UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Controle Nulo para Equação do Calor Não Linear com Termo de Memória

Vinícius Santos Luz

Teresina - 2024

Vinícius Santos Luz

Dissertação de Mestrado:

Controle Nulo para Equação do Calor Não Linear com Termo de Memória

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus

Teresina - 2024

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Controle Nulo para a Equação do Calor Não Linear com Termo de Memória

Vinícius Santos Luz

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 19 de Dezembro de 2024.

Banca Examinadora:

Isaías Pereira de Jesus
Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus (UFPI) - Presidente

Gleison do Nascimento Santos
Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos (UFPI)

Luciano Cipriano da Silva
Prof. Dr. Luciano Cipriano da Silva (IFRN)

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

L979c Luz, Vinicius Santos.
Controle nulo para a equação do calor não linear com termo de memória / Vinicius Santos Luz. -- 2025.
156 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2025.
"Orientador: Prof. Dr. Isaias Pereira de Jesus".

1. Controle nulo. 2. Equação do calor. 3. Desigualdade de Observabilidade. 4. Desigualdade de Carleman. I. Jesus, Isaias Pereira de. II. Titulo.

CDD 510

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Aos meus pais Raimundo Luz e Francenilde Santos.

Agradecimentos

A Deus pela vida, saúde, motivação, gratidão, por tudo.

Aos meus pais, Raimundo Luz e Francenilde Santos pois tudo que sou é devido a eles.

À minha madrinha Luciane por ser uma segunda mãe para mim e proporcionar tudo que preciso.

Aos meus familiares, em particular, aos meus irmãos Felipe e Miquéias, aos meus tios Euliane e Josiano, aos meus primos Aurélio e Danilo e ao meu avô Francisco José.

Ao meu orientador Professor Isaías Pereira de Jesus por todo o aprendizado, motivação, puxões de orelha e por sua imensa disponibilidade e prazer em sempre querer ajudar. Orientação essa desde os tempos de iniciação científica. Sou muito grato por tudo. Muito obrigado, Professor Isaías.

Ao Professor Luciano Cipriano da Silva por acompanhar de perto todo o trabalho e estar sempre disponível e disposto a ajudar. Muito Obrigado!

Ao Professor Pedro Paulo pelas dicas, ajuda nas contas e nas correções deste trabalho. Obrigado !

Ao Professor Gleison do Nascimento Santos por aceitar fazer parte da banca deste trabalho.

Aos Professores Isaías Pereira, Luciano Cipriano, Pedro Paulo e Lucas Machado pelos encontros aos sábados. Obrigado por disponibilizarem esse tempo para discutirmos sobre este trabalho.

Quero agradecer aos professores que passaram um pouco de seu conhecimento através de disciplinas ministradas durante o curso: Barnabé, Gilcenio, José Francisco, Mykael, Paulo Alexandre, Sandoel e Wilson.

A todo o corpo docente da UFPI, em particular, aos professores que conheci durante a graduação e, mais particularmente ainda, aos Professores Cleidinaldo Aguiar e Roger Peres de Moura pelo prazer em sempre querer ajudar, Marcondes Rodrigues Clark por ser brevemente meu primeiro orientador e proporcionar meus primeiros momentos orientador-orientando. Muito obrigado!

Ao Professor Halyson pela excelente coordenação do programa PPGMAT.

À secretária Larisse pelas sessões de terapia e os vários puxões de orelha.

Aos amigos (a menos de um conjunto de medida nula kk) que fiz durante a graduação, mestrado e no futebol, e que fizeram esses tempos de estudo ficarem bem mais agradáveis, pelas resenhas, cafés, pizzas... : Arthur, Bruno, Carlos, Cíntia, Danilo, Elliel, Erisvaldo, Estevão, Fauster, Gabriel, Grazy, Gean, Gustavo, Honório, Igor, Júnior, Jonatas, João Vinícius, Jefferson, Luzivânia, Miquéias, Maria, Pedro, Raquel, Rufino, Sayd, Sillas, Suerlan, Vinícius Melo e Wilkreffy. Obrigado!

Em especial, quero agradecer aos meus "pseudo"amigos que me proporcionaram diversas resenhas, entretenimento infinito e tornaram os dias mais leves (as vezes não): Andreina, Angélica, Ana Júlia, Emanuelly, Eduardo, Ismael, José Alencar, Natália e Thiago Carvalho. Brincadeiras à parte. Muito obrigado, meus amigos.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para esse trabalho e para meu desenvolvimento.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“ Cada adversidade, cada fracasso, cada dor de cabeça carrega consigo a semente de um benefício igual ou maior ”.

