Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Sobre uma classe de espaços de Sobolev e equações elípticas com crescimento crítico e termo logarítmico supercrítico

Jéferson Nascimento Silva

Teresina - 2024

Jéferson Nascimento Silva

Tese de Doutorado:

Sobre uma classe de espaços de Sobolev e equações elípticas com crescimento crítico e termo logarítmico supercrítico

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira

Teresina - 2024

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre uma classe de Sobolev e equações elípticas com crescimento crítico e termo logarítmico supercrítico

Jeferson Nascimento Silva

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 06 de dezembro de 2024.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
JOSE FRANCISCO ALVES DE OLIVEIRA
Data: 06/12/2024 21:26:36-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira - Orientador

Documento assinado digitalmente
JOAO MARCOS BEZERRA DO O
Data: 06/12/2024 21:07:40-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - membro externo

Documento assinado digitalmente
JOSE CARLOS DE ALBUQUERQUE MELO JUNIOI
Data: 06/12/2024 15:04:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Carlos Albuquerque Melo Júnior - membro externo

Documento assinado digitalmente
ABIEL COSTA MACEDO
Data: 06/12/2024 14:51:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Abiel Costa Macedo - membro externo

Documento assinado digitalmente
PITAGORAS PINHEIRO DE CARVALHO
Data: 06/12/2024 18:05:20-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho - membro interno

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Divisão de Representação da Informação

S586s Silva, Jeferson Nascimento.
Sobre uma classe de Sobolev e equações elípticas com crescimento crítico e termo logarítmico supercrítico / Jeferson Nascimento Silva. – 2024.
106 f.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
"Orientador: Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira".

1. Desigualdade do tipo Sobolev. 2. Desigualdade do tipo supercrítica. 3. Equações elípticas. 4. Melhor constante. 5. Minimizantes. 6. Termo logarítmico. I. Oliveira, José Francisco Alves de. II. Título.

CDD 510

Bibliotecária: Francisca das Chagas Dias Leite – CRB3/1004

Dedico este trabalho aos meus pais Francisco Jeane e Ana Celia, à minha esposa Nayara Caroline e à minhas filhas Ana Alice e Maria Clara.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelas oportunidades dadas e seus ensinamentos. Depois, gostaria de agradecer a minha família e familiares, por todos os momentos compartilhados. Também, agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho fosse possível. Este momento representa o fim de um ciclo que iniciou no ano de 2009, no antigo Campus Ministro Reis Velloso da UFPI (atualmente, UFDPar), formam anos de dedicação, incluindo dias difíceis e muita persistência, e seria impossível alcançar este título acadêmico sem o apoio de diversas pessoas que me acompanharam nesta jornada acadêmica e pessoal.

Agradeço ao meu orientador de iniciação cientifica o Professor Alexandro Marinho Oliveira na época de graduação em Matemática, por ter me incentivado e aberto os olhos a cursar uma pós-graduação em Matemática.

Agradeço ao meu orientador de mestrado e doutorado o Professor José Francisco de Oliveira Alves, por ter me encorajado a não desistir e também por ter aceitado o convite para me orientar. É preciso destacar que sua orientação foi atenciosa e paciência, e sempre pode compartilhar sua sabedoria ao longo de todo o processo. Suas observações perspicazes e seu entusiasmo pela matemática foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, e sua confiança nas minhas capacidades me motivou a continuar em cada etapa.

Agradeço aos professores Abiel Macedo, João Marcos do Ó, José Carlos Junior, José Francisco Alves de Oliveira, Pitágoras Pinheiro de Carvalho, por aceitarem participar da banca de defesa de Tese de Doutorado e pelas valiosas sugestões e correções do texto, que vão contribuir ainda mais para o enriquecimento deste trabalho. Também, agradeço aos professores Isaías Pereira de Jesus e Gleison do Nascimento Santos por aceitarem o convite de suplentes dessa banca de defesa.

Aos amigos e colegas do programa de pós-graduação deixo meus agradecimentos, em vista que compartilhamos as mesmas angústias e alegrias deste percurso. Em especial aos colegas de turma do quadriênio 2021-2024: Antônio Nilson, Christopher Queiroz, Erisvaldo Vieira, João Vinicius, Pedro Rodrigues e Ruan Diego. Também, agradeço ao corpo dorcente do Programa de Pós-Graduação em Matemática/PPGMAT da UFPI, cujas aulas e orientações me ajudaram a expandir minha compreensão da matemática e a pensar de maneira crítica. Suas contribuições ao longo de minha formação acadêmica foram indispensáveis.

Agradeço em especial aos meus pais, Francisco Jeane da Silva e Ana Celia do Nascimento, aos meus irmãos, Jean Paulo e Ana Jessica, e a minha companheira, Nayara Caroline, pelo apoio incondicional e compreensão em todos os momentos. Vocês acreditaram no meu potencial e me ajudaram no que foi necessário para continuar, mesmo nos momentos mais difíceis.

Por fim, agradeço aos professores do colegiado do curso de Matemática da UFDPar pelo apoio e isentivo nessa jornada. Também, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

A todos, meu sincero agradecimento. Esta conquista é também de vocês.

"A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo.".

Nelson Mandela.

Resumo

Introduzimos uma classe geral de espaços de Sobolev com pesos. Esses espaços são o ambiente natural para estudar uma classe geral de operadores, que inclui o operador poli-harmônico na forma radial. Uma desigualdade do tipo Sobolev para ordem superior é estabelecida e o problema variacional correspondente é analisado. Em certos casos exibimos as funções extremais e calculamos o valor da melhor constante associada a desigualdade do tipo Sobolev. Adicionalmente, estabelecemos resultados sobre regularidade e classificação. No caso ilimitado, analisamos a existência de solução fraca para uma classe geral de problemas que envolve crescimento crítico. No caso limitado, dedicamos nossa atenção a estudar uma classe de equações elípticas com termo logarítmico supercrítico.

Palavras-chave: Desigualdade do tipo Sobolev; minimizantes; melhor constante; desigualdade do tipo supercrítica; termo logarítmico; equações elípticas.

Abstract

We introduce a general class of weighted Sobolev spaces. These spaces provide the natural environment for studying a general class of operators, which includes the polyharmonic operator in radial form. We establish a higher-order Sobolev-type inequality and analyze the corresponding variational problem. In certain cases, we identify the extremal functions and determine the best constant associated with the Sobolev-type inequality. Additionally, we provide results on the regularity and classification of solutions. In the unbounded case, we analyze the existence of a weak solution for a general class of problems involving critical growth. In the bounded case, we focus on studying a class of elliptic equations with a supercritical logarithmic nonlinearity.

Keywords: Sobolev-type inequality; minimizers; best constant; supercritical-type inequality; Logarithmic term; elliptic equations.

Introdução

Os problemas variacionais são fundamentais em diversas áreas da matemática, física e engenharia. Tais problemas envolvem a busca por funções que minimizam (ou maximizam) certas quantidades. Por exemplo, o clássico problema de Mecânica sobre o movimento de uma partícula sob a ação da gravidade, proposto em 1696 por Johann Bernoulli no seguinte artigo "Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitatur", e publicado na Acta Eruditorum. Atualmente, esse problema é conhecido como **Problema da Braquistócrona** e pode-se formular da seguinte forma: *Dados* X *e* Y *dois pontos em um plano. Qual é a curva que uma partícula precisa descrever para sair de* X *e chegar em* Y *no menor tempo possível, apenas sob a ação da força da gravidade?* O próprio Johann Bernoulli baseado no Princípio de Fermat (ver [7]) mostrou que a curva *ciclóide* resolve o problema da Braquistócrona. Também, mencionamos que esse problema pode ser resolvido por meio de uma formulação variacional, recomendamos [70] para mais detalhes. Assim, o cálculo variacional é um área da matemática que investiga esse tipo de problema, e, com o passar dos anos os problemas variacionais evoluíram e são ferramentas importantes para estudar equações diferenciais parciais (EDP's), recomendamos M. Willem [74], N. Ghoussoub [52], D. Costa [21] e P. Rabinowitz [64] para mais informações. No desenvolvimento dessa tese, o cálculo variacional desempenhará um papel fundamental.

Inicialmente, estamos interessados em estabelecer resultados relacionados a uma classe geral de operadores, que estende o operador poli-harmônico quando age em funções radialmente simétricas. Para explorar esse ponto, dado $m \geqslant 1$ um número inteiro, considere a equação elíptica:

$$(-\Delta)^m u = f(x, u) \quad \text{em } \Omega, \tag{1}$$

onde $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função fixada e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto conexo, com $N \geqslant 2$. É bem conhecido que, se $m = 1$ temos que operador Laplaciano está relacionado a problemas de geometria diferencial, física, probabilidade e entre outros. Quando

$m = 2$, operador bi-harmônico está relacionado ao operador de Paneitz, que foi introduzido por Paneitz [63] para variedades Riemannianas. Em geral, operador poli-harmônico está relacionado a equações elípticas de ordem superior do tipo reação-difusão, veja [51] para mais detalhes. Para Ω limitado, no caso de $m = 1$, mencionamos que equações relacionadas com o expoente crítico foram investigadas em muitos artigos, recomendamos Bahri e Coron [8], Brézis e Nirenberg [14] e suas citações. Quando $m \geqslant 2$, F. Gazzola et al [51, Chapter 7] estudou o problema (1) sob condições de fronteira do tipo: Dirichlet, Navier e Steklov. Por outro lado, quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $f(u) = |u|^{\frac{4m}{N-2m}}u$, podemos escrever (1) da seguinte forma:

$$(-\Delta)^m u = |u|^{\frac{4m}{N-2m}}u, \quad u \in \mathcal{D}^{m,2}(\mathbb{R}^N), \tag{2}$$

onde $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ é o fecho do conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ na norma

$$\|\varphi\|_{\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N)} := \|D^m\varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{\alpha=m} \|D^\alpha\varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $m \geqslant 1$ um número inteiro e $N > 2m$, observamos que T. Bartsch et al [9] foram capazes de provar que existem infinitas soluções nodais para (2). Pela teoria de regularidade clássica, pode-se mostrar que se $u \in \mathcal{D}^{m,2}(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca de (2), então u é uma solução clássica (pelo menos $u \in C^{2m}(\mathbb{R}^N)$). Além disso, J. Wei e X. Xu [73] mostraram que todas as soluções positivas u na equação (2) são funções radialmente simétricas.

Para $m \geqslant 1$ um número inteiro, $1 \leqslant p < \infty$ um número real. Se $N > pm$, então existe $C_0 > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D^m\varphi|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N), \tag{3}$$

com $p^* = Np/(N - mp)$ o expoente crítico Sobolev. Essa desigualdade é conhecida como *Desigualdade Sobolev Clássica*. Por isso, vale a imersão contínua

$$\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \tag{4}$$

mas, não compacta. Para mostrar que a melhor constante C_0 em (3) é atingida, P. L. Lions em [57, Theorem I.1] mostrou que o seguinte problema de minimização tem um mínimo:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(N, p, m) = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |D^m u(x)|^p\, dx : u \in \mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N), \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*}\, dx = 1\right\}. \tag{5}$$

Quando $m = 1$, usando argumento de simetrização e algumas ideias contidas em G. Bliss [12], os seguintes trabalhos G. Rosen [65], G. Talenti [69], T. Aubin [4] determinaram a forma explícita das funções extremais para (5) e calcularam o valor de $\mathcal{J}(N, p, 1)$, a saber:

$$u(x) = \sigma^{-\frac{N}{p^*}} \left(1 + b\left(\frac{x-y}{\sigma}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)^{\frac{p-N}{p}}, \quad y \in \mathbb{R}^N \text{ e } \sigma > 0$$

e

$$\mathcal{J} = \pi^{\frac{p}{2}} N \left(\frac{p-1}{N-p}\right)^{-\frac{p-1}{p}} \left(\frac{\Gamma(1+\frac{N}{2})\Gamma(N)}{\Gamma(\frac{N}{p})\Gamma(1+N-\frac{N}{p})}\right)^{\frac{p}{N}},$$

com $b = b(N, p) \in \mathbb{R}$ e $\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1} dt$ para $x > 0$, a função gama de Euler. Para $p = 2$, podemos reescrever o problema (5) da seguinte forma:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(N, 2, m) = \inf\left\{\frac{\|D^m \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|\varphi\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} : \varphi \in \mathcal{D}^{m,2}(\mathbb{R}^N), \quad \varphi \neq 0\right\}. \tag{6}$$

A menos de uma constante, a equação de Euler-Lagrange associada ao problema de minimização (6) é a equação elíptica semi-linear em (2) com $p = 2$. É claro, as funções extremais em (6) são soluções da equação (2). Também, observamos que C. A. Swanson [68] foi capaz de provar um resultado de unicidade para as soluções positivas em (2), e com isso, determinou que

$$\mathcal{S} = \pi^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(\frac{N}{2})}\right)^{\frac{m}{N}} \prod_{j=-m}^{m-1} (N+2j)^{-\frac{1}{2}}$$

e é atingida pela família de funções radiais da forma $U_{\epsilon,x_0}(|x|) = u_{\epsilon,x_0}(x)$ para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\epsilon > 0$, onde:

$$u_{\epsilon,x_0}(x) = \frac{c_{N,m}\epsilon^{\frac{N-2m}{2}}}{(\epsilon^2 + |x-x_0|^2)^{\frac{N-2m}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad c_{N,m} = \left[\prod_{j=-m}^{m-1}(N+2j)\right]^{\frac{N-2m}{2}}.$$

Em geral, uma questão em aberto é determinar a forma explícita das minimizantes em (5) e o valor de $\mathcal{J}$, quando $m \neq 1$ e $p \neq 2$.

Outra questão em destaque são *desigualdades do tipo supercrítica*. Denotamos por $W_0^{1,2}(B)$ o espaço de Sobolev de primeira ordem, com $B \subset \mathbb{R}^N$ é a bola unitária, com $N \geqslant 3$. Quando $m = 1$ e $\Omega = B$ em (1), analisamos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), \quad u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(B) & \text{em} \quad B, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial B, \end{cases} \tag{7}$$

com $H^1_{0,rad}(B) = \{u \in W^{1,2}_0(B) : u(x) = u(|x|), \quad \forall\, x \in B\}$. Para uma escolha específica de $f(x,u)$, o problema (7) pode ter ou não solução. Quando $f(x,u) = |u|^{2^*-2}u$ com $2^* = 2N/(N-2)$, é bem conhecido que o problema (7) não tem solução positiva devido a identidade de Pohozaev. Por outro lado, Brézis e Nirenberg no célebre artigo [14] sugeriram adicionar um termo de perturbação de ordem inferior, possibilitando evitar a perda de compacidade resultante do crescimento crítico, e assim, garantir um resultado de existência. Este tipo de questão é atualmente conhecida como *problema Brézis–Nirenberg*, e recomendamos [10, 18, 34, 56, 66] sobre este assunto. Nessa mesma direção, J. M. do Ó et al [46] introduziram um novo tipo de perturbação "pertubação supercrítica", que desempenha um papel similar ao do termo de perturbação de ordem inferior de Brézis–Nirenberg na superação da perda de compacidade. Ou seja, ao escolher $f(x,u) = |u|^{2^*-2}u^{|x|^\beta+1}$, $u > 0$ eles obtiveram sucesso em provar que (7) admite pelo menos uma solução positiva sob a condição

$$0 < \beta < \min\{N/2, N-2\}. \tag{8}$$

Ainda em [46], se β satisfaz a condição (8), eles foram capazes de provar a existência de uma função extremal para o problema variacional

$$\sup\left\{\int_B |u(x)|^{2^*+|x|^\beta}dx \,:\, u \in H^1_{0,rad}(B),\ \|\nabla u\|_{L^2(B)} = 1\right\}. \tag{9}$$

O problema supercrítico (7)-(9) tem despertado o interesse de diversos pesquisadores e possui várias extensões para diferentes contextos, recomendamos [17, 26–28, 33, 45, 61, 62] e as referências neles contidas. Recentemente, X. Zhang et al. [37] investigaram o problema (7)-(9) com

$$f(x,u) = |u|^{2^*-2}|\ln(\tau+|u|)|^{|x|^\beta}u, \quad \text{para } \tau \geqslant 1.$$

Eles tiveram êxito em obter resultados na mesma direção aos obtidos em [46]. Formalmente, eles provaram a seguinte desigualdade do tipo Sobolev com termo logarítmico (desigualdade supercrítica):

$$\mathcal{F}_{\tau,\beta} = \sup\left\{\int_B |u|^{2^*}|\ln(\tau+|u(x)|)|^{|x|^\beta}\,dx \,:\, u \in H^1_{0,rad}(B),\ \|\nabla u\|_{L^2(B)} = 1\right\} < \infty, \tag{10}$$

onde $\beta, \tau > 0$ são constantes reais. Além disso, o supremo em (10) é atingido sob as condições (8) e $\tau \geqslant 1$. Como aplicação, os autores conseguem demonstrar a existência de uma solução positiva para (7) com termo logarítmico. Mais precisamente, a equação do tipo supercrítico:

$$\begin{cases} -\Delta u = (\ln(\tau + |u|))^{|x|^\beta} |u|^{2^*-2} u, & \text{em} \quad B, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial B, \end{cases} \tag{11}$$

admite uma solução positiva $u \in H^1_{0,rad}(B)$ desde que (8) seja válido e $1 \leqslant \tau < \infty$. Por fim, recomendamos [38] para uma análise detalhada sobre a existência de soluções nodais para a equação (11).

Na direção dos resultados clássicos, os principais objetivos dessa tese são:

(a) Apresentar uma classe de espaços de Sobolev com peso $\mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha)$ adequado para estudar o operador $(\Delta_\alpha)^m$, que estende operador poli-harmônico quando age em funções radialmente simétricas.

(b) Fornecer uma versão da desigualdade Sobolev clássica para $\mathcal{D}^{m,p}_\infty(\alpha)$ na qual estende (4), na forma radial.

(c) Investigar o problema extremal associado a uma desigualdade do tipo Sobolev.

(d) Estudar resultados sobre regularidade e classificação das soluções positivas e não singulares de uma classe geral de equações elípticas com crescimento crítico. Adicionalmente, calcular a melhor constante relacionada a uma versão da desigualdade Sobolev.

(e) Fornecer uma desigualdade do tipo Hardy-Sobolev com termo logarítmico supercrítico para $X^{1,p}_1(\alpha_0, \alpha_1)$, que estende (10). Aqui, mencionamos que a situação em $H^{1,p}_{rad}(B)$ é inclusa em nossos resultados, e portanto, temos uma avanço desse tipo de problema no caso clássico.

(f) Analisar a existência de solução fraca para uma certa equação elíptica no espaço $X^{1,p}_1(\alpha_0, \alpha_1)$, na qual permite estende o resultado de existência na equação (11).

Esse trabalho está estruturado da seguinte maneira:

- Capítulo 1 - Apresentaremos as definições e resultados necessários para melhor compreender as provas dos Teoremas e o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Organizamos esse capítulo da seguinte maneira: a seção 1.1 é voltada a desigualdades do tipo Hardy, enquanto nas seção 1.2 e seção 1.3 destacamos resultados sobre espaços com pesos e espaços de Banach, respectivamente.

- Capítulo 2 - Estabeleceremos resultados referentes aos itens (a) e (b). A seção 2.1 será dedicada a provar uma desigualdade do tipo Sobolev no Teorema 5.

- Capítulo 3 - Investigaremos resultados relativos ao item (c). Na seção 3.1 mostraremos a existência de função extremal para um problema de minimização no Teorema 6 e como aplicação na seção 3.2 analisaremos a existência de solução fraca para uma classe geral de equações elíptica crítica, ver o Corolário 6.

- Capítulo 4 - Forneceremos resultados referentes ao item (d). Na seção 4.1 demonstraremos um resultado de regularidade no Teorema 7, estabeleceremos um resultado de classificação na seção 4.2, ver Teorema 8, e por fim, na seção 4.3 provaremos o Corolário 10, o Corolário 11 e o Teorema 9.

- Capítulo 5 - Determinaremos resultados relativos aos itens $(e)-(f)$. Na seção 5.1 forneceremos duas desigualdades supercríticas, ver o Teorema 10 e o Corolário 12, a seção 5.2 é dedicada a provar dois resultados sobre o supremo $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}$, ver o Teorema 11 e o Teorema 12. Na seção 5.3, um resultado de existência de solução para uma classe de equações elípticas com termo logarítmico supercrítico será provado no Teorema 13.

Por fim, informamos que os resultados obtidos nessa tese resultaram nos seguintes artigos [31] e [32].

Tabela de Notações

Símbolo	Descrição
$AC(0,R)$	Espaço das funções absolutamente contínuas em $(0,R)$, ver definição 1-(a) na página 1.
$AC_{loc}(0,R)$	Espaço das funções localmente absolutamente contínuas em $(0,R)$, ver definição 1-(b) na página 1.
$AC^{l}_{loc}(0,R)$	Espaço das funções localmente absolutamente contínuas em $(0,R)$ de ordem l, ver definição 1-(b) na página 1.
$AC^{m-1}_{R}(0,R)$	Espaço de funções em $AC^{m-1}_{loc}(0,R)$ com condições de fronteira à direita, ver definição 1-(c) na página 1.
L^{q}_{θ}	O espaço de Lebesgue com respeito à medida $\mu_\theta := r^\theta dr$ no intervalo $(0,R)$, ver definição 5 na página 5.
$L^{\beta}_{\theta,\ln}$	Espaço de Orlicz generalizado, ver definição 13 na página 71.
$W^{m,p}_{R}$	Espaço de Sobolev com pesos $\alpha_0, \cdots, \alpha_m$, ver definição 6 na página 4.
$X^{m,p}_{R}$	Espaço das funções em $W^{m,p}_{R}$, com condição de fronteira a direita, ver definição 7 na página 5
$\mathcal{D}^{m,p}_{R}(\alpha)$	Espaço de Sobolev com peso α, ver página 10.
∇^{m}_{α}	α-generalização do operador gradiente de ordem m, ver definição 8 na página 6.
Δ^{m}_{α}	α-generalização do operador Laplaciano de ordem m, ver página 36.
$\mathcal{S}(m,p,\theta,\alpha,R)$	Constante relacionada a um problema de minimização, ver página 25.
$\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}$	Constante associada a um problema de maximização, ver página 72.

c_{MP}	Nível do passo da montanha, ver página 90.
$\hookrightarrow$	Imersão contínua entre espaços de funções, ver página 6.
$\rightharpoonup$	Convergência na topologia fraca, ver definição 9 na página 7.
$f = O(g)$ se $r \to r_0$	$\frac{f}{g}$ é limitada para $r \to r_0$, ver página 44.
$f = o(g)$ se $r \to r_0$	$\frac{f}{g} \to 0$ para $r \to r_0$, ver página 66.
q.t.p.	Em quase toda parte com respeito a uma medida, ver página 30.

Tabela de Notações

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo, será apresentado definições e resultados sobre: desigualdades do tipo Hardy, espaços com pesos, medida e integração e espaços de Banach.

1.1 Desigualdades do tipo Hardy

Definição 1. *Seja* $0 < R \leqslant \infty$.

(a) $AC(0, R)$ *representa o espaço das funções absolutamente contínuas no intervalo* $(0, R)$. *É bem conhecido que, uma função* $u : (0, R) \to \mathbb{R}$ *é absolutamente contínuas no intervalo* $(0, R)$ *se, e somente, se*

$$\exists u' \text{ q.t.p } \textit{em } (0, R) \quad \textit{e} \quad u(r) = u(r_0) - \int_{r_0}^{r} u'(t)\, dt.$$

(b) *Uma função* $u : (0, R) \to \mathbb{R}$ *é dita localmente absolutamente contínua no intervalo* $(0, R)$, *quando*

$$\forall\, [a, b] \subseteq (0, R) \quad \Rightarrow \quad u \in AC([a, b]).$$

$AC_{loc}(0, R)$ *representa o espaço das funções localmente absolutamente contínuas no intervalo* $(0, R)$. *Em geral, para número inteiro* $l \geqslant 0$ *escrevemos*

$$u \in AC^{l}_{loc}(0, R) \quad \Leftrightarrow \quad \exists u^{(l)} = \frac{d^l u}{dr^l} \quad \textit{e} \quad u^{(l)} \in AC_{loc}(0, R).$$

(c) *Para número inteiro* $m \geqslant 1$, *escrevemos*

$$AC^{m-1}_{R}(0, R) = \left\{ u \in AC^{m-1}_{loc}(0, R) : \lim_{r \to R} u^{(j)}(r) = 0, \ \textit{para } j = 0, 1, \cdots, m-1 \right\}; \tag{1.1}$$

e

$$AC_L^{m-1}(0,R) = \left\{u \in AC_{loc}^{m-1}(0,R) : \lim_{r\to 0} u^{(j)}(r) = 0, \text{ para } j = 0,1,\cdots,m-1\right\}. \tag{1.2}$$

A. Kufner e B. Opic [6] usaram a desigualdade de Hardy clássica para estabelecer uma versão da desigualdade de Hardy para $AC_R(0,R)$.

Proposição 1. *Sejam* $1 \leqslant p, q < \infty$, $0 < R < \infty$ *e* $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$. *A desigualdade*

$$\int_0^R |u|^q r^\theta \, dr \leqslant C \int_0^R |u'|^p r^\alpha \, dr \tag{1.3}$$

é verdadeira para alguma constante $C = C(p,q,\theta,\alpha,R) > 0$ *sob as seguintes condições:*

(a) *para toda* $u \in AC_L(0,R)$ *se, e somente se, ocorrer* (i) *ou* (ii), *onde*

(i) $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, $q \leqslant \frac{(\theta+1)p}{\alpha-p+1}$ *e* $\alpha - p + 1 < 0$,

(ii) $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, $q < \frac{(\theta+1)p}{\alpha-p+1}$ *e* $\alpha - p + 1 < 0$.

(b) *para toda* $u \in AC_R(0,R)$ *se, e somente se, ocorrer* (i) *ou* (ii), *onde*

(i) *Se* $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, *então*

$$q \leqslant \frac{(\theta+1)p}{\alpha-p+1} \quad e \quad \alpha - p + 1 > 0,$$

ou

$$\theta > -1 \quad e \quad \alpha - p + 1 \leqslant 0.$$

(ii) *Se* $1 \leqslant q < p < \infty$, *então*

$$q < \frac{(\theta+1)p}{\alpha-p+1} \quad e \quad \alpha - p + 1 > 0,$$

ou

$$\theta > -1 \quad e \quad \alpha - p + 1 \leqslant 0.$$

Uma desigualdade do tipo Hardy para ordem m em AC_R^{m-1} é devida [5, Theorem 4.3 e Remark 4.4].

Teorema 1 (Desigualdade do tipo Hardy para ordem m). *Sejam* $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < R \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$ *e* ν, z *funções mensuráveis e positivas em* $(0,R)$. *Então, existe* $C > 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^R |u(r)|^q z(r) \, dr\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int_0^R |u^{(m)}(r)|^p \nu(r) \, dr\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.4}$$

é verdadeira, para toda $u \in AC_R^{m-1}(0,R)$ *se, e somente se,*

$$\mathcal{A} = \max\{\mathcal{A}_{m,0}, \mathcal{A}_{m,1}\} < \infty,$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{m,0} &= \sup_{0<t<R} \left(\int_0^t (t-r)^{(m-1)q} z(r)\,dr \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_t^R v^{-\frac{1}{p-1}}(r)\,dr \right)^{\frac{p-1}{p}};\\
\mathcal{A}_{m,1} &= \sup_{0<t<R} \left(\int_0^t z(r)\,dr \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_t^R (r-t)^{\frac{p(m-1)}{p-1}} v^{-\frac{1}{p-1}}(r)\,dr \right)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Observação 1. *Como observado em [5], similarmente, podemos descrever as condições necessária e suficiente para que a equação (1.4) seja verdadeira no conjunto*

$$AC_L^{m-1}(0,R) = \left\{ u \in AC_{loc}^{m-1}(0,R) \ : \ \lim_{r\to 0} u^{(j)}(r) = 0, \ \textit{para todo } j = 0,1,\cdots,m-1 \right\}.$$

De fato, neste caso, (1.4) é verdadeira para $1 < p \leqslant q < \infty$ *se, e somente, se*

$$\tilde{\mathcal{A}} = \max\{\tilde{\mathcal{A}}_{m,0}, \tilde{\mathcal{A}}_{m,1}\} < \infty,$$

onde

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}_{m,0} &= \sup_{0<t<R} \left(\int_t^R (r-t)^{(m-1)q} z(r)\,dr \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^t v^{-\frac{1}{p-1}}(r)\,dr \right)^{\frac{p-1}{p}};\\
\tilde{\mathcal{A}}_{m,1} &= \sup_{0<t<R} \left(\int_t^R z(r)\,dr \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^t (t-r)^{\frac{p(m-1)}{p-1}} v^{-\frac{1}{p-1}}(r)\,dr \right)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

1.2 Espaços com pesos

Definição 2. *Dizemos que uma função* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ *é uma* Φ*-função, quando*

(i) φ *é convexa;*

(ii) φ *é contínua à esquerda;*

(iii) $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$ *e* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

Ela é chamada positiva, se $\varphi(t) > 0$, $\forall\, t > 0$.

Definição 3. *Seja* (A, Σ, μ) *um espaço de medida* σ*-finito e completo. Dizemos que uma função real* $\varphi : A \times [0,\infty) \to [0,\infty]$ *é uma* Φ*-função generalizada em* (A,Σ,μ)*, quando*

(i) $\varphi(y,\cdot)$ *é uma* Φ*-função para cada* $y \in A$;

(ii) $y \mapsto \varphi(y,t)$ *é mensurável para todo* $t \geqslant 0$.

Se φ *é uma* Φ*-função generalizada em* (A, Σ, μ)*, escrevemos* $\varphi \in \Phi(A, \mu)$*. Além disso,* $L^0(A, \mu)$ *denota o espaço de todas as funções* μ*-mensuráveis* $f : A \to \mathbb{R}$.

Definição 4. *Sejam* $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ *e* ρ_φ *dado por*

$$\rho_\varphi(f) = \int_A \varphi\,(y, |f(y)|)\, d\mu(y), \quad \forall\, f \in L^0(A, \mu).$$

O espaço de Orlicz generalizado é denotado por $L^\varphi = (L^\varphi(A, \mu), \|\cdot\|_\varphi)$*, onde*

$$\begin{aligned} L^\varphi(A, \mu) &:= \{f \in L^0(A, \mu) : \lim_{\lambda \to 0} \rho_\varphi(\lambda f) = 0\} \\ &= \{f \in L^0(A, \mu) : \rho_\varphi(\lambda f) < \infty, \ \text{para algum } \lambda > 0\} \end{aligned}$$

e sua norma

$$\|f\|_{L^\varphi} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leqslant 1\}.$$

O espaço de Orlicz generalizado L^φ é um espaço de Banach, veja [39, Theorem 2.3.13]. Mais precisamente,

Lema 1. *Se* $\varphi \in \Phi(A, \mu)$*, então o espaço de Orlicz generalizado* L^φ *é um espaço de Banach.*

A seguir, estabelecemos resultados sobre as classes de espaços de Sobolev: $W_R^{m,p}$ e $X_R^{m,p}$. Esses espaços têm despertado interesse desde o estudo inicial realizado por P. Clément et al. [59], e veja também [1, 24, 25, 27, 29, 41, 42, 44] para mais informações.

Definição 5. *Sejam* $0 < R \leqslant \infty$*,* $\theta > -1$ *e* $1 \leqslant q < \infty$*, definimos:*

$$L^q_\theta(0, R) = \{u : (0, R) \to \mathbb{R} \text{ mensurável };\ \int_0^R |u|^q r^\theta\, dr < \infty\}.$$

L^q_θ *representa o espaço de Lebesgue com peso, munido da norma*

$$\|u\|_{L^q_\theta} = \left(\int_0^R |u(r)|^q r^\theta\ dr\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Definição 6. *Sejam* $m \in \mathbb{Z}^*_+$ *e números reais* $0 < R \leqslant \infty$*,* $p \geqslant 1$ *e* $\alpha_j > -1$ *para* $j = 0, 1, \cdots, m$*. Definimos*

$$W_R^{m,p}(\alpha_0, \cdots, \alpha_m) = \left\{u \in AC^{m-1}_{loc}(0, R); \quad u^{(j)} \in L^p_{\alpha_j}, \quad \forall\, j = 0, 1, \cdots, m\right\}.$$

$W_R^{m,p} = W_R^{m,p}(\alpha_0, \cdots, \alpha_m)$ *representa o espaço de Sobolev com pesos* $\alpha_0, \cdots, \alpha_m$*, munido com a norma*

$$\|u\|_{W_R^{m,p}} = \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}\|^p_{L^p_{\alpha_j}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.5}$$

É claro que $W_R^{m,p}$ é um espaço de Banach. A escolha $\alpha_0 = \cdots = \alpha_m = N-1$, fornece a inclusão de $W_{rad}^{m,p}(B_R)$ em $W_R^{m,p}$, onde B_R denota a bola aberta de raio $R > 0$ e com centro na origem do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$.

De acordo com [42, Proposição 2.3], obtemos um lema do tipo Radial em $W_R^{m,p}$, para $0 < R < \infty$.

Proposição 2 (Lema Radial). *Sejam $p \geqslant 1$, $0 < R < \infty$ e $\alpha_j > -1$ para $j = 1, 2, \cdots, m$. Se $\alpha - mp + 1 > 0$, então para qualquer $0 < r \leqslant R$*

$$|u(r)| \leqslant Cr^{-(\alpha_m - mp+1)/p} \|u\|_{W_R^{m,p}}, \quad \forall\, u \in W_R^{m,p},$$

para alguma constante $C = C(p, m, R, \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m) > 0$.

Definição 7. *O espaço $X_R^{m,p} = X_R^{m,p}(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ é definido pelo fecho do conjunto $W_{0,R}$ na norma (1.5), onde*

$$W_{0,R} := W_R^{m,p}(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m) \cap AC_R^{m-1}(0, R).$$

Conforme [44] e [27], apresentamos resultados sobre o espaço $X_R^{m,p}$ com $0 < R < \infty$.

Lema 2. *[27, Lemma 2.1] Seja $0 < R < \infty$ e assuma que $\alpha_1 - p + 1 > 0$. Então, para qualquer $u \in X_R^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ temos*

$$|u(r)| \leqslant \left[\frac{p-1}{\alpha_1 - p + 1}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\alpha_1 - p+1}{p-1}}\right)\right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{\|u\|}{r^{\frac{\alpha_1 - p + 1}{p}}}, \quad 0 < r \leqslant R. \tag{1.6}$$

Proposição 3. *Sejam $m \in \mathbb{Z}_+^*$ e $0 < R < \infty$. Para quaisquer $p \geqslant 1$ e $\alpha_j > -1$, para $j = 0, 1, \cdots, m$, satisfazendo*

$$\alpha_{j-1} \geqslant \alpha_j - p, \; j = 1, 2, \cdots, m, \tag{1.7}$$

então a norma (1.5) é equivalente a norma (1.8) em $X_R^{m,p}$, onde

$$\|u^{(m)}\|_{L^p_{\alpha_m}} := \left(\int_0^R |u^{(m)}|^p r^{\alpha_m}\, dr\right)^{1/p}. \tag{1.8}$$

Proposição 4. *[44, Lema 2.2] Seja $u \in X_R^{m,p}$, com $0 < R < \infty$. Suponha que $\theta > 0$ e $q \geqslant 1$ satisfazendo $p\theta \geqslant (\alpha_m - p + 1)q$. Então,*

$$\lim_{r \to 0} r^\theta |u^{(j-1)}(r)|^q = 0, \quad \forall j = 1, 2, \cdots, m.$$

Definição 8. *Sejam* $m \in \mathbb{Z}_+^*$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*. A* α*-generalização do operador gradiente de ordem* m*, denotada por* ∇_α^m*, é dada por*

$$\nabla_\alpha^m u = \begin{cases} \Delta_\alpha^{\frac{m}{2}} u, & \textit{se} \quad m \textit{ é par,} \\ \left(\Delta_\alpha^{\frac{m-1}{2}} u\right)', & \textit{se} \quad m \textit{ é ímpar,} \end{cases}$$

com

$$\Delta_\alpha u(r) = r^{-\alpha}(r^\alpha u'(r))' = u''(r) + \frac{\alpha}{r}u'(r) \tag{1.9}$$

a α*-generalização do operador Laplaciano na forma radial.*

Proposição 5. *[44, Proposição 4.6 -(a)] Sejam* $m \in \mathbb{Z}_+^*$ *e* $0 < R < \infty$*. Para quaisquer* $p \geqslant 1$ *e* $\alpha_j > -1$ *para* $j = 0, 1, \cdots, m$ *satisfazendo* (1.7)*, então a norma* (1.8) *é equivalente a norma* (1.10) *em* $X_R^{m,p}$*, onde*

$$\|u\|_{\nabla_{\alpha_m}^m} = \left(\int_0^R |\nabla_{\alpha_m}^m u(r)|^p r^{\alpha_m}\, dr\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.10}$$

Observação 2. *Para* $0 < R < \infty$*, foram consideradas as normas* (1.5)*,* (1.8) *e* (1.10) *no espaço* $X_R^{m,p}$*. Felizmente, a condição de transição* (1.7)*, permite que essas normas sejam equivalentes entre si.*

Teorema 2. *[44, Teorema 1.1 -(a)] Sejam* $m \in \mathbb{Z}_+^*$ *e* $0 < R < \infty$*. Para quaisquer* $p \geqslant 1$ *e* $\theta, \alpha_j > -1$ *para* $j = 0, 1, \cdots, m$ *satisfazendo*

$$\min\{\theta, \alpha_{j-1}\} \geqslant \alpha_j - p, \ j = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.11}$$

Se $\alpha_m - mp + 1 > 0$ *(condição de Sobolev), então vale a imersão contínua*

$$X_R^{m,p} \hookrightarrow L_\theta^q, \quad \forall q \in (1, p^*], \tag{1.12}$$

onde

$$p^* = \frac{(\theta + 1)p}{\alpha_m - mp + 1}$$

representa o expoente crítico Sobolev de $X_R^{m,p}$*. Além disso, se* $q < p^*$*, então a imersão acima é compacta.*

De acordo com [27, pag. 3356], podemos obter uma interessante imersão compacta.

Lema 3. *Seja* $X_1^{1,p}([\rho, 1])$ *o espaço* $X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ *no intervalo* $[\rho, 1]$ *em vez de* $(0, 1]$*, com* $0 < \rho < 1$*. Se* $q \geqslant p$*, então* $X_1^{1,p}([\rho, 1]) \hookrightarrow L_\theta^q([\rho, 1])$ *é uma imersão compacta.*

Quando $R = \infty$, destacamos os seguintes resultados:

Lema 4. *([23, Lemma 2.3]) Para qualquer* $u \in X^{1,p}_{\infty}(\alpha_0, \alpha_1)$, *temos*

$$|u(r)| \leqslant Cr^{-\gamma}\|u\|_{W^{1,p}_{\infty}}, \quad \forall\, r > 0$$

onde $\gamma = -(\alpha_1 + (p-1)\alpha_0)/p^2$ *e* $C = C(\alpha_0, \alpha_1, p) > 0$.

Lema 5. *([43, Lemma 2.1]) Assumindo a condição de transição* (1.7)*. Então, o conjunto* $\Upsilon = \{u_{|_{[0,\infty)}} : u \in C^{\infty}_c(\mathbb{R})\}$ *é denso em* $X^{m,p}_{\infty}(\alpha_0, \cdots, \alpha_m)$.

1.3 Notações e outros resultados

Definição 9. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *aberto. Então,*

(a) $C(I)$ *é o conjunto de todas as funções* $u : I \to \mathbb{R}$ *tal que* u *é contínua em* I.

(b) $C_c(I)$ *é o espaço das funções contínuas com suporte compacto em* I.

(c) $C_0(I)$ *é o fecho de* $C_c(I)$ *com respeito a norma uniforme* $\|\varphi\|_{\infty} = \max_{r\in I} |\varphi(r)|$.

(d) $\mathcal{M}(I)$ *é o espaço das medidas de Radon em* I. *E ainda, é bem conhecido que* $\mathcal{M}(I)$ *pode ser identificado com o dual do espaço* $C_0(I)$.

(e) Uma medida finita em I, *denotada por* $\mu = \mu(I)$, *é um funcional linear contínuo em* $C_0(I)$. *A norma de uma medida finita* μ *é dada por*

$$\|\mu\| = \sup\{|\langle \mu, u\rangle| \in \mathbb{R} : \ u \in C_0(I) \quad e \quad |u|_{\infty} = 1\};$$

(f) Uma sequência (μ_n) *converge fracamente para* μ *em* $\mathcal{M}(I)$, *e escrevemos* $\mu_n \rightharpoonup \mu$, *quando*

$$\langle \mu_n, u\rangle \to \langle \mu, u\rangle, \quad \forall u \in C_0(I).$$

Definição 10. *Seja* H *um espaço de Hilbert com produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. *Dizemos que* $\mathcal{H} \subset H$ *é um cone, se:*

$$u \in H \quad e \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in \mathcal{H}.$$

Segundo [51, Theorem 3.4], podemos obter uma decomposição de um espaço de Hilbert em termos de cone e seu cone dual. Essa decomposição é uma ferramenta bastante útil em problemas semilineares, como veremos na demonstração do Lema 19.

Teorema 3. *Seja* H *um espaço de Hilbert com produto interno* $\langle , \rangle_H$*. Seja* $\mathcal{H} \subset H$ *um cone convexo, fechado e não-vazio. Denotamos por* $\mathcal{H}^*$ *seu cone dual, isto é,*

$$\mathcal{H}^* = \{w \in H : \langle w, v \rangle_H \leqslant 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{H}\}.$$

Então, para qualquer $u \in H$ *existe um único par* $(u_1, u_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ *tal que*

$$u = u_1 + u_2 \quad e \quad \langle u_1, u_2 \rangle_H = 0.$$

Adicionalmente, $\|u\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$.

Uma versão do teorema do passo da montanha sem a condição de Palais-Smale foi estabelecida em [14, Teorema 2.2]. Esse resultado é uma boa alternativa para garantir a existência de pontos críticos para um certo funcional, como veremos na demonstração do Teorema 13.

Teorema 4. *Sejam* E *um espaço de Banach e* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$*. Suponha que exista uma vizinhança* U *de* 0 *em* E*, e uma constante* ρ *tal que* $I(u) \geqslant \rho$ *para todo* $u \in \partial U$ *(i.e.* u *pertencente a fronteira de* U*). Ainda, suponha que*

$$I(0) < \rho \quad e \quad I(v) < \rho \quad \textit{para algum } v \notin U.$$

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{w \in \gamma} I(w) \geqslant \rho,$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma : [0, t_0] \to E : \ \gamma \textit{ é contínuo}, \ \gamma(0) = 0 \ \textit{ e } \ \gamma(t_0) = v\}.$$

Então, existe uma sequencia (u_i) *em* E *tal que*

$$I(u_j) \to c \quad e \quad \langle I'(u_j), \varphi \rangle \to 0.$$

Capítulo 2

Espaço de Sobolev com peso $\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$

O objetivo deste capítulo é apresentar resultados em linha dos objetivos principais dessa tese descritos nos itens (a) e (b), veja a introdução. Inicialmente, definimos os espaços de Sobolev com peso $\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$ e exploramos suas propriedades. Nossa atenção está voltada para o caso $R = \infty$. O espaço $\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$ se mostra adequado para estender resultados clássicos para um parâmetro α não inteiro e funções radiais, como veremos no decorrer desse capítulo.

