm{int}(M^n), \\ f = 0 \text{ on } \partial M, \end{cases} \tag{6}$$

onde $\delta = \frac{\alpha\mu}{\beta^2}$ e $h = \theta f + \gamma$ com $\theta = \frac{\mu}{\beta}\Lambda$ sendo constante. A seguir, denotaremos por $(M^n, g, f, \delta, \gamma)$ a variedade do tipo Einstein que satisfaz (6). Nestas condições segue o seguinte teorema que é inspirados no Teorema 1.2 de [8], no qual Xiaomin Chen conseguiu classificar para o intervalo $-\frac{\sqrt{6}}{3} \leqslant \delta \leqslant \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Mais precisamente, estenderemos o intervalo para $-1 < \delta < 0$, ganhando assim o seguinte resultado.

Teorema 2. *Seja* $(M^3, g, f, \delta, \gamma)$ *uma variedade compacta do tipo Einstein gradiente, com curvatura escalar constante e bordo conexo. Para* $-1 < \delta < 0$*, se* (M^3, g) *é fracamente Einstein, então* (M^3, g) *é isométrica a uma bola geodésica simplesmente conexa no espaço forma* $\mathbb{S}^3$ *se* $\gamma > 0$*, ou ao hemisfério de uma esfera redonda se* $\gamma = 0$*.*

Para dimensão quatro conseguimos o seguinte resultado que é inspirado no Teorema 1.3 de [8], no qual o autor considera $\delta < 0$. Aqui, iremos trabalhar também com o caso $\delta \geqslant \frac{1}{2}$.

Teorema 3. *Seja* $(M^4, g, f, \delta, \gamma)$ *uma variedade compacta do tipo Einstein gradiente, com curvatura escalar constante positiva e bordo conexo. Para* $\delta < 0$ *ou* $\delta \geqslant \frac{1}{2}$*, se* (M^4, g) *é fracamente Eisntein, então* (M^4, g) *é isométrica a uma bola geodésica simplesmente conexa no espaço forma* $\mathbb{S}^3$ *se* $\gamma \neq 0$*, ou ao hemisfério de uma esfera redonda se* $\gamma = 0$*.*

É portanto, natural pensar o que acontece em dimensão arbitrária. Neste contexto, temos o seguinte resultado provado em [8]

Teorema 4. *Seja* $(M^n, g, f, \delta, \gamma)$*,* $n \geqslant 5$*, uma variedade fracamente Einstein do tipo Einstein gradiente n-dimensional e compacta, com curvatura escalar constante. Suponha que* $W|_{\partial M} = 0$ *e que uma das seguintes afirmações seja verdadeira:*

- $\delta \geqslant \delta_1$ *e* $R \geqslant 0$ *ou*
- $-1 \neq \delta \leqslant \delta_2$ *e* $R \leqslant 0$*,*

onde δ_1, δ_2 *são, respectivamente, as raízes positivas e negativas do polinômio*

$$\phi(\delta) = (n-2)^3\delta^2 + 4(n-2)\delta - (n^2 - 4n + 6), \tag{7}$$

então (M^n, g) *é isométrico a uma bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa, ou a um hemisfério de uma esfera redonda.*

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados provenientes da Geometria Riemanniana que serão fundamentais para a nossa dissertação. Para um aprofundamento dessas noções, recomendamos que o leitor consulte as referências [4] e [9].

1.1 Noções Básicas

Definição 2. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave* ∇f *definido sobre* M^n *por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo $X(f) \in \mathfrak{X}(M)$.

De posse da definição anterior apresentaremos as seguintes proposições que serão uteis para o nosso trabalho.

Proposição 1. *Se* f, $g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções suaves, então*

(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;

(b) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração. Seja X um campo suave sobre M^n, temos pela definição de gradiente que

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f+g), X\rangle &= X(f+g) \\ &= X(f) + X(g) \\ &= \langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla g, X\rangle \\ &= \langle \nabla f + \nabla g, X\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle\nabla(fg),X\rangle &= X(fg) = gX(f)+fX(g)\\ &= \langle g\nabla f, X\rangle + \langle f\nabla g, X\rangle\\ &= \langle g\nabla f + f\nabla g, X\rangle.\end{aligned}$$

□

Proposição 2. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma função suave. Dados* $p \in M$ *e* $\boldsymbol{\nu} \in T_pM$*, seja* $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ *uma curva suave tal que* $\gamma(0) = p$ *e* $\gamma'(0) = \nu$*. Então*

$$\langle\nabla f, \nu\rangle_p = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\bigg|_{t=0}.$$

Em particular, se p *é ponto de máximo ou mínimo local para* f*, então* $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Inicialmente observe que, sendo X uma extensão local de γ' temos

$$\langle\nabla f, \nu\rangle_p = (X(f))(p) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\bigg|_{t=0}.$$

Suponhamos agora que p é ponto de máximo local para f (o outro caso é análogo). Então existe $U \subset M$ vizinhança aberta de p tal que $f(p) \geqslant f(q)$ para todo $q \in U$ e se $\nu \in T_pM$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$ são como no enunciado, então $f\circ\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0 , donde

$$\langle\nabla f, \nu\rangle_p = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\bigg|_{t=0} = 0.$$

Como a relação acima é válida para todo $\nu \in T_pM$, segue que $\nabla f(p) = 0$. □

Corolário 1. *Se* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções suaves, então*

$$\nabla(\phi\circ f) = \phi'(f)\nabla f.$$

Demonstração. Seja $p \in M, \nu \in T_pM$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ uma curva tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \nu$, pela proposição anterior temos que

$$\begin{aligned}\langle\nabla(\phi\circ f), \nu\rangle &= \frac{d}{dt}(\phi\circ f\circ\gamma)(t)\bigg|_{t=0}\\ &= \phi'(f(p))\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\bigg|_{t=0}\\ &= (\phi'\circ f)\,\langle\nabla f, \nu\rangle_p.\end{aligned}$$

□

Definição 3. *Seja* X *um campo vetorial suave em* M^n. *A divergência de* X *é a função suave* $\mathrm{div}: M^n \to \mathbb{R}$, *dada para* $p \in M$ *por*

$$(\mathrm{div}X)(p) = \mathrm{tr}\{v \to (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_pM$ *e* ***tr*** *denota o traço do operador linear entre chaves.*

Agora apresentaremos algumas propriedades do divergente.

Proposição 3. *Se* X, Y *são campos vetoriais suaves em* M^n *e* $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave, então*

(a) $\mathrm{div}(X + Y) = \mathrm{div}\, X + \mathrm{div}\, Y$;

(b) $\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}(X) + \langle \nabla f, X\rangle$.

Demonstração. Sejam X e Y campos suaves em M^n e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(X+Y) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(X+Y), e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X + \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}Y, e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}Y, e_i \right\rangle \\
&= \mathrm{div}\, X + \mathrm{div}\, Y
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(fX) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(fX), e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} f\nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f)X, e_i \right\rangle \\
&= f\left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla e_i X, e_i \right\rangle + \left\langle X, \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i \right\rangle \\
&= f\,\mathrm{div}\, X + \langle X, \nabla f\rangle,
\end{aligned}$$

o que finaliza a prova da proposição. □

Definição 4. *Seja* $f: M^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função suave. O Laplaciano de f é a função* $\Delta f: M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f).$$

A definição a seguir é bastante utilizada no nosso trabalho, pois aparece na equação fundametal de uma variedade do tipo Einstein.

Definição 5. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função suave e* $p \in M$. *O Hessiano de* f *é o campo de operadores lineares* $(\nabla^2 f)_p : T_pM \to T_pM$, *definido para* $v \in T_pM$ *por*

$$(\nabla^2 f)_p(v) = (\nabla_v \nabla f)(p).$$

Segue das propriedades da conexão Riemanniana que se X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de p em M^n, então

$$(\nabla^2 f)_p(v) = (\nabla_X \nabla f)(p).$$

A partir da definição do Hessiano de f, podemos expressar o Laplaciano de f da seguinte forma.

Proposição 4. *Se* $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função suave, então*

$$\Delta f = tr(\nabla^2 f).$$

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\mathcal{U}$ uma vizinhança de p onde esteja definida um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Então

$$\begin{aligned} tr(\nabla^2 f)_p &= \langle \sum_{i=1}^{n} (Hessf)_p(e_i), e_i \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle_p \\ &= div(\nabla f)(p) \\ &= \Delta f(p). \end{aligned}$$

□

A proposição a seguir nos permite traduzir informações locais sobre campos específicos em propriedades globais sobre a variedade, sendo bastante utilizado nas demonstrações dos nossos resultados.

Proposição 5. *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana compacta orientada e* $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$. *Se o bordo de* M *é munido com orientação e a métrica induzidas pela inclusão* $j : \partial M \longrightarrow M$ *e* ν *denota a normal unitária exterior a* M *ao longo de* ∂M, *então*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = \int_{\partial M} \langle \mathbf{X}, \nu \rangle d(\partial M).$$

Demonstração. Para a demonstração veja [4] □

1.2 Algumas definições sobre tensores

Neste estudo, os tensores serão a ferramenta fundamental para alcançarmos os resultados desejados. Por isso, a seguir, destacaremos suas definições e algumas de suas propriedades principais.