Napoleon Hill.

Resumo

No presente trabalho, estudamos a controlabilidade nula para equação não linear do calor com termo de memória em um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ com condições de contorno de Dirichlet. Inicialmente, resolvemos o problema de controlabilidade para o sistema linearizado. O resultado é obtido por meio do método HUM onde provamos uma desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto que, por sua vez, é consequência de uma desigualdade de Carleman para o mesmo. A prova do problema não linear é obtida através do teorema do ponto fixo de Kakutani.

Palavras-chave: Controle Nulo, Equação do Calor Não Linear, Termo de Memória, Desigualdade de Carleman, Desigualdade de Observabilidade, Ponto Fixo de Kakutani.

Abstract

In this work, we study the null controllability for a nonlinear heat equation with memory term in a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ with Dirichlet boundary conditions. Initially, we solve the controllability problem for the linearized system. The result is obtained through the HUM method where we prove an observability inequality for the adjoint system, which in turn is a consequence of a Carleman inequality for the same. The proof of the nonlinear problem is obtained through Kakutani's fixed point theorem.

Keywords: Null Controllability, Nonlinear Heat Equation, Memory Term, Carleman Inequality, Observability Inequality, Kakutani Fixed Point Theorem.

Sumário

Notações e Simbologias

As simbologias abaixo são utilizadas no decorrer do texto:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denota um subconjunto aberto, limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$;
- Γ denota a fronteira de Ω de classe C^2;
- $\omega \subset \Omega$ denota um subconjunto aberto não-vazio;
- χ_ω denota a função característica de ω;
- $Q = (0, T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, onde $T > 0$, denota o cilindro em $\mathbb{R}^{n+1}$;
- $Q_\omega = (0, T) \times \omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, onde $T > 0$, denota o cilindro Q restrito a ω;
- $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$, onde $T > 0$, denota a fronteira do cilindro Q;
- (t, x) denota os pontos de Q, onde $t \in (0, T)$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, ..., n$;
- $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n}$ denota o laplaciano da função u;
- $\nabla u = \left(u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n}\right)$ denota o gradiente da função u;
- div denota o operador divergente;
- u_t denota a derivada parcial da função $u = u(t, x)$ com respeito à variável t;
- β' denota a derivada ordinária da função $\beta = \beta(t)$;
- $|\cdot|$ denota a norma em $\mathbb{R}^n$,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^n$;
- η denota o vetor normal unitário exterior a Γ;
- $\perp$ denota complemento ortogonal;
- dim denota dimensão;

- $\mathsf{Gr}(\mathsf{u})$ denota o gráfico da função u;
- $\mathsf{q.s.}$ denota "quase sempre";
- $\rightarrow$ denota convergência forte;
- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca;
- $\hookrightarrow$ denota imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota imersão compacta.

Introdução

Ao longo dos tempos, o homem tem feito tentativas de controlar o comportamento de fenômenos naturais, tecnológicos ou de qualquer outra natureza, o que em geral nos traz a seguinte reflexão: conhecendo como um determinado sistema se comporta, como é possível atuar sobre ele para que se comporte de um modo desejado? Com o propósito de entender a essas questões é que surge a *Teoria do Controle*, que é uma teoria matemática que estuda a existência, ou não-existência, de atuadores para um determinado sistema dinâmico com a finalidade de governá-lo de maneira desejada ao longo do tempo.

Por exemplo, um médico pode fazer a reconstrução da geometria de um tumor pela simples observação de uma parte dele, um economista pode agir no equilíbrio financeiro por meio de alterações de taxas, um engenheiro pode estar interessado em controlar um sistema mecânico por meio de aplicação de forças, etc.

A teoria do controle moderna teve início a partir do século XVIII durante a revolução industrial, onde a resolução de problemas de controle em certos mecanismos permitiu um enorme crescimento da produção (veja [11]).

Dado um sistema de controle, isto é, um sistema dinâmico sobre o qual queremos atuar, o objetivo é encontrar um controle de tal modo que o estado associado se comporte de maneira apropriada em um tempo final dado. Este é o chamado *problema de controlabilidade.* Neste sentido, podemos estabelecer várias noções diferentes de controlabilidade.