2.1 Imersão contínua, $\mathcal{D}_\infty^{m,p} \hookrightarrow L_\theta^{p^*}$

Sejam $p \geqslant 1$ e $\theta, \alpha_0, \alpha_1 > -1$ números reais e considere $p^* = (\theta+1)p/(\alpha_1 - p + 1)$ com

$$\alpha_1 - p + 1 > 0 \quad \text{e} \quad \min\{\theta, \alpha_0\} \geqslant \alpha_1 - p.$$

Para $0 < R < \infty$, usando uma desigualdade do tipo Hardy em [6], veja Proposição 1, Clément et al. [59, Proposição 1.1] provaram a imersão contínua

$$X_R^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1) \hookrightarrow L_\theta^q \ \text{ para cada } \ q \in (1, p^*]. \tag{2.1}$$

Além disso, (2.1) é uma imersão compacta, se $q < p^*$. Nesse sentido, dizemos que p^* representa o expoente crítico em $X_R^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$. Chamamos atenção ao fato de que nessas condições, pela observação 2 temos que qualquer uma das normas (1.5), (1.8) e (1.10) pode ser considerada no espaço $X_R^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$. Também, mencionamos que extensões de (2.1) para derivadas de ordem superior $m \geqslant 2$ podem ser encontradas em [42, Teorema 1.1] e [44, Teorema 1.1 -(a)]. Por outro lado, quando $R = \infty$, ainda por [6, p. 68], existe

$C > 0$ tal que

$$\left(\int_0^\infty |u|^{p^*} r^\theta \, dr\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C \left(\int_0^\infty |u'|^p r^{\alpha_1} \, dr\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in AC_R(0,\infty). \tag{2.2}$$

Com a norma padrão em (1.5) do espaço $X_\infty^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$, a desigualdade em (2.2) implica na imersão contínua $X_\infty^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1) \hookrightarrow L_\theta^{p^*}$. Em geral, neste caso não podemos definir (1.8) ou (1.10) como uma outra norma no espaço $X_\infty^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$. Por exemplo, para $p = 2$, $\alpha_0 = \alpha - 1$ e $\alpha_1 = \alpha > 1$, por um cálculo direto pode-se verificar que

$$\int_0^\infty |u|^2 r^{\alpha-1} \, dr = \infty \quad \text{e} \quad \int_0^\infty |u'|^2 r^{\alpha} \, dr < \infty,$$

onde $u(r) = (1 + r^2)^{-\alpha/4}$. Assim, para resolver esse problema vamos considerar uma nova classe de espaços $\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$ definido abaixo.

Definição 11. *Dados $m \in \mathbb{Z}_+^*$, $0 < R \leqslant \infty$, $p > 1$ e $\alpha > -1$, seja*

$$D_{0,R}(\alpha) = D_{0,R}(\alpha, m, p) := \{u \in AC_R^{m-1}(0,R) : \ u^{(m)} \in L_\alpha^p(0,R)\}.$$

O espaço de Sobolev com peso, denotado por $\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$, é definido pelo fecho de $D_{0,R}(\alpha)$ na norma $\|u^{(m)}\|_{L_\alpha^p}$.

No decorrer desse capítulo estaremos interessados na situação em que os parâmetros α, m e p satisfazem

$$\alpha - mp + 1 > 0.$$

Observamos que para $m = 1$, $\alpha = \alpha_1$ e $R = \infty$, a desigualdade em (2.2) implica na imersão contínua $\mathcal{D}_\infty^{1,p}(\alpha) \hookrightarrow L_\theta^{p^*}$.

Uma versão da desigualdade Sobolev para o espaço $\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$ será provada. Para $R < \infty$, esse resultado foi provado em [44, Teorema 1.1 -(a)]. Neste trabalho estendemos para $R = \infty$.

2.1.1 Propriedades

Com ajuda do Teorema 1 e Observação 1, fornecemos uma versão da desigualdade de Hardy com derivadas de ordem superior para o conjunto $AC_R^{m-1}(0,R)$. Essa desigualdade será bastante útil para estabelecer outras desigualdades no decorrer dessa tese. O caso $m = 1$ e $R = \infty$ foi estabelecido na desigualdade (2.2).

Proposição 6 (Desigualdade do tipo Hardy). *Sejam* $0 < R \leqslant \infty$, $p > 1$, $m \in \mathbb{Z}_+^*$ *e* $\gamma, \theta \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\gamma - mp + 1 \neq 0 \quad e \quad p^* = \frac{(\theta+1)p}{\gamma - mp + 1}.$$

(a) *Se* $\theta \geqslant \gamma - mp$ *e* $\gamma - mp + 1 > 0$*, então para toda* $u \in AC_R^{m-1}(0, R)$ *temos*

$$\left(\int_0^R |u(r)|^{p^*} r^\theta \, dr\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C \left(\int_0^R |u^{(m)}(r)|^p r^\gamma \, dr\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.3}$$

é verdadeira, para algum $C > 0$.

(b) *Se* $\theta \leqslant \gamma - mp$ *e* $\gamma - p + 1 < 0$*, então para toda* $u \in AC_L^{m-1}(0, R)$ *temos a desigualdade em* (2.3) *é verdadeira.*

Demonstração. Para provar item (a), assumimos que $\theta \geqslant \gamma - mp$ e $\gamma - mp + 1 > 0$. Note que $1 < p \leqslant p^*$. Escolhendo $z(r) = r^\theta$ e $v(r) = r^\gamma$ no Teorema 1, para completar a prova do item (a) basta verificar que $\mathcal{A} = \max\{\mathcal{A}_{m,0}, \mathcal{A}_{m,1}\} < \infty$, para cada $0 < R \leqslant \infty$. De fato, primeiro estimaremos $\mathcal{A}_{m,0}$. Note que, para qualquer $0 < r < t < R \leqslant \infty$ segue $(t-r)^{(m-1)p^*} \leqslant t^{(m-1)p^*}$. Por isso, para cada $0 < t < R$, temos

$$0 \leqslant \int_0^t (t-r)^{(m-1)p^*} r^\theta \, dr \leqslant t^{(m-1)p^*} \int_0^t r^\theta \, dr = \frac{1}{\theta+1} t^{(m-1)p^* + \theta + 1}.$$

Percebendo que $\gamma - p + 1 \geqslant \gamma - mp + 1 > 0$ e $\theta \geqslant \gamma - mp > -1$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left(\int_0^t (t-r)^{(m-1)p^*} r^\theta \, dr\right)^{\frac{1}{p^*}} \cdot \left(\int_t^R r^{-\frac{\gamma}{p-1}} \, dr\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{\theta+1} t^{(m-1)p^*+\theta+1}\right)^{\frac{1}{p^*}} \cdot \left(\int_t^R r^{-\frac{\gamma}{p-1}} \, dr\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \begin{cases} (\theta+1)^{-\frac{1}{p^*}} \left[\dfrac{p-1}{\gamma-p+1}\left(1 - \left(\dfrac{t}{R}\right)^{\frac{\gamma-p+1}{p-1}}\right)\right]^{\frac{p-1}{p}}, & \text{se } 0 < R < \infty \\ (\theta+1)^{-\frac{1}{p^*}} \left[\dfrac{p-1}{\gamma-p+1}\right]^{\frac{p-1}{p}}, & \text{se } R = \infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

onde usamos que $m + \frac{\theta+1}{p^*} = \frac{\gamma-p+1}{p} + 1$. Assim, para cada $0 < R \leqslant \infty$, obtemos

$$\mathcal{A}_{m,0} = \sup_{0<t<R} \left(\int_0^t (t-r)^{(m-1)p^*} r^\theta \, dr\right)^{\frac{1}{p^*}} \cdot \left(\int_t^R r^{-\frac{\gamma}{p-1}} \, dr\right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty.$$

Para estimar $\mathcal{A}_{m,1}$ procedemos de forma similar. Usando $(r-t)^{p(m-1)/(p-1)} \leqslant r^{p(m-1)/(p-1)}$, para cada $0 < t < r < R \leqslant \infty$, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left(\int_0^t r^\theta\, dr\right)^{\frac{1}{p^*}} \cdot \left(\int_t^R (r-t)^{\frac{p(m-1)}{p-1}} r^{-\frac{\gamma}{p-1}}\, dr\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leqslant \left[(\theta+1)^{-1} t^{\theta+1}\right]^{\frac{1}{p^*}} \cdot \left[\frac{p-1}{\gamma - mp + 1}\left(t^{-\frac{\gamma-mp+1}{p-1}} - R^{-\frac{\gamma-mp+1}{p-1}}\right)\right]^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \begin{cases} (\theta+1)^{-\frac{1}{p^*}} \left[\dfrac{p-1}{\gamma-mp+1}\left(1-\left(\dfrac{t}{R}\right)^{\frac{\gamma-mp+1}{p-1}}\right)\right]^{\frac{p-1}{p}}, & \text{se } 0 < R < \infty \\ (\theta+1)^{-\frac{1}{p^*}} \left[\dfrac{p-1}{\gamma-mp+1}\right]^{\frac{p-1}{p}}, & \text{se } R = \infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

onde usamos que $\frac{\theta+1}{p^*} = \frac{\gamma-mp+1}{p}$. Consequentemente, para cada $0 < R \leqslant \infty$ segue

$$\mathcal{A}_{m,1} = \sup_{t>0} \left(\int_0^t r^\theta\, dr\right)^{\frac{1}{p^*}} \cdot \left(\int_t^\infty (r-t)^{\frac{p(m-1)}{p-1}} r^{-\frac{\gamma}{p-1}}\, dr\right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty.$$

Analogamente mostra-se o item (b), levando em consideração a Observação 1. Assumimos que $\theta \leqslant \gamma - mp$ e $\gamma - p + 1 < 0$. Note que $1 < p \leqslant p^*$ e $\theta < -1$. Pelo Teorema 1 com $z(r) = r^\theta$ e $v(r) = r^\gamma$, para completar a prova do item (b) basta verificar que $\tilde{\mathcal{A}} = \max\{\tilde{\mathcal{A}}_{m,0}, \tilde{\mathcal{A}}_{m,1}\} < \infty$, para cada $0 < R \leqslant \infty$. Primeiro estimaremos $\tilde{\mathcal{A}}_{m,0}$. Note que, para qualquer $0 < t < r < R \leqslant \infty$ segue $(r-t)^{(m-1)p^*} \leqslant r^{(m-1)p^*}$. Por isso, para cada $0 < t < R$, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_t^R (r-t)^{(m-1)p^*} r^\theta\, dr \leqslant \int_t^R r^{\theta+(m-1)p^*}\, dr \\
&= -\frac{\gamma-mp+1}{(\theta+1)(\gamma-p+1)} \cdot \begin{cases} t^{\frac{(\theta+1)(\gamma-p+1)}{\gamma-mp+1}}\left(1-\left(\dfrac{R}{t}\right)^{\frac{(\theta+1)(\gamma-p+1)}{\gamma-mp+1}}\right), & \text{se } 0 < R < \infty \\ t^{\frac{(\theta+1)(\gamma-p+1)}{\gamma-mp+1}}, & \text{se } R = \infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

onde usamos que $\theta + (m-1)p^* + 1 = \frac{(\theta+1)(\gamma-p+1)}{\gamma-mp+1} < 0$. Isso implica que:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left(\int_t^R (r-t)^{(m-1)p^*} r^\theta\, dr\right)^{\frac{1}{p^*}} \cdot \left(\int_0^t r^{-\frac{\gamma}{p-1}}\, dr\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int_t^R (r-t)^{(m-1)p^*} r^\theta\, dr\right)^{\frac{1}{p^*}} \cdot \left[\frac{1-p}{\gamma-p+1} t^{-\frac{\gamma-p+1}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \begin{cases} \left(-\dfrac{\gamma-mp+1}{(\theta+1)(\gamma-p+1)}\right)^{-\frac{1}{p^*}} \left[\dfrac{1-p}{\gamma-p+1}\left(1-\left(\dfrac{R}{t}\right)^{\frac{(\theta+1)(\gamma-p+1)}{\gamma-mp+1}}\right)\right]^{\frac{p-1}{p}}, & \text{se } 0 < R < \infty \\ \left(-\dfrac{\gamma-mp+1}{(\theta+1)(\gamma-p+1)}\right)^{-\frac{1}{p^*}} \left[\dfrac{1-p}{\gamma-p+1}\right]^{\frac{p-1}{p}}, & \text{se } R = \infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

onde usamos que

$$\frac{(\theta+1)(\gamma-p+1)}{(\gamma-mp+1)p^*} = \frac{\gamma-p+1}{p}.$$

Assim, para cada $0 < R \leqslant \infty$, obtemos

$$\tilde{\mathcal{A}}_{m,0} = \sup_{0<t<R} \left(\int_t^R (r-t)^{(m-1)p^*} r^\theta \, dr \right)^{\frac{1}{p^*}} \cdot \left(\int_0^t r^{-\frac{\gamma}{p-1}} \, dr \right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty.$$

Para estimar $\tilde{\mathcal{A}}_{0,1}$ procedemos de modo similar. Usando $(t-r)^{\frac{p(m-1)}{p-1}} \leqslant t^{\frac{p(m-1)}{p-1}}$ para cada $0 < r < t < R \leqslant \infty$, obtemos

$$0 \leqslant \int_0^t (t-r)^{\frac{p(m-1)}{p-1}} r^{-\frac{\gamma}{p-1}} \, dr \leqslant t^{\frac{p(m-1)}{p-1}} \int_0^t r^{-\frac{\gamma}{p-1}} \, dr = \frac{1-p}{\gamma-p+1} t^{-\frac{\gamma-mp+1}{p-1}}.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left(\int_0^t (t-r)^{\frac{(m-1)p}{p-1}} r^{-\frac{\gamma}{p-1}} \, dr \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_t^R r^\theta \, dr \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leqslant \left(\frac{1-p}{\gamma-p+1} \right)^{\frac{p-1}{p}} t^{-\frac{\gamma-mp+1}{p}} \cdot \left(\int_t^R r^\theta \, dr \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \begin{cases} \left(\dfrac{1-p}{\gamma-p+1} \right)^{\frac{p-1}{p}} [-(1+\theta)]^{-\frac{1}{p^*}} \left(1 - \left(\dfrac{R}{t} \right)^{\theta+1} \right)^{\frac{1}{p^*}}, & \text{se } 0 < R < \infty \\ \left(\dfrac{1-p}{\gamma-p+1} \right)^{\frac{p-1}{p}} [-(1+\theta)]^{-\frac{1}{p^*}}, & \text{se } R = \infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

onde usamos que

$$\frac{\theta+1}{p^*} = \frac{\gamma-mp+1}{p}.$$

Portanto, para cada $0 < R \leqslant \infty$, obtemos

$$\tilde{\mathcal{A}}_{m,1} = \sup_{0<t<R} \left(\int_0^t (t-r)^{\frac{(m-1)p}{p-1}} r^{-\frac{\gamma}{p-1}} \, dr \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_t^R r^\theta \, dr \right)^{\frac{1}{p^*}} < \infty.$$

$\square$

O espaço $\mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha)$ é uma espaço de Banach, veja (2.5) abaixo.

Corolário 1. *Sejam* $p > 1$, $0 < R \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{Z}^*_+$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tais que* $\alpha - mp + 1 > 0$. *Então, para qualquer* $0 \leqslant \ell \leqslant m$ *existe* $C > 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^R |u^{(\ell)}(r)|^p r^{\alpha-(m-\ell)p} \, dr \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C \left(\int_0^R |u^{(m)}(r)|^p r^\alpha \, dr \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.4}$$

é verdadeira, para toda $u \in AC^{m-1}_R(0,R)$. *Adicionalmente, se* $\beta_\ell = \alpha - (m-\ell)p$ *então*

$$\mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha) = X^{m,p}_R(\beta_0, \cdots, \beta_m). \tag{2.5}$$

Demonstração. É claro que podemos assumir $0 \leqslant \ell < m$. Se $u \in AC_R^{m-1}(0,R)$, então $u^{(\ell)} \in AC_R^{m-\ell-1}(0,R)$. Note que

$$\alpha - (m-\ell)p + 1 \geqslant \alpha - mp + 1 > 0.$$

Usando (2.3) com $\theta = \alpha - (m-\ell)p$, $\gamma = \alpha$ e $AC_R^{m-\ell-1}(0,R)$, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_0^R |u^{(\ell)}(r)|^p r^{\alpha-(m-\ell)p}\, dr\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant C\left(\int_0^R |(u^{(\ell)})^{(m-\ell)}(r)|^p r^{\alpha}\, dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C\left(\int_0^R |u^{(m)}(r)|^p r^{\alpha}\, dr\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Isso prova (2.4). Portanto, para a escolha específica dos pesos $(\beta_0, \cdots, \beta_m)$, com $\beta_\ell = \alpha - (m-\ell)p$, (2.4) implica que $D_{0,R}(\alpha) \subset W_{0,R}(\beta_0, \cdots, \beta_m)$ para qualquer $0 < R \leqslant \infty$. A inclusão contraria é obvia, então

$$D_{0,R}(\alpha) = W_{0,R}(\beta_0, \cdots, \beta_m), \quad \text{para todo } \ 0 < R \leqslant \infty.$$

Além disso, por (2.4) podemos ver que a norma

$$\|u\|_{W_R^{m,p}} = \left(\sum_{\ell=0}^{m} \|u^{(\ell)}\|_{L^p_{\beta_\ell}}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

é equivalente a norma

$$\|u^{(m)}\|_{L^p_\alpha} = \left(\int_0^R |u^{(m)}(r)|^p r^{\alpha}\, dr\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daí, para qualquer $p > 1$, $m \in \mathbb{Z}_+^*$ e $\alpha > -1$ tal que $\alpha - mp + 1 > 0$ temos

$$\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha) = X_R^{m,p}(\beta_0, \cdots, \beta_m), \quad \text{para todo } \ 0 < R \leqslant \infty,$$

com $\beta_\ell = \alpha - (m-\ell)p$. $\square$

Corolário 2. *Sejam $0 < R \leqslant \infty$, $p > 1$, $m \in \mathbb{Z}_+^*$ e $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\theta \geqslant \alpha - mp \quad e \quad \alpha - mp + 1 > 0.$$

Então, existe $C > 0$ tal que

$$\left(\int_0^R |u(r)|^{p^*} r^{\theta}\, dr\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C\left(\int_0^R |u^{(m)}(r)|^p r^{\alpha}\, dr\right)^{\frac{1}{p}}, \quad com \ \ p^* = \frac{(\theta+1)p}{\alpha - mp + 1}$$

é verdadeira, para toda $u \in \mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$. Em particular, obtemos a imersão contínua

$$\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha) \hookrightarrow L_\theta^{p^*}. \tag{2.6}$$

Demonstração. Decorre imediatamente da Proposição 6-(a). $\square$

A existência de um operador extensão para derivadas de ordem superior $m \geqslant 2$ é provada abaixo, o caso $m = 1$ foi estabelecido em [23, Lemma 2.1].

Lema 6 (Teorema de Extensão)**.** *Sejam* $W_R^{m,p}(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ *e* $X_L^{m,p}(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, *com* $R, L > 0$, $p \geqslant 1$ *e* $m \in \mathbb{Z}_+^*$. *Se* $2R < L \leqslant \infty$, *então existe um operador linear de extensão* $T : W_R^{m,p} \to X_L^{m,p}$ *tal que*

(a) $Tu = u$ *em* $(0, R)$,

(b) *supp* $Tu \subseteq [0, 2R)$,

(c) $\|Tu\|_{W_L^{m,p}} \leqslant C\|u\|_{W_R^{m,p}}$, *para algum* $C = C(m, p, R, \alpha_0, \cdots, \alpha_m) > 0$.

Demonstração. Seja $\eta \in C_c^\infty[0, \infty)$ uma função auxiliar satisfazendo

$$\eta(r) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ 0 \leqslant r \leqslant \dfrac{R}{4} \\ 0 \leqslant \eta(r) \leqslant 1, & \text{se } \ \dfrac{R}{4} \leqslant r \leqslant \dfrac{3R}{4} \\ 0, & \text{se } \ r > \dfrac{3R}{4}. \end{cases}$$

Dada $u \in W_R^{m,p}$, definimos $v_1, v_2 : [0, L] \to \mathbb{R}$ por

$$v_1(r) = \begin{cases} \eta(r)u(r), & \text{se } \ 0 \leqslant r \leqslant R \\ 0, & \text{se } \ R < r \leqslant L \end{cases}$$

e

$$v_2(r) = \begin{cases} \big(1 - \eta(r)\big)u(r), & \text{se } \ 0 \leqslant r \leqslant R \\ \big(1 - \eta(2R - r)\big)u(2R - r), & \text{se } \ R < r \leqslant \dfrac{7R}{4} \\ 0, & \text{se } \ \dfrac{7R}{4} \leqslant r \leqslant L. \end{cases}$$

Para cada $l = 0, 1, \cdots, m$ vale

$$v_1^{(l)}(r) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \eta^{(j)}(r) u^{(l-j)}(r), & \text{se } \ 0 < r \leqslant R, \\ 0, & \text{se } \ R < r < L \end{cases}$$

e

$$v_2^{(l)}(r) = \begin{cases} (1-\eta(r))u^{(l)}(r) - \displaystyle\sum_{j=1}^{l} \binom{l}{j} \eta^{(j)}(r) u^{(l-j)}(r), & \text{se } 0 < r \leqslant R \\ \left. \begin{array}{l} (1-\eta(2R-r))u^{(l)}(2R-r) \\ - \displaystyle\sum_{j=1}^{l} \binom{l}{j} \eta^{(j)}(2R-r) u^{(l-j)}(2R-r) \end{array} \right\}, & \text{se } R < r \leqslant \dfrac{7R}{4}, \\ 0, & \text{se } \dfrac{7R}{4} \leqslant r < L. \end{cases}$$

Por isso, $v_1^{(m-1)}, v_2^{(m-1)} \in AC_{loc}[0, L]$, com $v_1^{(l)}(L) = v_2^{(l)}(L) = 0$, para $l = 0, 1, \cdots, m-1$. Então, definimos $T : W_R^{m,p} \to X_L^{m,p}$ por $Tu = v_1 + v_2$. É fácil verificar que T é um operador linear com $Tu = u$ em $(0, R)$ e $\operatorname{supp} Tu \subseteq [0, 2R)$ para qualquer $u \in W_R^{m,p}$. Prosseguimos para mostrar que o item (c) é válido. É claro,

$$\|Tu\|_{W_L^{m,p}} \leqslant \|v_1\|_{W_L^{m,p}} + \|v_2\|_{W_L^{m,p}}. \tag{2.7}$$

Afirmamos que existe $C = C(\alpha_0, \cdots, \alpha_m, m, p, R) > 0$ tal que

$$\max\{\|v_1\|_{W_L^{m,p}}, \|v_1\|_{W_L^{m,p}}\} \leqslant C\|u\|_{W_R^{m,p}}. \tag{2.8}$$

De fato, para qualquer $l = 0, 1, \cdots, m$, temos

$$|v_1^{(l)}|^p \leqslant 2^{lp} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} |\eta^{(j)}(r)|^p |u^{(l-j)}(r)|^p \quad \text{em} \quad (0, R).$$

Então,

$$\begin{aligned} \|v_1^{(l)}\|_{L^p_{\alpha_l}}^p &\leqslant 2^{lp} \int_0^R \left[\sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} |\eta^{(j)}(r)|^p |u^{(l-j)}(r)|^p r^{\alpha_l} \right] dr \\ &= 2^{lp} \left[\sum_{j=1}^{l} \binom{l}{j} \int_{\frac{R}{4}}^{R} r^{\alpha_l - \alpha_{l-j}} |\eta^{(j)}(r)|^p |u^{(l-j)}(r)|^p r^{\alpha_{l-j}} \, dr \right. \\ &\quad \left. + \int_0^R |\eta(r)|^p |u^{(l)}(r)|^p r^{\alpha_l} \, dr \right]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Para qualquer $j = 1, 2, \cdots, l$, a função $r \mapsto r^{\alpha_l - \alpha_{l-j}} |\eta^{(j)}(r)|^p$ é limitada em $[R/4, R]$. Portanto, combinamos esse fato com (2.9), temos

$$\|v_1^{(l)}\|_{L^p_{\alpha_l}}^p \leqslant C_l \|u\|_{W_R^{m,p}}^p, \tag{2.10}$$

para alguma constante $C_l = C_l(l, p, R, \alpha_0, \cdots, \alpha_l) > 0$. Usamos (2.10) e escolhemos $C = \max\{C_0, \cdots, C_m\}$, obtemos

$$\|v_1\|_{W_L^{m,p}}^p \leqslant C \|u\|_{W_R^{m,p}}^p. \tag{2.11}$$

Similarmente, para qualquer $l = 0, 1, \cdots, m$, vale

$$|v_2^{(l)}|^p \leqslant 2^{lp}\left[|1-\eta(r)||u^{(l)}(r)| + \sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}|\eta^{(j)}(r)||u^{(l-j)}(r)|\right] \quad \text{em} \quad (0, R)$$

e

$$\begin{aligned} |v_2^{(l)}|^p \leqslant 2^{lp}\Bigg[&|1-\eta(2R-r)||u^{(l)}(2R-r)| \\ &+ \sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}|\eta^{(j)}(2R-r)||u^{(l-j)}(2R-r)|\Bigg] \quad \text{em} \ (R, 7R/4). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Além disso, notamos que as funções

$$r \mapsto (2R-r)^{\alpha_l} r^{-\alpha_l} \quad \text{e} \quad r \mapsto |\eta^{(j)}(r)|^p (2R-r)^{\alpha_l} r^{-\alpha_{l-j}}$$

são limitadas em $[R/4, R]$, para $j = 1, 2, \cdots, l$. Portanto, combinamos esse fato com (2.12), obtemos

$$\|v_2\|^p_{W_L^{m,p}} \leqslant C\|u\|^p_{W_R^{m,p}}. \tag{2.13}$$

Finalmente, combinando (2.11) e (2.13), temos (2.8). Por (2.8) e (2.7), completamos a prova do item (c). □

Como aplicação do Lema 6 e Proposição 4, sob certas condições, podemos caracterizar o comportamento de qualquer $u \in \mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$ com $0 < R \leqslant \infty$ próximo de zero.

Lema 7. *Sejam* $u \in \mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$ *com* $0 < R \leqslant \infty$ *e* $\alpha - mp + 1 > 0$. *Para* $\theta > 0$ *tal que* $p\theta \geqslant \alpha - p + 1$, *temos*

$$\lim_{r\to 0} r^\theta u^{(j)}(r) = 0, \quad \forall j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Demonstração. Aplicamos o Corolário 1, com $\beta_\ell = \alpha - (m-\ell)p$, para deduzir que

$$\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha) = X_R^{m,p}(\beta_0, \cdots, \beta_m), \ \text{para} \ 0 < R \leqslant \infty.$$

Então, se $0 < R < \infty$, o resultado segue diretamente da Proposição 4. Agora, se $u \in \mathcal{D}_\infty^{m,p}(\alpha) = X_\infty^{m,p}(\beta_0, \cdots, \beta_m)$, então $u \in W_S^{m,p}(\beta_0, \cdots, \beta_m)$, para qualquer $0 < S < \infty$. Pelo Lema 6, existe operador linear de extensão

$$T : W_S^{m,p}(\beta_0, \cdots, \beta_m) \to X_L^{m,p}(\beta_0, \cdots, \beta_m)$$

tal que $Tu = u$ em $(0, S)$, desde que $2S < L < \infty$. Desde que $Tu \in X_L^{m,p}(\beta_0, \cdots, \beta_m)$ estamos nas condições de aplicar a Proposição 4 para obter

$$\lim_{r\to 0} r^\theta u^{(j)}(r) = \lim_{r\to 0} r^\theta (Tu)^{(j)}(r) = 0, \quad \text{para} \ j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

□

O Lema 8 e o Lema 9 abaixo estendem os [44, Lemma 4.2, Lemma 4.3], quando $R = \infty$. Por completeza, apresentamos as provas que são similares em [44].

Lema 8. *Sejam* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < R \leqslant \infty$ *e* $k \in \mathbb{Z}_+^*$. *Então existem constantes reais* $c_1, \cdots, c_{2k-1}$ *e* $d_1, \cdots, d_{2k}$ *tais que*

$$\Delta_\alpha^k u = u^{(2k)} + \sum_{i=1}^{2k-1} c_i \frac{u^{(2k-i)}}{r^i}, \quad \forall u \in AC_{loc}^{2k-1}(0, R) \tag{2.14}$$

e

$$[\Delta_\alpha^k u]' = u^{(2k+1)} + \sum_{i=1}^{2k} d_i \frac{u^{(2k+1-i)}}{r^i}, \quad \forall u \in AC_{loc}^{2k}(0, R). \tag{2.15}$$

Em particular, para cada $u \in AC_{loc}^{m-1}(0, R)$ *existem* $C_i \in \mathbb{R}$ *satisfazendo*

$$\nabla_\alpha^m u = u^{(m)} + \sum_{i=1}^{m-1} C_i \frac{u^{(m-i)}}{r^i}.$$

Demonstração. Primeiro, suponha que $m = 2k$. A demonstração será por indução em k. Para $k = 1$, note que $\Delta_\alpha u = u'' + \frac{\alpha}{r} u'$ satisfaz (2.14). Assuma que (2.14) vale para k, isto é, (2.14) vale para toda $u \in AC_{loc}^{2k-1}(0, R)$. Seja $u \in AC_{loc}^{2k+1}(0, R)$. Aplicando a hipótese de indução em u e derivando, obtemos

$$[\Delta_\alpha^k u]' = u^{(2k+1)} + \sum_{i=1}^{2k} d_i \frac{u^{(2k+1-i)}}{r^i}. \tag{2.16}$$

Derivando (2.16), obtemos

$$[\Delta_\alpha^k u]'' = u^{(2k+2)} + \sum_{i=1}^{2k+1} e_i \frac{u^{(2k+2-i)}}{r^i}. \tag{2.17}$$

Por outro lado, observe que

$$\Delta_\alpha^{k+1} u = \Delta_\alpha(\Delta_\alpha^k u) = [\Delta_\alpha^k u]'' + \frac{\alpha}{r}[\Delta_\alpha^k u]'. \tag{2.18}$$

Substituindo (2.16) e (2.17) em (2.18), concluímos que $\Delta_\alpha^{k+1} u$ satisfaz (2.14). Para $m = 2k + 1$ a demonstração é similar. □

Corolário 3. *Sejam* $0 < R \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+^*$ *e* $\alpha > 0$. *Se* $0 \leqslant l < m/2$, *então*

$$\lim_{r \to R} (\Delta_\alpha^l u)(r) = 0, \quad \forall\, u \in AC_R^{m-1}(0, R). \tag{2.19}$$

Demonstração. É claro que o resultado vale para $l = 0$. Seja $1 \leqslant l < m/2$ um número inteiro. Analisamos dois casos. Primeiro, para $m = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$, então $u \in AC_R^{m-1}(0, R)$

que implica $u \in AC_{loc}^{2k-1}(0,R)$ e $\lim_{r\to R} u^{(j)}(r) = 0$ para todo $0 \leqslant j \leqslant 2k-1$. Então, $u \in AC_{loc}^{2l-1}(0,R)$ e $\lim_{r\to R} u^{(j)}(r) = 0$ para todo $0 \leqslant j \leqslant 2l \leqslant 2k-1$. Assim, a expansão (2.14) implica em (2.19). Analogamente, para $m = 2k+1$, com $k \in \mathbb{N}$, então $u \in AC_R^{m-1}(0,R)$ que garante $u \in AC_{loc}^{2k}(0,R)$ e $\lim_{r\to R} u^{(j)}(r) = 0$ para todo $0 \leqslant j \leqslant 2k$. Disso, $u \in AC_{loc}^{2l-1}(0,R)$ e $\lim_{r\to R} u^{(j)}(r) = 0$ para todo $0 \leqslant j \leqslant 2l \leqslant 2k$ e mais uma vez o resultado decorre de (2.14). □

Corolário 4. *Sejam* $u \in D_{0,R}(\alpha, m, p)$, $0 < R \leqslant \infty$, $p \geqslant 2$ *e* $\alpha - mp + 1 > 0$. *Se* $0 \leqslant l < m/2$, *então*

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha}(\Delta_\alpha^l u)(r) = 0 \ \ e \ \ \lim_{r\to 0} r^{\alpha}(\Delta_\alpha^l u)'(r) = 0. \tag{2.20}$$

Demonstração. Note que $\alpha p \geqslant \alpha - p + 1$. Então, o Corolário 7 implica em (2.20) para $l = 0$. Seja $l \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leqslant l < m/2$. Primeiro, $u \in D_{0,R}(\alpha, m, p)$ implica $u \in AC_R^{m-1}(0,R)$ e, portanto, $u \in AC_R^{2l}(0,R)$ desde que $2l \leqslant m-1$. Assim, o primeiro limite em (2.20) segue da expansão em (2.14). De fato, é suficiente mostrar que

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha-i} u^{(2l-i)}(r) = 0, \ \text{para todo } i = 0, 1, \cdots, 2l-1. \tag{2.21}$$

Para obter (2.21), usaremos o Corolário 7. Note que $2l < m$, $p > 1$ e $\alpha - mp + 1 > 0$ assegura

$$\begin{aligned} \theta_i := \alpha - i &\geqslant \alpha - (2l-1) = \alpha - 2l + 1 \\ &\geqslant \alpha - m + 1 \geqslant \alpha - mp + 1 > 0 \end{aligned}$$

para todo $i = 0, 1, \cdots, 2l-1$. Além disso, usamos $\alpha - i \geqslant \alpha - m + 1$, $mp < \alpha + 1$ e $p \geqslant 2$ para deduzir que

$$\begin{aligned} \theta_i p = (\alpha - i)p &\geqslant (\alpha - m + 1)p \\ &= (\alpha+1)p - mp \\ &> (\alpha+1)p - (\alpha+1) \\ &= (\alpha+1)(p-1) \\ &\geqslant \alpha + 1 > \alpha - p + 1. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Portanto, podemos aplicar o Lema 7 com $\theta_i = \alpha - i > 0$ para concluir (2.21). Analogamente, o segundo limite em (2.20) segue de (2.15), se mostramos que

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha-i} u^{(2l+1-i)}(r) = 0, \ \text{para todo } i = 0, 1, \cdots, 2l. \tag{2.23}$$

Para provar (2.23) argumentamos de forma similar como em (2.21). Primeiro, para $p > 1$

$$\alpha - i \geqslant \alpha - 2l \geqslant \alpha - m + 1 \geqslant \alpha - mp + 1 > 0.$$

Por isso, argumentando como em (2.22), ainda obtemos

$$(\alpha - i)p > \alpha - p + 1.$$

Novamente, aplicamos o Lema 7 para deduzir (2.23). □

Corolário 5. *Sejam $0 < R \leqslant \infty$, $p > 1$, $\alpha > -1$ e $m \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $\alpha - mp + 1 > 0$. Então,*

$$\|\nabla_\alpha^m u\|_{L_\alpha^p} \leqslant C\|u^{(m)}\|_{L_\alpha^p}, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha) \tag{2.24}$$

para algum $C > 0$.

Demonstração. Seja $u \in D_{0,R}(\alpha, m, p)$. De (2.4) existe $C > 0$ (não dependente de u) satisfazendo

$$\left\| \frac{u^{(\ell)}}{r^{m-\ell}} \right\|_{L_\alpha^p} \leqslant C \left\| u^{(m)} \right\|_{L_\alpha^p}, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant m. \tag{2.25}$$

Por isso, quando m é número par temos que (2.24) segue de (2.14) e (2.25), e quando m é número ímpar temos que (2.24) segue de (2.15) e (2.25). □

Lema 9. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < R \leqslant \infty$ e $k \in \mathbb{Z}_+^*$. Então existem constantes reais $c_1, \cdots, c_{2k-1} \in \mathbb{R}$ e $d_1, \cdots, d_{2k} \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\Delta_\alpha^k u = u^{(2k)} + \sum_{i=1}^{k} c_{2i-1} \frac{(\Delta_\alpha^{k-i} u)'}{r^{2i-1}} + \sum_{i=1}^{k-1} c_{2i} \frac{\Delta_\alpha^{k-i} u}{r^{2i}}, \quad u \in AC_{loc}^{2k-1}(0, R) \tag{2.26}$$

e

$$[\Delta_\alpha^k u]' = u^{(2k+1)} + \sum_{i=1}^{k} d_{2i-1} \frac{\Delta_\alpha^{k-(i-1)} u}{r^{2i-1}} + \sum_{i=1}^{k} d_{2i} \frac{(\Delta_\alpha^{k-i} u)'}{r^{2i}}, \quad u \in AC_{loc}^{2k}(0, R). \tag{2.27}$$

Demonstração. Primeiro, provaremos que, se $u \in AC_{loc}^{2l+1}(0, R)$, então existem constantes $a_1, \cdots, a_{2l+1} \in \mathbb{R}$ dependendo apenas de α e l tais que

$$[\Delta_\alpha^l u]'' = u^{(2l+2)} + a_1 \frac{(\Delta_\alpha^l u)'}{r} + a_2 \frac{\Delta_\alpha^l u}{r^2} + \cdots + a_{2l+1} \frac{(\Delta_\alpha^0 u)'}{r^{2l+1}}. \tag{2.28}$$

A demonstração será por indução em l. Para $l = 1$, como $\Delta_\alpha u = u'' + \frac{\alpha}{r} u'$, logo

$$[\Delta_\alpha u]' = u^{(3)} + \frac{\alpha}{r}(\Delta_\alpha u) - \frac{\alpha^2 + \alpha}{r^2} u'.$$

Daí,

$$[\Delta_\alpha u]'' = u^{(4)} + \frac{\alpha}{r}(\Delta_\alpha u)' - \frac{\alpha^2+2\alpha}{r^2}(\Delta_\alpha u) + \frac{\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha}{r^3}u'$$

satisfaz (2.28). Assuma que (2.28) vale para l. Seja $u \in AC_{loc}^{2l+3}(0,R)$. Aplicando a hipótese de indução em u, obtemos

$$[\Delta_\alpha^l u]'' = u^{(2l+2)} + a_1\frac{(\Delta_\alpha^l u)'}{r} + a_2\frac{\Delta_\alpha^l u}{r^2} + \cdots + a_{2l+1}\frac{(\Delta_\alpha^0 u)'}{r^{2l+1}}. \tag{2.29}$$

Por outro lado,

$$\Delta_\alpha^{l+1}u = [\Delta_\alpha^l u]'' + \frac{\alpha}{r}[\Delta_\alpha^l u]'. \tag{2.30}$$

Substituindo (2.29) em (2.30), obtemos

$$\Delta_\alpha^{l+1}u = u^{(2l+2)} + f_1\frac{(\Delta_\alpha^l u)'}{r} + f_2\frac{\Delta_\alpha^l u}{r^2} + \cdots + f_{2l+1}\frac{(\Delta_\alpha^0 u)'}{r^{2l+1}}, \tag{2.31}$$

para algumas constantes $f_1, \cdots, f_{2l+1}$. Observe que,

$$[\Delta_\alpha^m u]'' = \Delta_\alpha^{m+1}u - \frac{\alpha}{r}[\Delta_\alpha^m u]', \ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2.32}$$

Derivando (2.31) e usando (2.32), obtemos

$$[\Delta_\alpha^{l+1}u]' = u^{(2l+3)} + g_1\frac{\Delta_\alpha^{l+1}u}{r} + g_2\frac{(\Delta_\alpha^l u)'}{r^2} + g_3\frac{\Delta_\alpha^l u}{r^3}\cdots + g_{2l+2}\frac{(\Delta_\alpha^0 u)'}{r^{2l+2}},$$

para algumas constantes $g_1, \cdots, g_{2l+2}$. Derivando a expressão acima e usando (2.32), obtemos

$$[\Delta_\alpha^{l+1}u]'' = u^{(2l+4)} + h_1\frac{(\Delta_\alpha^{l+1}u)'}{r} + h_2\frac{\Delta_\alpha^{l+1}u}{r^2} + h_3\frac{(\Delta_\alpha^l u)'}{r^3} + \cdots + h_{2l+3}\frac{(\Delta_\alpha^0 u)'}{r^{2l+3}},$$

para algumas constantes $h_1, \cdots, h_{2l+3}$. Isso prova (2.28) para $l+1$.

Agora, combinando $\Delta_\alpha^k u = [\Delta_\alpha^{k-1}u]'' + \frac{\alpha}{r}[\Delta_\alpha^{k-1}u]'$ e (2.28), obtemos (2.26). Além disso, combinando (2.26) e (2.32), obtemos (2.27). □

Com ajuda da Proposição 6 estendemos o [44, Lemma 4.5] para $\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$ com $0 < R \leqslant \infty$.