Definição 6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e V* o espaço dual de V. Um s-tensor covariante em V é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Um r-tensor contravariante é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Um tensor do tipo(r,s) é um tensor s-covariante e r-contravariante, isto é, uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definição 7. *Um campo de tensores ou um campo tensorial A em uma variedade* M^n *é um tensor sobre o* $C^\infty(M)$*-módulo* $\mathfrak{X}(M)$*. Assim, um (r,s)-tensor A é uma aplicação*

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow C^\infty(M)$$

multilinear sobre C^∞*, com r-uplas contravariantes e s-uplas covariantes. Mais precisamente, A é uma aplicação multilinear sobre* $C^\infty(M)$ *que associa a cada (r+s)-upla* $(Y^1, \cdots, Y^r, X_1, \cdots, X^s)$ *uma função diferenciável*

$$f = A(Y^1, \cdots, Y^r, X_1, \cdots, X^s) : M^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definição 8. *Seja* (M^n, g, f) *uma variedade Riemanniana. O **tensor curvatura de Riemann** é o (1,3)-tensor*

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

dado por

$$R_m(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{1.1}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*. Em coordenadas, temos*

$$R_m(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Além disso, quando necessário, consideraremos a seguinte convenção $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$.

Também por vezes iremos interpretar o tensor R_m como um (0,4)-tensor, definido por

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

onde

$$R_m(X, Y, W, Z) = g(R_m(X, Y)W, Z).$$

Em coordenadas, temos

$$R_m(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R_{ijkl}.$$

Proposição 6. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades*

(1) $R_m(X, Y, W, Z) = -R_m(Y, X, W, Z) = R_m(Y, X, Z, W)$.

(2) $R_m(X, Y, W, Z) = R_m(W, Z, X, Y)$.

(3) Primeira Identidade de Bianchi

$$R_m(X, Y, W, Z) + R_m(Y, W, X, Z) + R_m(W, X, Y, Z) = 0.$$

Em coordenadas,

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

(4) Segunda Identidade de Bianchi

$$(\nabla_W R_m)(X, Y, Z, U) + (\nabla_Y R_m)(W, X, Z, U)) + (\nabla_X R_m)(Y, W, Z, , U)) = 0.$$

Em coordenadas,

$$\nabla_l R_{ijks} + \nabla_j R_{liks} + \nabla_i R_{jlks} = 0.$$

Para as demonstrações dos itens veja [9].

Definição 9. *Definimos o* ***tensor curvatura de Ricci*** *o (0,2)- tensor*

$$Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

como sendo o traço do tensor curvatura de Riemann, isto é,

$$Ric(X, Z) = tr\{Y \longmapsto R_m(X, Y)Z\}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. *Em coordenadas,*

$$(Ric)_{ik} = R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl}.$$

Definição 10. *A **curvatura escalar** de uma variedade é a função* $\mathsf{R} : \mathsf{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\mathsf{R} = \mathrm{tr}\mathsf{Ric}.$$

Em coordenadas

$$\mathsf{R} = g^{ik}\mathsf{R}_{ik}.$$

Proposição 7. *Em uma variedade Riemanniana* (M^n, g), *vale*

(1) Identidade de Ricci contraída

$$\nabla_j \mathsf{R}_{ik} - \nabla_i \mathsf{R}_{jk} = g^{ls}\nabla_l \mathsf{R}_{ijks}.$$

(2) Segunda Identidade de Bianchi contraída duas vezes

$$g^{jk}\nabla_j \mathsf{R}_{ik} = \frac{1}{2}\nabla_i \mathsf{R}.$$

Demonstração. Para a prova do item 1, tomaremos o traço na segunda Identidade de Bianchi, a fim de obtermos

$$\begin{aligned} 0 &= g^{ls}\nabla_l \mathsf{R}_{jiks} + g^{ls}\nabla_j \mathsf{R}_{ilks} + g^{ls}\nabla_i \mathsf{R}_{ljks} \\ &= g^{ls}\nabla_l \mathsf{R}_{jiks} + \nabla_j(g^{ls}\mathsf{R}_{ilks}) + \nabla_i(g^{ls}\mathsf{R}_{ljks}) \\ &= -g^{ls}\nabla_l \mathsf{R}_{ijks}\nabla_j \mathsf{R}_{ik} + \nabla_i \mathsf{R}_{jk}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g^{ls}\nabla_l \mathsf{R}_{jiks} = \nabla_j \mathsf{R}_{ik} - \nabla_i \mathsf{R}_{jk}.$$

Ademais, podemos reescrever a equação supracitada fazendo uma troca de índices, obtendo

$$\nabla_i \mathsf{R}_{jk} = \nabla_j \mathsf{R}_{ik} + g^{ls}\nabla_l \mathsf{R}_{jiks}.$$

Mostraremos agora o segundo item. Tomando o traço da equação obtida no peimeiro item, temos que

$$\begin{aligned} \nabla_i(g^{jk}\mathsf{R}_{jk}) &= g^{jk}\nabla_j \mathsf{R}_{ik} + g^{ls}\nabla_l(g^{jk}\mathsf{R}_{jiks}) \\ \nabla_i \mathsf{R} &= g^{jk}\nabla_j \mathsf{R}_{ik} + g^{ls}\nabla_l \mathsf{R}_{is}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla_i \mathsf{R} = 2g^{jk}\nabla_j \mathsf{R}_{ik},$$

onde fizemos as trocas convenientes dos índices s por k e l por j. $\square$

Proposição 8. *(Identidade de Ricci) Seja* M^3 *uma variedade Riemanniana e* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. Para quaisquer campos* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*, vale a seguinte identidade:*

$$(\nabla_X \mathrm{Hess} f)(Y, Z) - (\nabla_Y \mathrm{Hess} f)(X, Z) = \langle R(X, Y)Z, \nabla f\rangle.$$

Em coordenadas,

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f = R_{ijkl} \nabla_l f \tag{1.2}$$

Demonstração. Inicialmente, temos

$$\begin{aligned}(\nabla_X \mathrm{Hess} f)(Y, Z) &= X(\mathrm{Hess} f(Y, Z) - \mathrm{Hess} f(\nabla_X Y, Z) - \mathrm{Hess} f(Y, \nabla_X Z)\\ &= X\langle \nabla_Y \nabla f, Z\rangle - \langle \nabla_{\nabla_X Y} \nabla f, Z\rangle - \langle \nabla_Y \nabla f, \nabla_X Z\rangle\\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y \nabla f, Z\rangle - \langle \nabla_{\nabla_X Y} \nabla f, Z\rangle,\end{aligned}$$

isto é,

$$(\nabla_X \mathrm{Hess} f)(Y, Z) = \langle \nabla_{\nabla_X Y} Z, \nabla f\rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y Z, \nabla f\rangle. \tag{1.3}$$

Analogamente,

$$(\nabla_Y \mathrm{Hess} f)(X, Z) = \langle \nabla_{\nabla_Y X} Z, \nabla f\rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, \nabla f\rangle. \tag{1.4}$$

Assim, fazendo a subtração de (1.3) e (1.4), obtemos

$$(\nabla_X \mathrm{Hess} f)(Y, Z) - (\nabla_Y \mathrm{Hess} f)(X, Z) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \nabla f\rangle. \tag{1.5}$$

Agora, de (1.1), concluímos que

$$(\nabla_X \mathrm{Hess} f)(Y, Z) - (\nabla_Y \mathrm{Hess} f)(X, Z) = \langle R(X, Y)Z, \nabla f\rangle. \tag{1.6}$$

Assim, provamos o resultado desejado. □

Definição 11. *Em uma variedade Riemanniana* (M^n, g)*,* $n \geqslant 3$*, o tensor de Weyl e o tensor de Cotton são definidos respectivamente por:*

$$\begin{aligned}W_{ijkl} = R_{ijkl} &- \frac{1}{n-2}(R_{ik} gjl + R_{jl} g_{ik} - R_{il} g_{jk} - R_{jk} g_{il})\\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jl} g_{ik} - g_{il} g_{jk})\end{aligned} \tag{1.7}$$

e

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R) \tag{1.8}$$

Observe que,

$$C_{jik} = \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} - \frac{1}{2(n-1)}(g_{ik}\nabla_j R - g_{jk}\nabla_i R) \tag{1.9}$$

Logo, $C_{ijk} = -C_{jik}$, ou seja, o tensor de Cotton é antissimétrico nos dois primeiros índices.

Temos também a seguinte expressão que relaciona o tensor de cotton e o tensor de Weyl

$$C_{ijk} = -\left(\frac{n-2}{n-3}\right)\nabla_l W_{ijkl} \tag{1.10}$$

Assim, $C_{iik} = C_{iji} = 0$, isto é, o tensor Coton é livre de traço.

Além disso, em dimensão três, temos o seguinte lema envolvendo o tensor de Weyl, que será fundamental para a demonstração dos nossos resultados.

Lema 1. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana, temos que para* $n = 3$ *o tensor de Weyl é identicamente nulo.*

Demonstração. Existem apenas dois tipos possíveis de componentes não nulos de W. Ou há três índices distintos, como em W_{1231}, ou há dois índices distintos, como em W_{1221}. Primeiro, calculamos, usando a propriedade sem traço,

$$W_{1231} = -W_{2232} - W_{3233} = 0.$$

Em seguida, temos

$$W_{1221} = -W_{2222} - W_{3223} = -W_{3223} = W_{3113} = -W_{2112} = -W_{1221},$$

o que implica $W_{1221} = 0$. $\square$

Definição 12. *Seja* T *um (0,2)-tensor na variedade Riemanniana* M^n *de dimenssão* n. *Definimos o (0,2)-tensor de traço nulo* $\mathring{T}$ *por*

$$\mathring{T} = T - \frac{trT}{n}g$$

A relação que envolve as normas dos tensores de Weyl e Riemann é dada pela seguinte equação

$$|Rm|^2 = |W|^2 + \frac{4}{(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2}{n(n-1)}R^2. \tag{1.11}$$

Demonstração. Vamos considerar a expressão (1.7), que relaciona os tensores de Riemann e Wyel, e substituir na expressão a seguir da norma ao quadrado do tensor de Riemann

$$|Rm|^2 = R_{ijkl}R_{ijkl}.$$

Assim, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
|Rm|^2 = |W|^2 &+ \frac{1}{(n-2)^2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il})^2 \\
&- \frac{2R}{(n-1)(n-2)^2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il})(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}) \\
&+ \frac{R^2}{(n-1)^2(n-2)^2}(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk})^2 \\
= |W|^2 &+ \frac{4}{(n-2)^2}((n-2)|Ric|^2 + R^2) - \frac{8R^2}{(n-2)^2} + \frac{2nR^2}{(n-1)(n-2)^2}.
\end{aligned}$$