Mais precisamente, um sistema de controle é uma equação de evolução (EDO ou EDP) que depende de um parâmetro y, descrito pela expressão:

$$\mathsf{y}' = \mathsf{f}(\mathsf{t}, \mathsf{y}, \mathsf{u}), \tag{1}$$

onde $\mathsf{t} \in [0, \mathsf{T}]$ representa a variável temporal, $\mathsf{y} : [0, \mathsf{T}] \to \mathsf{X}$ é a função estado e $\mathsf{u} : [0, \mathsf{T}] \to \mathsf{Y}$ é um controle. Nesse modelo, X e Y são espaços de funções adequados, $\mathsf{T} > 0$ é um valor real fixado e y' representa a derivada de y em relação ao tempo t.

Em seguida, destacamos algumas das principais definições de controlabilidade presentes na literatura.

Definição 0.0.1. ***(Controlabilidade exata)*** *Sejam* $T > 0$ *e* $y_0, y_1 \in X$ *dois estados do sistema* (1). *Dizemos que tal sistema é exatamente controlável se existe* $u : [0, T] \to Y$ *tal que;*

$$\begin{aligned} & y' = f(t, y, u) \text{ em } [0, T], \\ & y(0) = y_0, \quad y(T) = y_1. \end{aligned}$$

Definição 0.0.2. ***(Controlabilidade aproximada)*** *Sejam* $T > 0$ *um número real e* y_0, y_1 *dois possíveis estados do sistema* (1). *Dizemos que tal sistema é aproximadamente controlável se, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existir* $u_\epsilon : [0, T] \to Y$ *tal que;*

$$\begin{aligned} & y' = f(t, y, u_\epsilon) \text{ em } [0, T], \\ & y(0) = y_0, \quad \|y(T) - y_1\| \leqslant \epsilon. \end{aligned}$$

Definição 0.0.3. ***(Controlabilidade nula)*** *Sejam* $T > 0$ *um número real dado e* $y_0 \in X$ *um estado arbitrário do sistema* (1). *Dizemos que tal sistema é nulamente controlável se existe* $u : [0, T] \to Y$ *tal que;*

$$\begin{aligned} & y' = f(t, y, u) \text{ em } [0, T], \\ & y(0) = y_0, \quad y(T) = 0. \end{aligned}$$

Definição 0.0.4. ***(Controlabilidade exata às trajetórias)*** *Sejam* $T > 0$ *um número real dado,* $y_0 \in X$ *um estado e* $\overline{y}$ *uma trajetória (isto é, uma solução arbitrária do sistema* (1) *sem controle). Dizemos que tal sistema é exatamente controlável às trajetórias se existe* $u : [0, T] \to Y$ *tal que;*

$$\begin{aligned} & y' = f(t, y, u) \text{ em } [0, T], \\ & y(0) = y_0, \quad y(T) = \overline{y}(T). \end{aligned}$$

Em problemas lineares, as definições de controle nulo e exato às trajetórias são equivalentes.

Devido aos trabalhos de matemáticos como R. Bellman, H. Fattorini, R. Kalman, J. -L. Lions, L. S. Potryagin, D. Russell e muitos outros, a *Teoria do Controle* tornou-se uma rica área da matemática, com aplicações em outras áreas do conhecimento, como Biologia, Economia, Medicina e Engenharia (veja [11, 30]). Um grande marco para o desenvolvimento da teoria matemática do controle foi devido ao matemático francês J.

-L. Lions no final do anos 80 (veja [24, 25]), quando o mesmo introduziu o Método de Unicidade de Hilbert (HUM) para resolução de problemas lineares de controlabilidade.

Vários modelos físicos relevantes, como os da viscoelasticidade, dinâmica populacional ou do fluxo de calor em condutores, são modelados por equações diferenciais que são influenciadas pelo valor de suas variáveis no passado (veja [7, 17]), por isso eles são denominados *sistemas com memória.* A principal dificuldade encontrada quando analisamos a controlabilidade para sistemas desse tipo deve-se ao seu caráter não local, devido ao termo de memória, que impede a aplicação de alguns métodos clássicos da Teoria do Controle não possam ser aplicados de maneira imediata.