Lema 10. *Sejam* $0 < R \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+^*$, $p \geqslant 2$ *e* $\alpha > 0$ *tal que* $\alpha - mp + 1 > 0$. *Então*

(a) *Se* m *é par, existe* $c > 0$ *tal que para cada* $1 \leqslant l \leqslant m/2$ *e* $u \in \mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$

(i) $\left\| \dfrac{(\Delta_\alpha^{\frac{m}{2}-l}u)'}{r^{2l-1}} \right\|_{L_\alpha^p} \leqslant c\|\nabla_\alpha^m u\|_{L_\alpha^p}$

(ii) $$\left\| \frac{\Delta_\alpha^{\frac{m}{2}-l} u}{r^{2l}} \right\|_{L^p_\alpha} \leqslant c\|\nabla^m_\alpha u\|_{L^p_\alpha}.$$

(b) *Se* m *é ímpar, existe* $c > 0$ *tal que para cada* $1 \leqslant l \leqslant (m-1)/2$ *e* $u \in \mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha)$

(i) $$\left\| \frac{\Delta_\alpha^{\frac{m-1}{2}-(l-1)} u}{r^{2l-1}} \right\|_{L^p_\alpha} \leqslant c\|\nabla^m_\alpha u\|_{L^p_\alpha}$$

(ii) $$\left\| \frac{(\Delta_\alpha^{\frac{m-1}{2}-l} u)'}{r^{2l}} \right\|_{L^p_\alpha} \leqslant c\|\nabla^m_\alpha u\|_{L^p_\alpha}.$$

Demonstração. (a)-(i) Assume $m = 2k$ com $k \in \mathbb{N}$. Primeiro, observemos

$$\alpha - p\alpha - p + 1 = (\alpha+1)(1-p) < 0.$$

Assim, por (2.20) temos $r^\alpha(\Delta_\alpha^{k-1}u)' \in AC^0_L(0,R)$, podemos aplicar a Proposição 6-(b) escolhendo $m = 1$, $\theta = \alpha - p\alpha - p$ e $\gamma = \theta + p$ para obter

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(\Delta_\alpha^{k-1}u)'}{r} \right\|^p_{L^p_\alpha} &= \int_0^R |r^\alpha(\Delta_\alpha^{k-1}u)'|^p r^{\alpha-p\alpha-p}\,dr \\ &\leqslant C_1 \int_0^R \left|\left(r^\alpha(\Delta_\alpha^{k-1}u)'\right)'\right|^p r^{\alpha-p\alpha}\,dr \\ &= C_1 \int_0^R |\Delta_\alpha^k u|^p r^\alpha\,dr, \end{aligned} \tag{2.33}$$

que prova (a)-(i) para $l = 1$. Suponha que $2 \leqslant l \leqslant k$. Nesse caso, precisamos de pelo menos duas etapas. De fato, para qualquer $j \in \{2, \cdots, k\}$ vale

$$\alpha - p\alpha - 2pj + p + 1 = (\alpha+1)(1-p) - 2p(j-1) < 0.$$

Por (2.20) temos $r^\alpha(\Delta_\alpha^{k-j}u)' \in AC^0_L(0,R)$. Então, podemos aplicar a Proposição 6-(b) escolhendo $m = 1$, $\theta = \alpha - p\alpha - 2pj + p$ e $\gamma = \theta + p$ para obter

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(\Delta_\alpha^{k-j}u)'}{r^{2j-1}} \right\|^p_{L^p_\alpha} &= \int_0^R |r^\alpha(\Delta_\alpha^{k-j}u)'|^p r^{\alpha-p\alpha-2pj+p}\,dr \\ &\leqslant c_1 \int_0^R \left|\left(r^\alpha(\Delta_\alpha^{k-j}u)'\right)'\right|^p r^{\alpha-p\alpha-2pj+2p}\,dr \\ &= c_1 \int_0^R |\Delta_\alpha^{k-(j-1)}u|^p r^{\alpha-2p(j-1)}\,dr. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Também, desde $\alpha - 2kp + 1 > 0$ temos $\alpha - 2p(j-1) + 1 = \alpha - 2pj + 1 + 2p > 0$. Ademais, pelo Corolário 3 temos $\Delta_\alpha^{k-(j-1)}u \in AC^0_R(0,R)$ para $j \geqslant 2$. Então, usamos a Proposição 6-(a) com $m = 1$, $\theta = \gamma - 2p(j-1)$ e $\gamma = \theta + p$ para deduzir

$$\int_0^R |\Delta_\alpha^{k-(j-1)}u|^p r^{\alpha-2p(j-1)}\,dr \;\leqslant\; c_2 \int_0^R |(\Delta_\alpha^{k-(j-1)}u)'|^p r^{\alpha-2p(j-1)+p}\,dr. \tag{2.35}$$

Das estimativas (2.34) e (2.35), existe uma constante $C = C_j > 0$ tal que

$$\left\| \frac{(\Delta_\alpha^{k-j} u)'}{r^{2j-1}} \right\|_{L^p_\alpha}^p \leqslant C_j \left\| \frac{(\Delta_\alpha^{k-(j-1)} u)'}{r^{2(j-1)-1}} \right\|_{L^p_\alpha}^p, \quad j = 2, \cdots, k. \tag{2.36}$$

Para cada $2 \leqslant l \leqslant k$, usamos sucessivamente a estimativa (2.36), obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(\Delta_\alpha^{k-l} u)'}{r^{2l-1}} \right\|_{L^p_\alpha}^p &\leqslant C_l \left\| \frac{(\Delta_\alpha^{k-(l-1)} u)'}{r^{2(l-1)-1}} \right\|_{L^p_\alpha}^p \\ &\leqslant C_l C_{l-1} \left\| \frac{(\Delta_\alpha^{k-(l-2)} u)'}{r^{2(l-2)-1}} \right\|_{L^p_\alpha}^p \\ &\leqslant C_l C_{l-1} C_{l-2} \left\| \frac{(\Delta_\alpha^{k-(l-3)} u)'}{r^{2(l-3)-1}} \right\|_{L^p_\alpha}^p \\ &\leqslant C_l C_{l-1} C_{l-2} \cdots C_4 C_3 C_2 \left\| \frac{(\Delta_\alpha^{k-1} u)'}{r} \right\|_{L^p_\alpha}^p. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Portanto, as estimativas (2.33) e (2.37) assegura (a)-(i). Para provar o item (a)-(ii), procedemos por argumento similar. Aqui, para qualquer $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ temos $\alpha - 2pj + 1 \geqslant \alpha - 2pk + 1 > 0$ e, por (2.19) obtemos $\Delta_\alpha^{k-j} u \in AC^0_R(0, R)$. Por isso, a Proposição 6-(a) com $m = 1$, $\theta = \alpha - 2pj$ e $\gamma = \theta + p$ implica

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Delta_\alpha^{k-j} u}{r^{2j}} \right\|_{L^p_\alpha}^p &= \int_0^R |\Delta_\alpha^{k-j} u|^p r^{\alpha - 2pj} dr \leqslant c_1 \int_0^R |(\Delta_\alpha^{k-j} u)'|^p r^{\alpha - 2pj + p} dr \\ &= c_1 \int_0^R |r^\alpha (\Delta_\alpha^{k-j} u)'|^p r^{\alpha - p\alpha - 2pj + p} dr. \end{aligned}$$

Ademais, temos $\alpha - p\alpha - 2pj + p + 1 = (\alpha+1)(1-p) - 2p(j-1) < 0$ e, por (2.20) obtemos $r^\alpha (\Delta_\alpha^{k-j} u)' \in AC^0_L(0, R)$. Assim, a Proposição 6-$(b)$ com $m = 1$, $\theta = \alpha - p\alpha - 2pj + p$ e $\gamma = \theta + p$ junto com a desigualdade acima garante a existência de $C = C_j > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\Delta_\alpha^{k-j} u}{r^{2j}} \right\|_{L^p_\alpha}^p \leqslant C_j \left\| \frac{\Delta_\alpha^{k-(j-1)} u}{r^{2(j-1)}} \right\|_{L^p_\alpha}^p.$$

Ao iterar a estimativa acima, podemos assegurar que (a)-(ii) vale para cada $1 \leqslant l \leqslant k$. Por argumento similar o item (b) é válido. □

2.1.2 Desigualdade Sobolev para $\mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha)$

Proposição 7. *Sejam* $0 < R \leqslant \infty$, $\alpha > 0$, $p \geqslant 2$ *e* $m \in \mathbb{Z}^*_+$ *tal que* $\alpha - mp + 1 > 0$. *Então, as normas* $\|\cdot\|_{\nabla^m_\alpha}$ *e* $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha)}$ *são equivalentes em* $\mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha)$, *onde denotamos por* $\|u\|_{\nabla^m_\alpha} = \|\nabla^m_\alpha u\|_{L^p_\alpha}$ *e* $\|u\|_{\mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha)} := \|u^{(m)}\|_{L^p_\alpha}$.

Demonstração. È suficiente mostrar que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$C_1\|u^{(m)}\|_{L^p_\alpha} \leqslant \|\nabla^m_\alpha u\|_{L^p_\alpha} \leqslant C_2\|u^{(m)}\|_{L^p_\alpha}, \quad \forall u \in \mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha). \tag{2.38}$$

De fato, pelo Corolário 5 segue a existência de $C_2 > 0$. Por outro lado, para obter $C_1 > 0$, combinaremos o Lema 10 com as expansões em (2.26) e (2.27). Com efeito, se $m = 2k$ com $k \in \mathbb{N}$, por (2.26) temos

$$\begin{aligned}
\|u^{(m)}\|_{L^p_\alpha} \leqslant\ & \|\Delta^k_\alpha u\|_{L^p_\alpha} + c_1\left\|\frac{(\Delta^{k-1}_\alpha u)'}{r}\right\|_{L^p_\alpha} + c_2\left\|\frac{\Delta^{k-1}_\alpha u}{r^2}\right\|_{L^p_\alpha} + \cdots \\
+\ & c_{2k-3}\left\|\frac{(\Delta_\alpha u)'}{r^{2k-3}}\right\|_{L^p_\alpha} + c_{2k-2}\left\|\frac{\Delta_\alpha u}{r^{2k-2}}\right\|_{L^p_\alpha} + c_{2k-1}\left\|\frac{(\Delta^0_\alpha u)'}{r^{2k-1}}\right\|_{L^p_\alpha}.
\end{aligned}$$

Então, o Lema 10 item (a) assegura a existência de $C_1 > 0$. Analogamente, se $m = 2k+1$ com $k \in \mathbb{N}$, por (2.27) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u^{(m)}\|_{L^p_\alpha} \leqslant\ & \|(\Delta^k_\alpha u)'\|_{L^p_\alpha} + d_1\left\|\frac{\Delta^k_\alpha u}{r}\right\|_{L^p_\alpha} + d_2\left\|\frac{(\Delta^{k-1}_\alpha u)'}{r^2}\right\|_{L^p_\alpha} + \cdots \\
+\ & d_{2k-1}\left\|\frac{\Delta_\alpha u}{r^{2k-1}}\right\|_{L^p_\alpha} + d_{2k}\left\|\frac{(\Delta^0_\alpha u)'}{r^{2k}}\right\|_{L^p_\alpha}
\end{aligned}$$

e a existência de $C_1 > 0$ é assegurada pelo Lema 10 item (b). □

Fornecemos uma versão da desigualdade Sobolev para o espaço $\mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha)$.

Teorema 5 (Desigualdade do Tipo Sobolev)**.** *Sejam* $p \geqslant 2$, $\theta, \alpha > -1$, $0 < R \leqslant \infty$ *e* $m \in \mathbb{Z}^*_+$ *tais que*

$$\theta \geqslant \alpha - mp, \quad \alpha - mp + 1 > 0 \quad e \quad p^* = \frac{(\theta+1)p}{\alpha - mp + 1}.$$

Então, existe $C > 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^R |u(r)|^{p^*} r^\theta\, dr\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C\left(\int_0^R |\nabla^m_\alpha u(r)|^p r^\alpha\, dr\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha). \tag{2.39}$$

Consequentemente, $\mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha) \hookrightarrow L^{p^*}_\theta$ *é uma imersão contínua.*

Demonstração. Pelo Corolário 2 e Proposição 7 segue a desigualdade em (2.39). □

Quando $R = \infty$, mencionamos que a imersão contínua no Teorema 5 estende (4) para dimensões não inteiras α, restrita as funções radialmente simétricas.

2.1.3 Relação entres os espaços de Sobolev com pesos

Afim de sintetizar alguns resultados da literatura, exploramos quais são as relações entre os espaços estudados. Inicialmente, é claro que $X_R^{m,p}(\alpha_0, \cdots, \alpha_m) \subset W_R^{m,p}(\alpha_0, \cdots, \alpha_m)$ e $X_R^{m,p}(\alpha_0, \cdots, \alpha_m) \subset \mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha_m)$, para qualquer $R \in (0, \infty]$. Agora, analisamos dois casos. Primeiro, para $0 < R < \infty$, as normas (1.5), (1.8) e (1.10) no espaço $X_R^{m,p}$ são equivalentes entre si, sob a condição de transição (1.7). Então, $X_R^{m,p}(\alpha_0, \cdots, \alpha_m) = \mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha_m)$. Para $R = \infty$, assumindo a condição de translação (1.7), o Lema 5 implica que $X_\infty^{m,p} = W_\infty^{m,p}$. Adicionalmente, pelo Corolário 1 resulta que $X_\infty^{m,p}(\alpha_0, \cdots, \alpha_m) = \mathcal{D}_\infty^{m,p}(\alpha_m)$ para a escolha $\alpha_\ell = \alpha_m - (m - \ell)p$. Por fim, chamamos atenção que a inclusão $\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha) \subset X_R^{m,p}(\alpha_0, \cdots, \alpha_m)$ não acontece em geral. Por exemplo, por um cálculo direto podemos verificar que a função $u(r) = (1+r^2)^{-\alpha/4}$ com $\alpha > 1$ pertence a $\mathcal{D}_\infty^{1,2}(\alpha)$, mas não pertence a $X_\infty^{1,2}(\alpha - 1, \alpha)$. Isso implica na seguinte inclusão estrita $X_\infty^{1,2}(\alpha - 1, \alpha) \subsetneq \mathcal{D}_\infty^{1,2}(\alpha)$.

Para simplificar, apresentamos uma tabela com a relação entre os espaços $X_R^{m,p}(\alpha_0, \cdots, \alpha_m)$, $W_R^{m,p}(\alpha_0, \cdots, \alpha_m)$ e $\mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha_m)$.

$R > 0$	$\alpha_0, \cdots, \alpha_m$	relação
arbitrário	arbitrário	$X_R^{m,p} \subset \mathcal{D}_R^{m,p}$ $X_R^{m,p} \subset W_R^{m,p}$
$0 < R < \infty$	$\alpha_{j-1} \geqslant \alpha_j - p$	$X_R^{m,p} = \mathcal{D}_R^{m,p}$
$R = \infty$	$\alpha_{j-1} \geqslant \alpha_j - p$ $\alpha_j = \alpha_m - (m-j)p$ e $\alpha_m - mp + 1 > 0$	$W_\infty^{m,p} = X_\infty^{m,p} \subset \mathcal{D}_\infty^{m,p}$ $W_\infty^{m,p} = X_\infty^{m,p} = \mathcal{D}_\infty^{m,p}$

Tabela 2.1: Relação entre os espaços

Capítulo 3

O problema extremal

Nesse capítulo, vamos apresentar resultados na direção dos objetivos principais dessa tese descritos no item (c), veja a introdução. Para isso, investigaremos o problema extremal relacionado a (2.39). A existência de minimizante será provada no Teorema 6. Como aplicação, no Corolário 6 provaremos a existência de solução fraca para uma classe geral de equações elípticas com crescimento crítico.

3.1 Ínfimo $\mathcal{S}$

Assumimos que m, α, θ, R e p estão nas condições do Teorema 5. Naturalmente, é interessante estudar o problema variacional associado a (2.39). Assim, seja $0 < R \leqslant \infty$, definimos

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(m, p, \alpha, \theta, R) := \inf \left\{ \|\nabla_\alpha^m u\|_{L_\alpha^p}^p \quad : \quad u \in \mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha) \quad \text{e} \quad \|u\|_{L_\theta^{p^*}} = 1 \right\}. \tag{3.1}$$

Note que $\mathcal{S}$ é bem definido e positivo, devido (2.39). Dizemos que $\mathcal{S}^{-\frac{1}{p}}$ é a *melhor constante* para a imersão do tipo Sobolev (2.39). Na mesma direção do problema de minimização acima, outras questões tem aparecido no cálculo variacional, e vem sendo pesquisada por vários autores, veja [47, 51, 68, 69, 72] e suas referencias.

Nesta seção, provaremos que $\mathcal{S}(m, 2, \alpha, \theta, \infty)$ é atingido. Para isso, é necessário estabelecer um Lema de concentração e compacidade para $\mathcal{D}_\infty^{m,2}(\alpha)$, veja o Lema 13 mais adiante.

3.1.1 Lema de concentração e compacidade

Nos trabalhos clássicos [57] e [58] devido a P. L. Lions, foi apresentado o método *Princípio da Concentração e Compacidade*. Esse método permite abordar problemas variacionais na qual a perda de compacidade ocorre na presença do expoente crítico e domínios ilimitados. Nessa subseção, iremos provar o Lema 13 que é uma versão desse princípio para o espaço $\mathcal{D}_R^{m,2}(\alpha)$.

Primeiro, vamos mostrar uma propriedade da constante $\mathcal{S}$, veja [59] para o caso $m = 1$.

Lema 11 (Invariância por dilatação). *Sejam* $0 < R \leqslant \infty$, $u \in \mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$ *e* $\epsilon > 0$. *Para cada* $\epsilon > 0$, *definimos a dilatação*

$$u_\epsilon(r) = \epsilon^{-\beta} u(\epsilon^{-1} r), \quad \textit{com} \ \ 0 < r \leqslant \epsilon R.$$

Se $\beta = (\theta + 1)/p^*$, *então* $u_\epsilon \in \mathcal{D}_{\epsilon R}^{m,p}(\alpha)$ *e temos*

(a) $\displaystyle\int_0^{\epsilon R} |u_\epsilon(r)|^{p^*} r^\theta dr = \int_0^R |u(r)|^{p^*} r^\theta dr;$

(b) $\displaystyle\int_0^{\epsilon R} |\nabla_\alpha^m u_\epsilon|^p r^\alpha dr = \int_0^R |\nabla_\alpha^m u|^p r^\alpha dr.$

Demonstração. Pela mudança de variável $s = \epsilon^{-1} r$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\epsilon R} |u_\epsilon(r)|^{p^*} r^\theta \, dr &= \int_0^{\epsilon R} |u(\epsilon^{-1} r)|^{p^*} \epsilon^{-\beta p^*} r^\theta \, dr \\ &= \int_0^R |u(s)|^{p^*} \epsilon^{-\beta p^* + \theta + 1} s^\theta \, ds, \end{aligned}$$

que prova o item (a), desde que $\beta = (\theta + 1)/p^*$. Em ordem para provar o item (b), é necessário provar:

Afirmação. Para $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, temos

$$\Delta_\gamma^k u_\epsilon(r) = \epsilon^{-(\beta + 2k)} \Delta_\gamma^k u(\epsilon^{-1} r), \quad \forall \, k \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

e

$$\big(\Delta_\gamma^k u_\epsilon\big)'(r) = \epsilon^{-(\beta + 2k + 1)} \big(\Delta_\gamma^k u\big)'(\epsilon^{-1} r), \quad \forall \, k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

De fato, por indução sobre k. Para $k = 1$ provaremos (3.2). Note que

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma u_\epsilon(r) &= u_\epsilon''(r) + \frac{\gamma}{r} u_\epsilon'(r) \\ &= \epsilon^{-(\beta+2)} u''(\epsilon^{-1} r) + \frac{\gamma}{r} \epsilon^{-(\beta+1)} u'(\epsilon^{-1} r) \\ &= \epsilon^{-(\beta+2)} \left[u''(\epsilon^{-1} r) + \frac{\gamma}{\epsilon^{-1} r} u'(\epsilon^{-1} r) \right] \\ &= \epsilon^{-(\beta+2)} \Delta_\gamma u(\epsilon^{-1} r). \end{aligned}$$

Isso prova (3.2) para $k = 1$. Suponha que (3.2) seja verdadeira para k e vamos provar para $k + 1$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta_\gamma^{k+1} u_\epsilon(r) &= \Delta_\gamma \left[\Delta_\gamma^k u_\epsilon(r)\right] \\ &= \left[\Delta_\gamma^k u_\epsilon\right]''(r) + \frac{\gamma}{r}\left[\Delta_\gamma^k u_\epsilon\right]'(r) \\ &= \epsilon^{-[\beta+2(k+1)]}[\Delta_\gamma^k u]''(\epsilon^{-1}r) + \frac{\gamma}{r}\epsilon^{-(\beta+2k+1)}[\Delta_\gamma^k u]'(\epsilon^{-1}r) \\ &= \epsilon^{-[\beta+2(k+1)]}\left\{[\Delta_\gamma^k u]''(\epsilon^{-1}r) + \frac{\gamma}{\epsilon^{-1}r}[\Delta_\gamma^k u]'(\epsilon^{-1}r)\right\} \\ &= \epsilon^{-[\beta+2(k+1)]}\Delta_\gamma^{k+1} u(\epsilon^{-1}r).\end{aligned}$$

Derivando (3.2), obtemos (3.3). Agora, dividimos em dois casos o restante a prova em (b). Para $m = 2k$ com $k \in \mathbb{N}$. Usando (3.2) e a mudança de variável $s = \epsilon^{-1}r$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\epsilon R} |\Delta_\alpha^k u_\epsilon(r)|^p r^\alpha \, dr &= \int_0^{\epsilon R} |\Delta_\alpha^k u(\epsilon^{-1}r)|^p \epsilon^{-(\beta+m)p} r^\alpha \, dr \\ &= \int_0^R |\Delta_\alpha^k u(s)|^p \epsilon^{-(\beta+m)p+\alpha+1} s^\alpha \, ds,\end{aligned}$$

que prova o item (b), desde que $\beta = (\theta + 1)/p^*$. Para $m = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$. Analogamente ao caso par, usamos (3.3) e a mudança de variável $s = \epsilon^{-1}r$ para deduzir

$$\begin{aligned}\int_0^{\epsilon R} |[\Delta_\alpha^k u_\epsilon(r)]'|^p r^\alpha \, dr &= \int_0^{\epsilon R} |[\Delta_\alpha^k u(\epsilon^{-1}r)]'|^p \epsilon^{-(\beta+m)p} r^\alpha \, dr \\ &= \int_0^R |[\Delta_\alpha^k u(s)]'|^p \epsilon^{-(\beta+m)p+\alpha+1} s^\alpha \, ds \\ &= \int_0^R |[\Delta_\alpha^k u(s)]'|^p s^\alpha \, ds.\end{aligned}$$

□

Proposição 8. *O valor de* $S(m, p, \alpha, \theta, R)$ *independe de* $R > 0$.

Demonstração. É suficiente provar que

$$S(m, p, \alpha, \theta, R) = S(m, p, \alpha, \theta, \epsilon R), \quad \forall \epsilon > 0. \tag{3.4}$$

De fato, fixado $R > 0$ e para qualquer $u \in \mathcal{D}_R^{m,p}(\alpha)$ com $\|u\|_{L_\theta^{p^*}} = 1$ e $\epsilon > 0$. Pelo Lema 11, temos $u_\epsilon \in \mathcal{D}_{\epsilon R}^{m,p}(\alpha)$ com

$$u_\epsilon(r) := \epsilon^{-(\alpha-mp+1)/p} u(\epsilon^{-1}r) \quad \text{e} \quad \|u_\epsilon\|_{L_\theta^{p^*}} = 1.$$

Assim,

$$S(m, p, \alpha, \theta, \epsilon R) \leqslant \int_0^{\epsilon R} |\nabla_\alpha^m u_\epsilon|^p r^\alpha \, dr = \int_0^R |\nabla_\alpha^m u|^p r^\alpha \, dr$$

que implica

$$S(m, p, \alpha, \theta, \epsilon R) \leqslant S(m, p, \alpha, \theta, R), \tag{3.5}$$

para qualquer $R > 0$ e $\epsilon > 0$. Por outro lado, para qualquer $v \in \mathcal{D}^{m,p}_{\epsilon R}(\alpha)$ com $\|v\|_{L^{p^*}_\theta} = 1$. Ainda, o Lema 11 assegura que $v_\epsilon \in \mathcal{D}^{m,p}_R(\alpha)$ com

$$v_\epsilon(r) := \epsilon^{(\alpha-mp+1)/p} v(r\epsilon) \quad \text{e} \quad \|v_\epsilon\|_{L^{p^*}_\theta} = 1.$$

Por isso,

$$S(m, p, \alpha, \theta, R) \leqslant \int_0^R |\nabla^m_\alpha v_\epsilon|^p r^\alpha \, dr = \int_0^{\epsilon R} |\nabla^m_\alpha v|^p r^\alpha \, dr,$$

o que implica

$$S(m, p, \alpha, \theta, R) \leqslant S(m, p, \alpha, \theta, \epsilon R), \quad \forall \epsilon > 0. \tag{3.6}$$

Combinando (3.5) e (3.6), obtemos (3.4).

□

Lema 12. *Sejam* $h \in C^\infty_c(0, \infty)$ *e* $\varphi \in \mathcal{D}^{m,2}_R(\alpha)$ *com* $0 < R \leqslant \infty$*, então*

$$\nabla^m_\alpha (h\varphi) = h\nabla^m_\alpha \varphi + F_\varphi, \tag{3.7}$$

onde $F_\varphi = F_\varphi(r)$ *é uma combinação linear das derivadas de* φ *com ordem estritamente menor que* m *e envolvendo as derivadas de* h *com ordem menor que ou igual a* m*. Em particular, se* $u_k \rightharpoonup 0$ *em* $\mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)$*, então*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\operatorname{supp}(h)} |\nabla^m_\alpha (hu_k)|^2 r^\alpha \, dr = \lim_{k\to\infty} \int_{\operatorname{supp}(h)} h^2 |\nabla^m_\alpha u_k|^2 r^\alpha \, dr. \tag{3.8}$$

Demonstração. Argumentamos por indução. Primeiro, analisamos o caso $m = 2k$. Se $k = 1$, é fácil verificar que

$$\nabla^2_\alpha (h\varphi) = h\Delta_\alpha \varphi + \varphi\Delta_\alpha h + 2\varphi' h' = h\nabla^2_\alpha \varphi + \varphi\Delta_\alpha h + 2\varphi' h'$$

e, assim podemos tomar $F_\varphi = 2h'\varphi' + \varphi\Delta_\alpha h$. Assuma que (3.7) vale em $\mathcal{D}^{2j,2}_R(\alpha)$ para qualquer número inteiro j, $1 \leqslant j < k$. Isto é, para $h \in C^\infty_c(0, \infty)$ e $\varphi \in \mathcal{D}^{2j,2}_R(\alpha)$, temos

$$\nabla^{2j}_\alpha (h\varphi) = h\nabla^{2j}_\alpha \varphi + G_\varphi, \tag{3.9}$$

onde G_φ é uma combinação linear das derivadas de φ com ordem estritamente menor que $2j$, para $1 \leqslant j < k$. Sejam $u \in \mathcal{D}^{2k,2}_R(\alpha)$ e $h \in C^\infty_c(0, \infty)$. Por (3.9), temos

$$\begin{aligned} \Delta^k_\alpha (h\varphi) &= \Delta_\alpha[\Delta^{k-1}_\alpha (h\varphi)] = \Delta_\alpha[h\Delta^{k-1}_\alpha \varphi + G_\varphi] \\ &= \Delta_\alpha (h\Delta^{k-1}_\alpha \varphi) + \Delta_\alpha (G_\varphi) \end{aligned}$$

onde G_φ é uma combinação das derivadas de φ com ordem estritamente menor que $2k-2$. Por isso, segue que

$$\Delta_\alpha^k(h\varphi) \;=\; h\Delta_\alpha^k\varphi + 2h'(\Delta_\alpha^{k-1}\varphi)' + (\Delta_\alpha h)\Delta_\alpha^{k-1}\varphi + \Delta_\alpha(G_\varphi).$$

Tendo em mente as expansões em Lema 8, da identidade acima podemos ver que (3.7) vale para $j = k$ com

$$F_\varphi = 2h'(\Delta_\alpha^{k-1}\varphi)' + (\Delta_\alpha h)\Delta_\alpha^{k-1}\varphi + \Delta_\alpha(G_\varphi).$$

Similarmente, pode-se provar que (3.7) vale para o caso $m = 2k+1$. Agora, provaremos (3.8). Usamos (3.7) para escrever

$$\|\nabla_\alpha^m(hu_k) - h\nabla_\alpha^m u_k\|^2_{L^2_\alpha(\mathrm{supp}(h))} = \int_{\mathrm{supp}(h)} |F_{u_k}|^2 r^\alpha\, dr,$$

para todo $h \in C_c^\infty(0,\infty)$. Assim, é suficiente mostrar que $F_{u_k} \to 0$ em $L^2_\alpha(\mathrm{supp}(h))$. De fato, para cada $l = 0, 1, \cdots, m-1$, definimos $A_l : \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha) \to \mathcal{D}^{m-l,2}_\infty(\alpha)$ por $A_l(u) = u^{(l)}$. É claro que A_l é operador linear satisfazendo

$$\|A_l(u)\|_{\mathcal{D}^{m-l,2}_\infty(\alpha)} = \|[A_l(u)]^{(m-l)}\|_{L^2_\alpha(0,\infty)} = \|u^{(m)}\|_{L^2_\alpha(0,\infty)} = \|u\|_{\mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)}.$$

Pela continuidade do operador linear A_l e $u_k \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)$, obtemos $u_k^{(l)} \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{m-l,2}_\infty(\alpha)$. Por (2.5), $\mathcal{D}^{m-l,2}_\infty(\alpha) = X^{m-l,2}_\infty(\beta_0, \cdots, \beta_{m-l})$ com $\beta_j = \alpha-(m-l-j)p$. Então, $u_k^{(l)} \in X^{m-l,2}_\infty(\beta_0, \cdots, \beta_{m-l})$ e $u_k^{(l)} \rightharpoonup 0$ em $X^{m-l,2}_\infty(\beta_0, \cdots, \beta_{m-l})$. Note que operador restrição $u \to u_{|(0,R)}$ é contínuo de $X^{m-l,2}_\infty(\beta_0, \cdots, \beta_{m-l})$ em $W^{m-l,2}_R(\beta_0, \cdots, \beta_{m-l})$, onde $R > 0$ de modo que $\mathrm{supp}\,(h) \subseteq (0,R)$. Assim, $u_k^{(l)} \rightharpoonup 0$ em $W^{m-l,2}_R(\beta_0, \cdots, \beta_{m-l})$. Finalmente, a menos de subsequência, a imersão compacta $W^{m-l,2}_R(\beta_0, \cdots, \beta_{m-l}) \hookrightarrow L^2_\alpha(0,R)$ (veja [42, Theorem 1.1]) implica que

$$u_k^{(l)} \to 0 \quad \text{em} \quad L^2_\alpha(0,R), \quad \forall\, l = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{supp}\,(h)} |F_{u_k}|^2 r^\alpha\, dr &\leqslant \int_0^R |F_{u_k}|^2 r^\alpha\, dr \\ &\leqslant C\sum_{l=0}^{m-1}\int_0^R |u_k^{(l)}|^2 r^\alpha\, dr \to 0,\end{aligned}$$

o que completa a prova. □

Agora, estamos em condições de provar o seguinte lema:

Lema 13 (Concentração e compacidade)**.** *Seja* $(u_k) \subseteq \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$ *uma sequência tal que*

(i) $u_k \rightharpoonup u$ *em* $\mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$*;*

(ii) $|\nabla^m_\alpha(u_k - u)|^2 r^\alpha dr \rightharpoonup \mu$ *em* $\mathcal{M}(0,\infty)$*;*

(iii) $|u_k - u|^{2^*} r^\theta dr \rightharpoonup \zeta$ *em* $\mathcal{M}(0,\infty)$*;*

(iv) $u_k(r) \to u(r)$ *q.t.p. em* $(0,\infty)$*;*

e definimos

$$\mu_\infty = \lim_{L\to\infty}\left(\limsup_{k\to\infty}\int_L^\infty |\nabla^m_\alpha u_k|^2 r^\alpha \, dr\right)$$

e

$$\zeta_\infty = \lim_{L\to\infty}\left(\limsup_{k\to\infty}\int_L^\infty |u_k|^{2^*} r^\theta \, dr\right).$$

Então,

$$\|\zeta\|^{2/2^*} \leqslant S^{-1}\|\mu\|, \tag{3.10}$$

$$(\zeta_\infty)^{2/2^*} \leqslant S^{-1}\mu_\infty, \tag{3.11}$$

$$\limsup_{k\to\infty}\|\nabla^m_\alpha u_k\|^2_{L^2_\alpha} = \|\nabla^m_\alpha u\|^2_{L^2_\alpha} + \|\mu\| + \mu_\infty, \tag{3.12}$$

$$\limsup_{k\to\infty}\|u_k\|^{2^*}_{L^{2^*}_\theta} = \|u\|^{2^*}_{L^{2^*}_\theta} + \|\zeta\| + \zeta_\infty. \tag{3.13}$$

Além disso, se $u = 0$ *e* $\|\zeta\|^{2/2^*} = S^{-1}\|\mu\|$*, então* μ *e* ζ *são concentradas em um ponto singular.*

Demonstração. Primeiramente, assumimos que $u = 0$. Assim, para qualquer $h \in C^\infty_c(0,\infty)$, usando Teorema 5 e (3.8) temos

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty |h|^{2^*} d\zeta\right)^{2/2^*} &= \lim_{k\to\infty}\left(\int_{\mathrm{supp}\,(h)} |hu_k|^{2^*} r^\theta \, dr\right)^{2/2^*} \\ &\leqslant \mathcal{S}^{-1}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathrm{supp}\,(h)} |\nabla^m_\alpha(hu_k)|^2 r^\alpha \, dr \\ &= \mathcal{S}^{-1}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathrm{supp}\,(h)} h^2|\nabla^m_\alpha u_k|^2 r^\alpha \, dr,\end{aligned}$$

o que fornece

$$\left(\int_0^\infty |h|^{2^*} d\zeta\right)^{2/2^*} \leqslant \mathcal{S}^{-1}\int_0^\infty h^2 \, d\mu, \quad \forall\, h \in C^\infty_c(0,\infty). \tag{3.14}$$

Agora, para qualquer $L > 1$, seja $\psi_L \in C_c^\infty(0,\infty)$ com $0 \leqslant \psi_L \leqslant 1$ tal que $\psi_L \equiv 0$ em $(0, L)$ e $\psi_L \equiv 1$ em $(L+1, \infty)$. Pelo Teorema 5, temos

$$\left(\int_0^\infty |\psi_L u_k|^{2^*} r^\theta \, dr\right)^{2/2^*} \leqslant \mathcal{S}^{-1} \int_0^\infty |\nabla_\alpha^m(\psi_L u_k)|^2 r^\alpha \, dr$$
$$= \mathcal{S}^{-1}\left(\int_L^{L+1} |\nabla_\alpha^m(\psi_L u_k)|^2 r^\alpha \, dr + \int_{L+1}^\infty |\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr\right).$$

Argumentando como em (3.8), podemos provar que

$$\lim_{k\to\infty} \int_L^{L+1} |\nabla_\alpha^m(\psi_L u_k)|^2 r^\alpha \, dr = \lim_{k\to\infty} \int_L^{L+1} \psi_L^2 |\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr.$$

Por isso,

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\int_0^\infty |\psi_L u_k|^{2^*} r^\theta \, dr\right)^{2/2^*} \leqslant \mathcal{S}^{-1} \limsup_{k\to\infty} \int_L^\infty \psi_L^2 |\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr. \tag{3.15}$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned} \zeta_\infty &= \lim_{L\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \int_0^\infty |\psi_L u_k|^{2^*} r^\theta \, dr \\ \mu_\infty &= \lim_{L\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \int_L^\infty \psi_L^2 |\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr. \end{aligned} \tag{3.16}$$

De fato, note que

$$\int_{L+1}^\infty |u_k|^{2^*} r^\theta \, dr \leqslant \int_0^\infty \psi_L^{2^*} |u_k|^{2^*} r^\theta \, dr \leqslant \int_L^\infty |u_k|^{2^*} r^\theta \, dr$$

e

$$\int_{L+1}^\infty |\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr \leqslant \int_0^\infty \psi_L^2 |\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr \leqslant \int_L^\infty |\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr.$$

Fazemos $k \to \infty$ e depois $L \to \infty$, nas duas desigualdade acima para assegura (3.16). Combinando (3.14), (3.15) e (3.16), obtemos (3.10) e (3.11) para $u = 0$.

Agora, assumimos que o limite fraco $u \in \mathcal{D}_\infty^{m,2}(\alpha)$ é arbitrário e seja $v_k = u_k - u$. É claro que $v_k \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}_\infty^{m,2}(\alpha)$. Além disso, desde que $\mathcal{D}_\infty^{m,2}(\alpha)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{\nabla_\alpha^m} = \int_0^\infty (\nabla_\alpha^m u)(\nabla_\alpha^m v) r^\alpha \, dr,$$

temos $\langle u_k, u\rangle_{\nabla_\alpha^m} \to \|u\|_{\nabla_\alpha^m}^2$ em $\mathbb{R}$. Então,

$$\lim_{k\to\infty} \|v_k\|_{\nabla_\alpha^m}^2 = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{\nabla_\alpha^m}^2 - \|u\|_{\nabla_\alpha^m}^2. \tag{3.17}$$

Assim, para $h \in C_c^\infty(0,\infty)$, temos

$$\left|\int_0^\infty h(|\nabla_\alpha^m u_k|^2 - |\nabla_\alpha^m (u_k - u)|^2 - |\nabla_\alpha^m u|^2) r^\alpha \, dr\right|$$
$$\leqslant \|h\|_\infty \left| \|u_k\|_{\nabla_\alpha^m}^2 - \|v_k\|_{\nabla_\alpha^m}^2 - \|u\|_{\nabla_\alpha^m}^2 \right|.$$

Fazemos $k \to \infty$, usamos (3.17) e (ii) para deduzir que

$$|\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr \rightharpoonup \mu + |\nabla_\alpha^m u|^2 r^\alpha \, dr \quad \text{em} \quad \mathcal{M}(0,\infty). \tag{3.18}$$

Por outro lado, a convergência $u_k \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}_\infty^{m,2}(\alpha)$ e a imersão contínua $\mathcal{D}_\infty^{m,2}(\alpha) \hookrightarrow L_\theta^{2^*}(0,\infty)$ garante que (u_k) é limitada em $L_\theta^{2^*}(0,\infty)$. Lembramos (iv), estamos nas condições de usar o Lema Brezis-Lieb para obtermos

$$\int_0^\infty h|u|^{2^*} r^\theta dr = \lim_{k\to\infty} \left(\int_0^\infty h|u_k|^{2^*} r^\theta dr - \int_0^\infty h|v_k|^{2^*} r^\theta dr \right)$$

e consequentemente (iii) assegura que

$$|u_k|^{2^*} r^\theta \, dr \rightharpoonup \zeta + |u|^{2^*} r^\theta \, dr \quad \text{em} \quad \mathcal{M}(0,\infty). \tag{3.19}$$

Usamos v_k em vez de u_k, podemos aplicar o mesmo argumento do caso particular $u = 0$ para obtemos a estimativa (3.14) e donde segue (3.10). Para provar (3.11), primeiro note que

$$\int_L^\infty |\nabla_\alpha^m v_k|^2 r^\alpha \, dr = \int_L^\infty (|\nabla_\alpha^m u_k|^2 - 2(\nabla_\alpha^m u_k)(\nabla_\alpha^m u) + |\nabla_\alpha^m u|^2) r^\alpha \, dr$$

implica

$$\limsup_{k\to\infty} \int_L^\infty |\nabla_\alpha^m v_k|^2 r^\alpha \, dr = \limsup_{k\to\infty} \int_L^\infty |\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr - \int_L^\infty |\nabla_\alpha^m u|^2 r^\alpha \, dr.$$

Assim, $\displaystyle\lim_{L\to\infty} \int_L^\infty |\nabla_\alpha^m u|^2 r^\alpha \, dr = 0$ implica

$$\lim_{L\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \int_L^\infty |\nabla_\alpha^m v_k|^2 r^\alpha \, dr = \lim_{L\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \int_L^\infty |\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr = \mu_\infty. \tag{3.20}$$

Por outro lado, Lema Brezis-Lieb fornece que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_L^\infty |u_k|^{2^*} r^\theta \, dr - \int_L^\infty |v_k|^{2^*} r^\theta \, dr \right) = \int_L^\infty |u|^{2^*} r^\theta \, dr.$$

Como $\displaystyle\lim_{L\to\infty} \int_L^\infty |u|^{2^*} r^\theta \, dr = 0$, temos

$$\lim_{L\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \int_L^\infty |v_k|^{2^*} r^\theta \, dr = \lim_{L\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \int_L^\infty |u_k|^{2^*} r^\theta \, dr = \zeta_\infty. \tag{3.21}$$

Usamos v_k em vez de u_k, por (3.20) e (3.21), podemos aplicar o mesmo argumento do caso particular $u = 0$ para obtemos (3.15) e (3.16) para qualquer limite fraco u. Assim, (3.11) vale.

A seguir, provaremos (3.12) e (3.13). Para qualquer $L > 1$, usamos $|\nabla_\alpha^m u_k|^2 = \psi_L^2|\nabla_\alpha^m u_k|^2 + (1-\psi_L^2)|\nabla_\alpha^m u_k|^2$ e (3.18) para escrever

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\int_0^\infty |\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr = \limsup_{k\to\infty}\int_0^\infty \psi_L^2|\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr + \int_0^\infty (1-\psi_L^2)\, d\mu \\ + \int_0^\infty (1-\psi_L^2)|\nabla_\alpha^m u|^2 r^\alpha \, d\mu.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Fazemos $L \to \infty$ em (3.22) e usamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obtermos

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\int_0^\infty |\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr = \lim_{L\to\infty}\limsup_{k\to\infty}\int_0^\infty \psi_L^2|\nabla_\alpha^m u_k|^2 r^\alpha \, dr + \int_0^\infty \, d\mu \\ + \int_0^\infty |\nabla_\alpha^m u|^2 r^\alpha \, d\mu.\end{aligned}$$

Usamos (3.16) para vermos (3.12). Para provar (3.13), podemos proceder analogamente com ajuda de (3.19).

Finalmente, se $u = 0$ e $\|\zeta\|^{2/2^*} = \mathcal{S}^{-1}\|\mu\|$. Mostraremos que as medidas μ e ζ são concentradas em um ponto singular. De fato, para $h \in C_c^\infty(0,\infty)$ a desigualdade de Hölder implica que

$$\int_0^\infty h^2 \, d\mu \;\leqslant\; \left(\int_{\mathrm{supp}(h)} d\mu\right)^{\frac{2m+\theta-\alpha}{\theta+1}} \left(\int_0^\infty |h|^{2^*} \, d\mu\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Assim,

$$\left(\int_0^\infty h^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\mu\|^{\frac{2m+\theta-\alpha}{2(\theta+1)}} \left(\int_0^\infty |h|^{2^*} \, d\mu\right)^{\frac{1}{2^*}}. \tag{3.23}$$

Combinamos (3.14) e (3.23), temos

$$\left(\int_0^\infty |h|^{2^*} d\zeta\right)^{\frac{1}{2^*}} \leqslant \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}\|\mu\|^{\frac{2m+\theta-\alpha}{2(\theta+1)}} \left(\int_0^\infty |h|^{2^*} \, d\mu\right)^{\frac{1}{2^*}}.$$

Portanto, $\zeta \leqslant \mathcal{S}^{-\frac{2^*}{2}}\|\mu\|^{\frac{2m+\theta-\alpha}{\alpha-2m+1}}\mu$. Desde que $\|\zeta\|^{\frac{2}{2^*}} = \mathcal{S}^{-1}\|\mu\|$, temos

$$\zeta = \mathcal{S}^{-\frac{2^*}{2}}\|\mu\|^{\frac{2m+\theta-\alpha}{\alpha-2m+1}}\mu. \tag{3.24}$$

Usamos (3.24) em (3.14) para deduzir

$$\left(\int_0^\infty h^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \|\mu\|^{\frac{2m+\theta-\alpha}{2(\theta+1)}} \left(\int_0^\infty |h|^{2^*} \, d\mu\right)^{\frac{1}{2^*}}.$$

Em particular, para todo subconjunto aberto $A \subset (0,\infty)$ vale

$$\mu(A)^{\frac{1}{2}} \geqslant \|\mu\|^{\frac{2m+\theta-\alpha}{2(\theta+1)}} \mu(A)^{\frac{1}{2^*}},$$

o que implica

$$\mu(A) \geqslant \|\mu\|. \tag{3.25}$$

Por isso, μ é concentrada em um ponto singular. Por (3.24), a mesma conclusão vale para ζ. □

Observação 3. *O problema variacional em* (3.1) *não é variante por translação, se* $s > 0$. *De fato, seja* $u \in \mathcal{D}^{m,p}_{\infty}(\alpha)$, $u > 0$ *e considere sua translação* $u^s(r) = u(r+s)$, *com* $s \geqslant 0$. *Pela mudança de variável* $z = r + s$, *temos*

$$\|u^s\|^{p^*}_{L^{p^*}_\theta} = \int_s^\infty |u(z)|^{p^*}(z-s)^\theta \, dz \leqslant \int_s^\infty |u(z)|^{p^*} z^\theta \, dz < \|u\|^{p^*}_{L^{p^*}_\theta}, \quad \textit{se} \quad s > 0.$$

Analogamente,

$$\|\nabla^m_\alpha u^s\|^p_{L^p_\alpha} = \int_s^\infty |\nabla^m_\alpha u(z)|^p (z-s)^\alpha \, dz < \|\nabla^m_\alpha u\|^p_{L^p_\alpha}, \quad \textit{se} \quad s > 0.$$

3.1.2 Existência de extremal para $\mathcal{S}(m, 2, \alpha, \theta, \infty)$

Afim de adaptar o argumento em [74, Theorem 1.41] para mostrar que $\mathcal{S}(m, 2, \alpha, \theta, \infty)$ é atingido. Pela Observação 3, não podemos usar a família de re-scaled $v^{s,\lambda}(r) = \lambda^{\frac{\theta+1}{2^*}} u(\lambda r + s)$, com $\lambda, s > 0$ para gerar ainda uma sequência minimizante para $\mathcal{S}$. Felizmente, podemos usar $s = 0$, veja Lema 11.