Agora, usando que $|Ric|^2 = |\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^2}{n}$ e substituindo na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
|Rm|^2 &= |W|^2 + \frac{4}{(n-2)^2}\{(n-2)(|\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^2}{n}) + R^2\} - \frac{8R^2}{(n-2)^2} + \frac{2nR^2}{(n-1)(n-2)^2} \\
&= |W|^2 + \frac{4}{(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{4R^2}{n(n-2)} + \frac{4R^2}{(n-2)^2} - \frac{8R^2}{(n-2)^2} + \frac{2nR^2}{(n-1)(n-2)^2} \\
&= |W|^2 + \frac{4}{(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2R^2}{n(n-1)},
\end{aligned}$$

isto é,

$$|Rm|^2 = |W|^2 + \frac{4}{(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2R^2}{n(n-1)}. \qquad (1.12)$$

□

Dessa forma, uma variedade é fracamente Einstein quando o operador curvatura de Riemann Rm satisfaz a identidade a seguir

$$\breve{R}_{ij} = \frac{|Rm|^2}{n}g_{ij}. \qquad (1.13)$$

Capítulo 2

Lemas Chaves

Neste capítulo iremos enunciar e demonstrar os principais lemas que serão utilizados nos teoremas principais abordados neste trabalho.

2.1 Lemas e resultados importantes

O primeiro lema trata de uma expressão para o 2-tensor $\breve{R}_{ij}$ e é válida para qualquer variedade Riemanniana.

Lema 2. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana, então a identidade a seguir é verdadeira*

$$\begin{aligned}\breve{R}_{ij} - \frac{|Rm|^2}{n} g_{ij} = \breve{W}_{ij} - \frac{|W|^2}{n} g_{ij} + \frac{4}{n-2} W_{ipjq} R_{pq} + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2} \mathring{R}_{iq} \mathring{R}_{qj} \\ + \frac{4R}{n(n-1)} \mathring{R}_{ij} - \frac{2(n-4)}{n(n-2)^2} |\mathring{Ric}|^2 g_{ij},\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\breve{W}_{ij} = W_{ipqr} W_{jpqr}$.

Demonstração. Considerando a expressão (2.1) , que relaciona os tensores de Riemann e Wyel, e substituindo na expressão (4),vamos obter a seguinte identidade

$$\begin{aligned}\breve{R}_{ij} = &\{W_{ipqr} + \frac{1}{n-2}(R_{iq} g_{pr} + R_{pr} g_{iq} - R_{ir} g_{pq} - R_{pq} g_{ir}) \\ &- \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{pr} g_{iq} - g_{ir} g_{pq})\} R_{jpqr}.\end{aligned}$$

Donde segue

$$\begin{aligned}
\breve{R}_{ij} &= \breve{W}_{ij} + \frac{4}{n-2} W_{ipjq} R_{pq} \\
&+ \frac{1}{(n-2)^2}(R_{iq}g_{pr} + R_{pr}g_{iq} - R_{ir}g_{pq} - R_{pq}g_{ir})(R_{jq}g_{pr} + R_{pr}g_{jq} - R_{jr}g_{pq} - R_{pq}g_{jr}) \\
&- \frac{R}{(n-1)(n-2)^2}(R_{iq}g_{pr} + R_{pr}g_{iq} - R_{ir}g_{pq} - R_{pq}g_{ir})(g_{pr}g_{jq} - g_{jr}g_{pq}) \\
&- \frac{R}{(n-1)(n-2)^2}(R_{jq}g_{pr} + R_{pr}g_{jq} - R_{jr}g_{pq} - R_{pq}g_{jr})(g_{pr}g_{iq} - g_{ir}g_{pq}) \\
&+ \frac{R^2}{(n-1)^2(n-2)^2}(g_{pr}g_{iq} - g_{ir}g_{pq})(g_{pr}g_{jq} - g_{jr}g_{pq}).
\end{aligned}$$

Após alguns cálculos, ganhamos

$$\begin{aligned}
\breve{R}_{ij} = \breve{W}_{ij} &+ \frac{4}{n-2} W_{ipjq} R_{pq} + \frac{1}{n-2)^2}(2(n-4)R_{iq}R_{jq} + 4RR_{ij} + 2|Ric|^2 g_{ij}) \\
&- \frac{4R}{(n-1)(n-2)^2}((n-2)R_{ij} + Rg_{ij}) + \frac{2R^2 g_{ij}}{(n-1)(n-2)^2}.
\end{aligned}$$

Nesta útima expressão vamos substituir as seguintes relações

- $\mathring{Ric} = Ric - \frac{R}{n} g$;
- $|Ric|^2 = |\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^2}{n}$;
- $R_{iq}R_{jq} = \mathring{R}_{iq}\mathring{R}_{jq} + \frac{R^2}{n^2} g_{ij} + 2\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij}$.

Segue então que

$$\begin{aligned}
\breve{R}_{ij} = \breve{W}_{ij} &+ \frac{4}{n-2} R_{pq} W_{ipjq} + \frac{2|\mathring{Ric}|^2}{(n-2)^2} + \frac{2R^2}{n(n-2)^2} g_{ij} \\
&+ \frac{2(n-4)}{n-2} \mathring{R}_{iq}\mathring{R}_{jq} + \frac{2(n-4)}{n^2(n-2)^2} R^2 g_{ij} + \frac{4(n-4)}{n(n-2)^2} R\mathring{R}_{ij} \\
&+ \frac{4}{(n-1)(n-2)^2} R\mathring{R}_{ij} + \frac{2}{(n-1)(n-2)^2} R^2 g_{ij}.
\end{aligned}$$

Agora, combinando os termos em comum, obtemos

$$\begin{aligned}
\breve{R}_{ij} = \breve{W}_{ij} &+ \frac{4}{n-2} R_{pq} W_{ipjq} + \frac{2|\mathring{Ric}|^2}{(n-2)^2} + \frac{2R^2}{n(n-2)^2} g_{ij} \\
&+ \frac{2(n-4)}{n-2} \mathring{R}_{iq}\mathring{R}_{jq} + \frac{4}{n(n-1)} R\mathring{R}_{ij} + \frac{2}{n^2(n-1)} R^2 g_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Por fim, vamos considerar a expressão (1.12) da seguinte forma

$$\frac{|Rm|^2}{n} g_{ij} = \frac{|W|^2}{n} g_{ij} + \frac{4}{n(n-2)} |\mathring{Ric}|^2 g_{ij} + \frac{2R^2}{n^2(n-1)} g_{ij}. \tag{2.3}$$

E fazendo a subtração de (2.2) e (2.3) obtemos a identidade desejada, isto é,

$$\begin{aligned} \breve{R}_{ij} - \frac{|Rm|^2}{n} g_{ij} = \breve{W}_{ij} - \frac{|W|^2}{n} g_{ij} + \frac{4}{n-2} W_{ipjq} R_{pq} + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2} \mathring{R}_{iq} \mathring{R}_{jq} \\ + \frac{4R}{n(n-1)} \mathring{R}_{ij} - \frac{2(n-4)}{n(n-2)^2} |\mathring{Ric}|^2 g_{ij} \end{aligned} \tag{2.4}$$

□

O próximo resultado, obtido por Derdziński em 1983, apresenta uma importante identidade em variedades de dimensão quatro. Sua demonstração não será feita neste trabalho por divergir dos objetivos desta dissertação.

Lema 3. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana quadridimensional. Então vale a seguinte identidade:*

$$\breve{W}_{ij} = \frac{|W|^2}{4} g_{ij},$$

onde $\breve{W}_{ij} = W_{ipqr} W_{jpqr}$.

Destacamos que o Lema 2 para variedades de dimensão quatro nos fornece a seguinte identidade:

$$\breve{R}_{ij} = \frac{|Rm|^2}{4} g_{ij} + 2W_{ipjq} R_{pq} + \frac{R}{3} \mathring{R}_{ij}. \tag{2.5}$$

Se assumirmos que a variedade é Einstein, então temos:

$$\breve{R}_{ij} = \frac{|Rm|^2}{4} g_{ij}. \tag{2.6}$$

Estabelecemos, assim, que em dimensão quatro, toda variedade Einstein é também fracamente Einstein. No entanto, a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, Euh, Park e Sekigawa [10], em 2013, mostraram que nem toda variedade fracamente Einstein é Einstein.

Exemplo 3. *Seja* M *produto riemanniano de variedades de dimensão dois,* $M_1(c)$ *e* $M_2(-c)$*, de curvatura gaussiana* c *e* $-c$*, respectivamente.* M *não é Einstein mas é fracamente Einstein.*

Em seguida, para uma variedade do tipo Einstein gradiente, provaremos uma propriedade importante no bordo.