Com respeito à equação do calor com memória, alguns avanços já foram obtidos ao longo dos anos. Em relação a esse tema, faremos uma breve revisão histórica: em 1999, no contexto de controle aproximado para uma equação do calor, temos o trabalho de E. Zuazua [32], onde o autor mostrou a controlabilidade aproximada para equação semilinear do calor usando técnicas de minimização para um dado funcional. Vale ressaltar que nesse trabalho o autor não incluiu o termo de memória na equação do calor. Em 2000, usando técnicas mais avançadas, V. Barbu e M. Iannelli [2] estabeleceram a controlabilidade aproximada para uma equação do calor, dessa vez incluindo um termo de memória na equação a ser estudada. Aqui eles provaram um resultado de continuação única, essencial para obter o resultado desejado. Em 2013, S. Guerrero e O. Y. Imanuvilov [16] mostram que as equações parabólicas com memória não são controláveis quando o controle está aplicado numa região fixa do domínio. Posteriormente, em 2017, Chaves-Silva et al. [8] provaram que se o controle age numa região móvel do domínio é possível obter controlabilidade nula para uma EDP parabólica com memória. Em 2021, Jesus et al. [19], estabeleceram a controlabilidade aproximada para a equação do calor com um termo de memória utilizando as técnicas desenvolvidas em [32]. Esse é o trabalho mais recente que conhecemos sobre esse tema.

Este trabalho é baseado no artigo devido a R. Lavanya e K. Balachandran [20] e, em resumo, está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentaremos algumas definições e resultados que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 2 formularemos o problema a ser discutido e definiremos as soluções para o mesmo.

No capítulo 3 obteremos uma desigualdade de Carleman para o problema em questão seguindo o método de Fursikov-Imanuvilov [14].

No capítulo 4 apresentaremos uma desigualdade de observabilidade para o problema proposto, onde a mesma será obtida através da desigualdade de Carleman provada no capítulo anterior.

No capítulo 5 provaremos a controlabilidade aproximada do problema linearizado como uma aplicação da desigualdade de Carleman provada no capítulo 3.

Além disso, no capítulo 6 mostraremos a controlabilidade nula para o sistema linearizado que será feita por meio do Método da Unicidade de Hilbert (HUM) aplicando a desigualdade de observabilidade provada no capítulo 4.

Finalmente, no capítulo 7 provaremos a controlabilidade nula para o problema não linear como consequência da controlabilidade nula do sistema linear associado através do teorema do ponto fixo de Kakutani.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e os principais resultados que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Não apresentaremos as demonstrações de tais resultados, mas citaremos as referências onde as mesmas podem ser encontradas.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

A análise funcional é um ramo da matemática que estuda espaços vetoriais de dimensão infinita e as transformações lineares entre eles. Essa teoria possui aplicações em diversas áreas, como equações diferenciais, física quântica, teoria dos operadores, otimização, teoria do controle e muito mais.

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados essenciais para nossos objetivos. Para mais detalhes consulte [3].

1.1.1 Espaços de Banach

Definição 1.1.1. ***(Métrica)*** *Seja* M *um conjunto não-vazio. Uma função*

$$\begin{aligned} d:\ & M \times M \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto d(x,y) \end{aligned}$$

é uma métrica se para todo $x, y, z \in M$*:*

(i) $d(x,y) \geqslant 0$*;*

(ii) $d(x,y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$*;*

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$;

(iv) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

O par $\big(M, d\big)$, onde M é um espaço e d é uma métrica é chamado de *espaço métrico.*

Definição 1.1.2. ***(Sequência de Cauchy)*** *Uma sequência* $\big\{x_m\big\}_m$ *num espaço métrico é chamada sequência de Cauchy quando, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado, existe* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, para* $m, k \geqslant m_0$ *temos que*

$$d(x_m, x_k) \leqslant \varepsilon.$$

Definição 1.1.3. ***(Espaço Métrico Completo)*** *Dizemos que um espaço métrico* M *é completo quando toda sequência de Cauchy em* M *é convergente.*

Definição 1.1.4. ***(Norma)*** *Seja* E *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Uma função*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \ & E \to \mathbb{K} \\ & x \mapsto \|x\| \end{aligned}$$

é uma norma se para todo $x, y \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$:

(i) $\|x\| \geqslant 0$;

(ii) $\|x\| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

O par $\big(E, \|\cdot\|\big)$, onde E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma, é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente espaço normado.