Teorema 6 (Atingibilidade)**.** *Sejam* $\alpha, \theta > -1$ *e* $m \in \mathbb{Z}_+$ *tal que* $\theta \geqslant \alpha - 2m$ *e* $\alpha - 2m + 1 > 0$. *Então,*

$$\|z\|_{L^{2^*}_\theta} = 1 \quad e \quad \|\nabla^m_\alpha z\|^2_{L^2_\alpha} = \mathcal{S}(m, 2, \alpha, \theta, \infty),$$

para algum $z \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)$.

Demonstração. Seja $(u_k) \subset D^{m,2}_\infty(\alpha)$ uma sequência minimizante para $\mathcal{S}$ tal que

$$\|u_k\|_{L^{2^*}_\theta} = 1 \;\text{ e }\; \mathcal{S}(m, 2, \alpha, \theta, \infty) = \lim_{k \to \infty} \|\nabla^m_\alpha u_k\|^2_{L^2_\alpha}. \tag{3.26}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$Q_k(t) := \int_0^t |u_k(r)|^{2^*} r^\theta \, dr.$$

Para cada k, temos Q_k é uma função contínua e satisfaz

$$\lim_{t \to 0^+} Q_k(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} Q_k(t) = 1 \quad \text{e} \quad Q_k(t_1) \leqslant Q_k(t_2), \quad \text{se} \quad t_1 \leqslant t_2.$$

Portanto, existe uma sequência de números reais positivos $(t_k) \subset (0, \infty)$ tal que

$$Q_k(t_k) = \frac{1}{2}. \tag{3.27}$$

Agora, seja $v_k(r) = t_k^{\frac{\theta+1}{2^*}} u_k(rt_k)$. Pelo Lema 11 segue que

$$\|v_k\|_{L^{2^*}_\theta} = \|u_k\|_{L^{2^*}_\theta} = 1 \quad \text{e} \quad \|\nabla^m_\alpha v_k\|_{L^2_\alpha} = \|\nabla^m_\alpha u_k\|_{L^2_\alpha}. \tag{3.28}$$

Além disso, usamos a mudança de variável $z = rt_k$ e (3.27) para deduzir que

$$\int_0^1 |v_k(r)|^{2^*} r^\theta \, dr = \int_0^{t_k} |u_k(r)|^{2^*} r^\theta \, dr = \frac{1}{2}. \tag{3.29}$$

Desde que (v_k) é uma sequência limitada no espaço de Hilbert $\mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)$, a menos de subsequência, podemos assumir que

$$\begin{aligned}
& v_k \rightharpoonup v && \text{em } \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha) \\
& |\nabla^m_\alpha (v_k - v)|^2 r^\alpha \rightharpoonup \mu && \text{em } \mathcal{M}(0,\infty) \\
& |v_k - v|^{2^*} r^\theta \rightharpoonup \zeta && \text{em } \mathcal{M}(0,\infty) \\
& v_k(r) \to v(r) && \text{q.t.p. em } (0,\infty).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Combinamos Lema 13 com (3.26) e (3.28), podemos escrever

$$\mathcal{S} = \|\nabla^m_\alpha v\|^2_{L^2_\alpha} + \|\mu\| + \mu_\infty \tag{3.31}$$

e

$$1 = \|v\|^{2^*}_{L^{2^*}_\theta} + \|\zeta\| + \zeta_\infty. \tag{3.32}$$

Por (2.39), (3.10) e (3.11), segue

$$\mathcal{S} \geqslant \mathcal{S}\left(\left(\|v\|^{2^*}_{L^{2^*}_\theta} \right)^{\frac{2}{2^*}} + \|\zeta\|^{\frac{2}{2^*}} + (\zeta_\infty)^{\frac{2}{2^*}} \right), \tag{3.33}$$

o que implica $\|v\|^{2^*}_{L^{2^*}_\theta}, \|\zeta\|$ e ζ_∞ são 0 ou 1, desde que (3.32) e (3.33). De (3.26), (3.28) e (3.30) deduzimos que

$$\|\nabla^m_\alpha v\|^2_{L^2_\alpha} \leqslant \lim_{k\to\infty} \|\nabla^m_\alpha v_k\|^2_{L^2_\alpha} = \mathcal{S}.$$

Então, v é um minimizante, se provamos que $\|v\|^{2^*}_{L^{2^*}_\theta} = 1$. De (3.32), resta provar que

$$\zeta_\infty = \|\zeta\| = 0.$$

Mas, por (3.28) e (3.29), para todo $L > 1$, temos

$$\int_L^\infty |v_k|^{2^*} r^\theta \, dr \leqslant \int_1^\infty |v_k|^{2^*} r^\theta \, dr = \frac{1}{2},$$

que acarreta $\zeta_\infty \leqslant \frac{1}{2}$. Então, $\zeta_\infty = 0$. Por contradição, suponha que $\|\zeta\| = 1$. Assim, por (3.32) podemos deduzir que $\|\nu\|^{2^*}_{L^{2^*}_\theta} = \zeta_\infty = 0$ e consequentemente $\nu = 0$. Além disso, por (3.31), temos

$$\|\mu\|\mathcal{S}^{-1} \leqslant 1 = \|\zeta\|^{\frac{2}{2^*}},$$

que implica $\|\mu\|\mathcal{S}^{-1} = \|\zeta\|^{\frac{2}{2^*}}$, desde que (3.10). Pelo Lema 13 (cf. (3.24) e (3.25)), para qualquer subconjunto aberto $A \subset (0, \infty)$ temos

$$\begin{aligned} \zeta(A) &= \mathcal{S}^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2m+\theta-\alpha}{\alpha-2m+1}} \mu(A) \\ &\geqslant \mathcal{S}^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2m+\theta-\alpha}{\alpha-2m+1}} \|\mu\| \\ &= \mathcal{S}^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{\theta+1}{\alpha-2m+1}} \\ &= \mathcal{S}^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2^*}{2}} = \|\zeta\| = 1. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Mas, fazemos $k \to \infty$ em (3.29) para assegurar que

$$\zeta(A_0) = \frac{1}{2} < \|\zeta\| = 1, \text{ com } A_0 = (0, 1)$$

que contradiz (3.34). Portanto, $\|\zeta\| = 0$ e a prova é completada. □

3.2 Uma classe geral de equações elípticas semilinear crítica

Por indução, definimos:

$$(\Delta_\alpha)^m := (\Delta_\alpha)^{m-1} \circ \Delta_\alpha \quad \text{para } m \geqslant 2,$$

onde Δ_α é dado em (1.9). Esse operador é chamado de α-generalização do operador poli-harmônico de ordem m. Note que, se $\alpha = N - 1$ é um número inteiro positivo, temos que $(\Delta_\alpha)^m$ age precisamente como operador poli-harmônico atuando em funções radialmente simétricas definidas em bolas B_R de $\mathbb{R}^N$. Em particular, dizemos que essa classe geral de equações elípticas incluí o clássico operador poli-harmônico. Além disso, lembramos que o operador poli-harmônico está relacionado a equações elípticas de ordem superior do tipo reação-difusão, veja [51] para mais detalhes.

Observamos que, se $m = 1$ equações envolvendo o operador Δ_α têm sido estudadas em diferentes situações, e recomendamos [23,27,41,59]. Recentemente em [42], os autores investigaram resultados de existência para o caso $m = 2$.

É bem conhecido na literatura que as desigualdades do tipo Sobolev e seus extremais são ferramentas básicas em muitos aspectos da análise matemática e de equações diferenciais parciais. Assim, aplicaremos os Teorema 5 e Teorema 6 para obter um resultado de existência para uma classe geral de equações elípticas.

Corolário 6. *Para* α, θ *e* m *sob as suposições do Teorema 6, existe uma solução fraca* $z \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$ *para a equação semilinear crítica*

$$(-\Delta_\alpha)^m u = r^{\theta-\alpha}|u|^{2^*-2}u \ \text{em}\ (0,\infty) \tag{3.35}$$

onde $2^* = 2(\theta+1)/(\alpha-2m+1)$ *é o expoente crítico para* $\mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$*. Em outras palavras, existe* $z \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$ *satisfazendo*

$$\int_0^\infty \nabla^m_\alpha z \nabla^m_\alpha v r^\alpha \, dr = \int_0^\infty |z|^{2^*-2} z v r^\theta \, dr, \quad \forall v \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha).$$

Demonstração. Seja $I : \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty |\nabla^m_\alpha u|^2 r^\alpha \, dr - \frac{1}{2^*}\int_0^\infty |u|^{2^*} r^\theta \, dr.$$

Pelo Teorema 5, podemos mostrar que $I \in C^1(\mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha), \mathbb{R})$. Assim, os pontos criticos de I são soluções fracas da equação (3.35). Para garantir a existência de ponto crítico iremos aplicar o Teorema Multiplicador de Lagrange. Para isso, considere $F, G \in C^1(\mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha), \mathbb{R})$, onde

$$G(u) := \int_0^\infty |\nabla^m_\alpha u|^2 r^\alpha \, dr \quad \text{e} \quad F(u) := \int_0^\infty |u|^{2^*} r^\theta \, dr - 1.$$

Pelo Teorema 6, a função extremal $z \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$ minimiza o funcional G sob a restrição $F(u) = 0$. Então, o Teorema Multiplicador de Lagrange assegura que

$$2\int_0^\infty \nabla^m_\alpha z \nabla^m_\alpha v r^\alpha \, dr = \lambda 2^* \int_0^\infty |z|^{2^*-2} z v r^\theta \, dr, \quad \text{para todo}\ \ v \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha), \tag{3.36}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Escolhemos $v = z$ em (3.36) para deduzir que $2^*\lambda = 2\mathcal{S}$. Finalmente, usamos (3.36) para ver que $z_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^{\frac{1}{2^*-2}} z$ satisfaz $I'(z_{\mathcal{S}}).v = 0$ para todo $v \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$, onde

$$I'(u).v = \int_0^\infty \nabla^m_\alpha u \nabla^m_\alpha v r^\alpha \, dr - \int_0^\infty |u|^{2^*-2} u v r^\theta \, dr, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha).$$

$\square$

Capítulo 4

A melhor constante

Exibiremos nesse capítulo resultados em linha dos objetivos principais dessa tese descrito no item (d), veja a introdução. Primeiro, provaremos resultados sobre regularidade e classificação para uma classe geral de equações elípticas com crescimento crítico, ver o Teorema 7 e o Teorema 8. Depois, calcularemos o valor de $\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty)$ no Teorema 9.

4.1 Regularidade

O estudo de regularidade para soluções de uma equação diferencial refere-se à análise do comportamento suave dessas soluções, ou seja, à investigação de suas propriedades de continuidade e derivabilidade. Este tipo de estudo é essencial para compreender a natureza das soluções de equações diferenciais, uma vez que muitas delas podem apresentar comportamentos irregulares, como descontinuidades ou singularidades, dependendo das condições iniciais ou de contorno impostas. Assim, forneceremos um resultado que trata da regularidade das soluções fracas para equação:

$$(-\Delta_\alpha)^m u = |u|^{2^*-2}u \quad \text{em} \quad (0, \infty). \tag{4.1}$$

Para isso, vamos provar os seguintes resultados: Lema 14, Lema 15 e Lema 16.

Primeiro, um versão do Lema Radial para o espaço $\mathcal{D}^{m,p}_\infty(\alpha)$ é provada.

Lema 14. *(Lema Radial) Seja* $u \in \mathcal{D}^{m,p}_\infty(\alpha)$ *com* $p \geqslant 2$*. Assuma que* $\alpha - mp + 1 > 0$*, então*

$$|u(r)| \leqslant c r^{-\frac{(\alpha - mp+1)}{p}} \|u\|_{\nabla^m_\alpha}, \quad \forall\, r > 0 \tag{4.2}$$

para algum $c > 0$ *(independente de* u*).*

Demonstração. Para qualquer $u \in \mathcal{D}^{m,p}_\infty(\alpha)$, o Corolário 1 assegura que

$$\|u^{(j)}\|_{L^p_{\beta_j}} \leqslant C\|u^{(m)}\|_{L^p_\alpha} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}^{m,p}_\infty(\alpha) = X^{m,p}_\infty(\beta_0, \cdots, \beta_m), \tag{4.3}$$

com $\beta_j = \alpha - (m-j)p$ para $j = 0, 1, \cdots, m$. Observemos que $X^{m,p}_\infty(\beta_0, \cdots, \beta_m) \subset X^{1,p}_\infty(\beta_0, \beta_1)$. Então, o Lema 4 assegura que

$$|u(r)| \leqslant C_1 r^{-\frac{\alpha - mp + 1}{p}} \left(\|u^{(0)}\|_{L^p_{\beta_0}} + \|u^{(1)}\|_{L^p_{\beta_1}}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, r > 0. \tag{4.4}$$

Combinando a Proposição 7 com (4.4) e (4.3), obtemos (4.2). □

Inspirados no Lema 5, fornecemos uma caracterização para $\mathcal{D}^{m,p}_\infty(\alpha)$.

Lema 15. *Assuma* $p \geqslant 1$, $\alpha > -1$ *e* $m \in \mathbb{Z}^*_+$ *com* $\alpha - mp + 1 > 0$. *Então, o conjunto* $\Upsilon = \{u_{|_{[0,\infty)}} : u \in C^\infty_c(\mathbb{R})\}$ *é denso em* $\mathcal{D}^{m,p}_\infty(\alpha)$.

Demonstração. Aplicando o Corolário 1 segue $\mathcal{D}^{m,p}_\infty(\alpha) = X^{m,p}_\infty(\alpha_0, \cdots, \alpha_m)$, onde $\alpha_j = \alpha - (m-j)p$ para $j = 0, 1, \cdots, m$. Então, o resultado segue do Lema 5. □

Usando a forma integral, obtemos o seguinte lema:

Lema 16. *Para qualquer* $u \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)$ *e* $1 \leqslant k \leqslant m$, *defina*

$$w_0 := |u|^{2^*-2}u \ \text{ e } \ w_k(r) := \int_r^\infty t^{-\alpha}\left(\int_0^t s^\alpha w_{k-1}(s)\, ds\right) dt, \quad r > 0. \tag{4.5}$$

Então, para $r > 0$

$$|w_k(r)| \leqslant C r^{-\frac{\alpha+2m+1-4k}{2}} \tag{4.6}$$

$$|w_k'(r)| \leqslant C r^{-\frac{\alpha+2m+3-4k}{2}} \tag{4.7}$$

$$w_k \in C^{2k}(0,\infty) \tag{4.8}$$

$$(-\Delta_\alpha)^j w_k = w_{k-j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{4.9}$$

Demonstração. Para provar (4.6) e (4.7), procederemos por indução. Se $k = 1$, a desigualdade de Hölder e a imersão $\mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha) \hookrightarrow L^{2^*}_\alpha$ fornece

$$\left|\int_0^t w_0(s) s^\alpha\, ds\right| \leqslant \|u\|^{2^*-1}_{L^{2^*}_\alpha} \left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{2^*}} = \|u\|^{2^*-1}_{L^{2^*}_\alpha} \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{2^*}} t^{\frac{\alpha-2m+1}{2}}. \tag{4.10}$$

Consequentemente, existe $C = C(\alpha, u, m) > 0$ tal que

$$|w_1(r)| \leqslant C \int_r^\infty t^{-\frac{\alpha+2m-1}{2}}\, dt = C r^{-\frac{\alpha+2m-3}{2}},$$

que representa (4.6) para $k = 1$. Suponha que (4.6) vale, para $1 \leqslant k < m$. Assim, desde $\alpha - 2m + 1 + 4k \geqslant \alpha - 2m + 1 > 0$ temos

$$\left| \int_0^t w_k(s) s^\alpha \, ds \right| \leqslant C \int_0^t s^{\frac{\alpha-2m-1+4k}{2}} \, ds = C t^{\frac{\alpha-2m+1+4k}{2}}.$$

Usando $\alpha + 2m + 1 = \alpha - 2m + 1 + 4m > 4m \geqslant 4(k+1)$ podemos integrar novamente para obter

$$\begin{aligned} |w_{k+1}(r)| &= \left| \int_r^\infty t^{-\alpha} \int_0^t w_k(s) s^\alpha \, ds \right| \\ &\leqslant C \int_r^\infty t^{-\frac{\alpha+2m-1-4k}{2}} \, dt \\ &= C r^{-\frac{\alpha+2m+1-4(k+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Então, (4.6) vale para $k + 1$. A seguir, provaremos (4.7). Primeiramente, de (4.6) cada w_k é bem definido e podemos escrever

$$w_k'(r) = -r^{-\alpha} \int_0^r w_{k-1}(s) s^\alpha \, ds \tag{4.11}$$

para qualquer $1 \leqslant k \leqslant m$. Assim, com ajuda de (4.10) segue que

$$|w_1'(r)| = r^{-\alpha} \left| \int_0^r w_0(s) s^\alpha \, ds \right| \leqslant C r^{-\alpha} r^{\frac{\alpha-2m+1}{2}} = C r^{-\frac{\alpha+2m-1}{2}}.$$

Isso prova (4.7) para $k = 1$. Adicionalmente, a hipótese de indução assegura que (4.7) vale, para $1 \leqslant k < m$. Então, por (4.6) segue

$$|w_{k+1}'(r)| = r^{-\alpha} \left| \int_0^r w_k(s) s^\alpha \, ds \right| \leqslant C r^{-\alpha} r^{\frac{\alpha-2m+1+4k}{2}} = C r^{-\frac{\alpha+2m-1-4k}{2}} = C r^{-\frac{\alpha+2m+3-4(k+1)}{2}}$$

que representa (4.7) para $k + 1$. Agora, vamos prosseguir para provar (4.8). De (4.11), para $1 \leqslant k \leqslant m$ temos

$$w_k''(r) = \alpha r^{-\alpha-1} \int_0^r w_{k-1}(s) s^\alpha \, ds - w_{k-1}(r) = -\frac{\alpha}{r} w_k'(r) - w_{k-1}(r). \tag{4.12}$$

Da representação integral acima, (4.8) vale para $k = 1$. Adicionamente, se (4.8) vale para todo $1 \leqslant k < m$ então (4.12) assegura que $w_{k+1}'' \in C^{2k}(0, \infty)$, o que implica $w_{k+1} \in C^{2k+2}(0, \infty)$. Assim, por indução novamente podemos concluir que (4.8) vale. Finalmente, por (4.11) e (4.12), temos

$$-\Delta_\alpha w_\ell = w_\ell'' + \frac{\alpha}{r} w_\ell' = w_{\ell-1}, \quad \text{para todo } 1 \leqslant \ell \leqslant m.$$

Por argumento iterativo, para k fixo com $1 \leqslant k \leqslant m$ podemos ver que (4.9) é válido. □

Teorema 7 (Regularidade)**.** *Seja* $2^* = 2^*(m,\alpha) = 2(\alpha+1)/(\alpha-2m+1)$, *se* $\alpha-2m+1>0$ *e* $u \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)$ *tal que*

$$\int_0^\infty \nabla^m_\alpha u \nabla^m_\alpha v r^\alpha \, dr = \int_0^\infty |u|^{2^*-2} u v r^\alpha \, dr, \quad \forall v \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha). \tag{4.13}$$

Então, $u \in C^{2m}(0,\infty)$ *e resolve* (4.1)*. Além disso,*

(a) para $j = 0,1,\cdots,m-1$, *temos*

$$\lim_{r\to 0} r^\alpha \Delta^j_\alpha u(r) = \lim_{r\to 0} r^\alpha ((\Delta_\alpha)^j u)'(r) = 0; \tag{4.14}$$

(b) para $j = 0,1,\cdots,m$, *temos*

$$\lim_{r\to \infty} \Delta^j_\alpha u(r) = \lim_{r\to \infty} ((\Delta_\alpha)^j u)'(r) = 0; \tag{4.15}$$

(c) para $j = 0,1,\cdots,m-1$, *temos*

$$(-\Delta_\alpha)^j u(r) = \int_r^\infty \left(t^{-\alpha} \int_0^t (-\Delta_\alpha)^{j+1} u(s) s^\alpha \right) dt. \tag{4.16}$$

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)$ uma solução fraca para (4.1). Consideremos w_0 e w_k, $1 \leqslant k \leqslant m$ como definidos em (4.5). Definimos a função $w := w_m$, usamos (4.8) e (4.9) para obtemos

$$w \in C^{2m}(0,\infty) \ \text{ e } \ (-\Delta_\alpha)^m w = |u|^{2^*-2} u. \tag{4.17}$$

Adicionalmente, (4.6), (4.7) e (4.9) implica

$$|\Delta^j_\alpha w| \leqslant C r^{-\frac{\alpha-2m+1+4j}{2}} \quad \text{e} \quad |(\Delta^j_\alpha w)'| \leqslant C r^{-\frac{\alpha-2m+3+4j}{2}}, \tag{4.18}$$

para todo $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant m$. De (4.18), concluímos que w satisfaz (4.14) e (4.15). Além disso, (4.5) e (4.9) assegura que

$$(-\Delta_\alpha)^j w(r) = \int_r^\infty t^{-\alpha} \left(\int_0^t s^\alpha (-\Delta_\alpha)^{j+1} w(s) \, ds \right) dt, \quad r > 0. \tag{4.19}$$

De (4.17), (4.18) e (4.19), resta mostrar que

$$w \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha) \quad \text{e} \quad u = w.$$

Primeiro, mostraremos que $w_m \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)$. De (4.17), temos $w \in AC^{m-1}_{loc}(0,\infty)$. Combinando o Lema 8 com (4.6) e (4.18), e depois por argumento de indução obtemos

$$\lim_{r\to\infty} w^{(j)}(r) = 0, \quad j = 0,1,\cdots,m-1. \tag{4.20}$$

Por isso, temos $w \in AC_R^{m-1}(0,\infty)$. Agora, para concluir que $w \in \mathcal{D}_\infty^{m,2}(\alpha)$ devemos provar

$$\int_0^\infty |\nabla_\alpha^m w|^2 r^\alpha \, dr < \infty. \tag{4.21}$$

Seja $q_0 = 2^*/(2^*-1)$ e para $k = 1, \cdots, m$, definimos

$$q_k := \frac{q_{k-1}(\alpha+1)}{\alpha - 2q_{k-1}+1} = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2m+1-4k}.$$

Então, para w_k tal como em (4.5), afirmamos que

$$\int_0^\infty |w_k''|^{q_{k-1}} r^\alpha \, dr \leqslant C \int_0^\infty |w_{k-1}|^{q_{k-1}} r^\alpha \, dr \tag{4.22}$$

e

$$\int_0^\infty |w_k|^{q_k} r^\alpha \, dr \leqslant C \left(\int_0^\infty |w_{k-1}|^{q_{k-1}} r^\alpha \, dr \right)^{\frac{q_k}{q_{k-1}}}. \tag{4.23}$$

De fato, para cada $1 \leqslant k \leqslant m$, seja

$$v_k(r) := \int_0^r w_{k-1}(s) s^\alpha \, ds.$$

Desde $v_k(0) = 0$, somos capazes de aplicar usando Proposição 6-(b) com a escolha $\theta = \alpha - q_{k-1}(\alpha+1)$, $p = q_{k-1} = 2(\alpha+1)/(\alpha+2m+5-4k) > 1$, $\gamma = \theta + p$ e $m = 1$, para obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left| r^{-(\alpha+1)} \int_0^r w_{k-1}(s) s^\alpha \, ds \right|^{q_{k-1}} r^\alpha \, dr &= \int_0^\infty |v_k(r)|^{q_{k-1}} r^{\alpha - q_{k-1}(\alpha+1)} \, dr \\
&\leqslant C \int_0^\infty |v_k'(r)|^{q_{k-1}} r^{\alpha - q_{k-1}\alpha} \, dr \\
&= C \int_0^\infty |w_{k-1}(r)|^{q_{k-1}} r^\alpha \, dr.
\end{aligned}$$

Por isso,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |w_k''|^{q_{k-1}} r^\alpha \, dr &= \int_0^\infty \left| -\alpha r^{-(\alpha+1)} \int_0^r w_{k-1}(s) s^\alpha \, ds + w_{k-1} \right|^{q_{k-1}} r^\alpha \, dr \\
&\leqslant C \int_0^\infty \left| r^{-(\alpha+1)} \int_0^r w_{k-1}(s) s^\alpha \, ds \right|^{q_{k-1}} r^\alpha \, dr + C \int_0^\infty |w_{k-1}|^{q_{k-1}} r^\alpha \, dr \\
&\leqslant C \int_0^\infty |w_{k-1}(r)|^{q_{k-1}} r^\alpha \, dr,
\end{aligned}$$

o que prova (4.22). Para provar (4.23), usando Proposição 6-(a) com a escolha $\theta = \gamma = \alpha$, $m = 2$ e $p = q_{k-1} > 1$, para obtemos

$$\int_0^\infty |w_k(r)|^{q_k} r^\alpha \, dr \leqslant C \left(\int_0^\infty |w_k''(r)|^{q_{k-1}} r^\alpha \, dr \right)^{\frac{q_k}{q_{k-1}}}, \quad q_k = q_{k-1}^* := \frac{q_{k-1}(\alpha+1)}{\alpha - 2q_{k-1}+1}. \tag{4.24}$$

De (4.22) e (4.24) obtemos (4.23). Agora, a prova de (4.21) é dividida em duas partes. Se $m = 2l$ é um número par, (4.9) implica que $\nabla^m_\alpha w = \Delta^l_\alpha w = (-1)^l w_l$. Além disso, usando (4.23) temos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |w_l|^{q_l} r^\alpha \, dr &\leqslant C \left(\int_0^\infty |w_{l-1}|^{q_{l-1}} r^\alpha \, dr \right)^{\frac{q_l}{q_{l-1}}} \\ &\leqslant C \left(\int_0^\infty |w_{l-2}|^{q_{l-2}} r^\alpha \, dr \right)^{\frac{q_l}{q_{l-2}}} \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant C \left(\int_0^\infty |w_0|^{q_0} r^\alpha \, dr \right)^{\frac{q_l}{q_0}},\end{aligned} \tag{4.25}$$

o que produz

$$\int_0^\infty |\nabla^m_\alpha w|^2 r^\alpha \, dr = \int_0^\infty |\Delta^l_\alpha w|^2 r^\alpha \, dr \leqslant C \left(\int_0^\infty |u|^{2^*} r^\alpha \, dr \right)^{\frac{2}{q_0}} < \infty.$$

Se $m = 2l + 1$ for um número ímpar, (4.9) produz $\nabla^m_\alpha w = (\Delta^l_\alpha w)' = (-1)^l w'_{m-l} = (-1)^l w'_{l+1}$. Como em (4.25), temos

$$\int_0^\infty |w_l|^{q_l} r^\alpha \, dr \leqslant C \left(\int_0^\infty |u|^{2^*} r^\alpha \, dr \right)^{\frac{q_l}{q_0}}, \tag{4.26}$$

onde $q_l = q_{l-1}(\alpha + 1)/(\alpha - 2q_{l-1} + 1)$ e $q_0 = 2^*/(2^* - 1)$. Por outro lado, usando Proposição 6-(a) com $\theta = \gamma = \alpha$, $m = 1$ e $p = q_l > 1$, podemos escrever

$$\int_0^\infty |w'_{l+1}(r)|^{q^*_l} r^\alpha \, dr \leqslant C \left(\int_0^\infty \left|w''_{l+1}(r)\right|^{q_l} r^\alpha \, dr \right)^{\frac{q^*_l}{q_l}}, \quad q^*_l = \frac{q_l(\alpha + 1)}{\alpha - q_l + 1}. \tag{4.27}$$

De (4.22) com $k = l + 1$, podemos ver que

$$\int_0^\infty |w''_{l+1}(r)|^{q_l} r^\alpha \, dr \leqslant C \int_0^\infty |w_l(r)|^{q_l} r^\alpha \, dr. \tag{4.28}$$

Notando que $q^*_l = q_l(\alpha+1)/(\alpha - q_l + 1) = 2$, a estimativa (4.26), (4.27) e (4.28) implica que

$$\int_0^\infty |\nabla^m_\alpha w|^2 r^\alpha \, dr = \int_0^\infty |w'_{l+1}(r)|^{q^*_l} r^\alpha \, dr \leqslant C \left(\int_0^\infty |u|^{2^*} r^\alpha \, dr \right)^{\frac{q_l}{q_0}}.$$

Isto completa a prova de $w \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)$. A seguir, provaremos a identidade $u = w$. Primeiro, provaremos o seguinte

$$\int_0^\infty \nabla^m_\alpha w \nabla^m_\alpha v r^\alpha \, dr = \int_0^\infty |u|^{2^*-2} u v r^\alpha \, dr, \quad \text{para todo } v \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha). \tag{4.29}$$

Por densidade (cf. Lema 15), é suficiente mostrar (4.29) para $v \in \Upsilon$. Para cada $v \in \Upsilon$, usamos (4.7) e o teorema de Fubini, para $k = 1, \cdots, m$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty w_k'(\Delta_\alpha^{k-1} v)' r^\alpha \, dr &= -\int_0^\infty (\Delta_\alpha^{k-1} v)'(r) \left(\int_0^r w_{k-1}(s) s^\alpha \, ds \right) dr \\ &= -\int_0^\infty \int_0^r (\Delta_\alpha^{k-1} v)'(r) w_{k-1}(s) s^\alpha \, ds \, dr \\ &= \int_0^\infty w_{k-1}(s) s^\alpha \left(-\int_s^\infty (\Delta_\alpha^{k-1} v)'(r) \, dr \right) ds \\ &= \int_0^\infty w_{k-1}(s) \Delta_\alpha^{k-1} v(s) s^\alpha \, ds, \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde usamos que $(\Delta_\alpha^{k-1} v)(r)$ tem suporte compacto em $\mathbb{R}$. Além disso, temos

$$\lim_{r\to\infty} w_k(r) r^\alpha (\Delta_\alpha^{k-1} v)'(r) = 0$$

e de (4.6) também podemos concluir que (lembre-se $\alpha - 2m + 1 > 0$)

$$\lim_{r\to 0} w_k(r) r^\alpha (\Delta_\alpha^{k-1} v)'(r) = 0.$$

Assim, podemos aplicar a integração por partes para obter

$$\int_0^\infty w_k'(\Delta_\alpha^{k-1} v)' r^\alpha \, dr = -\int_0^\infty w_k [(\Delta_\alpha^{k-1} v)' r^\alpha]' \, dr = -\int_0^\infty w_k \Delta_\alpha^k v r^\alpha \, dr. \tag{4.31}$$

Combinando (4.30) e (4.31), segue-se que

$$\int_0^\infty w_k \Delta_\alpha^k v r^\alpha \, dr = -\int_0^\infty w_{k-1} \Delta_\alpha^{k-1} v r^\alpha \, dr, \quad k = 1, \cdots, m. \tag{4.32}$$

Por iteração (4.31) e (4.32), para $k = 1, \cdots, m$ podemos escrever

$$\int_0^\infty w_k \Delta_\alpha^k v r^\alpha \, dr = (-1)^k \int_0^\infty w_0 v r^\alpha \, dr, \tag{4.33}$$

$$\int_0^\infty w_k'(\Delta_\alpha^{k-1} v)' r^\alpha \, dr = (-1)^k \int_0^\infty w_0 v r^\alpha \, dr. \tag{4.34}$$

Primeiramente, suponha que $m = 2l$ seja um número inteiro par. De (4.9) com $j = l$ e $k = m$, $(-\Delta_\alpha)^l w = w_{m-l} = w_l$ e então $\Delta_\alpha^l w = (-1)^l w_l$. Portanto, por (4.33) temos

$$\int_0^\infty \nabla_\alpha^m w \nabla_\alpha^m v r^\alpha \, dr = \int_0^\infty \Delta_\alpha^l w \Delta_\alpha^l v r^\alpha \, dr = \int_0^\infty w_0 v r^\alpha \, dr, \quad \forall v \in \Upsilon. \tag{4.35}$$

Analogamente, se $m = 2l + 1$ é um número inteiro ímpar. De (4.9) também temos $(\Delta_\alpha^l w)' = (-1)^l w_{l+1}'$. Por (4.34) temos

$$\int_0^\infty \nabla_\alpha^m w \nabla_\alpha^m v r^\alpha \, dr = \int_0^\infty (\Delta_\alpha^l w)'(\Delta_\alpha^l v)' r^\alpha \, dr = \int_0^\infty w_0 v r^\alpha \, dr, \quad \forall v \in \Upsilon. \tag{4.36}$$

Assim, (4.29) segue de (4.35) e (4.36). Comparando (4.13) e (4.29), obtemos

$$\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}_\infty^{m,2}(\alpha)$$

que fornece $u = w$. □

4.2 Classificação

Definição 12. *Dizemos que uma solução* $u \in C^{2m}(0,\infty)$ *para* (4.1)*, é solução não singular em* 0*, se* $u(r) = O(1)$ *quando* $r \to 0^+$*. Caso contrário, dizemos que* u *é solução singular em* 0 *(ou seja,* $u(r) \to \infty$ *quando* $r \to 0^+$*).*

Nesta seção, apresentaremos a classificação das soluções positivas e não singulares para a equação (4.1), sob certas condições. Mencionamos que resultados de classificação foram estudados por vários autores, veja [3, 15, 20, 35, 50, 54, 67, 73] e suas citações. Para ilustrar, sejam $N > 2m$ e $p + 1 = 2N/(N - 2m)$, considere o problema

$$(-\Delta)^m u = u^p, \quad u > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \tag{4.37}$$

Em [73], os autores mostraram que todas as soluções não singulares u na origem para (4.37) (vale em todo o $\mathbb{R}^N$) são dadas por

$$u_\epsilon(|x|) = \left(\frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + |x - x_0|^2}\right)^{\frac{N-2m}{2}}, \quad \epsilon > 0 \text{ e } x_0 \in \mathbb{R}^N.$$

Por outro lado, os casos $m = 1, 2, 3$ foram analisados em [3, 50, 67], e foi estabelecido que se $u \in C^{2m}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ é uma solução singular para (4.37) obtemos que u é radialmente simétrico em relação à origem e monotonicamente decrescente e temos $u(|x|) = |x|^{-\frac{N-2m}{2}} v(-\ln|x|)$, onde v é periódico e limitado. Em geral, um resultado de classificação para uma solução singular em (4.37) com $m > 3$ é uma questão em aberto, como observado em [3, Conjecture 4].

O resultado a seguir estabelece uma classificação das soluções positivas não singulares $u \in C^{2m}(0,\infty)$ em (4.1), sob certas condições de fronteira na origem.

Teorema 8 (Classificação)**.** *Para cada* $\epsilon > 0$*, seja*

$$w_\epsilon(r) = \mathcal{P}^{\frac{\alpha-2m+1}{4m}} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + r^2}\right)^{\frac{\alpha-2m+1}{2}}, \quad r > 0 \tag{4.38}$$

onde $\mathcal{P} = P(\alpha, m) = \displaystyle\prod_{h=-m}^{m-1} (\alpha + 1 + 2h)$*. Seja* $v \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha) \cap C^{2m}(0,\infty)$ *uma solução positiva para a equação* (4.1) *tal que* $v^{(i)}(0) \in \mathbb{R}$ *para* $i = 0, 1, \cdots, 2m-1$*. Se* $v(0) > 0$ *e* $v^{(i)}(0) = 0$ *para* $i = 1, 3, \cdots, 2m-1$*, então* $v = w_\epsilon$ *para algum* $\epsilon > 0$*.*

Demonstração. Dividimos a prova do Teorema 8 nas seguintes etapas:

Etapa 1: Para cada $\epsilon > 0$, a função w_ϵ em (4.38) resolve a equação em (4.1), veja o Corolário 9 abaixo.

Etapa 2: Seja $v \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$ uma solução para (4.1) satisfazendo as condições do Teorema 8, então $v = w_\epsilon$ para algum $\epsilon > 0$, veja Lema 18 mais adiante.

É claro, que as etapas acima se complementam e juntas são suficientes para assegurar o Teorema 8. □

Destacamos que o Teorema 8 generaliza o resultado de classificação de J. Wei e X. Xu em [73, Teorema 1.3], porque o parâmetro α não é inteiro. O método usado para provar o Teorema 8 é diferente do método "moving plane"utilizado na situação clássica. Para provar o resultado de classificação, usamos algumas ideias contidas em [68] e [47].

4.2.1 Demonstração da Etapa 1

Por simplicidade, introduzimos a seguinte notação: Para números reais x, y e z, definição

$$\begin{aligned} A(x,y,z) &= x(x+y-1) + z(z-2x+1-y), \\ B(x,y,z) &= 2x(x+y-1) - z(2x+y+1), \\ C(x,y) &= x(x+y-1). \end{aligned}$$

Além disso, seja $\nu : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função auxiliar definida por

$$\nu(r) = r^{\rho}(1+r^2)^{-\frac{\sigma}{2}}, \tag{4.39}$$

onde $\rho \geqslant 0$ e $\sigma > 0$ serão escolhidos posteriormente. Com essa notação, temos:

Lema 17. *Para cada $\alpha > -1$, temos*

$$\Delta_\alpha \nu = (1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}}\left[r^{\rho+2}A(\rho,\alpha,\sigma) + r^{\rho}B(\rho,\alpha,\sigma) + r^{\rho-2}C(\rho,\alpha)\right].$$

Demonstração. Por um cálculo direto, obtemos

$$\nu'(r) = (1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}}\left[r^{\rho-1}\rho + r^{\rho+1}(2\rho-\sigma) + r^{\rho+3}(\rho-\sigma)\right]$$

e

$$\begin{aligned} \nu''(r) &= (1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}}\Big\{r^{\rho-2}\rho(\rho-1) + r^{\rho}[2\rho(\rho-1) - (2\rho+1)\sigma] \\ &+ r^{\rho+2}[\rho(\rho-1) - \sigma(\sigma-2\rho+1)]\Big\}. \end{aligned}$$

Por (1.9), segue

$$\begin{aligned}
\Delta_\alpha v &= (1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}}\big\{r^{\rho-2}[\rho(\rho-1)+\alpha\rho]+r^{\rho}[2\rho(\rho+\alpha-1)-\sigma(2\rho+\alpha+1)] \\
&\quad +r^{\rho+2}[\rho(\rho+\alpha-1)+\sigma(\sigma-2\rho+1-\alpha)]\big\} \\
&= (1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}}\big[r^{\rho+2}A(\rho,\alpha,\sigma)+r^{\rho}B(\rho,\alpha,\sigma)+r^{\rho-2}C(\rho,\alpha)\big].
\end{aligned}$$

□

Para declarar o próximo resultado, se faz necessário introduzir as seguintes notações: Para $i \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha > -1$ satisfazendo $\alpha - 2m + 1 > 0$ e $j = 1, \cdots, m$, definimos:

$$\begin{aligned}
D(i,j) &= \begin{cases} 0 & \text{se } i < 0 \text{ ou } i \geqslant j+1 \\ 1 & \text{se } i = 0 \\ \displaystyle\prod_{h=j-i+1}^{j}(m-h) & \text{se } 1 \leqslant i \leqslant j, \end{cases} \\
E(i,j) &= \begin{cases} \displaystyle\prod_{h=i}^{j-1}(\alpha+1+2h) & \text{se } 0 \leqslant i \leqslant j-1 \\ 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \geqslant j+1 \text{ ou } i < 0 \end{cases} \\
K_j &= \prod_{h=0}^{j-1}(\alpha-2m+1+2h), \\
G(i,j) &= 2^i\binom{j}{i}K_j D(i,j)E(i,j),
\end{aligned}$$

com

$$\binom{j}{i} = \begin{cases} \dfrac{j!}{i!(j-i)!} & \text{se } 0 \leqslant i \leqslant j \\ 0 & \text{se } i > j \text{ ou } i < 0, \end{cases}$$

onde $\ell!$ representa o fatorial.