Lema 4. *Seja* $(M^n, g, f, \delta, \gamma)$ *uma variedade gradiente do tipo Einstein com* $\delta = -1$. *Então, restrito ao bordo,* ∇f *é um autovetor do tensor de Ricci. Mais precisamente,*

$$\mathrm{Ric}(\nabla f) = \frac{(1-n)\theta + \delta R}{1+\delta}\nabla f.$$

Demonstração. Usando a equação fundamental (6), obtemos

$$\nabla_i \delta f R_{ij} = \nabla_i (h g_{ij} - \nabla_j \nabla_i f). \tag{2.7}$$

Ademais, pela identidade de Bianchi contraída duas vezes e usando (2.7), ganhamos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\delta f \nabla_j R = \delta f \nabla_i R_{ij} &= \delta \nabla_i (f R_{ij}) - \delta \nabla_i f R_{ij} \\ &= \nabla_i (h g_{ij} - \nabla_j \nabla_i f) - \delta \nabla_i f R_{ij} \\ &= \theta \nabla_j f - \nabla_i \nabla_j \nabla_i f - \delta \nabla_i f R_{ij},\end{aligned} \tag{2.8}$$

onde usamos que $h = \theta f + \gamma$.
Outrossim, pela identidade de Ricci, temos

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_i \nabla_j \nabla_k f = R_{ijkl} \nabla_l f,$$

o que implica,

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_i f = R_{ij} \nabla_l f + \nabla_j \Delta f. \tag{2.9}$$

Ainda de (2.7), temos

$$\nabla^2 f = hg - \delta f \mathrm{Ric} \Rightarrow \Delta f = nh - \delta f R. \tag{2.10}$$

Assim, na expressão (2.8) substituiremos as expressões (2.9) e (2.10) para obtermos a próxima igualdade

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\delta f \nabla_j R &= \theta \nabla_j f - R_{jl} \nabla_l f - \nabla_j \Delta f - \delta \nabla_i f R_{ij} \\ &= \theta \nabla_j f - \nabla_i f R_{ij} - \nabla_j \Delta f - \delta \nabla_i f R_{ij} \\ &= \theta \nabla_j f - \nabla_j \Delta f - (1+\delta) \nabla_i f R_{ij} \\ &= \theta \nabla_j f - \nabla_j (nh - \delta f R) - (1+\delta) \nabla_i f R_{ij} \\ &= \theta \nabla_j f - n \nabla_J (\theta f + \gamma) + \delta f \nabla_j R + \delta \nabla_j f R - (1+\delta) \nabla_i f R_{ij} \\ &= [(1-n)\theta + \delta R] \nabla_j f + \delta f \nabla_j R - (1+\delta) \nabla_i f R_{ij},\end{aligned}$$

isto é,

$$-\frac{1}{2}\delta f\nabla_j R = [(1-n)\theta + \delta R]\nabla_j f - (1+\delta)\nabla_i f R_{ij}.$$

Portanto, como $f = 0$ no bordo, ganhamos

$$\begin{aligned} 0 &= [(1-n)\theta + \delta R]\nabla_j f - (1+\delta)\nabla_i f R_{ij} \\ (1+\delta)\nabla_i f R_{ij} &= [(1-n)\theta + \delta R]\nabla_j f \\ \nabla_i f R_{ij} &= \frac{(1-n)\theta + \delta R}{1+\delta}\nabla_j f. \end{aligned}$$

□

Como no caso da métrica crítica de Miao-Tam, introduzimos um tensor T similar para uma variedade tipo Einstein da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_{ijk} = {} & \frac{1}{n-2}(R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - R_{il}\nabla_l f g_{jk}) \\ & - \left[\frac{R}{(n-1)(n-2)} - \theta\right](\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}) \\ & + \left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) \\ & + \frac{\delta f}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R). \end{aligned} \tag{2.11}$$

É fácil verificar também que T_{ijk} tem propriedades de simetria:

$$T_{ijk} = -T_{jik}. \tag{2.12}$$

Ademais, da expressão (1.7) que relaciona os tensores de Weyl e Riemann, obtemos

$$\begin{aligned} -R_{ijkl} = {} & -W_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il} \\ & + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}), \end{aligned} \tag{2.13}$$

multiplicando a expressão acima por $\nabla_l f$, ganhamos

$$\begin{aligned} -R_{ijkl}\nabla_l f = {} & -W_{ijkl}\nabla_l f - \frac{1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f + R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - R_{il}\nabla_l f g_{jk} - R_{jk}\nabla_i f) \\ & + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}). \end{aligned} \tag{2.14}$$

De posse destes resultados, provaremos o seguinte lema.

Lema 5. *Seja* $(M^n, g, f, \delta, \gamma)$ *uma variedade do tipo Einstein gradiente. Então*

$$-\delta f C_{ijk} = W_{ijkl}\nabla_l f + T_{ijk}. \tag{2.15}$$

Demonstração. Por (6), temos

$$\delta f(R_{jk}) + \nabla_j\nabla_k f = hg \tag{2.16}$$

$$\delta f(R_{jk}) = hg = \nabla_{jk} f. \tag{2.17}$$

Aplicando ∇_i e usando a identidade de Ricci, obtemos

$$\nabla_i(\delta f(R_{ij})) = \nabla_i hg - \nabla_i\nabla_j\nabla_k f \tag{2.18}$$

$$\nabla_i(\delta f(R_{jk})) = \nabla_i hg - R_{ijkl}\nabla_l f - \nabla_j\nabla_i\nabla_k f, \tag{2.19}$$

ainda de (6), deduzimos

$$\nabla_j(\nabla_i\nabla_k f) = \nabla_j(hg_{ik} - \delta f R_{ik}) \tag{2.20}$$

$$= \nabla_j hg_{ik} - \delta\nabla_j f R_{ik} - \delta f\nabla_j R_{ik}. \tag{2.21}$$

Assim, substituindo (2.21) em (2.19), ganhamos

$$\nabla_i(\delta f(R_{jk})) = \nabla_i hg_{jk} - R_{ijkl}\nabla_l f - \nabla_j hg_{ik} + \delta\nabla_j f R_{ik} + \delta f\nabla_j R_{ik}, \tag{2.22}$$

isto é,

$$\delta f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) = -R_{ijkl}\nabla_l f - \delta(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) + \nabla_i hg_{jk} - \nabla_j hg_{ik}. \tag{2.23}$$

Daí, segue de (1.8) que

$$\delta f C_{ijk} = \delta f(\nabla_i R_{jk}) - \nabla_j R_{ik} - \frac{\delta f}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R). \tag{2.24}$$

Agora, substituindo (2.23) em (2.24), ganhamos

$$\begin{aligned}\delta f C_{ijk} &= -R_{ijkl}\nabla_l f - \delta(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) + \nabla_i hg_{jk} - \nabla_j hg_{ik}\\ &\quad - \frac{\delta f}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Da mesma forma, substituindo (2.14) em (2.25), temos

$$\begin{aligned}\delta f C_{ijk} &= -W_{ijkl}\nabla_l f - \frac{1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f + R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - R_{il}\nabla_l f g_{jk} - R_{jk}\nabla_i f)\\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk})\\ &\quad - \delta(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) + \nabla_i hg_{jk} - \nabla_j hg_{ik}\\ &\quad - \frac{\delta f}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R g_{ik}\nabla_j R)\\ &= -W_{ijkl}\nabla_l f - \frac{1}{n-2}(R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - R_{il}\nabla_l f g_{jk}) - \frac{1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f)\\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}) - \delta(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik})\\ &\quad + \nabla_i hg_{jk} - \nabla_j hg_{ik} - \frac{\delta f}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R).\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\delta f C_{ijk} &= -W_{ijkl}\nabla_l f - \frac{1}{n-2}(R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - R_{il}\nabla_l f g_{jk})\\
&\quad + [\frac{R}{(n-1)(n-2)} - \theta](\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk})\\
&\quad - (\frac{1}{n-2} - \delta)(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f)\\
&\quad - \frac{\delta f}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R)\\
&= -W_{ijkl}\nabla_l f - T_{ijk},
\end{aligned}
$$

o que prova o afirmado. □

Ademais, é importante observar que o tensor T_{ijk} possui traço nulo em quaisquer dois índices. Com efeito, pelo Lema anterior e de posse que o tensor de Cotton e Weyl tem traço nulo ganhamos este resultado.

A seguir, vamos calcular a norma do tensor T_{ijk} sobre o bordo de M.

Lema 6. *Seja* $(M^n, g, f, \delta, \gamma)$ *uma variedade do tipo Einstein gradiente, com* $\delta \neq -1$. *Então, no bordo de* M *temos*

$$
\begin{aligned}
|T_{ijk}|^2 = 2\left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)\Bigg[&\left(\frac{n-2}{n(n-1)} + \frac{2}{n}\delta\right)R\mathring{R}_{11} + \left(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\delta\right)\frac{R^2}{n}\\
&+ \theta\left(\frac{n-1}{n}R - \mathring{R}_{11}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)|\mathring{Ric}|^2 - \left(\frac{2}{n-2} - \delta\right)\mathring{R}_{11}^2\Bigg]|\nabla f|^2.
\end{aligned}
$$

Demonstração. De (2.11) e (2.12), calculamos

$$
|T_{ijk}|^2 = \left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f)T_{ijk}.
$$