Observação 1.1.1. *Todo espaço normado é um espaço métrico com a métrica dada por*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Nesse caso, dizemos que a métrica d *é induzida pela norma* $\|\cdot\|$.

Definição 1.1.5. ***(Espaço de Banach)*** *Um espaço normado* E *é chamado de espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.*

Definição 1.1.6. ***(Dual)*** *O dual topológico de* E *ou simplesmente dual de* E*, denotado por* E'*, é o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos de* E *em* $\mathbb{K}$.

Definição 1.1.7. ***(Bidual)*** *O bidual de* E*, denotado por* E''*, é o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos de* E' *em* $\mathbb{K}$.

1.1.2 Espaços com Produto Interno

Definição 1.1.8. ***(Espaço com Produto Interno)*** *Seja* E *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Um produto interno em* E *é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \ & \mathsf{E} \times \mathsf{E} \to \mathbb{K} \\ & (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

tal que para quaisquer $x, y, z \in \mathsf{E}$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

(i) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$*;*

(ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$*;*

(iii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$*;*

(iv) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$*.*

O par $\big(\mathsf{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$, onde E é um espaço vetorial e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno, é chamado de *espaço com produto interno.*

Observação 1.1.2. *Todo espaço com produto interno é um espaço normado com a norma dada por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Nesse caso dizemos que a norma $\| \cdot \|$ *é induzida pelo produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*.*

Definição 1.1.9. ***(Espaço de Hilbert)*** *Um espaço com produto interno que é completo em relação a norma induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert.*

Teorema 1.1.1. ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*** *Seja* E *um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$$

para quaisquer $x, y \in \mathsf{E}$*. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores* x, y *são linearmente dependentes.*

Demonstração: Ver [18].

1.1.3 Topologia Fraca e Espaços Reflexivos

Definição 1.1.10. ***(Topologia Fraca)*** *Seja* E *um espaço normado. A topologia fraca sobre* E*, denotado por* $\sigma(E, E')$*, é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos de* E'*. Quando uma sequência* $\{x_m\}_m \subset E$ *converge para* $x \in E$ *na topologia fraca, escrevemos*

$$x_m \rightharpoonup x.$$

Proposição 1.1.1. *Seja* E *um espaço normado e* $\{x_m\}_m \subset E$ *uma sequência. Então:*

(i) $x_m \rightharpoonup x$ *se, e somente se,* $f(x_m) \to f(x)$*, para todo* $f \in E'$*;*

(ii) Se $x_m \to x$*, então* $x_m \rightharpoonup x$.

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.1.2. *Para todo espaço normado* E*, o operador linear*

$$\begin{aligned} J_E : \ & E \to E'' \\ & x \mapsto J_E(x)(f) = f(x), \quad \forall\, x \in E \ \text{e}\ f \in E' \end{aligned}$$

é uma isometria linear, chamado mergulho canônico de E *em* E''.

Demonstração: Ver [3].

Definição 1.1.11. ***(Espaço Reflexivo)*** *Um espaço normado* E *é dito reflexivo se o mergulho canônico* J_E *for sobrejetivo, ou seja,* $J_E(E) = E''$.

Proposição 1.1.3. *Todo espaço normado reflexivo é um espaço de Banach.*

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.1.2. ***(Kakutani)*** *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada possui subsequência fracamente convergente.*

Demonstração: Ver [3].

1.1.4 Convexidade e Otimização

Definição 1.1.12. ***(Conjunto Convexo)*** *Sejam* E *um espaço de Banach. Dizemos que um conjunto* C *de* E *é convexo se para todo* $x, y \in C$ *e* $\gamma \in [0, 1]$ *tivermos* $(1-\gamma)x+\gamma y \in C$.

Definição 1.1.13. ***(Função Convexa)*** *Sejam* E *um espaço de Banach,* C *um subconjunto convexo de* E *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função. Dizemos que* f *é uma função convexa se para todo* $x, y \in C$ *e* $\gamma \in [0, 1]$*, vale a seguinte desigualdade:*

$$f((1-\gamma)x + \gamma y) \leqslant (1-\gamma)f(x) + \gamma f(y).$$

Teorema 1.1.3. *Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo,* C *um subconjunto convexo do espaço* E*, fechado, não-vazio e uma função* $f : C \to (-\infty, +\infty]$ *tal que:*

(i) f *é convexa;*

(ii) f *é semicontínua inferiormente, isto é,* $\forall\, a \in \mathbb{R}$*,* $f^{-1}(a, +\infty)$ *é aberto em* E*;*

(iii) f *é coerciva, ou seja, para todo* $x \in C$*,* $\lim\limits_{||x|| \to \infty} f(x) = +\infty$.