Proposição 9. *Seja* $u : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$u(r) = (1+r^2)^{-\frac{\alpha-2m+1}{2}}. \tag{4.40}$$

Se $\alpha - 2m + 1 > 0$*, para cada* $j = 1, 2, \cdots, m$ *obtemos*

$$(-\Delta_\alpha)^j u = (1+r^2)^{-\frac{\alpha-2m+1+4j}{2}}\sum_{i=0}^{j} G(i,j) r^{2i}. \tag{4.41}$$

Demonstração. Fazemos indução sobre j. Para $j = 1$, escolhendo $\sigma = \alpha - 2m + 1$ e $\rho = 0$ no Lema 17, obtemos

$$\begin{aligned}-\Delta_\alpha u &= (1+r^2)^{-\frac{\alpha-2m+1+4}{2}}\left[2(\alpha-2m+1)(m-1)r^2 + (\alpha-2m+1)(\alpha+1)\right]\\ &= (1+r^2)^{-\frac{\alpha-2m+1+4}{2}}\sum_{i=0}^{1} G(i,j)r^{2i},\end{aligned}$$

o que implica que (4.41) é verdadeiro para $j = 1$. Por indução, suponha que (4.41) é verdadeiro para $1 \leqslant j < m-1$ e provaremos para $j+1$. Note que

$$(-\Delta_\alpha)^{j+1}u = -\sum_{i=0}^{j} G(i,j)\Delta_\alpha v_i, \quad \text{onde} \quad v_i(r) = r^{2i}(1+r^2)^{-\frac{\alpha-2m+1+4j}{2}}.$$

Usando o Lema 17 com $\rho = 2i$ e $\sigma = \alpha - 2m + 1 + 4j$, podemos escrever

$$\Delta_\alpha v_i = (1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}}\left[r^{2i+2}A(2i,\alpha,\sigma) + r^{2i}B(2i,\alpha,\sigma) + r^{2i-2}C(2i,\alpha)\right].$$

Note que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{j} G(i,j)r^{2i+2}A(2i,\alpha,\sigma) &= \sum_{i=1}^{j+1} G(i-1,j)A(2i-2,\alpha,\sigma)r^{2i}\\ \sum_{i=0}^{j} G(i,j)r^{2i-2}C(2i,\alpha) &= \sum_{i=-1}^{j-1} G(i+1,j)C(2i+2,\alpha)r^{2i}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{j} G(i,j)\Delta_\alpha v_i = (1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}} &\sum_{i=1}^{j+1} G(i-1,j)A(2i-2,\alpha,\sigma)r^{2i}\\ + (1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}} &\sum_{i=0}^{j} G(i,j)B(2i,\alpha,\sigma)r^{2i}\\ + (1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}} &\sum_{i=-1}^{j-1} G(i+1,j)C(2i+2,\alpha)r^{2i}.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Ainda, note que

$$G(-1,j) = G(j+1,j) = G(j+2,j) = C(0,\alpha) = 0. \tag{4.43}$$

Usando (4.42) em (4.43), podemos escrever

$$\sum_{i=0}^{j} G(i,j)\Delta_\alpha v_i = (1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}}\sum_{i=0}^{j+1} S(i,j)r^{2i},$$

onde

$$S(i,j) = G(i-1,j)A(2i-2,\alpha,\sigma) + G(i,j)B(2i,\alpha,\sigma) + G(i+1,j)C(2i+2,\alpha).$$

Assim,

$$(-\Delta_\alpha)^{j+1}u = -(1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}} \sum_{i=0}^{j+1} S(i,j) r^{2i}. \tag{4.44}$$

É fácil ver que

$$S(i,j) = K_j H(i,j),$$

onde

$$\begin{aligned} H(i,j) = {} & 2^{i-1}\binom{j}{i-1} D(i-1,j)E(i-1,j)A(2i-2,\alpha,\sigma) \\ & + 2^{i}\binom{j}{i} D(i,j)E(i,j)B(2i,\alpha,\sigma) \\ & + 2^{i+1}\binom{j}{i+1} D(i+1,j)E(i+1,j)C(2i+2,\alpha). \end{aligned} \tag{4.45}$$

Portanto, podemos reescrever (4.44) da seguinte maneira

$$(-\Delta_\alpha)^{j+1}u = -(1+r^2)^{-\frac{\sigma+4}{2}} K_j \sum_{i=0}^{j+1} H(i,j) r^{2i}. \tag{4.46}$$

Afirmação. Para cada $i = 0, 1, \cdots, j+1$, temos

$$G(i, j+1) = -K_j H(i,j). \tag{4.47}$$

De fato, dividimos a prova de (4.47) em quatro casos.

Caso 1: $i = 1, 2, \cdots, j-1$.

Por um cálculo direto, obtém-se

$$\begin{aligned} E(i-1,j) &= (\alpha+2i-1)(\alpha+2i+1)E(i+1,j), \\ E(i,j) &= (\alpha+2i+1)E(i+1,j), \\ D(i+1,j) &= (m-j+i)(m-j+i-1)D(i-1,j), \\ D(i,j) &= (m-j+i-1)D(i-1,j). \end{aligned}$$

Assim, (4.45) fornece que

$$\begin{aligned}
H(i,j) = D(i-1,j)E(i+1,j)\Bigg[&2^{i-1}\binom{j}{i-1}(\alpha+2i-1)(\alpha+2i+1)A(2i-2,\alpha,\sigma)\\
&+2^{i}\binom{j}{i}(\alpha+2i+1)(m-j+i-1)B(2i,\alpha,\sigma)\\
&+2^{i+1}\binom{j}{i+1}(m-j+i)(m-j+i-1)C(2i+2,\alpha)\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.48}$$

É fácil de ver que as seguintes identidades são válida:

$$\begin{aligned}
\binom{j}{i} &= \binom{j}{i-1}\frac{j-i+1}{i},\\
\binom{j}{i+1} &= \binom{j}{i-1}\frac{(j-i+1)(j-i)}{i(i+1)},\\
A(2i-2,\alpha,\sigma) &= 2(i-1)(2i+\alpha-3)+2(\alpha-2m+1+4j)(2j-2i-m+3),\\
B(2i,\alpha,\sigma) &= 4i(2i+\alpha-1)-(\alpha-2m+1+4j)(4i+\alpha+1),\\
C(2i+2,\alpha) &= 2(i+1)(\alpha+2i+1).
\end{aligned}$$

Por isso, (4.48) implica que

$$\begin{aligned}
H(i,j) &= \frac{2^i}{i}\binom{j}{i-1}D(i-1,j)E(i+1,j)(\alpha+2i+1)\times\\
&\Bigg\{\ i(\alpha+2i-1)\big[(i-1)(2i+\alpha-3)+(\alpha-2m+1+4j)(2j-2i-m+3)\big]\\
&+\ (j-i+1)(m-j+i-1)\big[4i(2i+\alpha-1)-(\alpha-2m+1+4j)(4i+\alpha+1)\big]\\
&+\ 4(m-j+i)(m-j+i-1)(j-i)(j-i+1)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Ao organizar os termos entre parênteses, podemos escrever

$$H(i,j) = \frac{2^i}{i}\binom{j}{i-1}D(i-1,j)E(i+1,j)(\alpha+2i+1)\left[(\alpha+1)^2L_j+(\alpha+1)M_j+Q_j\right], \tag{4.49}$$

onde

$$\begin{aligned}
L_j &= -(j+1)(m-j-1),\\
M_j &= 2(j+1)(m-j-1)(m-2j),\\
Q_j &= 4j(j+1)(m-j-1)(m-j).
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+1)^2 L_j + (\alpha+1)M_j + Q_j = -(j+1)(m-j-1)(\alpha+2j+1)(\alpha-2m+2j+1),\\
&\binom{j}{i-1} = \binom{j+1}{i}\frac{i}{j+1},\\
&D(i,j+1) = D(i-1,j)(m-j-1),\\
&E(i,j+1) = (\alpha+2i+1)(\alpha+2j+1)E(i+1,j).
\end{aligned}
$$

Assim, (4.49) assegura que

$$
H(i,j) \quad = \quad -2^i\binom{j+1}{i}(\alpha-2m+2j+1)D(i,j+1)E(i,j+1). \tag{4.51}
$$

É fácil de ver que

$$
\begin{aligned}
K_{j+1} &= (\alpha-2m+2j+1)K_j,\\
G(i,j+1) &= 2^i\binom{j+1}{i}K_{j+1}D(i,j+1)E(i,j+1).
\end{aligned}
$$

Combinando as identidades acima com (4.51), segue

$$
G(i,j+1) = -K_j H(i,j), \quad \forall\, i = 1,2,\cdots,j-1.
$$

Caso 2: $i = 0$

Podemos reescrever (4.45), como

$$
H(0,j) = D(0,j)E(0,j)B(0,\alpha,\sigma) + 2jD(1,j)E(1,j)C(2,\alpha). \tag{4.52}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
&B(0,\alpha,\sigma) = -(\alpha+1)(\alpha+1-2m+4j), \;\; C(2,\alpha) = 2(\alpha+1) \;\text{ e }\; D(0,j) = 1,\\
&D(1,j) = m-j, \;\; E(0,j) = (\alpha+1)E(1,j) \;\text{ e }\; E(0,j+1) = (\alpha+1+2j)E(0,j).
\end{aligned}
$$

Então, (4.52) implica que

$$
\begin{aligned}
H(0,j) &= E(0,j)\left[-(\alpha+1)(\alpha+1-2m+4j) + 4j(m-j)\right]\\
&= -E(0,j)(\alpha+1+2j)(\alpha+1-2m+2j)\\
&= -E(0,j+1)(\alpha+1-2m+2j).
\end{aligned} \tag{4.53}
$$

Ainda, note que

$$
K_{j+1} = (\alpha+1-2m+2j)K_j \quad \text{e} \quad G(0,j+1) = K_{j+1}E(0,j+1).
$$

Por isso, (4.53) assegura que $G(0,j+1) = -K_j H(0,j)$.

Caso 3: $i = j$.

Por (4.45), segue

$$H(j,j) = 2^{j-1} j D(j-1,j) E(j-1,j) A(2j-2,\alpha,\sigma) + 2^j D(j,j) E(j,j) B(2j,\alpha,\sigma). \tag{4.54}$$

Note que

$$\begin{aligned}
&E(j-1,j) = \alpha + 2j - 1, \quad E(j,j) = 1 \text{ e } D(j,j) = (m-1)D(j-1,j),\\
&A(2j-2,\alpha,\sigma) = 2(j-1)(\alpha+2j-3) + 2(\alpha-2m+4j+1)(3-m),\\
&B(2j,\alpha,\sigma) = 4j(\alpha+2j-1) - (\alpha-2m+4j+1)(4j+\alpha+1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
H(j,j) = 2^j D(j-1,j)\Big\{ & j(\alpha+2j-1)\big[(j-1)(\alpha+2j-3) + (\alpha-2m+4j+1)(3-m)\big]\\
&+ (m-1)\big[4j(\alpha+2j-1) - (\alpha-2m+4j+1)(\alpha+4j+1)\big]\Big\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& j(\alpha+2j-1)\big[(j-1)(\alpha+2j-3) + (\alpha-2m+4j+1)(3-m)\big]\\
&+ (m-1)\big[4j(\alpha+2j-1) - (\alpha-2m+4j+1)(\alpha+4j+1)\big]\Big\}
\end{aligned}$$

Organizando os termos, podemos escrever

$$H(j,j) = 2^j D(j-1,j)[(\alpha+1)^2 L_j + (\alpha+1) M_j + Q_j], \tag{4.55}$$

onde L_j, M_j e Q_j são definidos em (4.50). Por um cálculo direto, temos

$$\begin{aligned}
&(\alpha+1)^2 L_j + (\alpha+1) M_j + Q_j = -(j+1)(m-j-1)(\alpha+2j+1)(\alpha-2m+2j+1),\\
&D(j,j+1) = (m-j-1)D(j-1,j),\\
&E(j,j+1) = (\alpha+2j+1),\\
&K_{j+1} = (\alpha+1-2m+2j)K_j,\\
&G(j,j+1) = K_{j+1} 2^j (j+1) K_j D(j,j+1) E(j,j+1).
\end{aligned}$$

Combinando as identidades acima com (4.55), obtemos $G(j,j+1) = -K_j H(j,j)$.

Caso 4: $i = j+1$.

Nesse caso, (4.45) fornece que

$$H(j+1,j) = 2^j D(j,j) E(j,j) A(2j,\alpha,\sigma). \tag{4.56}$$

Note que

$$A(2j,\alpha,\sigma) = 2j(2j+\alpha-1) + 2(\alpha-2m+4j+1)(1-m) \quad \text{e} \quad E(j,j) = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} H(j+1,j) &= 2^{j+1}D(j,j)[j(2j+\alpha-1) + (\alpha-2m+4j+1)(1-m)] \\ &= -2^{j+1}D(j,j)(\alpha-2m+2j+1)(m-j-1) \end{aligned} \tag{4.57}$$

Ainda, note que

$$\begin{aligned} G(j+1,j+1) &= 2^{j+1}K_{j+1}D(j+1,j+1) \\ D(j+1,j+1) &= (m-j-1)D(j,j) \quad \text{e} \quad K_{j+1} = (\alpha+1-2m+2j)K_j. \end{aligned}$$

Combinando as identidades acima com (4.57), obtemos

$$G(j+1,j+1) = -K_jH(j+1,j).$$

Finalmente, usando (4.46) e (4.47) segue que (4.41) é verdadeiro para $j+1$. □

Corolário 7. *Seja u como em (4.40). Então,*

$$(-\Delta_\alpha)^m u = \mathcal{P}\cdot(1+r^2)^{-\frac{\alpha+2m+1}{2}}, \tag{4.58}$$

onde $\mathcal{P} = \displaystyle\prod_{h=-m}^{m-1}(\alpha+1+2h)$.

Demonstração. Escolhendo $j=m$ na Proposição 9, então

$$(-\Delta_\alpha)^m u = (1+r^2)^{-\frac{\alpha+2m+1}{2}}\sum_{i=0}^{m}G(i,m)r^{2i}. \tag{4.59}$$

Adicionalmente,

$$G(0,m) = K_mE(0,m) = \mathcal{P} \quad \text{e} \quad G(i,m) = 0,\ \forall i = 1,2,\cdots,m. \tag{4.60}$$

Usando (4.59) e (4.60), obtemos (4.58). □

Corolário 8. *A função w dada por*

$$w(r) = \mathcal{P}^{\frac{\alpha-2m+1}{4m}}(1+r^2)^{-\frac{\alpha-2m+1}{2}}, \quad r>0 \tag{4.61}$$

é uma solução positiva para a equação em (4.1).

Demonstração. Note que

$$w(r) = \mathcal{P}^{\frac{\alpha-2m+1}{4m}} u(r) \quad \text{e} \quad 2^* - 1 = \frac{\alpha+2m+1}{\alpha-2m+1}.$$

Utilizando Corolário 7, tem-se

$$(-\Delta_\alpha)^m w = \mathcal{P}^{\frac{\alpha-2m+1}{4m}} (-\Delta_\alpha)^m u = \mathcal{P}^{\frac{\alpha+2m+1}{4m}} \cdot (1+r^2)^{-\frac{\alpha+2m+1}{2}} = w^{2^*-1}.$$

□

Corolário 9. *Para cada $\epsilon > 0$, a função w_ϵ definida em (4.38) é uma solução positiva para a equação em (4.1).*

Demonstração. Primeiro, podemos reescrever $w_\epsilon(r) = \epsilon^{-\frac{\alpha+1}{2^*}} w(r\epsilon^{-1})$, onde w é dada em (4.61). Por indução em m, temos

$$(-\Delta_\alpha)^m w_\epsilon(r) = \epsilon^{-(\frac{\alpha+1}{2^*}+2m)} (-\Delta_\alpha)^m w(r\epsilon^{-1}).$$

Usando o Corolário 8, podemos ver

$$(-\Delta_\alpha)^m w_\epsilon(r) = \epsilon^{-\frac{\alpha+2m+1}{2}} w^{2^*-1}(r\epsilon^{-1}) = \epsilon^{-\frac{\alpha+1}{2^*}(2^*-1)} w^{2^*-1}(r\epsilon^{-1}) = w_\epsilon^{2^*-1}(r).$$

□

4.2.2 Demonstração da Etapa 2

Inspirados em [47, Lemma 2.2], podemos obter uma classificação de solução positiva da equação (4.1) em $\mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha) \cap C^{2m}(0,\infty)$.

Lema 18. *Seja $v \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha) \cap C^{2m}(0,\infty)$ uma solução positiva para a equação (4.1) tal que $v^{(i)}(0) \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, \cdots, 2m-1$. Suponha que $v(0) > 0$ e $v^{(i)}(0) = 0$ para $i = 1, 3, \cdots, 2m-1$, então $v = w_\epsilon$ com w_ϵ definida em (4.38).*

Demonstração. Para cada $\epsilon > 0$, pelo Corolário 9 tem-se que w_ϵ resolve (4.1) com $w_\epsilon(0) = (\mathcal{P}^{1/2m}/\epsilon)^{\frac{\alpha-2m+1}{2}}$. De $v(0) > 0$, podemos escolher $\bar{\epsilon} > 0$ tal que $w_{\bar{\epsilon}}(0) = v(0)$. Usando Lema 8, todas as soluções $y \in AC^{2m-1}_{loc}(0,\infty)$ de (4.1) satisfaz a equação

$$(-1)^m y^{(2m)} = y|y|^{\frac{4m}{\alpha-2m+1}} + (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{2m-1} c_i \frac{y^{(2m-i)}}{r^i}, \quad r \in (0,\infty)$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$. Assim, podemos considerar o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (-1)^m y^{(2m)} = y|y|^{\frac{4m}{\alpha-2m+1}} + (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{2m-1} c_i \dfrac{y^{(2m-i)}}{r^i}, & r > 0 \\ y^{(i)}(0) = v^{(i)}(0), \quad \text{para } i = 0, 2, \cdots, 2m-2 \\ y^{(i)}(0) = 0, \quad \text{para } i = 1, 3, \cdots 2m-1. \end{cases} \tag{4.62}$$

Por unicidade de solução do problema (4.62), é suficiente provar que

$$w_{\bar{\epsilon}}^{(i)}(0) = v^{(i)}(0), \quad \forall\ i = 2, 4, \cdots, 2m-2. \tag{4.63}$$

Por contradição, assumimos que existe $I \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$ tal que

$$w_{\bar{\epsilon}}^{(2I)}(0) \neq v^{(2I)}(0) \quad \text{e} \quad w_{\bar{\epsilon}}^{(2i)}(0) = v^{(2i)}(0) \quad \text{para } i > I.$$

Seja $g = w_{\bar{\epsilon}} - v$. Então, g satisfaz o novo problema de valor inicial

$$\begin{cases} Ly = f \\ y^{(i)}(0) = g^{(i)}(0), \quad \text{para } i = 0, 2, \cdots, 2m-2 \\ y^{(i)}(0) = 0, \quad \text{para } i = 1, 3, \cdots, 2m-1, \end{cases} \tag{4.64}$$

onde

$$\begin{cases} Ly = (-\Delta_\alpha)^m y, \quad r > 0 \\ f = w_{\bar{\epsilon}}^q - v^q, \quad q = \dfrac{\alpha + 2m + 1}{\alpha - 2m + 1}. \end{cases}$$

O conjunto fundamental de soluções para equação homogênea $Ly = 0$ é

$$\{1, r^{-(\alpha-1)}, r^2, r^{-(\alpha-3)}, \cdots, r^{2(m-1)}, r^{-(\alpha-2m+1)}\}.$$

Usando o método de variação de parâmetros, podemos construir uma solução particular $\bar{y}$ para a equação não homogênea $Ly = f$ da forma

$$\begin{aligned} \bar{y}(r) &= \sum_{i=1}^{m} A_i r^{2(i-1)} \int_0^r t^{2(m-i)+1} f(t)\, dt \\ &+ \sum_{i=1}^{m} A_{m+i} r^{-(\alpha-2i+1)} \int_0^r t^{\alpha+2(m-i)} f(t)\, dt, \end{aligned} \tag{4.65}$$

onde $A_1, A_2, \cdots, A_{2m}$ são constantes que dependem apenas de α e m. Portanto, qualquer solução y de (4.64) pode ser escrita da forma

$$y = \sum_{i=1}^{m} B_i r^{2(i-1)} + \sum_{i=1}^{m} B_{m+i} r^{-(\alpha-2i+1)} + \bar{y}, \tag{4.66}$$

onde $B_1, B_2, \cdots, B_{2m}$ satisfaz as condições iniciais.

Afirmação. Para cada $i = 1, 2, \cdots, m$, temos $B_{m+i} = 0$.

Por contradição, suponha que existe $I \in \{1, 2, \cdots, m\}$ tal que $B_{m+I} \neq 0$ e $B_{m+i} = 0$ para $i > I$. Usando $y(0) = \bar{y}(0) = 0$, obtemos

$$B_1 = -\lim_{r\to 0} \frac{B_{m+1} + B_{m+2}r^2 + \cdots + B_{m+I}r^{2(I-1)}}{r^{\alpha-1}} = \infty, \quad \alpha > 2I - 1.$$

Essa contradição completa a prova da afirmação, desde que $B_1 \in \mathbb{R}$. Combinando afirmação acima e (4.66), podemos escrever

$$y = B_1 + B_2 r^2 + \cdots + B_m r^{2(m-1)} + \bar{y}.$$

Como g satisfaz (4.64), obtemos

$$g(r) = \sum_{i=1}^{I} \frac{g^{(2i)}(0)}{(2i)!} r^{2i} + \bar{y}(r). \tag{4.67}$$

Desde que $w_{\bar{\epsilon}}, v \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$, pelo Lema 14 segue que

$$|v(r)| \leqslant C_1 r^{-\frac{(\alpha-2m+1)}{2}} \|v\|_{\nabla^m_\alpha} \quad \text{e} \quad |w_{\bar{\epsilon}}(r)| \leqslant C_2 r^{-\frac{(\alpha-2m+1)}{2}} \|w_{\bar{\epsilon}}\|_{\nabla^m_\alpha}, \quad \forall\, r > 0. \tag{4.68}$$

Usando que $f = w^q_{\bar{\epsilon}} - v^q$ com $q = \frac{\alpha+2m+1}{\alpha-2m+1}$ e (4.68) em (4.65), podemos ver

$$|\bar{y}(r)| \leqslant C r^{2m - \frac{(\alpha+2m+1)}{2}},$$

para algum $C = C(\alpha, m) > 0$ e $r > 1$. Assim, $\bar{y}(r) \to 0$ quando $r \to \infty$ e portanto por (4.67) segue que $|g(r)| \to \infty$ quando $r \to \infty$. Por outro lado, desde que $g = w_{\bar{\epsilon}} - v$ e $w_{\bar{\epsilon}}, v$ são limitadas em $(0, \infty)$, então g é limitada. Essa contradição completa a prova do lema. □

4.3 O valor de $\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty)$

Nessa seção, desejamos calcular explicitamente a melhor constante $\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty)$. Porém, chamamos a atenção para uma dificuldade adicional com a qual temos que lidar em $\mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$, a saber:

Problema 1: *Para $m \geqslant 1$, se $z \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$ é um minimizante para $\mathcal{S}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty)$ então z é uma função singular ou não singular?*

Para explorar esse problema, ilustraremos duas situações. Primeiro, de acordo com [68], os minimizantes z para o problema variacional associado à imersão Sobolev clássica

$\mathcal{D}^{m,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ são funções não singulares. Adicionalmente, eles usam a forma explícita dos minimizantes para calcular a melhor constante em $\mathcal{D}^{m,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Em segundo lugar, no caso particular $m = 1$, por meio da clássica desigualdade de Bliss [12], P. Mitidieri et al. [59, Proposição 1.4] foram capazes de mostrar que $\mathcal{S}(1, 2, \alpha, \alpha, \infty)$ é atingida pelas funções de Bliss

$$u(r) = \mathcal{P}^{\frac{\alpha-1}{4}}(1 + r^2)^{-\frac{\alpha-1}{2}}, \quad r > 0 \tag{4.69}$$

onde $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\alpha, 1) = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$. Além disso,

$$\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}(1, 2, \alpha, \alpha, \infty) = \mathcal{P}^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{2\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}}, \tag{4.70}$$

onde $\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1} dt$, $x > 0$ é a função gama de Euler. É claro que as funções de Bliss são não singulares. Por fim, observamos que no caso geral $m > 1$, esse problema está em aberto. Embora algumas situações específicas indiquem que as minimizantes são funções não singulares.

Voltando à ideia inicial, a fim de calcular $\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty)$, introduzimos a hipótese:

(H) existe $z \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)$ minimizante para $\mathcal{S}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty)$ satisfazendo

$$z^{(i)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{para } i = 1, 3, \ldots, 2m - 1, \\ c_i & \text{para } i = 0, 2, \cdots, 2m - 2 \end{cases}$$

para algum $c_i \in \mathbb{R}$.

É importante destacar que a hipótese **(H)** não é vazia. De fato, note que nas situações $\alpha = N - 1$ ou $m = 1$, a hipótese **(H)** é satisfeita.

Inspirados por [51, Lemma 7.22], estabelecemos uma estimativa para soluções que mudam de sinal em (4.1). Esse resultado será útil para determinar o sinal de um minimizante.

Lema 19. *Assuma que existe uma solução nodal* $u \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha)$ *para* (4.1)*. Então,*

$$\|u\|^2_{\nabla^m_\alpha} \geqslant 2^{\frac{2m}{\alpha+1}} \mathcal{S} \|u\|^2_{L^{2^*}_\alpha}, \tag{4.71}$$

onde $\mathcal{S}$ *é definido em* (3.1).

Demonstração. Seja

$$\mathcal{H} = \{u \in \mathcal{D}^{m,2}_\infty(\alpha) : u \geqslant 0 \quad \text{q.t.p. em } (0, \infty)\}$$

um cone convexo fechado não vazio e seu cone dual dado por

$$\mathcal{H}^* = \{u \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha) : \langle u, v\rangle \leqslant 0, \ \ \forall\, v \in \mathcal{H}\}.$$

Afirmação.

$$\mathcal{H}^* \subseteq -\mathcal{H}. \tag{4.72}$$

De fato, seja $\varphi \in \mathcal{H} \cap \Upsilon$ com $\Upsilon = \{u_{|_{[0,\infty)}} \ : \ u \in C^{\infty}_{c}(\mathbb{R})\}$. Considere o problema

$$(-\Delta_\alpha)^m y = \varphi \ \text{ em } \ (0, \infty). \tag{4.73}$$

Pelo teorema da representação de Riesz, existe uma única solução fraca $y_\varphi \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$ para (4.73). O mesmo argumento usado na prova do Teorema 7 permite concluir que $y_\varphi \in C^{2m}(0,\infty)$ e satisfaz (4.73) no sentido usual e as condições de contorno

$$\lim_{r\to 0} r^\alpha \Delta^j_\alpha y_\varphi(r) = \lim_{r\to 0} r^\alpha((\Delta_\alpha)^j y_\varphi)'(r) = 0, \ \text{ para } \ j = 0, 1, \cdots, m-1 \tag{4.74}$$

e

$$\lim_{r\to\infty} \Delta^j_\alpha y_\varphi(r) = \lim_{r\to\infty} ((\Delta_\alpha)^j y_\varphi)'(r) = 0, \ \text{ para } \ j = 0, 1, \cdots, m. \tag{4.75}$$

Em ordem para provar que y_φ preserva o sinal de φ, podemos reescrever (4.73) como o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_\alpha y_k = y_{k+1}, & \text{para } \ k = 0, 1, \ldots, m-2, \\ -\Delta_\alpha y_{m-1} = \varphi, & \text{em } \ (0,\infty), \end{cases} \tag{4.76}$$

onde $y_k = (-\Delta_\alpha)^k y$ com $y \in C^{2m}(0,\infty) \cap \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$ satisfazendo (4.74) e (4.75). Usando (4.76) e (4.74), temos

$$y'_{m-1}(r) = -\frac{1}{r^\alpha}\int_0^r \varphi(s) s^\alpha \, ds, \ \text{ para } \ r > 0.$$

Desde $\varphi \geqslant 0$ em $(0,\infty)$, obtemos y_{m-1} é uma função não crescente em $(0,\infty)$. De (4.75), temos

$$\lim_{r\to\infty} y_{m-1}(r) = 0,$$

o que implica $y_{m-1} \geqslant 0$ em $(0,\infty)$. Agora, para cada $k = 0, 1, 2, \ldots, m-2$, usando (4.76) e (4.74), obtemos

$$y'_k(r) = -\frac{1}{r^\alpha}\int_0^r y_{k+1}(s) s^\alpha \, ds \quad \text{em } (0,\infty). \tag{4.77}$$

Assim, $y_{m-1} \geqslant 0$ e (4.77) fornece que y_{m-2} não crescente em $(0,\infty)$ e (4.75) implica $y_{m-2} \geqslant 0$ em $(0,\infty)$. Repetindo o argumento, obtemos que as funções $y_{m-3}, \ldots, y_2, y_1, y_0$

são não negativas em $(0,\infty)$. Assim, desde $y_0 = y_\varphi$ e $y_{k+1} = -\Delta_\alpha y_k$, $k = 0, 1, \ldots, m-2$ resolve o sistema (4.76), podemos garantir que $y_\varphi \geqslant 0$ ou $y_\varphi \in \mathcal{H}$. Agora, para qualquer $w \in \mathcal{H}^*$, temos $\langle w, y_\varphi\rangle \leqslant 0$. Usando que y_φ é solução fraca de (4.73), podemos obter que

$$\int_0^\infty w\varphi r^\alpha \, dr = \langle w, y_\varphi\rangle \leqslant 0, \quad \text{para todo} \;\; \varphi \in \mathcal{H} \cap \Upsilon,$$

o que implica que $w \leqslant 0$ em $(0,\infty)$ ou $w \in -\mathcal{H}$ como afirmado em (4.72). Seja u uma solução fraca e nodal de (4.1), pela decomposição de um espaço de Hilbert em cones duais devido a Moreau [60] (veja Teorema 3) existe um único par $(u_1, u_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ satisfazendo

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{e} \quad \langle u_1, u_2\rangle = 0. \tag{4.78}$$

Afirmação. Para cada $i = 1, 2$, temos

$$u_i \not\equiv 0 \quad \text{e} \quad |u|^{2^*-2} u u_i \leqslant |u_i|^{2^*} \;\; \text{q.t.p. em } (0,\infty). \tag{4.79}$$

De fato, desde u muda de sinal, (4.72) fornece que $u_i \not\equiv 0$, para $i = 1, 2$. Para provar a segunda parte de (4.79), primeiro analisamos $i = 1$ e avaliamos dois casos. Se $r \in (0,\infty)$ tal que $u(r) \leqslant 0$, então (4.79) é trivial. Por outro lado, desde (4.72) segue $u_2 \leqslant 0$, se $u(r) \geqslant 0$, obtemos $u(r) = u_1(r) + u_2(r) \leqslant u_1(r)$ e (4.79) é válido mais uma vez. O caso $i = 2$ é similar. Usando (3.1), (4.78) e (4.79), para $i = 1, 2$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\|u_i\|^2_{L^{2^*}_\alpha} &\leqslant \|u_i\|^2_{\nabla^m_\alpha} = \langle u, u_i\rangle_{\nabla^m_\alpha} = \int_0^\infty |u|^{2^*-2} u u_i r^\alpha \, dr \\ &\leqslant \int_0^\infty |u_i|^{2^*} r^\alpha \, dr = \|u_i\|^{2^*}_{L^{2^*}_\alpha}, \end{aligned}$$

o que implica

$$\mathcal{S}^{\frac{\alpha-2m+1}{2m}} \leqslant \|u_i\|^2_{L^{2^*}_\alpha}, \quad \text{para } i = 1, 2. \tag{4.80}$$

De (4.13) com $v = u$, podemos deduzir

$$\|u\|^2_{\nabla^m_\alpha} = \|u\|^{2^*}_{L^{2^*}_\alpha}. \tag{4.81}$$

Com auxílio de (3.1), (4.81), (4.78) e (4.80), temos

$$\begin{aligned} \frac{\|u\|^2_{\nabla^m_\alpha}}{\|u\|^2_{L^{2^*}_\alpha}} &= \left(\|u\|^2_{\nabla^m_\alpha}\right)^{\frac{2m}{\alpha+1}} = \left(\|u_1\|^2_{\nabla^m_\alpha} + \|u_2\|^2_{\nabla^m_\alpha}\right)^{\frac{2m}{\alpha+1}} \\ &\geqslant \left(\mathcal{S}\|u_1\|^2_{L^{2^*}_\alpha} + \mathcal{S}\|u_2\|^2_{L^2_\alpha}\right)^{\frac{2m}{\alpha+1}} \geqslant \mathcal{S}2^{\frac{2m}{\alpha+1}}, \end{aligned}$$

o que implica (4.71). $\square$

Como aplicação do Teorema 8, podemos determinar a forma explícita das funções positivas não singulares que são minimizantes para $\mathcal{S}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty)$.

Corolário 10. *Assuma* ***(H)****. Então, uma função positiva* $z \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$ *satisfaz* ***(H)*** *se, e somente se,* $z = w_\epsilon$ *para algum* $\epsilon > 0$.

Demonstração. Pela hipótese **(H)**, temos que $\mathcal{S}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty)$ é atingida por $z \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$ uma função extremal não singular. Pelo Teorema 7, temos $z \in C^{2m}(0, \infty)$ é solução de (4.1). Combinando isso com o Lema 19, obtemos que z tem um sinal, então escolhemos $z > 0$. Assim, pelo Teorema 8 segue que $z = w_{\bar{\epsilon}}$, para algum $\bar{\epsilon} > 0$. Em ordem para provar a recíproca, podemos usar **(H)** para tomar u_0 uma minimizante não singular para $\mathcal{S}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty)$ com $\|u_0\|_{L^{2^*}_\alpha} = 1$. Pelo teorema do multiplicador de Lagrange, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$2\int_0^\infty \nabla^m_\alpha u_0 \nabla^m_\alpha v r^\alpha \, dr = \mu 2^* \int_0^\infty |u_0|^{2^*-2} u_0 v r^\alpha \, dr, \quad \text{para todo } \; v \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha). \tag{4.82}$$

Usando $v = u_0$ como função teste em (4.82), podemos concluir que $\mu = 2\mathcal{S}/2^*$. Em particular, a função $u_{\mathcal{S}} := \mathcal{S}^{\frac{1}{2^*-2}} u_0$ satisfaz a equação

$$(-\Delta_\alpha)^m u_{\mathcal{S}} = |u_{\mathcal{S}}|^{2^*-2} u_{\mathcal{S}} \;\text{ em }\; (0, \infty).$$

Pelo Teorema 8, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $w_{\epsilon_0} = u_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^{\frac{1}{2^*-2}} u_0$. Assim,

$$\frac{\|\nabla^m_\alpha w_{\epsilon_0}\|_{L^2_\alpha}}{\|w_{\epsilon_0}\|_{L^{2^*}_\alpha}} = \|\nabla^m_\alpha u_0\|_{L^2_\alpha} = \mathcal{S}^{\frac{1}{2}}.$$

Daí, w_{ϵ_0} é um minimizante.

Afirmação. Ambos $\|\nabla^m_\alpha w_\epsilon\|_{L^2_\alpha}$ e $\|w_\epsilon\|_{L^{2^*}_\alpha}$ não dependem de $\epsilon > 0$.

De fato, note que

$$w_\epsilon(r) = \mathcal{P}^{\frac{\alpha-2m+1}{4m}} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + r^2}\right)^{\frac{\alpha-2m+1}{2}} = \mathcal{P}^{\frac{\alpha-2m+1}{4m}} \left[\epsilon^{-\frac{\alpha+1}{2^*}} u\left(\frac{r}{\epsilon}\right)\right], \tag{4.83}$$

onde u é definida em (4.40). Pela mudança de variável $s = r/\epsilon$, segue

$$\|w_\epsilon\|_{L^{2^*}_\alpha} = \mathcal{P}^{\frac{\alpha-2m+1}{4m}} \|u\|_{L^{2^*}_\alpha}, \quad \text{para todo } \; \epsilon > 0.$$

Além disso, é fácil verificar que (cf. Lema 11) para qualquer $j \in \mathbb{N}$, temos

$$(-\Delta_\alpha)^j \left[\epsilon^{-\frac{\alpha+1}{2^*}} u\left(\frac{r}{\epsilon}\right)\right] = \epsilon^{-(\frac{\alpha+1}{2^*}+2j)} [(-\Delta_\alpha)^j u](r/\epsilon) \tag{4.84}$$

e

$$\left((-\Delta_\alpha)^j\left[\epsilon^{-\frac{\alpha+1}{2^*}}u(\frac{r}{\epsilon})\right]\right)' = \epsilon^{-(\frac{\alpha+1}{2^*}+2j+1)}[(-\Delta_\alpha)^j u]'(r/\epsilon). \tag{4.85}$$

Fazendo $s = r/\epsilon$ e usando (4.83), (4.85) e (4.85), obtemos

$$\|\nabla_\alpha^m w_\epsilon\|_{L^2_\alpha} = \mathcal{P}^{\frac{\alpha-2m+1}{4m}}\|\nabla_\alpha^m u\|_{L^2_\alpha}, \text{ for all } \epsilon > 0.$$

Isso completa a prova da afirmação. Portanto,

$$\frac{\|\nabla_\alpha^m w_\epsilon\|_{L^2_\alpha}}{\|w_\epsilon\|_{L^{2^*}_\alpha}} = \frac{\|\nabla_\alpha^m w_{\epsilon_0}\|_{L^2_\alpha}}{\|w_{\epsilon_0}\|_{L^{2^*}_\alpha}} = \mathcal{S}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para todo } \epsilon > 0.$$

□

É interessante dizer que o corolário 10 traz um avanço parcial no **problema 1** para $m > 1$.

Seja $\eta \in C_c^\infty(0,1)$ uma função cut-off satisfazendo

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1 \quad \text{e} \quad \eta(r) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 < r \leqslant 1/2 \\ 0, & \text{se} \quad 3/2 < r < 1. \end{cases} \tag{4.86}$$

Lema 20. *Assuma **(H)** e seja w_ϵ como em (4.38). As estimativas são válidas:*

(a) $\displaystyle\int_0^\infty |w_\epsilon|^{2^*} r^\alpha\, dr = \mathcal{S}^{\frac{\alpha+1}{2m}} = \int_0^\infty |\nabla_\alpha^m w_\epsilon|^2 r^\alpha\, dr, \quad \forall \epsilon > 0,$

(b) $\displaystyle\int_0^1 |\nabla_\alpha^m(\eta w_\epsilon)|^2 r^\alpha\, dr = \mathcal{S}^{\frac{\alpha+1}{2m}} + O(\epsilon^{\alpha-2m+1})_{\epsilon\searrow 0},$

(c) $\displaystyle\int_0^1 |\eta w_\epsilon|^{2^*} r^\alpha\, dr = \mathcal{S}^{\frac{\alpha+1}{2m}} + O(\epsilon^{\alpha+1})_{\epsilon\searrow 0}.$

Demonstração. Desde w_ϵ é um minimizante para $\mathcal{S} = \mathcal{S}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty)$, então

$$\mathcal{S}^{1/2} = \left\|\frac{w_\epsilon}{\|w_\epsilon\|_{L^{2^*}_\alpha}}\right\|_{\nabla_\alpha^m} = \frac{\|w_\epsilon\|_{\nabla_\alpha^m}}{\|w_\epsilon\|_{L^{2^*}_\alpha}}.$$

Por integração por partes, podemos ver que

$$\|w_\epsilon\|^2_{\nabla_\alpha^m} = \|w_\epsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}_\alpha}.$$

Assim,

$$\mathcal{S}^{1/2} = \|w_\epsilon\|^{2^*/2-1}_{L^{2^*}_\alpha} \quad \text{e} \quad \mathcal{S}^{1/2} = \|w_\epsilon\|^{1-2/2^*}_{\nabla_\alpha^m}.$$

Note que

$$\frac{1}{2^*}\left(\frac{2^*}{2} - 1\right) = \frac{m}{\alpha+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2^*}\right).$$

Isto completa a prova da parte (a). Em ordem para provar o item (b), para cada $j = 0, 1, \cdots, m$, podemos escrever

$$\Delta_\alpha^j w_\epsilon(r) = \epsilon^{-\frac{\alpha-2m+1+2j}{2}} \Delta_\alpha^j w_1(r\epsilon^{-1}), \quad r > 0 \tag{4.87}$$

e

$$\left[\Delta_\alpha^j w_\epsilon\right]'(r) = \epsilon^{-\frac{\alpha-2m+2+2j}{2}} \left[\Delta_\alpha^j w_1\right]'(r\epsilon^{-1}), \quad r > 0 \tag{4.88}$$

Pela Proposição 9, para cada $j = 0, 1, \cdots, m$ temos

$$(-\Delta_\alpha)^j w_1(r) = \widehat{c}(1+r^2)^{-\frac{\alpha-2m+4j+1}{2}} \sum_{i=0}^{j} G(i,j) r^{2i},$$

onde $\widehat{c} = \mathcal{P}^{\frac{\alpha-2m+1}{4m}}$. Em particular,

$$\left[(-\Delta_\alpha)^j w_1\right]'(r) = \widehat{c}(1+r^2)^{-\frac{\alpha-2m+4j+3}{2}} \sum_{i=0}^{j} G(i,j) \left[2ir^{2i-1} + 2(i-\alpha+2m-4j-1)r^{2i+1}\right].$$

Por isso, para $r \geqslant 1$ temos

$$\left|(-\Delta_\alpha)^j w_1(r)\right| \leqslant C \frac{r^{2j}}{(1+r^2)^{(\alpha-2m+4j+1)/2}}$$

e

$$\left|\left[(-\Delta_\alpha)^j w_1\right]'(r)\right| \leqslant C \frac{r^{2j+1}}{(1+r^2)^{(\alpha-2m+4j+3)/2}},$$

para algum $C > 0$ (independente de ϵ). Para $0 < \epsilon \leqslant \frac{1}{2}$ e $r \geqslant \frac{1}{2}$, usando (4.87), (4.88) e as estimativas acima segue que

$$\begin{aligned} \left|\Delta_\alpha^j w_\epsilon(r)\right| &= \epsilon^{-[(\alpha-2m+1)/2+2j]} \left|\Delta_\alpha^j w_1(r\epsilon^{-1})\right| \\ &\leqslant C \frac{\epsilon^{(\alpha-2m+1)/2} r^{2j}}{(\epsilon^2+r^2)^{(\alpha-2m+4j+1)/2}} \end{aligned} \tag{4.89}$$

e

$$\begin{aligned} \left|\left[\Delta_\alpha^j w_\epsilon\right]'(r)\right| &= \epsilon^{-[(\alpha-2m+1)/2+2j+1]} \left|\left[\Delta_\alpha^j w_1\right]'(r\epsilon^{-1})\right| \\ &\leqslant C \frac{\epsilon^{(\alpha-2m+1)/2} r^{2j+1}}{(\epsilon^2+r^2)^{(\alpha-2m+4j+3)/2}}. \end{aligned} \tag{4.90}$$

Assim, for $0 < \epsilon \leqslant \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant 1$, usando (4.89) e (4.90) segue

$$\left|\Delta_\alpha^j w_\epsilon(r)\right| \leqslant C\epsilon^{(\alpha-2m+1)/2} \quad \text{e} \quad \left|\left[\Delta_\alpha^j w_\epsilon\right]'(r)\right| \leqslant C\epsilon^{(\alpha-2m+1)/2},$$

o que implica

$$|\nabla_\alpha^k w_\epsilon(r)| \leqslant C\epsilon^{(\alpha-2m+1)/2}, \quad \forall k \leqslant 2m. \tag{4.91}$$

Definimos

$$v_\epsilon := \eta \cdot w_\epsilon \tag{4.92}$$

Então, $v_\epsilon \in C_c^\infty(0,1)$ tal que

$$0 \leqslant v_\epsilon \leqslant w_\epsilon \quad \text{e} \quad v_\epsilon(r) = \begin{cases} w_\epsilon, & \text{se} \quad 0 < r \leqslant 1/2 \\ 0, & \text{se} \quad 3/2 < r < 1. \end{cases} \tag{4.93}$$

Se $m = 2k$, note que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\Delta_\alpha^k v_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr &= \int_0^{\frac{1}{2}} |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr + \int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta_\alpha^k (\eta w_\epsilon)|^2 r^\alpha \, dr \\ &= \int_0^\infty |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(|\Delta_\alpha^k (\eta w_\epsilon)|^2 - |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2\right) r^\alpha \, dr \\ &- \int_1^\infty |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr, \end{aligned}$$

com ajuda da desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr - \int_0^1 |\Delta_\alpha^k v_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr \right| &\leqslant \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(|\Delta_\alpha^k (\eta w_\epsilon)|^2 - |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2\right) r^\alpha \, dr \right| \\ &+ \int_1^\infty |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr \\ &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr + \int_1^\infty |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr. \end{aligned} \tag{4.94}$$

Agora, estima-se as duas integrais no lado direito acima. De (4.91), temos

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr \leqslant C\epsilon^{\alpha-2m+1} \int_{\frac{1}{2}}^1 r^\alpha \, dr. \tag{4.95}$$

Por outro lado, por (4.89) segue

$$\begin{aligned} \int_1^\infty |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr &\leqslant C \int_1^\infty \frac{\epsilon^{\alpha-2m+1} r^{4k+\alpha}}{(\epsilon^2 + r^2)^{\alpha-2m+4k+1}} \, dr \\ &= C\epsilon^{\alpha-2m+1} \int_1^\infty \frac{r^{4k+\alpha}}{(\epsilon^2 + r^2)^{\alpha+1}} \, dr \\ &\leqslant C\epsilon^{\alpha-2m+1} \int_1^\infty \frac{r^{4k+\alpha}}{r^{2(\alpha+1)}} \, dr \\ &= C\epsilon^{\alpha-2m+1} \int_1^\infty r^{-(\alpha-4k+2)} \, dr. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Combinando (4.94), (4.95) e (4.96), obtemos

$$\left| \int_0^\infty |\Delta_\alpha^k w_\epsilon|^2 r^\alpha \, dr - \int_0^1 |\Delta_\alpha^k v\epsilon|^2 r^\alpha \, dr \right| \leqslant C\epsilon^{\alpha-2m+1} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 r^\alpha \, dr + \int_1^\infty r^{-(\alpha-2m+2)} \, dr \right),$$

o que implica que

$$\int_0^1 |\nabla_\alpha^m(\eta u_\epsilon^*)|^2 r^\alpha\, dr = \mathcal{S}^{\frac{\alpha+1}{2m}} + O(\epsilon^{\alpha-2m+1})_{\epsilon\searrow 0}.$$

Se $m = 2k+1$, a prova do item (b) é análoga ao caso anterior, apenas usamos (4.90) em vez de (4.89). De fato, note que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty \left|(\Delta_\alpha^k w_\epsilon)'\right|^2 r^\alpha\, dr - \int_0^1 \left|(\Delta_\alpha^k v_\epsilon)'\right|^2 r^\alpha\, dr\right| &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|(\Delta_\alpha^k w_\epsilon)'\right|^2 r^\alpha\, dr + \int_1^\infty \left|(\Delta_\alpha^k w_\epsilon)'\right|^2 r^\alpha\, dr \\ &\leqslant C\epsilon^{\alpha-2m+1}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 r^\alpha\, dr + \int_1^\infty r^{-(\alpha-2m+4)}\, dr\right),\end{aligned}$$

o que assegura

$$\int_0^1 |\nabla_\alpha^m(\eta u_\epsilon^*)|^2 r^\alpha\, dr = \mathcal{S}^{\frac{\alpha+1}{2m}} + O(\epsilon^{\alpha-2m+1})_{\epsilon\searrow 0}.$$

Em ordem para provar o item (c), podemos reescrever

$$\int_0^1 |v_\epsilon|^{2^*} r^\alpha\, dr = \int_0^\infty |w_\epsilon|^{2^*} r^\alpha\, dr + \int_{\frac{1}{2}}^1 (|\eta|^{2^*}-1)|w_\epsilon|^{2^*} r^\alpha\, dr - \int_1^\infty |w_\epsilon|^{2^*} r^\alpha\, dr.$$

Utilizando a desigualdade triangular, segue

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty |w_\epsilon|^{2^*} r^\alpha\, dr - \int_0^1 |v_\epsilon|^{2^*} r^\alpha\, dr\right| &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 \left||\eta|^{2^*}-1\right||w_\epsilon|^{2^*} r^\alpha\, dr + \int_1^\infty |w_\epsilon|^{2^*} r^\alpha\, dr \\ &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^\infty |w_\epsilon|^{2^*} r^\alpha\, dr \\ &= \widehat{c}^{2^*}\epsilon^{\alpha+1}\int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{r^\alpha}{(\epsilon^2+r^2)^{\alpha+1}}\, dr \\ &\leqslant \widehat{c}^{2^*}\epsilon^{\alpha+1}\int_{\frac{1}{2}}^\infty r^{-(\alpha+2)}\, dr \\ &= \epsilon^{\alpha+1}\frac{\widehat{c}^{2^*}2^{(\alpha+1)}}{\alpha+2}.\end{aligned}$$

o que garante

$$\int_0^1 |\eta u_\epsilon^*|^{2^*} r^\alpha\, dr = \mathcal{S}^{\frac{\alpha+1}{2m}} + O(\epsilon^{\alpha+1})_{\epsilon\searrow 0}.$$

□

Ainda, assumindo a hipótese **(H)**, podemos obter uma recíproca do Teorema 6.