Usando novamente (2.11), obtemos

$$
\begin{aligned}
|T_{ijk}|^2 &= \left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f)\left\{\frac{1}{n-2}(R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - R_{il}\nabla_l f g_{jk})\right.\\
&\quad - \left[\frac{R}{(n-1)(n-2)} - \theta\right](\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}) + \left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f)\\
&\quad \left. + \frac{\delta f}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R)\right\}\\
&= \left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)\left\{\frac{1}{n-2}(RR_{jl}\nabla_l f\nabla_j f - R_{ij}\nabla_j f R_{il}\nabla_l f - R_{ji}\nabla_i f R_{jl}\nabla_l f + RR_{il}\nabla_l f\nabla_l f)\right.\\
&\quad - \left[\frac{R}{(n-1)(n-2)} - \theta\right](2R|\nabla f|^2 - R_{ij}\nabla_j f\nabla_i f - R_{ji}\nabla_i f\nabla_j f)\\
&\quad - \left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)(2|Ric|^2|\nabla f|^2 - 2|Ric(\nabla f)|^2)\\
&\quad \left. + \frac{\delta f}{2(n-1)}(2Ric(\nabla R, \nabla f) - 2Rg(\nabla R, \nabla f))\right\}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|T_{ijk}|^2 = 2\left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)\Bigg\{ & \frac{1}{n-2}(RRic(\nabla f, \nabla f) - |Ric(\nabla f)|^2) \\
& - \left[\frac{R}{(n-1)(n-2)} - \theta\right](2R|\nabla f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f)) \\
& - \left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)(|Ric|^2|\nabla f|^2 - |Ric(\nabla f)|^2) \\
& + \frac{\delta f}{2(n-1)}(Ric(\nabla R, \nabla f) - Rg(\nabla R, \nabla f))\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Para qualquer ponto $q \in \partial M$, tomamos um referencial ortonormal $\{e_1, \cdots, e_n\}$ tal que $e_1 = \frac{-\nabla f}{|\nabla f|}$, então $Ric(\nabla f) = -|\nabla f| Ric(e_1)$. Então, restrigindo ao bordo ∂M, $f = 0$,

$$
\begin{aligned}
|T_{ijk}|^2 = 2\left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)\Bigg\{ & \frac{1}{n-2}(RR_{11} - |Ric(e_1)|^2) - \left[\frac{R}{(n-1)(n-2)} - \theta\right](R - R_{11}) \\
& + \left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)(|Ric|^2 - |Ric(e_1)|^2)\Bigg\}|\nabla f|^2.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 4, deduzimos que $|Ric(e_1)|^2 = R_{11}^2$. Além disso, temos que $R_{11} = \mathring{R}_{11} + \frac{R}{n}$. Assim, segue que

$$
\begin{aligned}
|T_{ijk}|^2 = 2\left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)\Bigg\{ & \left(\frac{n-2}{n(n-1)} + \frac{2}{n}\delta\right)R\mathring{R}_{11} + \left(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\delta\right)\frac{R^2}{n} \\
& + \theta\left(\frac{n-1}{n}R - \mathring{R}_{11}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)|\mathring{Ric}|^2 - \left(\frac{2}{n-2} - \delta\right)\mathring{R}_{11}^2\Bigg\}|\nabla f|^2.
\end{aligned}
$$

$\square$

O próximo lema é inspirado no Lema 6 do artigo [8]. Esse resultado é obtido considerando não apenas δ no intervalo $(-1, 0)$ mas também $\delta \geqslant \frac{1}{2}$.

Lema 7. *Seja (M^n, g) uma variedade compacta do tipo Einstein gradiente que satisfaz a condição fracamente Einstein, com curvatura escalar constante. Então:*

1. *Para $-1 < \delta < 0$, temos*
$$\theta \geqslant \frac{(n-1)\delta - 1}{n(n-1)}R. \tag{2.26}$$
Além disso, se $\gamma \geqslant 0$ então $\theta \leqslant \frac{\delta R}{n}$ e $R > 0$.

2. *Para $\delta \geqslant \frac{1}{2}$, temos*
$$\theta \leqslant \frac{(n-1)\delta - 1}{n(n-1)}R. \tag{2.27}$$

Demonstração. Prova do item 1:

Tomando o traço na equação (2.23) do Lema 5 e considerando $\nabla_i R_{ij} = \frac{1}{2}\nabla_j R = 0$, temos

$$(1+\delta)R_{jl}\nabla_l f = \delta\nabla_j fR + (1-n)\nabla_j h. \tag{2.28}$$

Diferenciando covariamente, obtemos

$$(1+\delta)R_{jl}\nabla_j\nabla_l f = \delta\Delta fR + (1-n)\Delta h. \tag{2.29}$$

Agora, observe que

$$\delta f Ric + \nabla^2 f = hg, \tag{2.30}$$

donde segue

$$\delta fR + \Delta f = nh.$$

Substituindo a expressão $h = \theta f + \gamma$, obtemos

$$\Delta f = -\delta fR + n\theta f + n\gamma. \tag{2.31}$$

Note também que

$$\Delta h = \Delta(\theta f + \gamma) = \theta\Delta f. \tag{2.32}$$

Por (2.30), obtemos

$$\delta f|Ric|^2 + R_{jl}\nabla_j\nabla_l f = R_{jl}hg_{jl}.$$

Donde segue que

$$R_{jl}\nabla_j\nabla_l f = R(\theta f + \gamma) - \delta f|Ric|^2. \tag{2.33}$$

Assim, substituindo (2.33),(2.32) e (2.31) em (2.29), ganhamos

$$(1+\delta)(\theta R - \delta f|Ric|^2)f + (1+\delta)R\gamma = (\delta R + (1-n)\theta)[(n\theta - \delta R)f + n\gamma].$$

Desde que $|Ric|^2 = |\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^2}{n}$ e multiplicando por f ambos os lados da equação, obtemos

$$(n-1)[(n\theta - \delta R)f + n\gamma]\left[\theta - \frac{(n-1)\delta - 1}{n(n-1)}R\right]f = \delta(1+\delta)|\mathring{Ric}|^2 f^2. \tag{2.34}$$

Agora, como no bordo $f = 0$ e usando (2.31), temos

$$\begin{aligned} 0 = \int_M div(f\nabla f)dV_g &= \int_M (f\triangle f + |\nabla f|^2)dV_g \\ &= \int_M f\triangle f dV_g + \int_M |\nabla f|^2 dV_g \\ &= \int_M [(n\theta - \delta R)f + n\gamma]f dV_g + \int_M |\nabla f|^2 dV_g, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_M [(n\theta - \delta R)f + n\gamma]f dV_g = -\int_M |\nabla f|^2 dV_g. \tag{2.35}$$

Integrando (2.34) sobre M juntamente com (2.35),

$$-(n-1)\left[\theta - \frac{(n-1)\delta - 1}{n(n-1)}R\right]\int_M |\nabla f|^2 dV_g = \delta(1+\delta)\int_M |\mathring{Ric}|^2 f^2 dV_g. \tag{2.36}$$

Portanto, para $-1 < \delta < 0$,

$$\theta \geqslant \frac{(n-1)\delta - 1}{n(n-1)}R.$$

Agora, se $\gamma \geqslant 0$ usando (2.35), ganhamos

$$(n\theta - \delta R)\int_M f^2 dV_g = -n\gamma \int_M f dV_g - \int_M |\nabla f|^2 dV_g.$$

Assim, para $-1 < \delta < 0$ temos $n\theta - \delta R \leqslant 0$, o que implica, $\theta \leqslant \frac{\delta R}{n}$, logo

$$\frac{(n-1)\delta - 1}{n(n-1)}R \leqslant \theta \leqslant \frac{\delta R}{n}.$$

Isso implica que $R \geqslant 0$. Mostremos agora que o caso $R = 0$ não pode ocorrer, de fato considerando $R = 0$ e $\gamma \geqslant 0$, temos que $\theta = 0$. Note também que usando a equação fundamental de uma variedade do tipo Einstein podemos verificar que $\Delta f = n\gamma$. Consequentemente

$$\int |\nabla f|^2 dV_g = -\int_M f\Delta f dV_g = -n\gamma \int_M f^2 dV_g < 0,$$

o que é uma contradição, uma vez que f é não constante. Portanto, $R > 0$. Como queríamos demonstrar.

Prova do item 2:

De forma análoga, mas neste caso considerando $\delta \geqslant \frac{1}{2}$, obtemos

$$-(n-1)\left[\theta - \frac{(n-1)\delta - 1}{n(n-1)}R\right]\int_M |\nabla f|^2 dV_g = \delta(1+\delta)\int_M |\mathring{Ric}|^2 f^2 dV_g \geqslant 0.$$

Donde segue que

$$\theta \leqslant \frac{(n-1)\delta - 1}{n(n-1)}R.$$

Isto finaliza a prova deste lema. □

Para o que segue, verifiquemos que a norma do gradiente de f é constante e não nula ao longo do bordo. Assim, temos a seguinte proposição.

Proposição 9. *Seja* (M^n, g) *uma variedade do tipo Einstein gradiente com bordo* Σ.

1. *O bordo* Σ *é uma hipersuperfície totalmente umbilical, com a segunda forma fundamental* $A = -\gamma|\nabla f|^{-1}g_\Sigma$. *Em particular, se* $\gamma = 0$, *então* Σ *é uma hipersuperfície totalmente geodésica.*

2. *Seja* $\Sigma = \bigcup \Sigma_i$ *a união disjunta de todas as componentes conexas* Σ_i *de* Σ. *Então, a restrição de* $\xi_i := |\nabla f|$ *a cada* Σ_i *é uma constante positiva.*

Demonstração. No caso em que $\gamma \neq 0$, assumimos que 0 é um valor regular para f, então $\nabla f(x) \neq 0$ para todo $x \in \Sigma$. Suponhamos agora que $\gamma = 0$ e provemos que, sem uma hipótese adicional, $\nabla f(x) \neq 0$ para todo $x \in \Sigma$. Para isso, tomamos uma geodésica de velocidade unitária $\sigma : [0, 1] \to M^n$ de modo que $\sigma(0) = x \in \Sigma$ e $\sigma(1) \in \operatorname{int}(M)$, assim a função $\theta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $\theta(t) = f(\sigma(t))$ satisfaz $\theta(0) = f(x) = 0$ e

$$\theta''(t) = \nabla^2 f(\sigma'(t), \sigma'(t)) = \left(\frac{\mu}{\beta}\Lambda g - \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{Ric}\right)(\sigma'(t), \sigma'(t))\theta(t). \tag{2.37}$$