Então f *atinge seu mínimo em* C*, isto é, existe* $x_0 \in C$ *tal que* $f(x_0) = \min\limits_{x \in C} f(x)$.

Demonstração: Ver [4].

1.2 Espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ são uma classe fundamental de espaços funcionais na análise matemática. Ao generalizar a noção de integral de Riemann e introduzir uma estrutura de espaço vetorial normado eles permitem um estudo mais profundo e abrangente de fenômenos contínuos e discretos.

Nesta seção, serão dadas algumas definições e propriedades dos espaços $L^p(\Omega)$. As definições e mais alguns detalhes sobre esses espaços podem ser encontrados em [13].

Definição 1.2.1. *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $p \in \mathbb{R}$*, com* $1 \leqslant p < \infty$*. Definimos o espaço de Lebesgue, denotado por* $L^p(\Omega)$*, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tais que* $|u|^p$ *é integrável à Lebesgue em* Ω*.*

O espaço $L^p(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$, torna-se um espaço de Banach quando munido com a norma

$$|u|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.2.2. *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto. Definimos por* $L^\infty(\Omega)$ *o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *que são limitadas quase sempre em* Ω*.*

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\, |u(x)| = \inf\{C > 0;\ |u(x)| \leqslant C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

No caso $p = 2$, o espaço $L^2(\Omega)$ munido com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx$$

é um espaço de Hilbert. A sua norma induzida pelo produto interno é:

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)^2\, dx.$$

Apresentaremos a seguir algumas propriedades relacionadas ao espaços $L^p(\Omega)$.

Teorema 1.2.1. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam a e b números reais não negativos e $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema 1.2.2. ***(Desigualdade de Young com ε)*** *Sejam a e b números reais não negativos e $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\varepsilon > 0$. Então,*

$$ab \leqslant \varepsilon a^p + (\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}} q^{-1} b^q.$$

No caso particular quando $p = q = 2$, a desigualdade reduz-se a

$$ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

Demonstração: Ver [10].

Teorema 1.2.3. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, com as condições $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$|uv|_{L^1(\Omega)} \leqslant |u|_{L^p(\Omega)} |v|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema 1.2.4. ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Se $1 \leqslant p < \infty$ e $u, v \in L^p(\Omega)$, então temos $u + v \in L^p(\Omega)$ e*

$$|u + v|_{L^p(\Omega)} \leqslant |u|_{L^p(\Omega)} + |v|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [13].

1.3 Teoria das Distribuições Escalares

A teoria das distribuições é um ramo da análise matemática que generaliza o conceito de função, permitindo trabalhar com objetos mais abstratos e flexíveis. Essa teoria é fundamental para o estudo de equações diferenciais parciais, análise funcional e física matemática.

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados importantes sobre esse assunto. Para mais detalhes veja [27].

1.3.1 Espaços das Funções Testes

Sejam $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ uma n-upla de inteiros não negativos. Considere

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

e

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!.$$

Denotaremos o operador derivação em $\mathbb{R}^n$ por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.3.1. ***(Suporte)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado e considere a função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Definimos o suporte de f, denotado por $\operatorname{supp}(f)$, o fecho em Ω do conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tais que $f(x) \neq 0$. Simbolicamente,*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Se esse conjunto for compacto em $\mathbb{R}^n$, então dizemos que f possui suporte compacto.

Definição 1.3.2. *Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω.*

A seguir, definiremos uma noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ que o tornará um espaço vetorial topológico.

Definição 1.3.3. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Uma sequência $\left\{\varphi_m\right\}_m \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, quando existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que:*

(i) $\text{supp}(\varphi_m) \subset K, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$;

(ii) $D^\alpha \varphi_m \to D^\alpha \varphi$ *uniformemente em* K *para todo multi-índice* α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido com a noção de convergência acima é chamado de *Espaço das Funções Testes sobre* Ω e é denotado por $\mathfrak{D}(\Omega)$.