Corolário 11. *Assuma **(H)**. Se $\mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,R)$ é atingido por uma função não singular, então $R=\infty$.*

Demonstração. Por absurdo, supomos que $\mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,R)$ é atingido por uma função não singular, para algum $0 < R < \infty$. Ou seja, existe uma função não singular $z > 0$ em $\in \mathcal{D}_R^{m,2}(\alpha)$ tal que

$$\|z\|^2_{\nabla_\alpha^m} = \mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,R) \quad \text{e} \quad \|z\|_{L_\alpha^{2^*}(0,R)} = 1.$$

Afirmação.

$$\mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,\infty) = \mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,R), \quad \forall R > 0. \tag{4.97}$$

Seja $\widetilde{z} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{z}(r) = \begin{cases} z(r), & \text{if } \; r < R, \\ 0, & \text{if } \; r \geqslant R. \end{cases}$$

Usando (4.97) segue que $\mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,\infty)$ é atingido por $\widetilde{z} \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$. Pelo Teorema 8, temos $\widetilde{z} = w_{\widetilde{\epsilon}}$ para algum $\widetilde{\epsilon} > 0$. Portanto,

$$\lim_{r\to R} \widetilde{z}(r) = \lim_{r\to R} z(r) = 0 \neq w_{\widetilde{\epsilon}}(R) = \lim_{r \to R} w_{\widetilde{\epsilon}}(r),$$

o que contradiz a unicidade do limite, e isso completa a prova do resultado. Por fim, falta provar afirmação acima. Para isso, note que qualquer $u \in \mathcal{D}^{m,2}_R(\alpha)$ pode ser estendida para $(0,\infty)$, como $\widetilde{u} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\widetilde{u}(r) = u(r)$ se $r < R$ e $\widetilde{u}(r) = 0$ se $r \geqslant R$. Assim, $\widetilde{u} \in \mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha)$ e

$$\mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,\infty) \leqslant \mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,R). \tag{4.98}$$

Por outro lado, para cada $\epsilon > 0$, definimos

$$\widetilde{v}_\epsilon(r) = \frac{v_\epsilon(r)}{\|v_\epsilon\|_{L^{2^*}_\alpha(0,1)}} \quad \forall r \in (0,1),$$

onde v_ϵ é dado em (4.92). Pelo Lema 23, temos

$$\begin{aligned} \|\widetilde{v}_\epsilon\|^2_{\nabla^m_\alpha} &= \frac{\|v_\epsilon\|^2_{\nabla^m_\alpha}}{\|v_\epsilon\|^2_{L^{2^*}_\alpha(0,1)}} \\ &= \frac{\mathcal{S}^{(\alpha+1)/2m} + O(\epsilon^{\alpha-2m+1})_{\epsilon\searrow 0}}{\left(\mathcal{S}^{(\alpha+1)/2m} + O(\epsilon^{\alpha+1})_{\epsilon\searrow 0}\right)^{2/2^*}} \\ &= \frac{\mathcal{S}^{(\alpha+1)/2m} + O(\epsilon^{\alpha-2m+1})_{\epsilon\searrow 0}}{\mathcal{S}^{(\alpha-2m+1)/2m}\left(1 + O(\epsilon^{\alpha+1})_{\epsilon\searrow 0}\right)^{2/2^*}} \\ &= \frac{\mathcal{S} + O(\epsilon^{\alpha-2m+1})_{\epsilon\searrow 0}}{\left(1 + O(\epsilon^{\alpha+1})_{\epsilon\searrow 0}\right)^{2/2^*}} \\ &= \mathcal{S} + O(\epsilon^{\alpha-2m+1})_{\epsilon\searrow 0}. \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, segue $\mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,1) \leqslant \mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,\infty)$. Isso junto com (4.98), implica que

$$\mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,1) = \mathcal{S}(m,2,\alpha,\alpha,\infty). \tag{4.99}$$

Para completar a demonstração de (4.97), basta combinarmos (4.99) e Proposição 8. $\square$

Com ajuda do Corolário 10, calculamos o valor da *melhor constante* $\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty)$ para a imersão contínua $\mathcal{D}^{m,2}_{\infty}(\alpha) \hookrightarrow L^{2^*}_{\alpha}$.

Teorema 9. *Assuma **(H)**. Então,*

$$\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}(m, 2, \alpha, \alpha, \infty) = \mathcal{P}^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \right]^{\frac{m}{\alpha+1}},$$

onde $\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1} dt,\ x > 0$ *é a função gama de Euler.*

Demonstração. Seja $z > 0$ uma função extremal não singular para (3.1) com $\theta = \alpha$ e $R = \infty$. Sem perda de generalidade, como a dilatação de um minimizante ainda é um minimizante, escolhe-se $z = w_1$ para calcular o valor de $\mathcal{S}$, onde w_1 é dado em (4.38). Usando integração por partes, obtemos

$$\|\nabla^m_\alpha z\|^2_{L^2_\alpha} = \|z\|^{2^*}_{L^{2^*}_\alpha}.$$

Portanto,

$$\mathcal{S} = \frac{\|\nabla^m_\alpha z\|^2_{L^2_\alpha}}{\|z\|^2_{L^{2^*}_\alpha}} = \|z\|^{2^*-2}_{L^{2^*}_\alpha} = \mathcal{P} \left[\int_0^\infty (1+r^2)^{-(\alpha+1)} r^\alpha \, dr \right]^{\frac{2m}{\alpha+1}}. \tag{4.100}$$

Relembre que $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$. É fácil verificar que

$$\int_0^\infty (1+r^2)^{-(\alpha+1)} r^\alpha \, dr = \frac{[\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})]^2}{2\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{[\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})]^2}{2\Gamma(\alpha+1)}. \tag{4.101}$$

Juntando (4.100) e (4.101), temos

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}\pi^m \left[\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \right]^{\frac{2m}{\alpha+1}}.$$

□

Capítulo 5

Desigualdade do tipo Hardy-Sobolev com termo logarítmico

Nesse capítulo, vamos apresentar resultados em linha dos objetivos principais dessa tese descritos nos itens (e) e (f), veja a introdução. Tais resultados têm o propósito de estender os resultados contidos em [37] para o espaço $X^{1,p}_R(\alpha_0, \alpha_1)$ com $R = 1$. Em todo o capítulo, denotamos a norma de $X^{1,p}_1(\alpha_0, \alpha_1)$ por $\|u\|$ para representar $\|u'\|_{L^p_{\alpha_1}}$.

5.1 Desigualdades do tipo supercrítica

Nessa seção, vamos provar duas desigualdades do tipo supercrítica. Sejam $p \geqslant 1$ e $\theta, \alpha_0, \alpha_1 > -1$ números reais. Assuma que $(\theta, \alpha_0, \alpha_1, p)$ satisfaz

$$p > 1, \quad \alpha_1 - p + 1 > 0 \quad \text{e} \quad \min\{\theta, \alpha_0\} \geqslant \alpha_1 - p. \tag{5.1}$$

Além disso, seja $\varphi : [0, 1) \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz as hipóteses

(h_1) $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(r) > 0$ para todo $r \in (0, 1)$;

(h_2) Existem $c > 0$ e $\sigma > 1$ tal que $\varphi(r)|\ln r|^\sigma \ln|\ln r| \leqslant c$, para r próximo de 0;

(h_3) $\varphi(r) = o(|\ln(1 - r)|)$, quando $r \to 1^-$, i.e. $\lim_{r\to 1^-} \varphi(r)(|\ln(1 - r)|)^{-1} = 0$.

Por exemplo, é fácil verificar que para qualquer $\beta > 0$ e $\gamma \geqslant 0$ temos que $\varphi(r) = r^\beta(\ln(1 + r))^\gamma$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, satisfaz as hipóteses $(h_1) - (h_3)$.

Teorema 10. *Sejam* $\varphi \in C[0,1)$ *satisfazendo* (h_1)-(h_3) *e* $(\theta, \alpha_0, \alpha_1, p)$ *satisfazendo* (5.1). *Para qualquer* $\tau > 0$*, obtemos*

$$\mathcal{S}_{\theta,\tau}(\varphi) := \sup\left\{ \int_0^1 r^\theta |u(r)|^{p^*} |\ln(\tau + |u(r)|)|^{\varphi(r)}\, dr \,:\, u \in X_1^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1),\ \|u\| = 1 \right\} \tag{5.2}$$

é finito. Em particular, para qualquer $u \in X_1^{1,p}$ *com* $0 < \|u\| < 1$ *temos*

$$\int_0^1 r^\theta |u(r)|^{p^*} |\ln(\tau + |u(r)|)|^{\varphi(r)}\, dr \leqslant \mathcal{S}_{\theta,\tau}(\varphi)\|u\|^{p^*}.$$

Demonstração. Seja $u \in X_1^{1,p}$ com $\|u\| = 1$. Pelo Lema 2 (Lema Radial), segue

$$|u(r)| \leqslant \frac{\kappa}{r^{\frac{\alpha_1 - p + 1}{p}}}, \quad 0 < r \leqslant 1 \tag{5.3}$$

onde $\kappa = ((p-1)/(\alpha_1 - p + 1))^{(p-1)/p}$. Para qualquer $\tau > 0$, temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\ln\tau| + \ln\left(1 + \dfrac{\kappa t}{\tau}\right)}{|\ln(\tau + t)|} = 1. \tag{5.4}$$

Então, existe $C = C(\tau,\kappa) > 0$ tal que

$$|\ln\tau| + \ln\left(1 + \frac{\kappa t}{\tau}\right) \leqslant C|\ln(\tau + t)|, \quad t \geqslant 1. \tag{5.5}$$

Usando (5.3) e (5.5), podemos deduzir que

$$|\ln(\tau + |u|)| \leqslant C\left|\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p + 1}{p}}\right)\right|, \qquad \text{para } r \in (0,1]. \tag{5.6}$$

Escrevemos,

$$\int_0^1 r^\theta |u|^{p^*} |\ln(\tau + |u|)|^{\varphi(r)}\, dr = I_{(0,\rho)} + I_{(\rho,\hat\rho)} + I_{(\hat\rho,1)}, \tag{5.7}$$

onde

$$I_{(a,b)} := \int_a^b r^\theta |u|^{p^*} |\ln(\tau + |u|)|^{\varphi(r)}\, dr$$

e $0 < \rho < \hat\rho < 1$ será escolhido posteriormente. Seja

$$\Sigma_p = \sup\left\{ \int_0^1 r^\theta |u|^{p^*}\, dr \,:\, u \in X_1^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1),\ \|u\| = 1 \right\}.$$

Para $\rho > 0$ suficientemente pequeno e usando (5.3) e (5.6) segue

$$\begin{aligned}
I_{(0,\rho)} &\leqslant \int_0^\rho r^\theta |u|^{p^*}\left(|\ln(\tau + |u|)|^{\varphi(r)} - 1\right) dr + \Sigma_p \\
&\leqslant \int_0^\rho r^\theta |u|^{p^*}\left(\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1-p+1}{p}}\right)\right|^{\varphi(r)} - 1\right) dr + \Sigma_p \\
&= \int_0^\rho r^\theta |u|^{p^*}\left(e^{\varphi(r)\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1-p+1}{p}}\right)\right|} - 1\right) dr + \Sigma_p \\
&\leqslant \int_0^\rho \frac{\kappa^{p^*}}{r}\left(e^{\varphi(r)\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1-p+1}{p}}\right)\right|} - 1\right) dr + \Sigma_p.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Para qualquer $r \in (0, \rho)$, existe $\vartheta = \vartheta(r) \in (0,1)$ tal que

$$e^{\varphi(r)\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right|} - 1 = e^{\varphi(r)\vartheta\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right|}\varphi(r)\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right|.$$

Usando (h_2), podemos ver que

$$\varphi(r)\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right| \leqslant c\frac{\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right|}{|\ln r|^{\sigma}\ln|\ln r|}, \quad \sigma > 1$$

que implica

$$e^{\varphi(r)\vartheta\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right|} \leqslant C,$$

para algum $C > 0$ suficientemente grande e r próximo de 0. Então, para $r > 0$ suficientemente pequeno e usando a hipótese (h_2) segue

$$\begin{aligned} e^{\varphi(r)\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right|} - 1 &\leqslant C\varphi(r)\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right| \\ &\leqslant C\varphi(r)\ln|\ln r| \\ &\leqslant \frac{C_1}{|\ln r|^{\sigma}}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

para algum $C_1 > 0$. Combinando (5.8) e (5.9), podemos ver que

$$I_{(0,\rho)} = \int_0^{\rho} r^{\theta}|u|^{p^*}|\ln(\tau + |u|)|^{\varphi(r)}\,dr \leqslant \kappa^{p^*}C_1\int_0^{\rho}\frac{1}{r|\ln r|^{\sigma}}\,dr + \Sigma_p < \infty, \tag{5.10}$$

se $\rho > 0$ é escolhido pequeno o suficiente. Para estimar $I_{(\hat{\rho},1)}$, notemos que a função $r \mapsto \ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right|$ é limitada próximo de 1. Assim, usando (h_3), existe $\hat{\rho} < 1$ próximo de 1 tal que

$$\varphi(r)\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}|\ln(1-r)|, \quad \text{for all} \ \ r \in (\hat{\rho}, 1). \tag{5.11}$$

Combinando (5.3), (5.6) e (5.11), segue

$$\begin{aligned} I_{(\hat{\rho},1)} = \int_{\hat{\rho}}^{1} r^{\theta}|u|^{p^*}|\ln(\tau + |u|)|^{\varphi(r)}\,dr &\leqslant \int_{\hat{\rho}}^{1}\frac{\kappa^{p^*}}{r}\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right|^{\varphi(r)}\,dr \\ &= \int_{\hat{\rho}}^{1}\frac{\kappa^{p^*}}{r}e^{\varphi(r)\ln\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right|}dr \\ &\leqslant \int_{\hat{\rho}}^{1}\frac{\kappa^{p^*}}{r(1-r)^{\frac{1}{2}}}dr \\ &= \kappa^{p^*}[2\ln((1-\hat{\rho})^{\frac{1}{2}} + 1) - \ln\hat{\rho}]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Para estimar $I_{(\rho,\hat{\rho})}$, combinamos (5.3) e (5.6) para ver que

$$I_{(\rho,\hat{\rho})} = \int_{\rho}^{\hat{\rho}} r^{\theta}|u|^{p^*}|\ln(\tau + |u|)|^{\varphi(r)}\,dr \leqslant \int_{\rho}^{\hat{\rho}}\frac{\kappa^{p^*}}{r}\left|C\ln\left(\tau + r^{-\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}\right)\right|^{\varphi(r)}\,dr < \infty, \tag{5.13}$$

Juntando (5.7), (5.10), (5.12), e (5.13), completamos a nossa demonstração. □

Enfatizamos que, se $\varphi(r) = r^{\beta}$ com $\beta > 0$ temos que o Teorema 10 melhora e complementa (10) porque inclui as seguintes situações novas: $p \neq 2$ e valores não inteiros de $\alpha_0, \alpha_1, \theta$ que satisfazem (5.1). Além disso, representa uma contrapartida de [27, Theorem 1.1] com termo logarítmico.

Definição 13. *Sejam $\tau \geqslant 1$ e $\beta > 0$ números reais. Definimos o espaço de Orlicz generalizado por:*

$$L^{\beta}_{\theta,\ln} = \left\{u : (0,1) \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_0^1 r^{\theta} |u(r)|^{p^*} |\ln(\tau + |u(r)|)|^{r^{\beta}}\, dr < \infty\right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{L^{\beta}_{\theta,\ln}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_0^1 r^{\theta} \left|\frac{u(r)}{\lambda}\right|^{p^*} \left|\ln\left(\tau + \left|\frac{u(r)}{\lambda}\right|\right)\right|^{r^{\beta}} dr \leqslant 1\right\}. \tag{5.14}$$

A seguir, vamos mostrar que o espaço $L^{\beta}_{\theta,\ln}$ é bem definido.

Lema 21. *Sejam $0 < b \leqslant 1 < a$ e $\tau \geqslant 1$ números reais. Seja $\Gamma_{a,b}(t) := t^{a} |\ln(\tau + t)|^{b}$ para $t \geqslant 0$. Então,*

(a) *$\Gamma_{a,b}$ é contínua em $[0,\infty)$*

(b) *$\Gamma_{a,b}$ é convexa em $[0,\infty)$*

(c) *$\lim_{t\to 0} \Gamma_{a,b}(t)/t = 0$ e $\lim_{t\to\infty} \Gamma_{a,b}(t)/t = \infty$.*

Demonstração. É imediato que (a) e (c) são verdadeiros. Observemos que

$$\frac{\Gamma_{a+1,b}(t)}{\Gamma_{a,b}(t)} = t \quad \text{e} \quad \frac{\Gamma_{a,b+1}(t)}{\Gamma_{a,b}(t)} = \ln(\tau + t), \quad \forall\, t > 0.$$

Em ordem ara provar (b), é suficiente mostrar que $\Gamma''_{a,b}(t) > 0$ para $t > 0$. Derivando $\Gamma_{a,b}(t)$, segue

$$\Gamma'_{a,b}(t) = a\Gamma_{a-1,b}(t) + \frac{b}{\tau + t}\Gamma_{a,b-1}(t). \tag{5.15}$$

Seja $g(t) = \frac{1}{\tau+t}\Gamma_{a,b-1}(t)$, com $t > 0$. Derivando g e usando (5.15), segue

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{1}{(\tau+t)^2}\Gamma_{a,b-1}(t) + \frac{1}{\tau+t}\left[a\Gamma_{a-1,b-1}(t) + \frac{b-1}{\tau+t}\Gamma_{a,b-2}(t)\right] \\ &= -\frac{1}{(\tau+t)^2}\Gamma_{a,b-1}(t) + \frac{1}{\tau+t}\left[\frac{a}{t}\Gamma_{a,b-1}(t) + \frac{b-1}{\tau+t}\frac{1}{\ln(\tau+t)}\Gamma_{a,b-1}(t)\right] \\ &= \frac{\Gamma_{a,b-1}(t)}{(\tau+t)^2\ln(\tau+t)}\left[-\ln(\tau+t) + a(\tau+t)\frac{\ln(\tau+t)}{t} + b - 1\right] \\ &= \frac{\Gamma_{a,b-1}(t)}{(\tau+t)^2\ln(\tau+t)}\left[(a-1)\ln(\tau+t) + a\tau\frac{\ln(\tau+t)}{t} + b - 1\right]. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Ainda, usando (5.15) podemos escrever

$$\Gamma'_{a-1,b}(t) = \frac{\Gamma_{a,b-1}(t)}{(\tau+t)^2\ln(\tau+t)}\Big[(a-1)\Big((\tau+t)\frac{\ln(\tau+t)}{t}\Big)^2 + b\Big((\tau+t)\frac{\ln(\tau+t)}{t}\Big)\Big]. \quad (5.17)$$

Seja $h_\tau(t) := \frac{\tau+t}{t}\ln(\tau+t)$ para $t>0$. Combinando (5.15), (5.16) e (5.17), podemos ver que

$$\begin{aligned}\Gamma''_{a,b}(t) &= a\Gamma'_{a-1,b}(t) + bg'(t)\\ &= \frac{\Gamma_{a,b-1}(t)}{(\tau+t)^2\ln(\tau+t)}\Big[a(a-1)[h_\tau(t)]^2 + abh_\tau(t) + b(b-1)\Big]\\ &+ \frac{\Gamma_{a,b-1}(t)}{(\tau+t)^2\ln(\tau+t)}\Big[b(a-1)\ln(\tau+t) + ab\tau\frac{\ln(\tau+t)}{t}\Big]\\ &\geqslant \frac{\Gamma_{a,b-1}(t)}{(\tau+t)^2\ln(\tau+t)}\Phi_\tau(t),\end{aligned} \quad (5.18)$$

onde

$$\Phi_\tau(t) = a(a-1)[h_\tau(t)]^2 + b[ah_\tau(t)+b-1]. \quad (5.19)$$

Por (5.18), precisamos apenas demonstrar que $\Phi_\tau(t)>0$ para todo $t>0$. Para isso, note que para qualquer $\tau\geqslant 1$, temos $h_\tau(t)\geqslant h_1(t) = (1+t)\frac{\ln(1+t)}{t}$. Além disso,

$$\lim_{t\to 0^+} h_1(t) = 1 \quad \text{e} \quad h_1'(t) = \frac{1}{t}\Big[1-\frac{\ln(1+t)}{t}\Big] > 0 \quad \forall t>0. \quad (5.20)$$

Então, h_1 é uma função crescente em $(0,\infty)$ e, para qualquer $\tau\geqslant 1$ temos $h_\tau(t)\geqslant h_1(t)\geqslant 1$, para todo $t\in(0,\infty)$. Assim,

$$\Phi_\tau(t) \geqslant a(a-1) + b[a+b-1] > 0$$

o que completa a prova. □

Lema 22. *O espaço* $L^\beta_{\theta,\ln}$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\psi:(0,1)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ dada por $\psi(r,t) = t^{p^*}|\ln(\tau+t)|^{r^\beta}$, com $\beta>0$. Pelo Lema 21, segue que ψ é uma Φ-função generalizada, isto é, $\psi\in\Phi((0,1),r^\theta dr])$. Mais precisamente,

(i) par cada $r\in(0,1)$, a função $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ dada por $f(t)=\psi(r,t)$ é convexa, contínua a esquerda, $f(0)=\lim_{t\to 0^+}f(t)=0$, e $\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$.

(ii) $r\mapsto\psi(r,t)$ é uma função Lebesgue mensurável para qualquer $t\geqslant 0$.

Desta forma, consideremos o *semimodular* $\rho_{\ln}: L^0_\theta\to[0,\infty]$ induzido por ψ, dado por

$$\rho_{\ln}(u) := \int_0^1 r^\theta|u|^{p^*}\left|\ln\left(\tau+|u|\right)\right|^{r^\beta}\,dr,$$

onde $L^0_\theta = L^0((0,1), r^\theta dr)$ denota o espaço de todas as funções Lebesgue mensuráveis em $(0,1)$. Então, pelo Lema 1 obtemos que o espaço de Orlicz generalizado $L^\beta_{\theta,\ln}$ é um espaço de Banach, munido da norma Luxemburgo

$$\|u\|_{L^\beta_{\theta,\ln}} = \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ \rho_{\ln}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\}. \tag{5.21}$$

□

Corolário 12. *Sob as condições do Teorema 10, temos que* $X^{1,p}_1(\alpha_0,\alpha_1) \hookrightarrow L^\beta_{\theta,\ln}$ *é uma imersão contínua.*

Demonstração. Para qualquer $u \in X^{1,p}_1(\alpha_0,\alpha_1)$ com $u \not\equiv 0$ e escolhemos $\lambda_0 > 1$ satisfazendo $\lambda_0^{p^*} \geqslant \mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}$. Pelo Teorema 10, podemos ver que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_0^{p^*}}\int_0^1 r^\theta\left|\frac{u}{\|u\|}\right|^{p^*}\left|\ln\left(\tau+\frac{1}{\lambda_0}\left|\frac{u}{\|u\|}\right|\right)\right|^{r^\beta} dr &\leqslant \frac{1}{\lambda_0^{p^*}}\int_0^1 r^\theta\left|\frac{u}{\|u\|}\right|^{p^*}\left|\ln\left(\tau+\left|\frac{u}{\|u\|}\right|\right)\right|^{r^\beta} dr \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda_0^{p^*}}\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} \leqslant 1.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Isso implica que

$$\|u\|_{L^\beta_{\theta,\ln}} \leqslant \lambda_0\|u\|, \quad \forall\, u \in X^{1,p}_1(\alpha_0,\alpha_1). \tag{5.23}$$

□

Observação 4. *O Corolário 12 é um resultado surpreendente.*

De fato, sejam $\tau \geqslant 1$ e $0 \leqslant b \leqslant 1 < a$, e definimos $\Gamma_{a,b} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por $\Gamma_{a,b}(t) = t^a|\ln(\tau+t)|^b$ (se $b = 0$ e $\tau = 1$ definimos $\Gamma_{a,b}(0) = 0$). O Lema 21, permite considerar o espaço de Orlicz com peso associado a $L_{\theta,\Gamma_{a,b}} = L_{\theta,\Gamma_{a,b}}(0,1)$ munido da norma de Luxemburgo

$$\|u\|_{\Gamma_{a,b}} := \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ \int_0^1 r^\theta \Gamma_{a,b}\left(\frac{|u(r)|}{\lambda}\right) dr \leqslant 1\right\}. \tag{5.24}$$

Recordamos que a imersão contínua $X^{1,p}_1(\alpha_0,\alpha_1) \hookrightarrow L_{\theta,\Gamma_{p^*,0}}$ é ótima, veja (2.1). Por isso, o espaço de Orlicz $L_{\theta,\Gamma_{p^*,0}}$ é ótimo para a imersão contínua anterior. Ademais, se $0 < b \leqslant 1$, para qualquer $\delta > 0$ tem-se $\Gamma_{p^*,0}(t)/\Gamma_{p^*,b}(\delta t) \to 0$ quando $t \to \infty$, o que significa que $\Gamma_{p^*,b}$ aumenta estritamente mais rapidamente do que $\Gamma_{p^*,0}$. Portanto, $X^{1,p}_1(\alpha_0,\alpha_1)$ não pode ser imerso continuamente em nenhum espaço de Orlicz com peso $L_{\theta,\Gamma_{p^*,b}}$, para $0 < b \leqslant 1$. Adicionalmente, destacamos que se $b(r) = r^\beta$ com $r \in [0,1)$ satisfaz $0 < b(r) \leqslant 1$, exceto para $r = 0$. Assim, dizemos que tanto a desigualdade com termo logarítmico no Teorema 10 quanto a imersão no Corolário 12 são do tipo *supercrítico.*

5.2 Supremo $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}$ e funções extremais

Em primeiro lugar, denotamos por:

$$\Sigma_p = \sup\left\{\int_0^1 r^\theta |u|^{p^*}\,dr \;:\; u \in X_1^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1),\ \|u\| = 1\right\} \tag{5.25}$$

e

$$\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} = \sup\left\{\int_0^1 r^\theta |u|^{p^*} |\ln(\tau + |u|)|^{r^\beta}\,dr \;:\; u \in X_1^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1),\ \|u\| = 1\right\}. \tag{5.26}$$

Pelo Teorema 10, segue que $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} = \mathcal{S}_{\theta,\tau}(r^\beta) < \infty$.

A seguir, usaremos uma abordagem seguindo ideias contidas em [14, 27, 37, 59] para estabelecer estimativas para funções extremais, veja os Lema 23 e Lema 24 mais adiante.

Para qualquer $0 < R \leqslant \infty$, definimos

$$\mathcal{S}(p^*, R) = \inf\left\{\int_0^R r^{\alpha_1}|u'|^p\,dr : u \in X_R^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1) \quad \text{e} \quad \|u\|_{L_\theta^{p^*}} = 1\right\}. \tag{5.27}$$

É bem conhecido que $\mathcal{S}(p^*, R)$ é independente de R e o mesmo é atingido apenas no caso $R = +\infty$. Além disso, para cada $\epsilon > 0$, seja

$$u_\epsilon^*(r) := \frac{\widehat{c}\epsilon^s}{(\epsilon^n + r^n)^{\frac{1}{m}}}, \quad r \geqslant 0 \tag{5.28}$$

onde

$$\begin{cases} s = \dfrac{\alpha_1 - p + 1}{p^2 - p} \\ n = \dfrac{\theta - \alpha_1 + p}{p - 1} \\ m = \dfrac{\theta - \alpha_1 + p}{\alpha_1 - p + 1} \\ \widehat{c} = \left[(\theta + 1)\left(\dfrac{\alpha_1 - p + 1}{p - 1}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}\frac{\alpha_1 - p + 1}{\theta - \alpha_1 + p}} \end{cases} \tag{5.29}$$

então

$$\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}} = \int_0^\infty r^\theta |u_\epsilon^*|^{p^*}\,dr = \int_0^\infty r^{\alpha_1}|(u_\epsilon^*)'|^p\,dr, \tag{5.30}$$

onde $\mathcal{S}$ denota o valor comum de $\mathcal{S}(p^*, R)$ para todo $R \in (0, \infty]$, veja [59, Proposition 1.4] e [27] para mais informações. Combinando que $\mathcal{S}(p^*, R)$ é independente de R, (5.25), (5.27) e (5.30) podemos deduzir que

$$\Sigma_p = \mathcal{S}^{-\frac{p^*}{p}} = \mathcal{S}^{-\frac{\theta+1}{\alpha_1 - p + 1}}. \tag{5.31}$$

Seja $\eta \in C_0^\infty(0,1)$ uma função cut-off tal que $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ em $[0,1]$ e

$$\eta(r) \equiv 1 \ \text{ em } \ (0, r_0] \ \text{ e } \ \eta(r) \equiv 0 \ \text{ em } \ [2r_0, 1] \tag{5.32}$$

para algum $0 < r_0 < 2r_0 < 1$. De acordo com [27, Claim 1], temos

$$\|(\eta u_\epsilon^*)'\|_{L^p_{\alpha_1}}^p = \mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}} + O(\epsilon^{sp}), \quad \text{quando } \epsilon \to 0 \tag{5.33}$$

e

$$\|\eta u_\epsilon^*\|_{L^{p^*}_\theta}^{p^*} = \mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}} + O(\epsilon^{sp^*}), \quad \text{quando } \epsilon \to 0. \tag{5.34}$$

Para $\widehat{A} > 0$, $\beta > 0$ e $A = \widehat{A}\widehat{c}$, seja

$$u_\epsilon(r) := \widehat{A}\eta(r)u_\epsilon^*(r) = A\eta(r)\frac{\epsilon^s}{(\epsilon^n + r^n)^{\frac{1}{m}}}. \tag{5.35}$$

Por simplicidade, para qualquer $t > 0$ e $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, introduzimos a notação

$$\mathcal{E}_t(a,b) = \int_a^b r^\theta |u_\epsilon|^{p^*}\Big(|\ln(\tau + t|u_\epsilon|)|^{r^\beta} - 1\Big)\,dr, \tag{5.36}$$

onde u_ϵ é dada em (5.35).

Destacamos as seguintes relações sobre os parâmetros em (5.29).

$$\begin{cases} \dfrac{sm}{n} = \dfrac{1}{p} \\ n - sm = \dfrac{\theta - \alpha_1 + p}{p} \\ sp^* = \dfrac{\theta+1}{p-1} \\ sp = \dfrac{\alpha_1 - p + 1}{p-1} \\ \theta - \dfrac{np^*}{m} + 1 = -\dfrac{\theta+1}{p-1} \\ s - \dfrac{n}{m} = -\dfrac{\alpha_1 - p + 1}{p} \\ \left(s - \dfrac{n}{m}\right)p^* = -(\theta+1) \end{cases} \tag{5.37}$$

Essas identidades surgirão em todos os nossos cálculos e as utilizaremos sempre que necessário, sem comentários adicionais.

Os próximos dois resultados, fornecem estimativas inferiores e superiores para $\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1)$.

Lema 23. *Para qualquer sequência real positiva* (t_ϵ) *tal que* $\lim_{\epsilon\to 0} t_\epsilon = t_0 > 0$. *Então, existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1) \geqslant \begin{cases} C\epsilon^\beta \ln|\ln\epsilon| + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}), & \textit{se} \quad 0 < \tau < e \\ C\epsilon^\beta \ln|\ln\epsilon|, & \textit{se} \quad e \leqslant \tau < \infty, \end{cases} \tag{5.38}$$

para $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno, onde* $\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1)$ *é definido em* (5.36).

Demonstração. Seja $d = t_0 A/2^{1+1/m}$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos $\eta \equiv 1$ em $(0, \epsilon)$, e portanto,

$$t_\epsilon u_\epsilon(r) \geqslant d\epsilon^{-\frac{\theta+1}{p^*}} \geqslant e \quad \forall\, r \in (0, \epsilon).$$

Consequentemente, temos $\ln(\tau + t_\epsilon|u_\epsilon|) \geqslant \ln(\tau + d\epsilon^{-\frac{\theta+1}{p^*}}) \geqslant 1$ e $\ln|\ln(\tau + t_\epsilon|u_\epsilon|)| \geqslant 0$ em $(0, \epsilon)$. Usando que $e^t \geqslant 1 + t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0, \epsilon) &= \int_0^\epsilon r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} \left(|\ln(\tau + t_\epsilon|u_\epsilon|)|^{r^\beta} - 1 \right) dr \\
&\geqslant \left(\frac{d}{t_\epsilon}\right)^{p^*} \epsilon^{-(\theta+1)} \int_0^\epsilon r^\theta \left(e^{r^\beta \ln|\ln(\tau + d\epsilon^{-\frac{\theta+1}{p^*}})|} - 1 \right) dr \\
&\geqslant \left(\frac{d}{t_\epsilon}\right)^{p^*} \epsilon^{-(\theta+1)} \int_0^\epsilon r^{\theta+\beta} \ln|\ln(\tau + d\epsilon^{-\frac{\theta+1}{p^*}})|\, dr \\
&\geqslant C\epsilon^{-(\theta+1)} \ln|\ln \epsilon| \int_0^\epsilon r^{\theta+\beta}\, dr \geqslant C\epsilon^\beta \ln|\ln \epsilon|,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

para alguma constante $C > 0$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Agora, analisaremos dois casos.