Se $\nabla f(x) = 0$, então teríamos que $\theta(t)$ é a solução do problema de valor inicial $\theta''(t) = f(t)\theta(t)$, com $\theta'(0) = 0$ e $\mathtt{theta}(0) = 0$. Portanto, teríamos que f se anula ao longo de σ, o que é uma contradição. Como $\Sigma = f^{-1}(0)$, podemos escolher $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ como um campo vetorial normal unitário em Σ. Note que, de acordo com a equação (6), temos $\nabla^2 f = \gamma g$ em Σ. Assim, para quaisquer campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, obtemos:

$$\gamma g_\Sigma(X, Y) = \nabla^2 f(X, Y) = -\langle \nabla_X Y, \nabla f\rangle = |\nabla f|\langle \nabla_X Y, \nu\rangle = -|\nabla f|A(X, Y), \tag{2.38}$$

onde A é a segunda forma fundamental de Σ. A partir da identidade (2.38) e do fato de que $\nabla f \neq 0$ em Σ, concluímos o item 1. Para a Afirmação 2, novamente usamos que $\nabla^2 f = \gamma g$ em Σ e que ∇f é normal a Σ. Assim,

$$X(|\nabla f|^2) = 2\nabla^2 f(X, \nabla f) = 0,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Portanto, concluímos que a restrição de $|\nabla f| =: \xi_i$ a cada componente conexa Σ_i de Σ é uma constante positiva. $\square$

Lema 8. *Seja* $(M^n, g, f, \delta, \gamma)$ *uma variedade do tipo Einstein gradiente com curvatura escalar constante. Então temos*

$$\delta \int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = \frac{1}{|\nabla f|}\int_{\delta M} \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV_g$$

Demonstração. Já sabemos que $\mathring{Ric} = Ric - \frac{R}{n}g$, então da expressão (6) , obtemos

$$\delta f\left(\mathring{R}_{ij} + \frac{R}{n}g_{ij}\right) + \nabla_j\nabla_i f = hg_{ij},$$

donde segue que

$$\nabla_j\nabla_i f = \left(h - \delta f\frac{R}{n}\right)g_{ij} - \delta f\mathring{R}_{ij}. \tag{2.39}$$

Assim, multiplicando ambos os lados da equação acima por $\mathring{R}_{ij}$, ganhamos

$$\begin{aligned}\mathring{R}_{ij}\nabla_j\nabla_i f &= \mathring{R}_{ij}\left[\left(h - \delta f\frac{R}{n}\right)g_{ij} - \delta f\mathring{R}_{ij}\right]\\ &= -\delta f|\mathring{Ric}|^2.\end{aligned}$$

Agora, usando que R é constante, observe que

$$\begin{aligned}\nabla_j\mathring{R}_{ij} = \nabla_j\left(R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}\right) &= \nabla_j R_{ij} - \nabla_j\frac{R}{n}g_{ij} &(2.40)\\ &= \frac{1}{2}\nabla_i R - \nabla_j\frac{R}{n}g_{ij} &(2.41)\\ &= \frac{n-2}{2n}\nabla_i R = 0. &(2.42)\end{aligned}$$

Dessa forma, temos

$$\nabla_j(\mathring{R}_{ij}\nabla_i f) = \nabla_j\mathring{R}_{ij}\nabla_i f + \mathring{R}_{ij}\nabla_j\nabla_i f = -\delta fr|\mathring{R}_{ij}|^2. \tag{2.43}$$

Assim, integrando (2.43) e usando Stokes e que, ganhamos

$$\begin{aligned}-\delta\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g &= \int_M \nabla_j(\mathring{R}_{ij}\nabla f)\\ &= \int_{\delta M}\mathring{Ric}(\nabla f, e_1)\\ &= -\frac{1}{|\nabla f|}\int_{\delta M}\mathring{Ric}(\nabla, f\nabla f)dV_g.\end{aligned}$$

Portanto, pela proposição anterior, $|\nabla f|$ é não nula em ∂M. Assim, concluímos que

$$\delta \int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = \frac{1}{|\nabla f|}\int_{\partial M} \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) dV_g.$$

$\square$

O próximo lema é o último desta sequência de resultados que nos conduzirá às provas dos nossos principais teoremas. É também onde aplicamos a hipótese de que a variedade é fracamente Einstein.

Lema 9. *Seja* $(M^n, g, f, \delta, \gamma)$ *uma variedade do tipo Einstein gradiente, fracamente Einstein com* $\delta \neq \frac{1}{n-2}, -1$. *Então no bordo de* M, *a seguinte identidade é válida:*

$$
\begin{aligned}
0 = &-\frac{|W|^2}{2n} - \left(\frac{1}{n-2} + \delta\right)\left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\delta\right)\frac{R^2}{n} + \theta\left(\frac{n-1}{n}R - \mathring{R}_{11}\right)\right\} \\
&+ \frac{1+\delta-(n-2)\delta^2}{n-2}\mathring{R}_{11}^2 + \left[\frac{1}{n(n-1)} - \frac{(n-1)^2+1}{n(n-1)(n-2)}\delta - \frac{2}{n}^{2}\right]R\mathring{R}_{11} \\
&- \left[\frac{2}{n(n-2)} - \delta^2\right]|\mathring{Ric}|^2.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Considerando que $f|_{\partial M} = 0$ e usando o Lema 5 , podemos inferir que na fronteira

$$
W_{ipjq}\nabla_j f = T_{ipq}, \tag{2.44}
$$

multiplicando a expressão acima por $\mathring{R}_{pq}\nabla_i f$, e considerando as propriedades (2.12) do tensor T_{ijk}, obtemos

$$
\begin{aligned}
W_{ipjq}\mathring{R}_{pq}\nabla_i f\nabla_j f &= T_{ipq}\mathring{R}_{pq}\nabla_i f \\
&= T_{ipq}\left(R_{pq} - \frac{R}{n}g_{pq}\right)\nabla_i f \\
&= T_{ipq}R_{pq}\nabla_i f \\
&= \frac{1}{2}T_{ipq}(R_{pq}\nabla_i f - R_{iq}\nabla_p f).
\end{aligned} \tag{2.45}
$$

Agora, observe que

$$
T_{ipq}T_{ipq} = |T_{ipq}|^2 = T_{ipq}\left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)(R_{iq}\nabla_p f - R_{pq}\nabla_i f),
$$

donde segue que

$$
-\left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)^{-1}|T_{ipq}|^2 = T_{ipq}(R_{pq}\nabla_i f - R_{iq}\nabla_p f).
$$

Assim,

$$
-\frac{n-2}{2(1-(n-2)\delta)}|T_{ipq}|^2 = \frac{1}{2}T_{ipq}(R_{pq}\nabla_i f - R_{iq}\nabla_p f). \tag{2.46}
$$

Dessa forma, substituindo (2.46) em (2.45), ganhamos

$$
W_{ipjq}\mathring{R}_{pq}\nabla_i f\nabla_j f = -\frac{n-2}{2(1-(n-2)\delta)}|T_{ipq}|^2. \tag{2.47}
$$

Sendo M^n uma variedade que satisfaz a condição fracamente Einstein, pelo o Lema 2 e pelas equações (2.44) e (2.47), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= W_{ipqr}W_{jpqr}\nabla_i f\nabla_j f - \frac{|W|^2}{n}|\nabla f|^2 + \frac{4}{n-2}W_{ipjq}\mathring{R}_{pq}\nabla_i f\nabla_j f \\ &+ \frac{2(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{1q}\mathring{R}_{q1}|\nabla f|^2 + \frac{4R}{n(n-1)}\mathring{R}_{11}|\nabla f|^2 - \frac{2(n-4)}{n(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2|\nabla f|^2. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Usando novamente o Lema 5, temos

$$W_{ipqr}W_{jpqr}\nabla_i f\nabla_j f = |T_{ipq}|^2. \tag{2.49}$$

Assim, substituindo (2.49) em (2.48), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{|W|^2}{n}|\nabla f|^2 - \frac{1+(n-2)\delta}{1-(n-2)\delta}|T_{ijk}|^2 + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}^2_{11}|\nabla f|^2 \\ &+ \frac{4R}{n(n-1)}\mathring{R}_{11}|\nabla f|^2 - \frac{2(n-4)}{n(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2|\nabla f|^2. \end{aligned} \tag{2.50}$$

e usando o Lema 6, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{|W|^2}{2n} - \frac{1+(n-2)\delta}{n-2}\Bigg\{\left(\frac{n-2}{n(n-1)} + \frac{2}{n}\delta\right)R\mathring{R}_{11} + \left(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\delta\right)\frac{R^2}{n} \\ &+ \theta\left(\frac{n-1}{n}R - \mathring{R}_{11}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \delta\right)|\mathring{Ric}|^2 - \left(\frac{2}{n-2} - \delta\right)\mathring{R}^2_{11}\Bigg\} + \frac{(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}^2_{11} \\ &+ \frac{2R}{n(n-1)}\mathring{R}_{11} - \frac{n-4}{n(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2 \\ &= -\frac{|W|^2}{2n} - \left(\frac{1}{n-2} + \delta\right)\left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\delta\right)\frac{R^2}{n} + \theta\left(\frac{n-1}{n}R - \mathring{R}_{11}\right)\right\} \\ &+ \frac{1+\delta-(n-2)\delta^2}{n-2}\mathring{R}^2_{11} + \left[\frac{1}{n(n-1)} - \frac{(n-1)^2+1}{n(n-1)(n-2)}\delta - \frac{2}{n}^2\right]R\mathring{R}^2_{11} \\ &- \left[\frac{2}{n(n-2)} - \delta^2\right]|\mathring{Ric}|^2. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Prova dos Resultados.

Neste capítulo provaremos os resultados descritos na introdução, os quais investigaremos os seguintes casos

3.1 Caso $n = 3$

Nosso primeiro resultado será para variedades fracamente Einstein tridimensionais, onde nos baseamos no Teorema 1.2 do artigo [8]. Aqui conseguimos melhorar o resultado de Xiaomin Chen, considerando agora o intervalo $-1 < \delta < 0$.