Caso I: $0 < \tau < e$. Inicialmente, veremos o subcaso $0 < \tau < 1/e$. Usando (5.35) podemos deduzir que

$$\left|\ln(\tau + t_\epsilon \widehat{A} u_\epsilon^*)\right| \leqslant 1 \ \text{ se, e somente se, } \ e^{-1} - \tau \leqslant \frac{t_\epsilon A \epsilon^s}{(\epsilon^n + r^n)^{\frac{1}{m}}} \leqslant e - \tau.$$

Denotamos

$$a_\epsilon = \left[\left(\frac{t_\epsilon A \epsilon^s}{e - \tau} \right)^m - \epsilon^n \right]^{\frac{1}{n}} = \epsilon^{\frac{sm}{n}} \left[\left(\frac{t_\epsilon A}{e - \tau} \right)^m - \epsilon^{n-sm} \right]^{\frac{1}{n}} \tag{5.40}$$

e

$$b_\epsilon = \left[\left(\frac{t_\epsilon A \epsilon^s}{e^{-1} - \tau} \right)^m - \epsilon^n \right]^{\frac{1}{n}} = \epsilon^{\frac{sm}{n}} \left[\left(\frac{t_\epsilon A}{e^{-1} - \tau} \right)^m - \epsilon^{n-sm} \right]^{\frac{1}{n}} \tag{5.41}$$

Então, podemos ver que

$$\left|\ln(\tau + t_\epsilon \widehat{A} u_\epsilon^*)\right| \leqslant 1 \quad \text{se, e somente se,} \quad a_\epsilon \leqslant r \leqslant b_\epsilon. \tag{5.42}$$

Observe que $0 < a_\epsilon < b_\epsilon$ e, utilizando (5.37) segue que $a_\epsilon = O(\epsilon^{\frac{1}{p}})$ e $b_\epsilon = O(\epsilon^{\frac{1}{p}})$, quando $\epsilon \to 0$. Então, se r_0 é como em (5.32), temos

$$0 < \epsilon < a_\epsilon < b_\epsilon < r_0 < 1, \tag{5.43}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Agora, utilizando (5.43) podemos reescrever

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0, 1) = \mathcal{E}_{t_\epsilon}(0, \epsilon) + \mathcal{E}_{t_\epsilon}(\epsilon, a_\epsilon) + \mathcal{E}_{t_\epsilon}(a_\epsilon, b_\epsilon) + \mathcal{E}_{t_\epsilon}(b_\epsilon, r_0) + \mathcal{E}_{t_\epsilon}(r_0, 1). \tag{5.44}$$

Em (ϵ, a_ϵ), temos $u_\epsilon = \widehat{A}u_\epsilon^*$. Combinando isso com (5.42), temos

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(\epsilon, a_\epsilon) = \int_\epsilon^{a_\epsilon} r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} \left(|\ln(\tau + t_\epsilon |u_\epsilon|)|^{r^\beta} - 1 \right) dr \geqslant 0. \tag{5.45}$$

Utilizando as relações em (5.37) podemos obter

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} r^\theta \frac{\epsilon^{sp^*}}{(\epsilon^n + r^n)^{\frac{p^*}{m}}} dr \leqslant \epsilon^{sp^*} \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} r^{\theta - \frac{np^*}{m}} dr \\ &= \frac{p-1}{\theta+1} \epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}} \left(a_\epsilon^{-\frac{\theta+1}{p-1}} - b_\epsilon^{-\frac{\theta+1}{p-1}} \right) \\ &= \epsilon^{\frac{\theta+1}{p}} \frac{p-1}{\theta+1} \left[\left(\frac{\epsilon^{\frac{1}{p}}}{a_\epsilon} \right)^{\frac{\theta+1}{p-1}} - \left(\frac{\epsilon^{\frac{1}{p}}}{b_\epsilon} \right)^{\frac{\theta+1}{p-1}} \right] = O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}). \end{aligned} \tag{5.46}$$

Em (a_ϵ, b_ϵ), temos $u_\epsilon = \widehat{A}u_\epsilon^* \geqslant 0$. Combinando isso com (5.46), temos

$$0 \leqslant \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} dr \leqslant A^{p^*} \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} r^\theta \frac{\epsilon^{sp^*}}{(\epsilon^n + r^n)^{\frac{p^*}{m}}} dr = O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}). \tag{5.47}$$

Juntando (5.42) e (5.47), podemos ver que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{t_\epsilon}(a_\epsilon, b_\epsilon) &= \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} \left(|\ln(\tau + t_\epsilon |u_\epsilon|)|^{r^\beta} - 1 \right) dr \\ &= \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} |\ln(\tau + t_\epsilon |u_\epsilon|)|^{r^\beta} dr - \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} dr \quad = O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}). \end{aligned} \tag{5.48}$$

No intervalo (b_ϵ, r_0) nós também temos $u_\epsilon = \widehat{A}u_\epsilon^* \geqslant 0$. Assim, (5.42) implica

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(b_\epsilon, r_0) = \int_{b_\epsilon}^{r_0} r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} \left(|\ln(\tau + t_\epsilon |u_\epsilon|)|^{r^\beta} - 1 \right) dr \geqslant 0. \tag{5.49}$$

Em $(r_0, 1)$, temos a estimativa

$$0 \leqslant t_\epsilon u_\epsilon(r) = t_\epsilon A \eta(r) \epsilon^s (\epsilon^n + r^n)^{-\frac{1}{m}} \leqslant t_\epsilon A \epsilon^s (\epsilon^n + r_0^n)^{-\frac{1}{m}} \leqslant 2 t_0 A \epsilon^s r_0^{-\frac{n}{m}},$$

o que implica

$$\tau + t_\epsilon |u_\epsilon| \leqslant 1/e \quad \forall\, r \in (r_0, 1),$$

desde que $0 < \tau < 1/e$ e para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Consequentemente, temos $|\ln(\tau + t_\epsilon |u_\epsilon|)| \geqslant 1$ em $(r_0, 1)$. Assim,

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(r_0, 1) = \int_{r_0}^{1} r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} \left(|\ln(\tau + t_\epsilon |u_\epsilon|)|^{r^\beta} - 1 \right) dr \geqslant 0. \tag{5.50}$$

Juntando (5.39), (5.44), (5.45), (5.48), (5.49) e (5.50), segue

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0, 1) \geqslant C \epsilon^\beta \ln|\ln \epsilon| + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}). \tag{5.51}$$

Falta ver o subcaso $1/e \leqslant \tau < e$. Nessa situação, para a_ϵ como em (5.40) temos

$$\left|\ln(\tau + t_\epsilon \widehat{A} u_\epsilon^*)\right| \leqslant 1 \quad \text{se, e somente se,} \quad a_\epsilon < r < 1. \tag{5.52}$$

Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $0 < \epsilon < a_\epsilon < r_0 < 1$, e reescrevemos

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1) = \mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,a_\epsilon) + \mathcal{E}_{t_\epsilon}(a_\epsilon,1). \tag{5.53}$$

Em $(0,a_\epsilon)$, temos $u_\epsilon = \widehat{A} u_\epsilon^*$. Usando (5.52) e (5.39) podemos estimar

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,a_\epsilon) \geqslant \mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,\epsilon) \geqslant C\epsilon^\beta \ln|\ln \epsilon|, \tag{5.54}$$

para alguma constante $C > 0$. Analogamente a (5.46), segue

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_{a_\epsilon}^1 r^\theta \frac{\epsilon^{sp^*}}{(\epsilon^n + r^n)^{\frac{p^*}{m}}}\,dr \leqslant \epsilon^{sp^*} \int_{a_\epsilon}^1 r^{\theta - \frac{np^*}{m}}\,dr \\ &= \epsilon^{\frac{\theta+1}{p}} \frac{p-1}{\theta+1}\left[\left(\frac{\epsilon^{\frac{1}{p}}}{a_\epsilon}\right)^{\frac{\theta+1}{p-1}} - \epsilon^{\frac{\theta+1}{p^2-p}}\right] = O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}), \end{aligned} \tag{5.55}$$

o que implica

$$0 \leqslant \int_{a_\epsilon}^1 r^\theta |u_\epsilon|^{p^*}\,dr \leqslant A^{p^*} \int_{a_\epsilon}^1 r^\theta \frac{\epsilon^{sp^*}}{(\epsilon^n + r^n)^{\frac{p^*}{m}}}\,dr = O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}). \tag{5.56}$$

Em $(a_\epsilon, 1)$, seja $\bar{d} = 2t_0 A$ e para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leqslant t_\epsilon u_\epsilon(r) \leqslant \bar{d}\epsilon^s (\epsilon^n + a_\epsilon^n)^{-\frac{1}{m}} &= \bar{d}\epsilon^{s - \frac{n}{mp}} \left(\frac{\epsilon^{\frac{1}{p}}}{a_\epsilon}\right)^{\frac{n}{m}} \left(1 + \left(\frac{\epsilon}{a_\epsilon}\right)^n\right)^{-\frac{1}{m}} \\ &= \bar{d}\left(\frac{\epsilon^{\frac{1}{p}}}{a_\epsilon}\right)^{\frac{n}{m}} \left(1 + \left(\frac{\epsilon}{a_\epsilon}\right)^n\right)^{-\frac{1}{m}}, \end{aligned} \tag{5.57}$$

o que implica

$$\ln \tau \leqslant \ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon)) \leqslant s_\tau \quad \forall\, r \in (a_\epsilon, 1),$$

para alguma constante $s_\tau = s(\tau) > 0$ (aqui, usamos que $a_\epsilon = O(\epsilon^{\frac{1}{p}})$, quando $\epsilon \to 0$). Por isso, $|\ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon))|^{r^\beta} \leqslant c$ em $(a_\epsilon, 1)$, para algum $c > 0$ dependendo apenas de β e τ. Assim, usando (5.56) segue

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(a_\epsilon,1) = \int_{a_\epsilon}^1 r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} |\ln(\tau + t_\epsilon|u_\epsilon|)|^{r^\beta}\,dr - \int_{a_\epsilon}^1 r^\theta |u_\epsilon|^{p^*}\,dr = O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}). \tag{5.58}$$

Juntando (5.53), (5.54) e (5.58), segue

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1) \geqslant C\epsilon^\beta \ln|\ln \epsilon| + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}). \tag{5.59}$$

Por fim, as estimativas (5.51) e (5.59) prova (5.38) para o caso $0 < \tau < e$.

Caso II: $e \leqslant \tau < \infty$. Nesta situação, para qualquer $r \in (0,1)$ sempre temos

$$|\ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon)| \geqslant 1.$$

Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno podemos usar (5.39) para ver que

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1) \geqslant \mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,\epsilon) \geqslant C\epsilon^\beta \ln|\ln\epsilon|,$$

o que prova (5.38) para caso $e \leqslant \tau < \infty$. □

Lema 24. *Seja $\beta > 0$ e (t_ϵ) como em Lema 23. Então, quando $\epsilon \to 0$ temos*

(a) *Se $0 < \tau < e$,*

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1) \leqslant \begin{cases} O(\epsilon^\beta|\ln\epsilon|\ln(|\ln\epsilon|)) + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}) & \textit{se } \beta = \dfrac{\theta+1}{p-1} \\ O(\epsilon^{\frac{\theta+1+\beta}{p}}\ln(|\ln\epsilon|)) + O(\epsilon^\beta\ln(|\ln\epsilon|)) + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}}) & \textit{se } \beta \neq \dfrac{\theta+1}{p-1}. \end{cases} \tag{5.60}$$

(b) *Se $e \leqslant \tau < \infty$,*

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1) \leqslant \begin{cases} O(\epsilon^\beta|\ln\epsilon|\ln(|\ln\epsilon|)) & \textit{se } \beta = \dfrac{\theta+1}{p-1} \\ O(\epsilon^{\frac{\theta+\beta+1}{p}}\ln(|\ln\epsilon|)) + O(\epsilon^\beta\ln(|\ln\epsilon|)) + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}}) & \textit{se } \beta \neq \dfrac{\theta+1}{p-1}. \end{cases} \tag{5.61}$$

Demonstração. Inicialmente, seja $\bar{d} = 2t_0A$ e para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$0 \leqslant t_\epsilon u_\epsilon(r) = t_\epsilon A\eta(r)\epsilon^s\,(\epsilon^n + r^n)^{-\frac{1}{m}} \leqslant \bar{d}\epsilon^{s-\frac{n}{m}}, \quad \forall\, r \in (0,1). \tag{5.62}$$

Caso A: $0 < \tau < e$. Sejam a_ϵ e b_ϵ definidos por (5.40) e (5.41), para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que vale a relação ordem em (5.43). Em $(0, a_\epsilon)$, temos $\ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon) \geqslant 1$. Assim, usando (5.62) obtemos

$$\begin{aligned} |\ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon)| &= \ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon) \\ &\leqslant \ln(\tau + \bar{d}\epsilon^{s-\frac{n}{m}}) = |\ln\epsilon|\Big(\frac{n}{m} - s + o_\epsilon(1)\Big) \\ &\leqslant \xi|\ln\epsilon| \ \text{ em } \ (0, a_\epsilon) \end{aligned} \tag{5.63}$$

para algum $\xi > 0$. Observemos que $0 \leqslant r^\beta \ln(|\ln \epsilon|) \leqslant a_\epsilon^\beta \ln(|\ln \epsilon|) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, para $r \in (0, a_\epsilon)$. Portanto, usando que $(e^x - 1)/x \to 1$ quando $x \to 0$, podemos reescrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0, a_\epsilon) &= \int_0^{a_\epsilon} r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} \left(e^{r^\beta \ln|\ln(\tau + t_\epsilon|u_\epsilon|)|} - 1\right) dr \leqslant \int_0^{a_\epsilon} r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} \left(e^{r^\beta \ln(\xi|\ln \epsilon|)} - 1\right) dr \\
&\leqslant c_1 \ln(\xi|\ln \epsilon|) \int_0^{a_\epsilon} r^{\theta+\beta} |u_\epsilon|^{p^*} dr = c_1 A^{p^*} \ln(\xi|\ln \epsilon|) \int_0^{a_\epsilon} r^{\theta+\beta} \frac{\epsilon^{sp^*}}{(\epsilon^n + r^n)^{\frac{p^*}{m}}} dr \\
&\leqslant c_1 A^{p^*} \ln(\xi|\ln \epsilon|) \left[\epsilon^{(s - \frac{n}{m})p^*} \int_0^\epsilon r^{\theta+\beta} dr + \epsilon^{sp^*} \int_\epsilon^{a_\epsilon} r^{\theta+\beta-\frac{np^*}{m}} dr\right] \\
&= c_1 A^{p^*} \epsilon^\beta \ln(\xi|\ln \epsilon|) \left[\frac{1}{\theta+\beta+1} + \epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1} - \beta} \int_\epsilon^{a_\epsilon} r^{\beta - 1 - \frac{\theta+1}{p-1}} dr\right],
\end{aligned} \tag{5.64}$$

o que assegura

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0, a_\epsilon) \leqslant \begin{cases} O(\epsilon^\beta |\ln \epsilon| \ln(|\ln \epsilon|)), & \text{se } \beta = \dfrac{\theta+1}{p-1} \\ O(\epsilon^\beta \ln(|\ln \epsilon|)) + O(\epsilon^{\frac{\theta+1+\beta}{p}} \ln(|\ln \epsilon|)), & \text{se } \beta \neq \dfrac{\theta+1}{p-1}, \end{cases} \tag{5.65}$$

onde usamos que $a_\epsilon = O(\epsilon^{1/p})$, quando $\epsilon \to 0$.

Sub-case $0 < \tau < 1/e$.

Em $(b_\epsilon, 1)$, seja $\bar{d} = 2t_0 A$ e para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno podemos proceder de forma similar a (5.57), para deduzir que

$$0 \leqslant t_\epsilon u_\epsilon(r) \leqslant \bar{d} \left(\frac{\epsilon^{\frac{1}{p}}}{b_\epsilon}\right)^{\frac{n}{m}} \left(1 + \left(\frac{\epsilon}{b_\epsilon}\right)^n\right)^{-\frac{1}{m}}, \tag{5.66}$$

o que implica

$$\ln \tau \leqslant \ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon) \leqslant s_\tau \quad \forall\, r \in (b_\epsilon, 1),$$

para alguma constante $s_\tau = s(\tau) > 0$ (aqui, usamos que $b_\epsilon = O(\epsilon^{\frac{1}{p}})$, quando $\epsilon \to 0$). Consequentemente, $|\ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon)| \leqslant c_\tau$ em $(b_\epsilon, 1)$, para algum $c_\tau > 1$. Isso assegura que

$$\ln(|\ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon)|) \leqslant \ln c_\tau \quad \forall\, r \in (b_\epsilon, 1).$$

Portanto, usando que $e^x - 1 = e^{\vartheta x} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e para algum $0 < \vartheta = \vartheta_x < 1$ podemos estimar

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{t_\epsilon}(b_\epsilon, 1) &= \int_{b_\epsilon}^1 r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} \left(e^{r^\beta \ln|\ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon|)} - 1\right) dr \leqslant \int_{b_\epsilon}^1 r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} \left(e^{r^\beta \ln c_\tau} - 1\right) dr \\
&\leqslant C_\tau \int_{b_\epsilon}^1 r^{\beta+\theta} |u_\epsilon|^{p^*} dr \leqslant C_\tau A^{p^*} \epsilon^{sp^*} \int_{b_\epsilon}^1 r^{\theta+\beta-\frac{np^*}{m}} dr,
\end{aligned} \tag{5.67}$$

o que implica

$$\epsilon^{sp^*}\int_{b_\epsilon}^{1} r^{\theta+\beta-\frac{np^*}{m}}\,dr = \begin{cases} O(\epsilon^{\beta}|\ln\epsilon|) & \text{se } \beta = \dfrac{\theta+1}{p-1} \\ O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}}) + O(\epsilon^{\frac{\theta+\beta+1}{p}}) & \text{se } \beta \neq \dfrac{\theta+1}{p-1}, \end{cases} \tag{5.68}$$

onde usamos que $b_\epsilon = O(\epsilon^{\frac{1}{p}})$. Combinando (5.67) e (5.68), segue

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(b_\epsilon, 1) \leqslant \begin{cases} O(\epsilon^{\beta}|\ln\epsilon|) & \text{se } \beta = \dfrac{\theta+1}{p-1} \\ O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}}) + O(\epsilon^{\frac{\theta+\beta+1}{p}}) & \text{se } \beta \neq \dfrac{\theta+1}{p-1}. \end{cases} \tag{5.69}$$

Juntando (5.48), (5.65) e (5.69), obtemos (5.60) para $0 < \tau < 1/e$.

Sub-case $1/e \leqslant \tau < e$.

Combinando (5.58) e (5.65), obtemos (5.60).

Caso B: $e \leqslant \tau < \infty$. Em $(0,1)$, temos $\ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon) \geqslant 1$. Similarmente a (5.63) podemos estimar

$$|\ln(\tau + t_\epsilon u_\epsilon)| \leqslant \xi|\ln\epsilon| \quad \text{em} \quad (0,1). \tag{5.70}$$

Como antes, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, consideremos

$$0 < \epsilon < \epsilon^{\frac{1}{p}} < r_0 < 1. \tag{5.71}$$

Note que, para qualquer $r \in (0, \epsilon^{\frac{1}{p}})$, temos $0 \leqslant r^{\beta}\ln(\xi|\ln\epsilon|) \leqslant \epsilon^{\frac{\beta}{p}}\ln(\xi|\ln\epsilon|) \to 0$, quando $\epsilon \to 0$. Por isso, podemos prosseguir como em (5.64) para estimar

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{t_\epsilon}(0, \epsilon^{\frac{1}{p}}) &\leqslant \int_0^{\epsilon^{\frac{1}{p}}} r^{\theta}|u_\epsilon|^{p^*}\left(e^{r^{\beta}\ln(\xi|\ln\epsilon|)} - 1\right) dr \\ &\leqslant c_1\ln(\xi|\ln\epsilon|)\int_0^{\epsilon^{\frac{1}{p}}} r^{\theta+\beta}|u_\epsilon|^{p^*}\,dr \\ &= c_1\ln(\xi|\ln\epsilon|)\left[\int_0^{\epsilon} r^{\theta+\beta}|u_\epsilon|^{p^*}\,dr + \int_\epsilon^{\epsilon^{\frac{1}{p}}} r^{\theta+\beta}|u_\epsilon|^{p^*}\,dr\right]. \end{aligned} \tag{5.72}$$

Para estimar as integrais acima, vejamos que

$$\int_0^{\epsilon} r^{\theta+\beta}|u_\epsilon|^{p^*}\,dr = A^{p^*}\int_0^{\epsilon}\frac{\epsilon^{sp^*}}{(\epsilon^n + r^n)^{\frac{p^*}{m}}} r^{\theta+\beta}\,dr \leqslant A^{p^*}\epsilon^{(s-\frac{n}{m})p^*}\int_0^{\epsilon} r^{\theta+\beta}\,dr,$$

e

$$\int_\epsilon^{\epsilon^{\frac{1}{p}}} r^{\theta+\beta}|u_\epsilon|^{p^*}\,dr = A^{p^*}\int_\epsilon^{\epsilon^{\frac{1}{p}}}\frac{\epsilon^{sp^*}}{(\epsilon^n + r^n)^{\frac{p^*}{m}}} r^{\theta+\beta}\,dr \leqslant A^{p^*}\epsilon^{sp^*}\int_\epsilon^{\epsilon^{\frac{1}{p}}} r^{\theta+\beta-\frac{n}{m}p^*}\,dr. \tag{5.73}$$

Consequentemente,

$$\int_0^{\epsilon} r^{\theta+\beta}|u_\epsilon|^{p^*}\,dr \leqslant O(\epsilon^{\beta}) \quad \text{e} \quad \int_{\epsilon}^{\epsilon^{\frac{1}{p}}} r^{\theta+\beta}|u_\epsilon|^{p^*}\,dr \leqslant \begin{cases} O(\epsilon^{\beta}|\ln\epsilon|) & \text{se } \beta = \dfrac{\theta+1}{p-1} \\ O(\epsilon^{\frac{\theta+\beta+1}{p}}) & \text{se } \beta \neq \dfrac{\theta+1}{p-1}. \end{cases}$$

Voltando para (5.72), obtemos

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,\epsilon^{\frac{1}{p}}) \leqslant \begin{cases} O(\epsilon^{\beta}\ln(|\ln\epsilon|)) + O(\epsilon^{\beta}|\ln\epsilon|\ln(|\ln\epsilon|)) & \text{se } \beta = \dfrac{\theta+1}{p-1} \\ O(\epsilon^{\beta}\ln(|\ln\epsilon|)) + O(\epsilon^{\frac{\theta+\beta+1}{p}}\ln(|\ln\epsilon|)) & \text{se } \beta \neq \dfrac{\theta+1}{p-1}. \end{cases} \tag{5.74}$$

Adicionalmente, para qualquer $r \in (\epsilon^{1/p}, 1)$, argumentando como em (5.57) e (5.58), podemos deduzir que

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(\epsilon^{\frac{1}{p}},1) = \int_{\epsilon^{\frac{1}{p}}}^{1} r^{\theta}|u_\epsilon|^{p^*}\left|\ln\left(\tau + t_\epsilon|u_\epsilon|\right)\right|^{r^{\beta}}dr - \int_{\epsilon^{\frac{1}{p}}}^{1} r^{\theta}|u_\epsilon|^{p^*}\,dr = O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}). \tag{5.75}$$

Por fim, combinando (5.74) e (5.75) segue (5.61). □

Teorema 11. *Dado* $\beta > 0$*. Se* $(\theta,\alpha_0,\alpha_1,p)$ *satisfaz* (5.1)*, então para qualquer* $\tau > 0$ *temos:*

(i) $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} \geqslant \Sigma_p$*, para qualquer* $\beta > 0$

(ii) $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} > \Sigma_p$*, se* $0 < \beta < \min\{(\theta+1)/p, (\alpha_1 - p + 1)/(p-1)\}$

(iii) $\lim\limits_{\beta\to\infty} \mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} = \Sigma_p$.

Demonstração. Escolhemos $\widehat{A} = \mathcal{S}^{-\frac{\theta+1}{(\theta-\alpha_1+p)p}}$ em (5.35) e usamos (5.31), (5.33) e (5.34) para escrever

$$\|u_\epsilon\|^p = 1 + O(\epsilon^{sp}) \quad \text{e} \quad \|u_\epsilon\|^{p^*}_{L^{p^*}_\theta} = \Sigma_p + O(\epsilon^{sp^*}). \tag{5.76}$$

Utilizamos o Lema 23 com $t_\epsilon = 1/(1+O(\epsilon^{sp}))$ e (5.76) para estimar

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^{\theta}|u_\epsilon|^{p^*}\left|\ln\left(\tau + \frac{|u_\epsilon|}{1+O(\epsilon^{sp})}\right)\right|^{r^{\beta}}dr &= \mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1) + \|u_\epsilon\|^{p^*}_{L^{p^*}_\theta} \\ &\geqslant \begin{cases} \Sigma_p + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}}) + C\epsilon^{\beta}\ln|\ln\epsilon| + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}), & \text{se } 0 < \tau < e \\ \Sigma_p + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}}) + C\epsilon^{\beta}\ln|\ln\epsilon|, & \text{se } e \leqslant \tau < \infty \end{cases} \end{aligned} \tag{5.77}$$

para algum $C > 0$. Combinamos (5.76) e (5.77) para vermos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} &\geqslant \int_0^1 r^\theta \Big(\frac{|u_\epsilon|}{\|u_\epsilon\|}\Big)^{p^*} \Big| \ln\Big(\tau + \frac{|u_\epsilon|}{\|u_\epsilon\|}\Big)\Big|^{r^\beta} dr \\ &= (1 + O(\epsilon^{sp})) \int_0^1 r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} \Big|\ln\Big(\tau + \frac{|u_\epsilon|}{1+O(\epsilon^{sp})}\Big)\Big|^{r^\beta} dr \\ &\geqslant \begin{cases} \Sigma_p + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}}) + C\epsilon^\beta \ln|\ln\epsilon| + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}}) + O(\epsilon^{sp}), & \text{se } 0 < \tau < e \\ \Sigma_p + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}}) + C\epsilon^\beta \ln|\ln\epsilon| + O(\epsilon^{sp}), & \text{se } e \leqslant \tau < \infty \end{cases} \end{aligned} \tag{5.78}$$

se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, para todo $\tau > 0$ e $\beta > 0$. Para provar (i), fazemos $\epsilon \to 0$ em (5.78) para obtemos $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} \geqslant \Sigma_p$ para todo $\tau > 0$ e $\beta > 0$. Para provar (ii), usamos (5.78) para rescrever

$$\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} \geqslant \begin{cases} \Sigma_p + \epsilon^\beta \ln|\ln\epsilon| \Big[C + O\Big(\frac{\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}-\beta}}{\ln|\ln\epsilon|}\Big) + O\Big(\frac{\epsilon^{\frac{\theta+1}{p}-\beta}}{\ln|\ln\epsilon|}\Big) + O\Big(\frac{\epsilon^{sp-\beta}}{\ln|\ln\epsilon|}\Big)\Big], & \text{se } 0 < \tau < e \\ \Sigma_p + \epsilon^\beta \ln|\ln\epsilon| \Big[C + O\Big(\frac{\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}-\beta}}{\ln|\ln\epsilon|}\Big) + O\Big(\frac{\epsilon^{sp-\beta}}{\ln|\ln\epsilon|}\Big)\Big], & \text{se } e \leqslant \tau < \infty, \end{cases} \tag{5.79}$$

o que assegura o item (ii), desde que $0 < \beta < \min\{(\theta+1)/p, sp\}$. Finalmente, vamos provar (iii). Em vista do item (i), para obter (iii), é suficiente mostrar que

$$\lim_{\beta\to\infty} \sup \mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} \leqslant \Sigma_p. \tag{5.80}$$

Por contradição, suponha que exista uma sequência (β_j) com $\beta_j > 1$ satisfazendo

$$\lim_{j\to\infty} \beta_j = \infty \quad \text{e} \quad \Sigma_p < \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}_{\tau,\beta_j,\theta}. \tag{5.81}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $u_j \in X_1^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1)$ tal que

$$\|u_j\| = 1 \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{\tau,\beta_j,\theta} - \frac{1}{j} \leqslant \int_0^1 r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^{\beta_j}} dr. \tag{5.82}$$

Há menos de subsequência, a imersão compacta (1.12) assegura que existe $u_0 \in X_1^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1)$ tal que

$$u_j \rightharpoonup u_0 \text{ fracamente em } X_1^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1),\ u_j \to u_0 \text{ em } L^q_\theta \text{ e } u_j \to u_0 \text{ q.t.p. em } (0,1), \tag{5.83}$$

para qualquer $1 < q < p^*$. Seja $X_1^{1,p}([\rho,1])$ o espaço $X_1^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1)$ no intervalo $[\rho,1]$ em vez de $(0,1]$. Pelo Lema 3, segue $X_1^{1,p}([\rho,1]) \hookrightarrow L^q_\theta([\rho,1])$ é uma imersão compacta para todo $q \geqslant p$. Usando (5.83) e Lema 2, podemos aplicar o teorema da convergência dominado de Lebesgue para ver que

$$\lim_{j\to\infty} \int_\rho^1 r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^{\beta_j}} dr = \int_\rho^1 r^\theta |u_0|^{p^*} dr = \lim_{j\to\infty} \int_\rho^1 r^\theta |u_j|^{p^*} dr,$$

para qualquer $\rho \in (0,1)$ fixado. Então, para $\tau > 0$ vale

$$\int_\rho^1 r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^{\beta_j}}\, dr = \int_\rho^1 r^\theta |u_j|^{p^*}\, dr + o_j(1). \tag{5.84}$$

Argumentando como em (5.87) podemos estimar

$$|\ln(\tau + |u_j|)| \leqslant |\ln r| \Big(\frac{\alpha_1 - p + 1}{p} + \frac{\ln(\frac{\kappa}{\tau} + r^{\frac{\alpha_1 - p+1}{p}}) + |\ln \tau|}{|\ln r|} \Big).$$

Escolhemos $C_0 = \max \left\{ \frac{\alpha_1 + 1}{p}, 1 \right\}$ e para $0 < \rho < \delta_0$ suficientemente pequeno, segue

$$|\ln(\tau + |u_j|)| \leqslant C_0 |\ln r|, \quad \forall\, r \in (0, \rho).$$

Usando que $\beta_j > 1$ e $C_0 \geqslant 1$, também podemos estimar

$$|\ln(\tau + |u_j|)|^{r^{\beta_j}} \leqslant \big(C_0 |\ln r|\big)^{r^{\beta_j}} \leqslant \big(C_0 |\ln r|\big)^{r}, \quad \forall\, r \in (0, \rho).$$

Tendo em mente que $\big(C_0 |\ln r|\big)^r \to 1$ quando $r \to 0$, então para qualquer $\epsilon > 0$ temos

$$|\ln(\tau + |u_j|)|^{r^{\beta_j}} - 1 \leqslant \big(C_0 |\ln r|\big)^r - 1 < \epsilon,$$

para r próximo de 0. Por isso, para $\rho > 0$ suficientemente pequeno temos

$$\begin{aligned} \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^{\beta_j}}\, dr &= \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} \Big(|\ln(\tau + |u_j|)|^{r^{\beta_j}} - 1 \Big)\, dr + \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*}\, dr \\ &\leqslant (\epsilon + 1) \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*}\, dr. \end{aligned} \tag{5.85}$$

Combinando (5.82), (5.84) e (5.85) segue

$$\mathcal{F}_{\tau, \beta_j, \theta} - \frac{1}{j} \leqslant (1 + \epsilon) \Sigma_p + o_j(1).$$

Fazemos $j \to \infty$ e depois $\epsilon \to 0$, obtemos uma contradição. □

Definição 14. *Seja (u_j) uma sequência em $X_R^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$. Dizemos que (u_j) é uma sequência concentrada normalizada na origem, abreviada por NCS, se*

$$\|u_j\| = 1, \; u_j \rightharpoonup 0 \; \textit{fracamente em } X_R^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1) \; \textit{e} \; \lim_{j \to \infty} \int_{r_0}^R r^{\alpha_1} |u_j'|^p\, dr = 0, \; \forall\, r_0 > 0.$$

Abaixo, o resultado assegura que Σ_p definido em (5.25) é um limitante superior para o nível máximo de concentração do funcional $J(u) = \int_0^1 r^\theta |u|^{2^*} |\ln(\tau + |u|)|^{r^\beta}\, dr$, para $u \in X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$.

Lema 25. *Seja* $\mathcal{M} = \left\{(u_j) \subset X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1) : (u_j) \text{ é NCS}\right\}$. *Então, vale*

$$\sup_{(u_j)\in\mathcal{M}} \left\{ \limsup_{j\to\infty} \int_0^1 r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^\beta} \, dr \right\} \leqslant \Sigma_p, \tag{5.86}$$

para $\tau > 0$ *e* $\beta > 0$.

Demonstração. Seja $(u_j) \in \mathcal{M}$. Para provar (5.86), é suficiente mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\rho = \rho(\epsilon) \in (0,1)$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $j \geqslant j_0$

(a) $\displaystyle\int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^\beta} \, dr \leqslant \Sigma_p + \epsilon;$

(b) $\displaystyle\int_\rho^1 r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^\beta} \, dr \leqslant \epsilon.$

Item (a) : Usamos o Lema 2 (c.f (5.3)) para obtermos

$$\begin{aligned} |\ln(\tau + |u_j|)| &= \left| \ln\tau + \ln\left(1 + \frac{|u_j|}{\tau}\right)\right| \leqslant |\ln\tau| + \ln\left(1 + \frac{|u_j|}{\tau}\right) \\ &\leqslant |\ln\tau| + \ln\left(1 + \frac{K}{\tau} r^{-\frac{\alpha_1 - p + 1}{p}}\right) \\ &= |\ln r| \left(\frac{\alpha_1 - p + 1}{p} + \frac{\ln(\frac{K}{\tau} + r^{\frac{\alpha_1-p+1}{p}}) + |\ln\tau|}{|\ln r|} \right). \end{aligned} \tag{5.87}$$

Escolhemos $\eta = (\alpha_1 + 1)/p$ e para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, podemos estimar

$$|\ln(\tau + |u_j|)| \leqslant \eta |\ln r|, \quad \forall\, r \in (0, \rho). \tag{5.88}$$

Relembramos $(e^x - 1)/x \to 1$, quando $x \to 0^+$ e que a função $r \mapsto r^\beta \ln|\eta \ln r|$ é crescente próximo de 0. Assim, para algum $\delta_1 > 0$ pequeno e $0 < \rho < \delta_1$, usamos (5.88) para assegurar

$$\begin{aligned} \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} \left(|\ln(\tau + |u_j|)|^{r^\beta} - 1 \right) dr &= \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} \left(e^{r^\beta \ln|\ln(\tau + |u_j|)|} - 1 \right) dr \\ &\leqslant \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} \left(e^{r^\beta \ln|\eta \ln r|} - 1 \right) dr \\ &\leqslant C \int_0^\rho r^{\theta+\beta} |u_j|^{p^*} \ln|\eta \ln r| dr \\ &\leqslant C\rho^\beta \ln|\eta \ln \rho| \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} \, dr \\ &\leqslant C\rho^\beta \ln|\eta \ln\rho| \Sigma_p. \end{aligned} \tag{5.89}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^\beta} \, dr &= \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} \, dr + \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} \left(|\ln(\tau + |u_j|)|^{r^\beta} - 1 \right) dr \\ &\leqslant \Sigma_p + C\rho^\beta \ln|\eta \ln\rho| \Sigma_p \\ &\leqslant \Sigma_p + \epsilon, \end{aligned} \tag{5.90}$$

para $\rho = \rho(\epsilon) \in (0, \delta_1)$ suficientemente pequeno.

Item (b) : Para qualquer $r \in (\rho(\epsilon), 1)$, temos

$$\begin{aligned} |u_j(r)| &\leqslant \int_r^1 |u_j'(s)|\, ds = \int_r^1 s^{\frac{\alpha_1}{p}} |u_j'(s)| s^{-\frac{\alpha_1}{p}}\, ds \\ &\leqslant \left(\int_\rho^1 s^{\alpha_1} |u_j'|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_r^1 s^{\frac{-\alpha_1}{p-1}}\, ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leqslant \kappa_j r^{-\frac{\alpha_1 - p + 1}{p}}, \end{aligned} \tag{5.91}$$

onde $\kappa_j := C \left(\int_\rho^1 s^{\alpha_1} |u_j'|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}}$, para algum $C = C(\alpha_1, p)$. Desde que (u_j) é NCS, temos $\kappa_j \to 0$, quando $j \to \infty$. Usando (5.91), se $\tau \in (0, 1)$ obtemos

$$\begin{aligned} |\ln(\tau + |u_j|)| &\leqslant |\ln \tau| + \ln\left(1 + \frac{\kappa_j}{\tau} r^{-\frac{\alpha_1 - p + 1}{p}}\right) \\ &\leqslant |\ln \tau| + \ln\left(1 + \frac{\kappa_j}{\tau} \rho^{-\frac{\alpha_1 - p + 1}{p}}\right) \leqslant C_1, \quad \forall\, r \in (\rho, 1) \end{aligned}$$

e, se $\tau \geqslant 1$ temos

$$|\ln(\tau + |u_j|)| \leqslant \ln\left(\tau + \kappa_j \rho^{-\frac{\alpha_1 - p + 1}{p}}\right) \leqslant C_2, \quad \forall\, r \in (\rho, 1)$$

para j suficientemente grande, onde C_1 e C_2 dependem apenas de ρ e τ. Escolhemos $C = \max\{1, C_1, C_2\} \geqslant 1$, então

$$\int_\rho^1 r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^\beta}\, dr \leqslant C \int_\rho^1 r^\theta (\kappa_j r^{-\frac{\alpha_1 - p + 1}{p}})^{p^*}\, dr = C \kappa_j^{p^*} \int_\rho^1 \frac{1}{r}\, dr < \epsilon,$$

para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. $\square$

Proposição 10. *Sejam $\tau \geqslant 1$ e $\beta > 0$. Se $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}$ não é atingido, então qualquer uma de suas sequências maximizantes é necessariamente NCS.*

Demonstração. Seja $(u_j) \subset X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ satisfazendo

$$\|u_j\| = 1 \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} = \lim_{j \to \infty} \int_0^1 r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^\beta}\, dr. \tag{5.92}$$

Há menos de subsequência, existe $u \in X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ tal que $u_j \rightharpoonup u$ fracamente em $X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$, $u_j \to u$ q.t.p. em $(0, 1)$ e $\|u\| \leqslant \liminf \|u_j\| = 1$. Agora, analisamos as seguintes etapas:

Etapa 1: Provaremos que $u \equiv 0$. De fato, por contradição assumimos que $u \not\equiv 0$. Seja $v_j = u_j - u$. Por argumento do tipo Brezis-Lieb em [13], obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^\beta}\, dr &= \int_0^1 r^\theta |v_j|^{p^*} |\ln(\tau + |v_j|)|^{r^\beta}\, dr \\ &+ \int_0^1 r^\theta |u|^{p^*} |\ln(\tau + |u|)|^{r^\beta}\, dr + o_j(1), \end{aligned} \tag{5.93}$$

e

$$1 = \int_0^1 r^{\alpha_1}|u_j'|^p \, dr = \int_0^1 r^{\alpha_1}|v_j'|^p \, dr + \int_0^1 r^{\alpha_1}|u'|^p \, dr + o_j(1), \tag{5.94}$$

onde $o_j(1) \to 0$ quando $j \to \infty$. Se $\|u\| = 1$ em (5.94), obtemos $u_j \to u$ fortemente em $X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$, ou seja, $v_j \to 0$ fortemente em $X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$. Assim, combinando a imersão contínua no Corolário 12 com (5.93) segue que u é função extremal para $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}$, o que contradiz nossa suposição. Portanto, podemos assumir que $0 < \|u\| < 1$. Neste caso, usamos (5.92), (5.93) e (5.94) para ver que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} &= \|v_j\|^{p^*} \int_0^1 r^\theta \left(\frac{|v_j|}{\|v_j\|}\right)^{p^*} |\ln(\tau + |v_j|)|^{r^\beta} \, dr \\
&+ \|u\|^{p^*} \int_0^1 r^\theta \left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{p^*} |\ln(\tau + |u|)|^{r^\beta} \, dr + o_j(1) \\
&\leqslant \|v_j\|^{p^*} \int_0^1 r^\theta \left(\frac{|v_j|}{\|v_j\|}\right)^{p^*} \left|\ln\left(\tau + \left|\frac{v_j}{\|v_j\|}\right|\right)\right|^{r^\beta} dr \\
&+ \|u\|^{p^*} \int_0^1 r^\theta \left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{p^*} \left|\ln\left(\tau + \left|\frac{u}{\|u\|}\right|\right)\right|^{r^\beta} dr + o_j(1) \\
&\leqslant \mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} \left(\|v_j\|^{p^*} + \|u\|^{p^*}\right) + o_j(1) \\
&= \mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} \left((1 - \|u\|^p + o_j(1))^{\frac{p^*}{p}} + (\|u\|^p)^{\frac{p^*}{p}}\right) + o_j(1) \\
&< \mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta},
\end{aligned}$$

o que é uma contradição, desde que $(1-t)^{\frac{p^*}{p}} + t^{\frac{p^*}{p}} < 1$ para todo $t \in (0,1)$. Concluímos que $u \equiv 0$, como desejado.

Etapa 2: Para cada $r_0 \in (0,1)$ provaremos que

$$\int_{r_0}^1 r^{\alpha_1}|u_j'|^p \, dr \to 0, \quad \text{quando } j \to 0. \tag{5.95}$$

De fato, usando o Lema 2 temos

$$C_0 = C_0(\alpha_1, \beta, \tau, r_0) = \sup_{r \in [r_0, 1]} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^\beta} < \infty. \tag{5.96}$$

Assim, a imersão compacta

$$X_1^{1,p}([r_0, 1]) \hookrightarrow L_\theta^q([r_0, 1]), \quad q \geqslant p \tag{5.97}$$

assegura que

$$\int_{r_0}^1 r^\theta |u_j|^{p^*} |\ln(\tau + |u_j|)|^{r^\beta} \, dr \;\leqslant\; C_0 \int_{r_0}^1 r^\theta |u_j|^{p^*} \, dr \to 0, \quad \text{quando } j \to \infty. \tag{5.98}$$

Como (u_j) é uma sequência maximizante, pelo princípio variacional de Ekeland [48, Theorem 3.1] existe λ_j tal que

$$\begin{aligned}\lambda_j \int_0^1 r^{\alpha_1}|u_j'|^{p-2}u_j'\varphi' \, dr = p^* \int_0^1 r^{\theta}|u_j|^{p^*-2} \left(\ln\left(\tau+|u_j|\right)\right)^{r^{\beta}} u_j \varphi \, dr \\ + \int_0^1 \frac{r^{\theta+\beta}|u_j|^{p^*-1}u_j\varphi}{\left(\tau+|u_j|\right)\left(\ln\left(\tau+|u_j|\right)\right)^{1-r^{\beta}}} \, dr + \langle o_j(1), \varphi\rangle.\end{aligned} \tag{5.99}$$

Escolhemos $\varphi = u_j$ em (5.99), então

$$\lambda_j \int_0^1 r^{\alpha_1}|u_j'|^{p} \, dr \;\; \geqslant \;\; p^* \int_0^1 r^{\theta}|u_j|^{p^*} \left(\ln\left(\tau+|u_j|\right)\right)^{r^{\beta}} \, dr + \langle o_j(1), u_j\rangle.$$

Fazemos $j \to \infty$, então $\liminf \lambda_j \geqslant p^*\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}$. Seja $\bar{\eta} : [0,1] \to [0,1]$ uma função suave tal que $\bar{\eta} \equiv 0$ em $[0, r_0/2]$ e $\bar{\eta} \equiv 1$ in $[r_0, 1]$. Observemos que, para qualquer $\tau \geqslant 1$ temos

$$0 \leqslant |u_j| < |u_j| + \tau \quad \text{e} \quad \left(\ln\left(\tau+|u_j|\right)\right)^{r^{\beta}} \leqslant C\ln\left(\tau+|u_j|\right).$$

Isso junto com (5.97) assegura que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{r^{\theta+\beta}|u_j|^{p^*-1}u_j(\bar{\eta}u_j)}{\left(\tau+|u_j|\right)\left(\ln\left(\tau+|u_j|\right)\right)^{1-r^{\beta}}} \, dr &= \int_{r_0/2}^1 \frac{r^{\theta+\beta}|u_j|^{p^*+1}\bar{\eta}}{\left(\tau+|u_j|\right)\left(\ln\left(\tau+|u_j|\right)\right)^{1-r^{\beta}}} \, dr \\ &\leqslant \int_{r_0/2}^1 \frac{r^{\theta}|u_j|^{p^*}}{\left(\ln\left(\tau+|u_j|\right)\right)^{1-r^{\beta}}} \, dr \\ &\leqslant C \int_{r_0/2}^1 r^{\theta}|u_j|^{p^*} \, dr \to 0.\end{aligned} \tag{5.100}$$

Tomamos $\varphi = \bar{\eta}u_j$ em (5.99), usamos (5.98) e (5.100) para ver que

$$\begin{aligned}o_j(1) &= \int_{r_0/2}^1 r^{\alpha_1}|u_j'|^{p-2}u_j'(\bar{\eta}u_j)' \, dr \\ &= \int_{r_0/2}^1 r^{\alpha_1}|u_j'|^{p}\bar{\eta} \, dr + \int_{r_0/2}^1 r^{\alpha_1}|u_j'|^{p-2}u_j'u_j\bar{\eta}' \, dr \\ &\geqslant \int_{r_0}^1 r^{\alpha_1}|u_j'|^{p} \, dr - \|\bar{\eta}'\|_{\infty}\|u_j'\|_{L^p_{\alpha_1}}^{p-1} \left(\int_{r_0}^1 r^{\alpha_1}|u_j|^{p} \, dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \int_{r_0}^1 r^{\alpha_1}|u_j'|^{p} \, dr + o_j(1)\end{aligned} \tag{5.101}$$

onde usamos que $\int_{r_0}^1 r^{\alpha_1}|u_j|^p \, dr \leqslant C\int_{r_0}^1 r^{\theta}|u_j|^p \, dr \to 0$ as $j \to \infty$. Finalmente, (5.101) assegura que (5.95) vale.

Das etapas acima, concluímos que (u_j) é NSC. $\square$

Baseado na abordagem de Carleson-Chang [19], conseguimos provar atingibilidade para $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}$.

Teorema 12. *Se* $\tau \geqslant 1$, $0 < \beta < \min\{(\theta+1)/p, (\alpha_1 - p + 1)/(p-1)\}$ *e* $(\theta, \alpha_0, \alpha_1, p)$ *satisfaz* (5.1), *então existe* $u_0 \in X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ *tal que*

$$\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} = \int_0^1 r^\theta |u_0|^{p^*} |\ln(\tau + |u_0|)|^{r^\beta}\, dr \quad \textit{com} \quad \|u_0\| = 1.$$

Demonstração. Por contradição, suponha que $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}$ não é atingido. Pela Proposição 10, temos que qualquer sequência maximizante para $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}$ é necessariamente NCS. Assim, o Lema 25 implica que $\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} \leqslant \Sigma_p$. Isso contradiz o Teorema 11-(ii). □

Chamamos a atenção do leitor que os Teoremas 11 e 12 estendem [37, Theorem 1.4] para o contexto dos espaços de Sobolev com pesos $X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$. Adicionalmente, resultados desse tipo vêm sendo estudados em outros trabalhos, veja [16, 27, 33, 71] para mais informações, seja para $X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ e em outros contextos.

5.3 Uma classe de equações com termo logarítmico supercrítico

Dados $\alpha_1, \theta \geqslant 0$ e $p > 1$ são números reais, definimos

$$Lu \overset{\text{def}}{=} -r^{-\theta}(r^{\alpha_1}|u'|^{p-2}u')' \tag{5.102}$$

onde $u \in C^2(0, R)$, com $0 < R \leqslant \infty$. Operador L é uma classe de operadores elípticos quasilineares em forma radial, e vem sendo estudada por vários autores, veja [22, 30, 40, 40, 49, 55, 59] e referências citadas neles. Esse operador tem uma relação próxima com operadores clássicos como Laplaciano, p-Laplaciano e k-Hessiano, quando atuam em funções radialmente simétricas.