Teorema 5. *Seja* $(M^3, g, f, \delta, \gamma)$ *uma variedade compacta do tipo Einstein gradiente, com curvatura escalar constante e bordo conexo. Para* $-1 < \delta < 0$*, se* (M^3, g) *é fracamente Einstein, então* (M^3, g) *é isométrica a uma bola geodésica simplesmente conexa no espaço forma* $\mathbb{S}^3$ *se* $\gamma > 0$*, ou ao hemisfério de uma esfera redonda se* $\gamma = 0$*.*

Demonstração. Do Lema 4, temos

$$\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) = \frac{(1-n)\theta + \delta R}{1+\delta}|\nabla f|^2.$$

Considerando que $e_1 = \frac{-\nabla f}{|\nabla f|}$ e que $\mathring{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric} - \frac{R}{n}g$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathring{R}_{11} &= \frac{1}{|\nabla|^2}\left(\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) - \frac{R}{n}g\right) \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2}\left(\frac{(1-n)\theta + \delta R}{1+\delta}|\nabla f|^2 - \frac{R}{n}|\nabla f|^2\right) \qquad (3.1) \\
&= \frac{n(1-n)\theta - (1-(n-1)\delta)R}{n(1+\delta)}.
\end{aligned}$$

Assim, se a curvatura escalar é constante, consideramos o item 1 do lema 7 e ganhamos que

$$\mathring{R}_{11} = \frac{n(1-n)\theta - (1-(n-1)\delta)R}{n(1+\delta)} \leqslant 0. \tag{3.2}$$

Como vimos no Lema 1, para $n = 3$, o tensor de Weyl desaparece completamente. Assim, sobre o bordo, usamos o Lema 9 para deduzir

$$\begin{aligned} 0 &= (1+\delta)\left\{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\delta\right)\frac{R^3}{3} + \theta\left(\frac{2}{3}R - \mathring{R}_{11}\right)\right\} \\ &\quad + (\delta^2 - \delta - 1)\mathring{R}_{11}^2 - \frac{1}{6}(1 - 5\delta - 4\delta^2)R\mathring{R}_{11} + \left(\frac{2}{3} - \delta^2\right)|\mathring{Ric}|^2, \end{aligned}$$

donde segue

$$\begin{aligned} 0 &= (1+\delta)(1-\delta)\frac{R^2}{9} + \theta(1+\delta)\frac{2}{3}R - \theta(1+\delta)\mathring{R}_{11}^2 \\ &\quad + (\delta^2 - \delta - 1)\mathring{R}_{11}^2 - \frac{1}{6}(1 - 5\delta - 4\delta^2)R\mathring{R}_{11} + \left(\frac{2}{3} - \delta^2\right)|\mathring{Ric}|^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Agora, obeserve também que de (3.1), podemos obter uma expressão para θ dada por

$$\theta = -\frac{1}{n-1}\left((1+\delta)\mathring{R}_{11} + \frac{1-(n-1)\delta}{n}R\right). \tag{3.4}$$

Assim, considerando $n = 3$ e substituindo θ pela expressão acima em (3.3), ganhamos

$$\begin{aligned} 0 &= (1+\delta)(1-\delta)\frac{R^2}{9} + (\delta^2 - \delta - 1)\mathring{R}_{11}^2 - \frac{1}{6}(1 - 5\delta - 4\delta^2)R\mathring{R}_{11} + \left(\frac{2}{3} - \delta^2\right)|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad - \left((1+\delta)\frac{\mathring{R}_{11}}{2} + (1-2\delta)\frac{R}{6}\right)(1+\delta)\frac{2}{3}R + \left((1+\delta)\frac{\mathring{R}_{11}}{2} + (1-2\delta)\frac{R}{6}\right)(1+\delta)\mathring{R}_{11}. \end{aligned}$$

Após simplificações, obtemos

$$0 = -R\mathring{R}_{11} + (3\delta^2 - 1)\frac{\mathring{R}_{11}^2}{2} + (2 - 3\delta^2)\frac{|\mathring{Ric}|^2}{3}. \tag{3.5}$$

Por outro lado, como $f|_{\partial M} = 0$ e $W = 0$ quando $n = 3$, segue pelo Lema 5 que $T_{ijk} = 0$. Assim, para $-1 < \delta < 0$, do Lema 6, ganhamos

$$0 = \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\delta\right)R\mathring{R}_{11} + (1-2\delta)\frac{R^2}{9} + \theta\left(\frac{2}{3}R - \mathring{R}_{11}\right) + (1-\delta)|\mathring{Ric}|^2 - (2-\delta)\mathring{R}_{11}^2.$$

Substituindo θ na expressão acima pela expressão dada por (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (1+4\delta)\frac{R\mathring{R}_{11}}{6} + (1-2\delta)\frac{R^2}{9} + (1-\delta)|\mathring{Ric}|^2 - (2-\delta)\mathring{R}_{11}^2 \\ &\quad + \left(-(1+\delta)\frac{\mathring{R}_{11}}{2} - (1-2\delta)\frac{R}{6}\right)\left(\frac{2}{3}R - \mathring{R}_{11}\right). \end{aligned}$$

Donde segue

$$0 = (1-\delta)|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 - 3(1-\delta)\frac{\mathring{R}_{11}^2}{2}.$$

Novamente, como estamos considerando $-1 < \delta < 0$, segue que

$$|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 = \frac{3}{2}\mathring{R}_{11}^2. \tag{3.6}$$

Assim, substituindo (3.6) em (3.5), ganhamos

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{R\mathring{R}_{11}}{3} + (3\delta^2 - 1)\frac{\mathring{R}_{11}^2}{2} + (2 - 3\delta^2)\frac{\mathring{R}_{11}^2}{2} \\ &= -\frac{R\mathring{R}_{11}}{3} + \frac{\mathring{R}_{11}^2}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, $\frac{R\mathring{R}_{11}}{3} = \frac{\mathring{R}_{11}^2}{2}$. Como $R > 0$ e considerando (3.2), obtemos que $\mathring{R}_{11} = 0$ no bordo. Finalmente, usamos o Lema 8 para obter $\mathring{\mathrm{Ric}} = 0$, ou seja, M^3 é uma variedade Einstein. Donde, completamos a prova do nosso Teorema à luz do Teorema 1. □

3.2 Caso $n = 4$.

Nosso próximo resultado será para variedades fracamente Einstein em dimensão quatro, com base no Teorema 1.3 do artigo [8]. Aqui conseguimos melhorar o resultado de Xiaomin Chen, expandindo a análise para consider não apenas o caso onde $\delta < 0$ mas também onde $\delta \geqslant \frac{1}{2}$. É importante destacar que para o caso $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ainda permanece em aberto.

Teorema 6. *Seja* $(M^4, g, f, \delta, \gamma)$ *uma variedade compacta do tipo Einstein gradiente, com curvatura escalar constante positiva e bordo conexo. Para* $\delta < 0$ *ou* $\delta \geqslant \frac{1}{2}$*, se* (M^4, g) *é fracamente Eisntein, então* (M^4, g) *é isométrica a uma bola geodésica simplesmente conexa no espaço forma* $\mathbb{S}^3$ *se* $\gamma \neq 0$*, ou ao hemisfério de uma esfera redonda se* $\gamma = 0$*.*

Demonstração. Pelo Lema 2, temos

$$\begin{aligned} 0 &= 2W_{ipjq}\mathring{R}_{pq} + \frac{R}{3}\mathring{R}_{ij} \\ &= 2W_{ipjq}\nabla_j f\mathring{R}_{pq}\nabla_i f + \frac{R}{3}\mathring{\mathrm{Ric}}(\nabla f, \nabla f) \\ &= -2W_{ipqj}\nabla_j f\mathring{R}_{pq}\nabla_i f + \frac{R}{3}\mathring{\mathrm{Ric}}(\nabla f, \nabla f). \end{aligned}$$

Do Lema 5, e usando que $f|_{\partial M} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2T_{ipq}R_{pq}\nabla_i f + \frac{R}{3}\mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) \\ &= T_{ijk}(R_{jk}\nabla_i f - R_{ik}\nabla_j f) + \frac{R}{3}\mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f). \end{aligned}$$

Para $\delta < 0$ e $\delta > \frac{1}{2}$, temos

$$0 = -\frac{|T_{ijk}|^2}{1-2\delta} + \frac{R}{3}\mathring{R}_{11}|\nabla f|^2,$$

isto é,

$$\frac{R}{3}\mathring{R}_{11}|\nabla f|^2 = \frac{|T_{ijk}|^2}{1-2\delta}.$$

Assim, para $\delta < 0$ e $R > 0$, temos que $\mathring{R}_{11} \geqslant 0$. Daí, pelo Lema 8

$$0 = -\delta\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g + \int_{\partial M}\mathring{R}_{11} dV_g.$$

Isto implica que $\mathring{Ric} = 0$, isto é, M é uma variedade de Einstein e o resultado segue pelo Teorema 1.

Agora, para $\delta > \frac{1}{2}$ e $R > 0$, temos que $\mathring{R}_{11} \leqslant 0$. Novamente, pelo Lema 8, temos

$$0 \leqslant \delta\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = \int_{\partial M}\mathring{R}_{11} dV_g \leqslant 0,$$

isto é, $\mathring{Ric} = 0$. Dessa forma, (M, g) é uma variedade Einstein e o resultado segue novamente pelo Teorema 1.

Por fim, para $\delta = \frac{1}{2}$ e $R > 0$, segue do Lema 6 que $T_{ijk} = 0$ e pelo Lema 5, $W_{ijkl}\nabla_l f = 0$ sobre o bordo.

Agora, pelo Lema 2

$$0 = 2W_{ipjq}\nabla_j f\nabla_i f + \frac{R}{3}\mathring{R}_{ij}\nabla_j f\nabla_i f,$$

donde segue que

$$\mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) = 0.$$

E mais uma vez (M, g) é uma variedade de Eisntein e o resultado segue à luz do Teorema 1.

□

3.3 Caso geral

Por fim, faremos a demonstração do Teorema 4 considerando uma variedade n-dimensional com $n \geqslant 5$.