A existência de solução fraca para uma classe de equações elípticas com termo logarítmico supercrítico associado a (5.102) é fornecida pelo seguinte resultado:

Teorema 13. *Para cada* $\tau \in [1, \infty)$, $0 < \beta < \min\{(\theta+1)/p, (\alpha_1 - p + 1)/(p-1)\}$ *e* $(\alpha_0, \alpha_1, \theta, p)$ *satisfaz* (5.1), *tem-se que o problema*

$$\begin{cases} Lu = (\ln(\tau + |u|))^{r^\beta} |u|^{p^*-2}u & \textit{em} \quad (0,1) \\ u = 0 & \textit{em} \quad 1 \end{cases} \tag{5.103}$$

possui uma solução fraca $u \in X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ *não nula.*

Demonstração. Seja $I : X^{1,p}_1(\alpha_0, \alpha_1) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_0^1 r^{\alpha_1}|u'|^p\,dr - \frac{1}{p^*}\int_0^1 r^{\theta}|u|^{p^*}(\ln(\tau+|u|))^{r^{\beta}}\,dr + \int_0^1 r^{\theta}G(r,u)\,dr, \tag{5.104}$$

onde

$$G(r,u) = \int_0^u g(r,s)\,ds \quad \text{e} \quad g(r,s) = \frac{r^{\beta}|s|^{p^*-1}s}{p^*(\tau+|s|)(\ln(\tau+|s|))^{1-r^{\beta}}}.$$

Observemos que $g(0,u) = 0$. Ainda, para qualquer $\epsilon > 0$ pequeno, existe uma constante grande $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|G(r,u)| \leqslant r^{\beta}(\epsilon|u|^{p^*} + C_\epsilon|u|^p) \quad \text{e} \quad |G(r,u)| \leqslant r^{\beta}(\epsilon|u|^p + C_\epsilon|u|^{p^*}). \tag{5.105}$$

O Teorema 10 assegura que o funcional I é bem definido e de classe C^1 em $X^{1,p}_1(\alpha_0, \alpha_1)$. Adicionalmente, para todo $\varphi \in X^{1,p}_1(\alpha_0, \alpha_1)$ temos

$$\langle I'(u), \varphi\rangle = \int_0^1 r^{\alpha_1}|u'|^{p-2}u'\varphi'\,dr - \int_0^1 r^{\theta}|u|^{p^*-1}(\ln(\tau+|u|))^{r^{\beta}}\varphi\,dr. \tag{5.106}$$

É claro que os pontos críticos do funcional I são soluções fracas de (5.103). Assim, para completar a demonstração do Teorema 13, seguimos a mesma estratégia de [46]. Mais precisamente, aplicaremos uma versão do teorema passo da montanha sem a condição de Palais-Smale devido a Brezis e Nirenberg, veja Teorema 4, para obter pontos críticos de I. Portanto, o resultado segue das seguintes etapas:

(A) [Lema 26] O funcional I tem a geometria do passo da montanha.

(B) [Lema 27] O nível do passo da montanha c_{MP} satisfaz

$$c_{MP} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}}.$$

(C) [Lema 28] Há uma perda de compacidade para o I funcional no nível

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}}.$$

(D) [Lema 29] Existe uma solução fraca não trivial no nível $c_{MP} > 0$.

$\square$

Mencionamos que, se o termo logarítmico $(\ln(\tau+|u|))^{r^{\beta}}$ for trocado por 1 em (5.103), então o problema não tem solução, veja [59, Theorem 4.1] para mais detalhes. Assim, o termo logarítmico faz um papel similar ao termo de ordem inferior introduzido por Brezis e Nirenberg [14] (veja também [59]), permitindo evitar os níveis de perda de compacidade do funcional associado.

Lema 26. *O funcional* I *tem a geometria do passo da montanha.*

(a) $I(0) = 0$.

(b) *Para cada* $u \in X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1) \setminus \{0\}$ *com* $u \geqslant 0$, *temos* $I(tu) \to -\infty$, *se* $t \to +\infty$.

(c) *Existem* $\delta, \rho > 0$ *tal que* $I(u) \geqslant \delta$, *se* $\|u\| = \rho$.

Demonstração. É claro que $I(0) = 0$. Seja $u \in X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ com $u \geqslant 0$. Para $t \geqslant 1$ temos $\ln(\tau + tu) \geqslant \ln(\tau + u)$ em $(0, 1)$. Então, para cada $t \geqslant 1$, por (5.105) segue

$$\begin{aligned} I(tu) &\leqslant \frac{t^p}{p}\int_0^1 r^{\alpha_1}|u'|^p\,dr - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int_0^1 r^{\theta}|u|^{p^*}(\ln(\tau+|u|))^{r^\beta}\,dr \\ &\quad + \epsilon t^{p^*}\int_0^1 r^{\theta+\beta}|u|^{p^*}\,dr + C_\epsilon t^p\int_0^1 r^{\theta+\beta}|u|^p\,dr \\ &\leqslant \frac{t^p}{p}\|u\|^p - t^{p^*}\left[\frac{1}{p^*}\int_0^1 r^{\theta}|u|^{p^*}(\ln(\tau+|u|))^{r^\beta}\,dr - \epsilon\|u\|^p_{L^p_\theta}\right] + C_\epsilon t^p\|u\|^p_{L^p_\theta}. \end{aligned} \tag{5.107}$$

Como $p^* > p$, escolhemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\int_0^1 r^{\theta}|u|^{p^*}(\ln(\tau+|u|))^{r^\beta}\,dr > \epsilon p^*\|u\|^p_{L^p_\theta},$$

e depois fazemos $t \to \infty$ para obter o item (b). Para provar o item (c), aplicamos o Teorema 10 em $u \in X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ com $0 < \|u\| < 1$, para obter

$$\frac{1}{\|u\|^{p^*}}\int_0^1 r^{\theta}|u|^{p^*}|\ln(\tau+|u|)|^{r^\beta}\,dr \leqslant \int_0^1 r^{\theta}\left|\frac{u}{\|u\|}\right|^{p^*}\left|\ln\left(\tau + \left|\frac{u}{\|u\|}\right|\right)\right|^{r^\beta}\,dr \leqslant \mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}$$

o que significa que

$$\int_0^1 r^{\theta}|u|^{p^*}|\ln(\tau+|u|)|^{r^\beta}\,dr \leqslant \mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}\|u\|^{p^*}, \quad \text{se } \|u\| < 1. \tag{5.108}$$

Combinando a imersão contínua (1.12) e as estimativas (5.105) e (5.108), segue

$$\begin{aligned} I(u) &\geqslant \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}}{p^*}\|u\|^{p^*} - \int_0^1 r^{\theta+\beta}(\epsilon|u|^p + C_\epsilon|u|^{p^*})\,dr \\ &\geqslant \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta}}{p^*}\|u\|^{p^*} - \epsilon\|u\|^p_{L^p_\theta} - C_\epsilon\|u\|^{p^*}_{L^{p^*}_\theta} \\ &\geqslant \left(\frac{1}{p} - \epsilon C_1\right)\|u\|^p - \frac{\mathcal{F}_{\tau,\beta,\theta} + p^*C_2C_\epsilon}{p^*}\|u\|^{p^*}. \end{aligned} \tag{5.109}$$

Como $p^* > p$, escolhemos $\rho > 0$ suficientemente pequeno e $\delta > 0$ tal que

$$I(u) \geqslant \delta \text{ para } \|u\| = \rho.$$

Isso prova que (c) é válido. $\square$

Seja u_ϵ como em (5.35) com $\widehat{A} = 1$. O Lema 26 assegura que existe

$$c_{MP} = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{u\in\gamma} I(u) \tag{5.110}$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma : [0,T] \to X^{1,p}_1(\alpha_0,\alpha_1) \ : \ \gamma \text{ é contínuo, } \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ \gamma(T) = Tu_\epsilon\}$$

com $T > 0$ suficientemente grande, de modo que $I(Tu_\epsilon) < 0$. Ainda, por Lema 26 segue $\Gamma \neq \emptyset$ e $c_{MP} \geqslant \delta > 0$.

Lema 27. *O nível do passo da montanha c_{MP} satisfaz* $0 < c_{MP} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}}$.

Demonstração. Para cada $\epsilon > 0$, seja $\gamma_\epsilon(t) = tu_\epsilon$ para $t \in [0,T]$. Pela definição em (5.110), existe $t_\epsilon > 0$ tal que

$$(I\circ\gamma_\epsilon)(t_\epsilon) = \max_{t\in[0,T]}(I\circ\gamma_\epsilon)(t) \geqslant c_{MP}. \tag{5.111}$$

Afirmamos que

$$t_\epsilon \to 1, \qquad \text{quando} \quad \epsilon \to 0. \tag{5.112}$$

De fato, usamos $\frac{d}{dt}I(\gamma_\epsilon(t))|_{t=t_\epsilon} = 0$ para obter

$$t_\epsilon^{p-1}\int_0^1 r^{\alpha_1}|u_\epsilon'|^p\,dr = t_\epsilon^{p^*-1}\int_0^1 r^\theta|u_\epsilon|^{p^*}\left(\ln\left(\tau + |t_\epsilon u_\epsilon|\right)\right)^{r^\beta}\,dr. \tag{5.113}$$

Combinando (5.33), (5.34) e (5.113), segue

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}} + O(\epsilon^{sp}) &= t_\epsilon^{p^*-p}\int_0^1 r^\theta|u_\epsilon|^{p^*}\left(\ln\left(\tau+|t_\epsilon u_\epsilon|\right)\right)^{r^\beta}\,dr\\ &= t_\epsilon^{p^*-p}\int_0^1 r^\theta|u_\epsilon|^{p^*}\,dr + t_\epsilon^{p^*-p}\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1)\\ &= t_\epsilon^{p^*-p}\left[\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}} + O(\epsilon^{sp^*}) + \mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1)\right],\end{aligned} \tag{5.114}$$

onde $\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1)$ é dado em (5.36). Pela estrutura geométrica do passo da montanha no Lema 26, existe $\delta_1 > 0$ satisfazendo $\delta_1 \leqslant t_\epsilon \leqslant T$. Então, podemos assumir que $t_\epsilon \to t_0 > 0$ quando $\epsilon \to 0$. Juntando $0 < \beta < \min\{(\theta+1)/p, sp\}$, Lema 23 e Lema 24 segue

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1) = O(\epsilon^\beta \ln(|\ln\epsilon|)). \tag{5.115}$$

Por (5.114) e (5.115), obtemos

$$1 + O(\epsilon^{sp}) = t_\epsilon^{p^*-p}(1 + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}}) + O(\epsilon^\beta\ln(|\ln\epsilon|))). \tag{5.116}$$

Fazemos $\epsilon \to 0$ para obtemos que $t_\epsilon \to 1$, como afirmado em (5.112). Utilizamos (5.116) e $0 < \beta < \min\{(\theta+1)/p, sp\}$ para obtemos

$$t_\epsilon^{p^*-p} = \frac{1 + O(\epsilon^{sp})}{1 + O(\epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}}) + O(\epsilon^\beta \ln(|\ln \epsilon|))} = 1 + O(\epsilon^\beta \ln(|\ln \epsilon|)).$$

Agora, para qualquer $q > 0$, vale

$$(1+x)^q = 1 + qx + O(x^2), \quad \text{quando } \ x \to 0.$$

Assim, utilizamos a igualdade acima para escrever

$$\begin{cases} t_\epsilon = 1 + O(\epsilon^\beta \ln(|\ln \epsilon|)) \\ t_\epsilon^p = 1 + pT_\epsilon + O(\epsilon^{2\beta} \ln^2(|\ln \epsilon|)) \\ t_\epsilon^{p^*} = 1 + p^* T_\epsilon + O(\epsilon^{2\beta} \ln^2(|\ln \epsilon|)), \end{cases} \tag{5.117}$$

onde $T_\epsilon = t_\epsilon - 1$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, por (5.35), (5.105), (5.112) temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 r^\theta G(r, t_\epsilon u_\epsilon)\, dr \right| &\leqslant C\epsilon^{sp^* - \frac{np^*}{m}} \int_0^\epsilon r^{\theta+\beta}\, dr + C\epsilon^{sp^*} \int_\epsilon^1 r^{\theta+\beta-\frac{np^*}{m}}\, dr \\ &\quad + C\epsilon^{sp-\frac{np}{m}} \int_0^\epsilon r^{\theta+\beta}\, dr + C\epsilon^{sp} \int_\epsilon^1 r^{\theta+\beta-\frac{np}{m}}\, dr \\ &\leqslant C\left(\epsilon^\beta + \epsilon^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right) + C\left(\epsilon^{\beta+\theta-\alpha_1+p} + \epsilon^{\frac{\alpha_1-p+1}{p-1}}\right) \leqslant C_1 \epsilon^\beta. \end{aligned} \tag{5.118}$$

Para $\tau \geqslant 1$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o Lema 23 assegura que existe $C > 0$ tal que

$$\mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1) \geqslant C\epsilon^\beta \ln|\ln \epsilon|, \quad \text{se } \ \beta < (\theta+1)/p. \tag{5.119}$$

Estamos em condições de estimar o nível c_{MP}. Por (5.111), é suficiente mostrar que

$$I(t_\epsilon u_\epsilon) < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}},$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. De fato, primeiro escrevemos

$$\begin{aligned} I(t_\epsilon u_\epsilon) &= \frac{t_\epsilon^p}{p} \int_0^1 r^{\alpha_1} |u_\epsilon'|^p\, dr - \frac{t_\epsilon^{p^*}}{p^*} \int_0^1 r^\theta |u_\epsilon|^{p^*} (\ln(\tau + t_\epsilon |u_\epsilon|))^{r^\beta}\, dr + \int_0^1 r^\theta G(r, t_\epsilon u_\epsilon)\, dr \\ &= \frac{t_\epsilon^p}{p} \|u_\epsilon\|^p - \frac{t_\epsilon^{p^*}}{p^*} \left(\|u_\epsilon\|_{L_\theta^{p^*}}^{p^*} + \mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1) \right) + \int_0^1 r^\theta G(r, t_\epsilon u_\epsilon)\, dr. \end{aligned} \tag{5.120}$$

Combinando (5.33), (5.34), (5.115), (5.117), (5.118), (5.119) e (5.120) obtemos

$$\begin{aligned}
I(t_\epsilon u_\epsilon) &= \left(\frac{1}{p} + T_\epsilon + O(\epsilon^{2\beta}\ln^2(|\ln\epsilon|))\right)\left(\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}} + O(\epsilon^{sp})\right)\\
&\quad - \left(\frac{1}{p^*} + T_\epsilon + O(\epsilon^{2\beta}\ln^2(|\ln\epsilon|))\right)\left(\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}} + \mathcal{E}_{t_\epsilon}(0,1) + O(\epsilon^{sp^*})\right) + O(\epsilon^\beta)\\
&\leqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}} + \epsilon^\beta\ln|\ln\epsilon|\Big[-\frac{C}{p^*} + O\Big(\frac{\epsilon^{sp}}{\epsilon^\beta\ln|\ln\epsilon|}\Big) + O\Big(\epsilon^\beta\ln|\ln\epsilon|\Big)\Big]\\
&\quad + \epsilon^\beta\ln|\ln\epsilon|\Big[O\Big(\frac{\epsilon^{sp^*}}{\epsilon^\beta\ln|\ln\epsilon|}\Big) + O\Big(\frac{\epsilon^\beta}{\epsilon^\beta\ln|\ln\epsilon|}\Big)\Big]\\
&< \Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\Big)\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}},
\end{aligned} \tag{5.121}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. □

Lema 28. *O nível* $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}}$ *é um nível de não compacidade para o funcional* I.

Demonstração. Seja (u_ϵ) definido como em (5.35) com $\widehat{A} = 1$. Primeiro, vamos provar que (u_ϵ) é uma sequência concentrada na origem $r = 0$. De fato, para $\rho < r_0$ e $r \in (0, \rho)$, a mudança de variável $s = r\epsilon^{-1}$ implica que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\rho r^{\alpha_1}|u_\epsilon'(r)|^p\,dr = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\rho\epsilon^{-1}} s^{\alpha_1}|(u_1^*)'(s)|^p\,ds = \int_0^\infty s^{\alpha_1}|(u_1^*)'(s)|^p\,ds = \mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}},$$

onde usamos que $u_\epsilon(r) = \epsilon^{-(\alpha_1-p+1)/p}u_1^*(r/\epsilon)$ e (5.30). Assim, por (5.33) segue

$$\int_\rho^1 r^{\alpha_1}|u_\epsilon'(r)|^p\,dr = \int_0^1 r^{\alpha_1}|u_\epsilon'(r)|^p\,dr - \int_0^\rho r^{\alpha_1}|u_\epsilon'(r)|^p\,dr = O(\epsilon^{sp}) \to 0, \quad \text{se } \epsilon \to 0.$$

Por outro lado, se $\rho \in [r_0, 1)$, seja $\bar\rho \in (0, r_0)$. Então,

$$\int_\rho^1 r^{\alpha_1}|u_\epsilon'(r)|^p\,dr \leqslant \int_{\bar\rho}^1 r^{\alpha_1}|u_\epsilon'(r)|^p\,dr \to 0, \quad \text{se } \epsilon \to 0.$$

Portanto, para qualquer $0 < \rho < 1$ segue

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\rho^1 r^{\alpha_1}|u_\epsilon'(r)|^p\,dr = 0. \tag{5.122}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^\theta|u_\epsilon|^p\,dr &\leqslant \int_0^1 r^\theta|u_\epsilon^*|^p\,dr = \epsilon^{\theta-\alpha_1+p}\int_0^{\epsilon^{-1}} s^\theta|u_1^*(s)|^p\,ds\\
&= \widehat{c}^p\epsilon^{\theta-\alpha_1+p}\int_0^{\epsilon^{-1}}\frac{s^\theta}{(1+s^n)^{\frac{1}{m}}}\,ds \to 0, \quad \text{se } \epsilon \to 0
\end{aligned}$$

onde m e n são definidos em (5.29), o que assegura que $u_\epsilon \to 0$ fortemente em $L^p_\theta(0,1)$. Assim, a imersão compacta (1.12) implica que $u_\epsilon \rightharpoonup 0$ fracamente em $X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$, quando

$\epsilon \to 0$. Essa convergência fraca junto com (5.122), garante que (u_ϵ) é uma sequência concentrada na origem $r = 0$. Agora, combinamos (5.33), (5.34), (5.115) e (5.118) para ver que

$$\begin{aligned} I(u_\epsilon) &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}} + O(\epsilon^{sp}) - O(\epsilon^{sp^*}) + \frac{\mathcal{E}_1(0,1)}{p^*} + \int_0^1 r^\theta G(r, u_\epsilon)\, dr \\ &\to \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}}, \quad \text{se } \epsilon \to 0. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência (u_ϵ) não contém uma subsequência convergente fortemente em $X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$. □

Os Lemas 26 e 27 são fundamentais, pois os mesmos nós deixam em posição de aplicar Teorema 4. Portanto, existe uma sequência Palais-Smale (u_j) em $X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ do funcional I no nível $c_{MP} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}}$. Adicionalmente, para qualquer $\varphi \in X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ temos

$$I(u_j) \to c_{MP} \quad \text{e} \quad \langle I'(u_j), \varphi \rangle \to 0, \tag{5.123}$$

se $j \to \infty$.

Lema 29. *Há menos de uma subsequência,* $u_j \rightharpoonup u_0$ *fracamente em* $X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$*, se* $j \to \infty$*. Além disso,* u_0 *é uma solução fraca não trivial para* (5.103).

Demonstração. Utilizamos (5.123) para ver que

$$c_{MP} + 1 \geqslant I(u_j) - \frac{1}{p^*} \langle I'(u_j), u_j \rangle = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \|u_j\|^p + \int_0^1 r^\theta G(r, u_j)\, dr,$$

o que implica que (u_j) é uma sequência limitada em $X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$. Portanto, há menos de uma subsequência, existe $u_0 \in X_1^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1)$ tal que

$$u_j \rightharpoonup u_0 \text{ frac. em } X_1^{1,p}, \;\; u_j \to u_0 \text{ em } L^q_\theta \; (p \leqslant q < p^*) \text{ e } u_j \to u_0 \text{ q.t.p. em } (0,1). \tag{5.124}$$

Por um argumento padrão, podemos verificar que u_0 resolve a equação (5.103), veja por exemplo [22, 41] para mais detalhes. Desta forma, é suficiente provar afirmação abaixo.

Afirmação. $u_0 \not\equiv 0$.

Por contradição, assumimos que $u_0 \equiv 0$. Como em (5.98), obtemos

$$\int_\rho^1 r^\theta |u_j|^{p^*} (\ln(\tau + |u_j|))^{r^\beta}\, dr \to 0, \quad \text{se } j \to \infty, \tag{5.125}$$

para qualquer $\rho \in (0,1)$ fixado. Adicionalmente, usamos a convergência pontual em (5.124), Lema 2 e o teorema da convergência dominada para ver que

$$\int_\rho^1 r^\theta |u_j|^{p^*}\, dr \to 0, \quad \text{se } j \to \infty. \tag{5.126}$$

Seja $\bar{\eta} : [0,1] \to [0,1]$ uma função suave tal que $\bar{\eta} \equiv 0$ em $[0, \rho/2]$ e $\bar{\eta} \equiv 1$ em $[\rho, 1]$. Escolhemos $\varphi = \bar{\eta} u_j$ em (5.123), então

$$\int_{\frac{\rho}{2}}^1 r^{\alpha_1} |u_j'|^{p-2} u_j' (\eta u_j)'\, dr = \int_{\frac{\rho}{2}}^1 r^\theta |u_j'|^{p^*} \bar{\eta} (\ln(\tau + |u_j|))^{r^\beta}\, dr + \langle o_j(1), \bar{\eta} u_j \rangle \to 0,$$

quando $j \to \infty$, o que implica que

$$\int_\rho^1 r^{\alpha_1} |u_j'|^p\, dr \to 0, \quad \text{para } \rho \in (0,1).$$

Seja

$$I_0(u) := \frac{1}{p} \int_0^1 r^{\alpha_1} |u'|^p\, dr - \frac{1}{p^*} \int_0^1 r^\theta |u|^{p^*}\, dr, \quad u \in X_1^{1,p}.$$

Afirmamos que

$$I(u_j) = I_0(u_j) + o_j(1). \tag{5.127}$$

De fato, note que

$$I(u_j) - I_0(u_j) \;=\; -\frac{1}{p^*} \int_0^1 r^\theta |u_j|^{p^*} \left((\ln(\tau + |u_j|))^{r^\beta} - 1 \right) dr + \int_0^1 r^\theta G(r, u_j)\, dr.$$

Estimaremos cada integral acima para j suficientemente grande. Usando (5.125) e (5.126) podemos ver

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 r^\theta |u_j|^{p^*} \left((\ln(\tau + |u_j|))^{r^\beta} - 1 \right) dr \right| &\leqslant \left| \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} \left((\ln(\tau + |u_j|))^{r^\beta} - 1 \right) dr \right| \\
&\quad + \left| \int_\rho^1 r^\theta |u_j|^{p^*} \left((\ln(\tau + |u_j|))^{r^\beta} - 1 \right) dr \right| \\
&\leqslant \left| \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} \left((\ln(\tau + |u_j|))^{r^\beta} - 1 \right) dr \right| + o_j(1).
\end{aligned} \tag{5.128}$$

Para $\tau \geqslant e$, argumentando como em (5.90) temos

$$\left| \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} \left((\ln(\tau + |u_j|))^{r^\beta} - 1 \right) dr \right| = \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*} \left((\ln(\tau + |u_j|))^{r^\beta} - 1 \right) dr \leqslant o_\rho(1) \tag{5.129}$$

onde $o_\rho(1) \to 0$ quando $\rho \to 0$ uniformemente em j. Por outro lado, se $1 \leqslant \tau < e$, usando que $u_0 \equiv 0$, (5.124) e tomando j suficientemente grande, podemos assumir que $|u_j| \leqslant e - \tau$

em $(0, \rho)$. Portanto

$$\left|\int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*}\left((\ln(\tau+|u_j|))^{r^\beta}-1\right)\,dr\right| = \int_0^\rho r^\theta |u_j|^{p^*}\left(1-(\ln(\tau+|u_j|))^{r^\beta}\right)\,dr \\ \leqslant (e-\tau)^{p^*}\int_0^\rho r^\theta\,dr = o_\rho(1). \tag{5.130}$$

Agora, utilizando (5.105) e (5.124) obtemos

$$\int_0^1 r^\theta |G(r,u_j)|\,dr \leqslant \epsilon \int_0^1 r^\theta |u_j|^{p^*}\,dr + C_\epsilon \int_0^1 r^\theta |u_j|^p\,dr \leqslant \epsilon\Sigma_p + C_\epsilon o_j(1). \tag{5.131}$$

Combinando (5.128), (5.129), (5.130) e (5.131), obtemos

$$|I(u_j) - I_0(u_j)| = o_\rho(1) + o_j(1) + o_\epsilon(1)$$

o que prova (5.127). Analogamente, mostra-se que

$$\langle I'(u_j), \varphi\rangle = \langle I_0'(u_j), \varphi\rangle + \langle o_j(1), \varphi\rangle, \quad \forall\ \varphi \in X_1^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1).$$

Então, (5.123) assegura que (u_j) é também uma sequência Palais-Smale para o funcional I_0 no nível c_{MP}. Ou seja, para qualquer $\varphi \in X_1^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1)$ temos

$$I_0(u_j) \to c_{MP} \quad \text{e} \quad \langle I_0'(u_j), \varphi\rangle \to 0 \ \text{ quando } \ j \to \infty. \tag{5.132}$$

Em particular,

$$\|u_j\|^p = \|u_j\|^{p^*}_{L^{p^*}_\theta} + \langle I_0'(u_j), u_j\rangle \tag{5.133}$$

e

$$I_0(u_j) - \frac{1}{p^*}\langle I_0'(u_j), u_j\rangle = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\|u_j\|^p, \quad \text{para todo } \ j \in \mathbb{N}. \tag{5.134}$$

De (5.133), podemos supor que existe $b \geqslant 0$ tal que

$$0 \leqslant b = \lim_{j\to\infty}\|u_j\|^p = \lim_{j\to\infty}\|u_j\|^{p^*}_{L^{p^*}_\theta}.$$

De (1.12), também temos

$$\|u_j\|^p_{L^{p^*}_\theta} \leqslant \mathcal{S}^{-1}\|u_j\|^p$$

o que implica

$$b^{\frac{p}{p^*}} \leqslant \mathcal{S}^{-1} b. \tag{5.135}$$

Mas, fazendo $j \to \infty$ em (5.134), obtemos

$$c_{MP} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) b. \tag{5.136}$$

Combinando a condição $c_{MP} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\mathcal{S}^{\frac{\theta+1}{\theta-\alpha_1+p}}$ com (5.135) e (5.136) obtemos $b = 0$. Portanto, há menos de uma subsequência, temos $u_j \to 0$ fortemente em $X_1^{1,p}(\alpha_0,\alpha_1)$, e assim, $I(u_j) \to 0$ o que contradiz $I(u_j) \to c_{MP} > 0$. □

Capítulo 6

Considerações Finais

Esta tese abordou aspectos inovadores sobre *uma classe de espaços de Sobolev*, apresentando contribuições teóricas relevantes ao tema. Ao longo dos capítulos, foram estabelecidas as seguintes desigualdades: *desigualdade do tipo Sobolev para ordem superior e desigualdades do tipo supercríticas.* Através de uma abordagem rigorosa e detalhada, os resultados aqui apresentados contribuem para uma melhor compreensão de *duas classes distintas de equações elípticas: uma com crescimento crítico e a outra com termo logarítmico supercrítico.*

Recentemente, S. Deng e X. Tian [35,36] usaram uma mudança de variável que permite mudar a dimensão do espaço e com isso foram capazes de aplicar o Teorema 6 e o Corolário 6 em seus trabalhos. Portanto, a presente tese tem contribuído no desenvolvimento de novas pesquisas cientificas.

Apesar dos avanços alcançados, falta muitos aspectos a se explorar no futuro. Dentre eles, mencionamos os seguintes problemas: *classificar as soluções positivas e singulares para a classe geral de equações elípticas com crescimento crítico, melhorá a condição sobre o parâmetro* β *nos resultados do capítulo 5 (i.e. substituir* $0 < \beta < \min\{(\theta+1)/p, (\alpha_1 - p+1)/(p-1)\}$ *por* $0 < \beta < (\alpha_1 - p+1)/(p-1)$*), explorar resultados similares aos obtidos no capítulo 5 para o espaço* $X_1^{m,2}$ *em vez de* $X_1^{1,p}$ *e dentre outros.*

Em conclusão, esta tese não apenas resolve questões relevantes na área de análise matemática, mas também fornecer novas ferramentas para novas investigações que poderão ter um impacto significativo na literatura. O estudo feito nesta tese servirá como base sólida para futuras pesquisas que busquem expandir e refinar os resultados aqui apresentados.

Referências Bibliográficas

[1] ABREU, E.; FERNANDES, L. G. On a weighted Trudinger-Moser inequality in $\mathbb{R}^N$. Journal of Differential Equations, v. 269, n. 4, p. 3089–3118, 2020.

[2] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. Sobolev spaces, Second edition. Pure and applied mathematics, v. 140, 2003.

[3] ANDRADE, J. H.; WEI, J. Classification for positive singular solutions to critical sixth order equations. Disponível em:<https://arxiv.org/abs/2210.04376>. Acesso em: 5 nov. 2024.

[4] AUBIN, T. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. Journal of Differential Geometry, v. 11, p. 573-598, 1976.

[5] KUFNER, A.; PERSSON, L. E. Weighted Inequalities of Hardy Type. Singapore. World Scientific, 2003.

[6] B. OPIC; KUFNER, A. Hardy-Type Inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics Series, v. 219. Harlow. Longman Scientific and Technical, 1990.

[7] BABB, J.; CURRIE, J. The Brachistochrone Problem: Mathematics for a Broad Audience via a Large Context Problem. The Mathematics Enthusiast, v. 5, n. 2-3, p. 169–184, 1 jul. 2008.

[8] BAHRI, A.; CORON, J. M. On a nonlinear elliptic equation involving the critical sobolev exponent: The effect of the topology of the domain. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 41, n. 3, p. 253–294, 1 abr. 1988.

[9] BARTSCH, T.; SCHNEIDER, M.; WETH, T. Multiple solutions of a critical polyharmonic equation. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), v. 2004, n. 571, p. 131-143, 2004.

[10] BANDLE, C.; BENGURIA, R. The Brézis–Nirenberg Problem on $\mathbb{S}^3$. Journal of Differential Equations, v. 178, n. 1, p. 264–279, 1 jan. 2002.

[11] BHAKTA, M.; MUSINA, R. Entire solutions for a class of variational problems involving the biharmonic operator and Rellich potentials. Nonlinear Analysis, v. 75, n. 9, p. 3836–3848, 9 mar. 2012.

[12] BLISS, G. A. An Integral Inequality. Journal of the London Mathematical Society, v. s1-5, n. 1, p. 40–46, jan. 1930.

[13] BREZIS, H.; LIEB, E. A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 88, n. 3, p. 486, jul. 1983.

[14] BREZIS, H.; NIRENBERG, L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 36, n. 4, p. 437–477, 1 jul. 1983.

[15] CAFFARELLI, L. A.; BASILIS GIDAS; SPRUCK, J. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical sobolev growth. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 42, n. 3, p. 271–297, 1 abr. 1989.

[16] CAFFARELLI, L.; NIRENBERG, L.; SPRUCK, J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations. III: Functions of the eigenvalues of the Hessian. Acta mathematica, v. 155, n. 3-4, p. 261–301, 1985.

[17] CAO, D.; LI, S.; LIU, Z. Nodal solutions for a supercritical semilinear problem with variable exponent. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, v. 57, n. 2, 13 fev. 2018.

[18] CAO, D.; LUO, P.; PENG, S. The number of positive solutions to the Brezis-Nirenberg problem. Transactions of the American Mathematical Society, v. 374, n. 3, p. 1947–1985, 12 jan. 2021.

[19] CARLESON, L.; CHANG, S. Y. A. On the existence of an extremal function for an inequality of Moser J. Bulletin des Sciences Mathématiques, v. 110, p. 113–127, 1986.

[20] CHEN, W.; Li, C. Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations. Duke Math. J., v. 63, p. 615-622, 1991.

[21] COSTA, D. G. An Invitation to Variational Methods in Differential Equations. Boston. Birkhäuser, 21 jun. 2007.

[22] DE FIGUEIREDO, D. G.; GONÇALVES, J. V.; MIYAGAKI, O. H. On a Class of Quasilinear Elliptic Problems Involving Critical Exponents. Communications in Contemporary Mathematics, v. 02, n. 01, p. 47–59, 1 fev. 2000.

[23] DE OLIVEIRA, J. F. On a class of quasilinear elliptic problems with critical exponential growth on the whole space. Topological Methods in Nonlinear Analysis, v. 49, n. 2, p. 529-550, 2017.

[24] DE OLIVEIRA, J. F.; DO Ó, J. M. Equivalence of critical and subcritical sharp Trudinger–Moser inequalities in fractional dimensions and extremal functions. Revista Matemática Iberoamericana, v. 39, n. 3, p. 1073–1096, 18 maio 2022.

[25] DE OLIVEIRA, J. F.; DO Ó, J. M. Trudinger-Moser type inequalities for weighted Sobolev spaces involving fractional dimensions. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 142, p. 2813–2828, 8 maio 2014.

[26] DE OLIVEIRA, J. F.; DO Ó, J. M.; UBILLA, P. On a supercritical k-Hessian inequality of Trudinger–Moser type and extremal functions. Annali di Matematica Pura ed Applicata, v. 203, p. 2549-2575, 7 maio 2024.

[27] DE OLIVEIRA, J. F.; DO Ó, J. M.; UBILLA, P. Hardy-Sobolev type inequality and supercritical extremal problem. Discrete and Continuous Dynamical Systems - A, v. 39, n. 6, p. 3345–3364, 2019.

[28] DE OLIVEIRA, J. F.; DO Ó, J. M.; UBILLA, P. Existence for a k-Hessian equation involving supercritical growth. Journal of Differential Equations, v. 267, n. 2, p. 1001–1024, 12 fev. 2019.

[29] DE OLIVEIRA, J. F.; DO Ó, J. M. On a sharp inequality of Adimurthi–Druet type and extremal functions. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, v. 62, n. 5, 27 maio 2023.

[30] DE OLIVEIRA, J. F.; MIYAGAKI, O. H.; MOREIRA, S. I. On a class of degenerate quasilinear elliptic equations with zero mass. Complex Variables and Elliptic Equations, v. 67, n. 11, p. 2719–2746, 6 jul. 2021.

[31] DE OLIVEIRA, J. F.; SILVA, J. N. On a Sobolev-type inequality and its minimizers. Analysis and Applications, v. 22, n. 08, p. 1417–1446, 19 abr. 2024.

[32] DE OLIVEIRA, J. F.; SILVA, J. N. On a supercritical Hardy-Sobolev type inequality with logarithmic term and related extremal problem. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2406.19128>. Acesso em: 6 nov. 2024.

[33] DE OLIVEIRA, J. F.; UBILLA, P. Extremal functions for a supercritical k-Hessian inequality of Sobolev-type. Nonlinear Analysis: Real World Applications, v. 60, p. 103314, ago. 2021.

[34] DEL PINO, M.; DOLBEAULT, J.; MUSSO, M. The Brezis–Nirenberg problem near criticality in dimension 3. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, v. 83, n. 12, p. 1405–1456, 1 dez. 2004.

[35] DENG, S.; TIAN, X. Classification and non-degeneracy of positive radial solutions for a weighted fourth-order equation and its application. Nonlinear Analysis, v. 240, p. 113468, 2024.

[36] DENG, S.; TIAN, X. Symmetry breaking of extremals for the high order Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities: the singular case. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2409.18154>. Acesso em: 6 nov. 2024.

[37] DENG, Y.; PENG, S.; ZHANG, X.; ZHOU, Y. A class of supercritical Sobolev type inequalities with logarithm and related elliptic equations. J. Differential Equations, v. 341, p. 150-188, 2022.

[38] DENG, Y.; ZHANG, X. Nodal solutions for a supercritical problem with variable exponent and logarithmic nonlinearity. Discrete and Continuous Dynamical Systems, v. 43, p. 4429-4453, 2023.

[39] DIENING, L.; HARJULEHTO P.; HÄSTÖ P.; RUZICKA M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[40] DO Ó, J. M.; DA SILVA, E. Quasilinear Elliptic Equations with Singular Nonlinearity. Advanced Nonlinear Studies, v. 16, n. 2, p. 363–379, 6 abr. 2016.

[41] DO Ó, J. M.; DE OLIVEIRA, J. F. Concentration-compactness and extremal problems for a weighted Trudinger–Moser inequality. Communications in Contemporary Mathematics, v. 19, n. 01, p. 1650003, 2017.

[42] DO Ó, J. M.; LU, G.; PONCIANO, R. Sharp Sobolev and Adams–Trudinger–Moser embeddings on weighted Sobolev spaces and their applications. Forum Mathematicum, v. 36, n. 5, p. 1279–1320, 3 jan. 2024.

[43] DO Ó, J. M.; LU, G.; PONCIANO, R. Trudinger-Moser embeddings on weighted Sobolev spaces on unbounded domains. Discrete and Continuous Dynamical Systems, v. 45, n. 2, p. 557-584, 2025. Doi: 10.3934/dcds.2024103.

[44] DO Ó, J. M.; MACEDO, A. C.; DE OLIVEIRA, J. F. A Sharp Adams-Type Inequality for Weighted Sobolev Spaces. The Quarterly Journal of Mathematics, v. 71, n. 2, p. 517–538, 7 fev. 2020.

[45] DO Ó, J. M.; RUF, B.; UBILLA, P. A critical Moser type inequality with loss of compactness due to infinitesimal shocks. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, v. 62, n. 8, 5 nov. 2022.

[46] DO Ó, J. M.; RUF, B.; UBILLA, P. On supercritical Sobolev type inequalities and related elliptic equations. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, v. 55, n. 83, 22 jun. 2016.

[47] EDMUNDS, D. E.; FORTUNATO, D.; JANNELLI, E. Critical exponents, critical dimensions and the biharmonic operator. Archive for Rational Mechanics and Analysis, v. 112, n. 3, p. 269–289, 1990.

[48] EKELAND, I. On the variational principle. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 47, n. 2, p. 324–353, 1 ago. 1974.

[49] ESPOSITO, P.; GHOUSSOUB, N.; GUO, Y. Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS. Courant Lecture Notes, v. 20. American Mathematical Society, Providence, 2010.

[50] FRANK, R. L.; KÖNIG, T. Classification of positive singular solutions to a nonlinear biharmonic equation with critical exponent. Analysis and PDE, v. 12, n. 4, p. 1101–1113, 2019.

[51] GAZZOLA, F.; GRUNAU, H.-C.; SWEERS, G. Polyharmonic Boundary Value Problems. Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains. Lecture Notes in Mathematics, v. 1991, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 03 jun. 2010.

[52] GHOUSSOUB, N. Duality and Perturbation Methods in Critical Point Theory. Cambridge University Press, 1993.

[53] HARDY, G. H. Note on a theorem of Hilbert. Mathematische Zeitschrift, v. 6, n. 3-4, p. 314–317, set. 1920.

[54] HUANG, X.; WANG, L. Classification to the positive radial solutions with weighted biharmonic equation. Discrete and Continuous Dynamical Systems, v. 40, n. 8, p. 4821–4837, 1 jan. 2020.

[55] JACOBSEN, J.; SCHMITT, K. Radial Solutions of Quasilinear Elliptic Differential Equations. Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, North-Holland, v. 1, p. 359–435, 2004.

[56] LI, J.; LU, G.; YANG, Q. Higher order Brezis-Nirenberg problem on hyperbolic spaces: Existence, nonexistence and symmetry of solutions. Advances in Mathematics, v. 399, p. 108259, 23 fev. 2022.

[57] LIONS, P. L. The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The limit case, Part 1. Revista Mat. Iberoamericana, v. 1, p. 145–201, 1985.

[58] LIONS, P. L. The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Limit Case, Part 2. Revista Mat. Iberoamericana, v. 1, p. 45–121, 1985.

[59] MITIDIERI, E.; CLEMENT, P.; DE FIGUEIREDO, D. G. Quasilinear elliptic equations with critical exponents. Topological Methods in Nonlinear Analysis, v. 7, p. 133–170, 1996.

[60] MOREAU, J. J. Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, v. 255, p. 238–240, 1962.

[61] NGÔ, Q. A.; NGUYEN, V. H. A supercritical Sobolev type inequality in higher order Sobolev spaces and related higher order elliptic problems. Journal of Differential Equations, v. 268, n. 10, p. 5996–6032, 2020.

[62] NGÔ, Q. A.; NGUYEN, V. H. Supercritical Moser–Trudinger inequalities and related elliptic problems. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, v. 59, n. 69, 2020.

[63] PANEITZ, S. A quartic conformally covariant diferential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds. Preprint, 1983.

[64] RABINOWITZ, P. H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. Regional conference series in mathematics, v. 65, 1986.

[65] ROSEN, G. M. Minimum Value for c in the Sobolev Inequality $\|\phi^3\| \leqq c\|\nabla\phi\|^3$. Siam Journal on Applied Mathematics, v. 21, n. 1, p. 30–32, 1 jul. 1971.

[66] SCHECHTER, M.; ZOU, W. On the Brézis–Nirenberg Problem. Archive for Rational Mechanics and Analysis, v. 197, n. 1, p. 337–356, 16 jan. 2010.

[67] SCHOEN, R. M. Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics. Topics in Calculus of Variations, Springer Berlin Heidelberg, p. 120-154, 1989.

[68] SWANSON, C. A. The best sobolev constant. Applicable Analysis, v. 47, n. 1-4, p. 227–239, 1 out. 1992.

[69] TALENTI, G. Best constant in Sobolev inequality, v. 110, n. 1, p. 353–372, 1 dez. 1976.

[70] VAZ, C.; DINIZ, H. Cálculo Variacional com Computação Algébrica: Uma Abordagem com o Maxima. SBMAC: Notas em Matemática Aplicada, São Carlos-SP, v. 78, 2015.

[71] WANG, X. J. The k-Hessian Equation. Springer Dordrecht, Lecture Notes in Mathematics (1977), p. 177–252, 2009.

[72] WANG, Z. Q.; WILLEM, M. Singular Minimization Problems. J. Differential Equations, v. 161, p. 307-320, 2000.

[73] WEI, J.; XU, X. Classification of solutions of higher order conformally invariant equations. Mathematische Annalen, v. 313, p. 207–228, 1 fev. 1999.

[74] WILLEM, M. Minimax theorems. Progress Nonlinear Differential Equations Applications, v. 24. Birkhäuser, 1996.