Teorema 7. *Seja* $(M^n, g, f, \delta, \gamma)$,$n \geqslant 5$, *uma variedade fracamente Einstein do tipo Einstein gradiente n-dimensional e compacta, com curvatura escalar constante. Suponha que* $W|_\delta = 0$ *e que uma das seguintes afirmações seja verdadeira:*

- $\delta \geqslant \delta_1$ *e* $R \geqslant 0$ *ou*
- $-1 \neq \delta \leqslant \delta_2$ *e* $R \leqslant 0$,

onde δ_1, δ_2 *são, respectivamente, as raízes positivas e negativas do polinômio*

$$\phi(\delta) = (n-2)^3\delta^2 + 4(n-2)\delta - (n^2 - 4n + 6), \tag{3.7}$$

então (M^n, g) *é isométrico a uma bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa, ou a um hemisfério de uma esfera redonda.*

Demonstração. De posse do Lema 5 e usando a hipótese de $f|_{\partial M} = 0$, obtemos a seguinte expressão

$$-W_{ijkl}\nabla_l f = T_{ijk}.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} W_{ipjq}\mathring{R}_{pq}\nabla_i f\nabla_j f = T_{ipq}\mathring{R}_{pq}\nabla_i f &= T_{ipq}R_{pq}\nabla_i f \\ &= \frac{1}{2}T_{ipq}(R_{pq}\nabla_i f - R_{iq}\nabla_p f) \\ &= -\frac{n-2}{2(1-(n-2)\delta)}|T_{ipq}|^2. \end{aligned}$$

Na última igualdade usamos a definição do tensor T, expresso na equação (2.11). Por outro lado, definiremos $W^{\nu}_{ij} = W_{1i1j}$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} |W^{\nu}|^2 &= W_{1i1j}W_{1i1j} \\ &= \frac{1}{|\nabla f|}W_{1i1j}T_{i1j} \\ &= \frac{1-(n-2)\delta}{(n-2)|\nabla f|}W_{1i1j}(R_{ij}\nabla_1 f - R_{1j}\nabla_i f). \end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 4, obtemos a igualdade

$$|W^{\nu}|^2 = -\frac{1-(n-2)\delta}{(n-2)|\nabla f|^2}W_{ipjq}R_{ij}\nabla_p f\nabla_q f = -\frac{1-(n-2)\delta}{(n-2)|\nabla f|^2}W_{ipjq}\mathring{R}_{ij}\nabla_p f\nabla_q f. \tag{3.8}$$

Quando $n \geqslant 5$, combinando (2.45) e (3.8), segue que $|T_{ijk}|^2 = 2|W^{\nu}|^2|\nabla f|^2$. Do Lema 6, temos

$$\begin{aligned}|W^{\nu}|^2 = \left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)\Bigg[&\left(\frac{n-2}{n(n-1)}+\frac{2}{n}\delta\right)R\mathring{R}_{11} + \left(\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n}\delta\right)\frac{R^2}{n}\\ &+\theta\left(\frac{n-1}{n}R-\mathring{R}_{11}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)|\mathring{Ric}|^2-\left(\frac{2}{n-2}-\delta\right)\mathring{R}_{11}^2\Bigg].\end{aligned} \tag{3.9}$$

Já sabemos que

$$\theta = -\frac{1}{n-1}\left((1+\delta)\mathring{R}_{11}+\frac{1-(n-1)\delta}{n}R\right). \tag{3.10}$$

Daí, substituindo (3.10) em (3.9), ganhamos

$$|W^{\nu}|^2 = \left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\left[|\mathring{Ric}|^2-\frac{n}{n-1}\mathring{R}_{11}\right]. \tag{3.11}$$

De (2.50) deduzimos

$$\begin{aligned}0 = &-\frac{|W|^2}{2}|\nabla f|^2 - n\left(\frac{1+(n-2)\delta}{1-(n-2)\delta}\right)\frac{|T_{ijk}|^2}{2}+\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{11}^2|\nabla f|^2\\ &+\frac{2R}{(n-1)}\mathring{R}_{11}|\nabla f|^2-\frac{(n-4)}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2|\nabla f|^2.\end{aligned}$$

Usando que $|T_{ijk}|^2 = 2|W^{\nu}|^2|\nabla f|^2$, obtemos

$$\begin{aligned}0 = &-\frac{|W|^2}{2}|\nabla f|^2 - n\left(\frac{1+(n-2)\delta}{1-(n-2)\delta}\right)|W^{\nu}|^2|\nabla f|^2+\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{11}^2|\nabla f|^2\\ &+\frac{2R}{(n-1)}\mathring{R}_{11}|\nabla f|^2-\frac{(n-4)}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2|\nabla f|^2,\end{aligned}$$

donde segue

$$\begin{aligned}0 = &-\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{|W|^2}{2}-n\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\left(\frac{1+(n-2)\delta}{1-(n-2)\delta}\right)|W^{\nu}|^2\\ &+\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{11}^2+\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{2R}{(n-1)}\mathring{R}_{11}\\ &-\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{(n-4)}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Agora, note que de (3.11), temos

$$\begin{aligned}\frac{(n-4)(n-1)}{(n-2)^2}|W^{\nu}|^2 = &\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{(n-4)(n-1)}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2\\ &-\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{11}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Então

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{n(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{11} = &\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{(n-4)(n-1)}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2\\ &-\frac{(n-4)(n-1)}{(n-2)^2}|W^{\nu}|^2.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Assim, substituindo (3.14) em (3.12), ganhamos

$$\begin{aligned}0 = &-\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{|W|^2}{2} - n\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{1+(n-2)\delta}{1-(n-2)\delta}|W^{\nu}|^2\\ &+\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{2R}{n-1}\mathring{R}_{11} + \left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\frac{n-4}{n-2}|\mathring{Ric}|^2\\ &-\frac{(n-4)(n-1)}{(n-2)^2}|W^{\nu}|^2.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Da seguinte relação: $|W|^2 = 4\,|W^{\nu}|^2 + |W_{abcd}|^2$, onde $2 \leqslant a, b, c, d \leqslant n$ (ver [2], Eq.(3.6)]), obtemos

$$\begin{aligned}0 = &\left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\left[-\frac{|W_{abcd}|^2}{2} + \frac{2R}{n-1}\mathring{R}_{11} + \frac{n-4}{n-2}|\mathring{Ric}|^2\right]\\ &+\frac{(n-2)^3\delta^2+4(n-2)\delta-(n^2-4n+6)}{(n-2)^2}|W^{\nu}|^2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

A seguir, consideramos $\Phi(\delta) = (n-2)^3\delta^2 + 4(n-2)\delta - (n^2-4n+6)$, onde δ_1, δ_2 são respectivamente as raízes positiva e negativa de $\Phi(\delta)$. Como $W|_{T\partial M} = 0$, segue de (3.16) que

$$0 = \left(\frac{1}{n-2}-\delta\right)^2\left[\frac{2R}{n-1}\mathring{R}_{11} + \frac{n-4}{n-2}|\mathring{Ric}|^2\right] + \frac{\Phi(\delta)}{(n-2)^2}|W^{\nu}|^2. \tag{3.17}$$

Agora, se uma das seguintes afirmações for verdadeira:

$$\delta \geqslant \delta_1 \text{ e } R \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad -1 \neq \delta \leqslant \delta_2 \text{ e } R \leqslant 0,$$

então $R\mathring{R}_{11} \geqslant 0$. Aqui, basta observar que

$$\mathring{R}_{11} = \delta\frac{\int_M f^2|\mathring{Ric}|^2 dV_g}{\int_M |\nabla f|^2 dV_g}.$$

Portanto, a Equação (3.17) implica que $\mathring{Ric}|_{\partial M} = 0$ e, pelo Lema 8 , podemos concluir que M é uma variedade de Einstein. Isso completa a prova pelo Teorema 1.

□

Bibliografia

[1] Barbosa, J.L.M., Colares, A.G. - *Stability of hypersurfaces with constant* r*-mean curvature*. Annals Global Analysis and Geometry, (15) 277–297, 1997.

[2] H. Baltazar, A. Da Silva, F. Oliveira, Weakly Einstein critical metrics of the volume function on compact manifolds with boundary, J. Math. Anal. Appl. 487 (2) (2020) 124013.

[3] M. Berger, Quelques formules de variation pour une structure riemannienne, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 4 (3) (1970) 285–294.

[4] Caminha, A.*Tópicos de Geometria Diferencial*. SBM, 1ª ed.;2014.

[5] G. Catino, Some rigidity results on critical metrics for quadratic functionals, Calc. Var. Partial Differ. Equ. 54 (2015) 2921–2937.

[6] G. Catino, P. Mastrolia, D. Monticelli, M. Rigoli, On the geometry of gradient Einstein-type manifolds, Pac. J. Math. 286(1)(2017) 39–67.

[7] X. Chen, Compact gradient Einstein-type manifolds with boundary and constant scalar curvature, arXiv:2207.11775v1.

[8] X.Chen, Compact gradient Einstein-type manifolds with boundary satisfying the weakly Einstein condition, Journal of Geometry and Physics 187 (2023) 104792.

[9] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[10] Y. Euh, J.H. Park, K. Sekigawa, A curvature identity on a 4-dimensional Riemannian manifold, Results Math. 63 (1–2) (2013) 107–114.

[11] Chow, B.; Lu, P.; Ni,L. *Hamilton´s Ricci Flow*. American Mathematical Society, 2006.

[12] A. Freitas,J.N.V Gomes,*Compact gradient Einstein-type manifolds with boundary, arXiv:2205.07827v1.*

[13] G. Huang, Y. Wei, The classification of $(\mathfrak{m}, \rho)$-quasi-Einstein manifolds, Ann. Glob. Anal. Geom. 44 (2013) 269–282.

[14] S. Hwang, G. Yun, Weakly Einstein critical point equation, Bull. Korean Math. Soc. 53 (4) (2016) 1087–1094.