1.3.2 Distribuições Escalares

Definição 1.3.4. ***(Distribuição)*** *Denominamos distribuição escalar sobre um aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *a toda forma linear* $T : \mathfrak{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *e contínua no sentido da convergência em* $\mathfrak{D}(\Omega)$*, isto é,*

(i) $T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ *e* $\forall\, \varphi, \psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$;

(ii) Se $\varphi_m \to \varphi$ *em* $\mathfrak{D}(\Omega)$*, então* $T(\varphi_m) \to T(\varphi)$ *em* $\mathbb{R}$.

Observação 1.3.1. *O valor da distribuição* T *em* φ *é representado por* $\langle T, \varphi \rangle$.

Definição 1.3.5. *Considere o espaço vetorial de todas as distribuições sobre* Ω*. Dizemos que a sequência* $\{T_m\}_m$ *converge para* T*, quando a sequência* $\{\langle T_m, \varphi \rangle\}_m$ *converge para* $\langle T, \varphi \rangle$ *em* $\mathbb{R}$*, para toda* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

O espaço das distribuições sobre Ω, com a noção de convergência, é denotado por $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

As distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis, que definiremos a seguir.

Definição 1.3.6. *Dizemos que uma função* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *é localmente integrável em* Ω*, quando* $|u|$ *é integrável à Lebesgue sobre cada compacto* $K \subset \Omega$*. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por* $L^1_{loc}(\Omega)$.

Exemplo 1.3.1. *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. O funcional* $T_u : \mathfrak{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$*, definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx, \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

é uma distribuição sobre Ω.

De fato, claramente T_u é linear pois segue da linearidade da integral. Enquanto a continuidade, seja $\{\varphi_m\}_m \subset \mathfrak{D}(\Omega)$ uma sequência de funções testes convergindo para $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_m\rangle - \langle T_u, \varphi\rangle| &= |\langle T_u, (\varphi_m - \varphi)\rangle| \\ &= \left| \int_\Omega u(x)(\varphi_m - \varphi)(x)\, dx \right| \\ &\leqslant \int_\Omega |u(x)||(\varphi_m - \varphi)(x)|\, dx \\ &\leqslant \sup_{x\in\Omega} |\varphi_m - \varphi| \int_\Omega |u(x)|\, dx \to 0, \end{aligned}$$

pois $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente. Portanto, T_u é uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.3.1. ***(Du Bois-Raymond)*** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então, para toda $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$,*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx = 0 \text{ se, e somente se, } u = 0 \text{ q.s. em } \Omega.$$

Demonstração: Ver [28].

Observação 1.3.2. *Usando o Lema de Du Bois-Raymond acima, obtemos T_u univocamente determinado por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ q.s. no conjunto Ω. Desse modo, dizemos que o funcional T_u é gerado pela função u e assim identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathfrak{D}'(\Omega)$.*

Definição 1.3.7. ***(Derivada Distribucional)*** *Dadas uma distribuição T em $\mathfrak{D}'(\Omega)$ e um multi-índice α, definimos a derivada distribucional de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathfrak{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim, as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordem no sentido das distribuições.

Note que a aplicação

$$D^\alpha : \mathfrak{D}'(\Omega) \to \mathfrak{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Isso significa que

$$\text{se } \lim_{\nu\to\infty} T_\nu = T \text{ em } \mathfrak{D}'(\Omega), \text{ então } \lim_{\nu\to\infty} D^\alpha T_\nu = D^\alpha T \text{ em } \mathfrak{D}'(\Omega).$$

Observação 1.3.3. *Outro resultado interessante é que a derivada de uma função* $L^1_{loc}(\Omega)$ *não é, em geral, uma função* $L^1_{loc}(\Omega)$.

Tal fato motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach conhecido como Espaço de Sobolev.

1.4 Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Os espaços de Sobolev são uma generalização dos espaços de Lebesgue, introduzindo a noção de derivada fraca para funções. Essa ferramenta é fundamental para o estudo de equações diferenciais parciais, análise funcional e diversas outras áreas da matemática.

Como vimos anteriormente, toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas distribucionais de todas as ordens. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são funções em $L^p(\Omega)$.

Nesta seção definiremos Espaço de Sobolev e apresentaremos algumas de suas principais propriedades. Mais informações podem ser encontradas em [28].

Definição 1.4.1. ***(Espaços de Sobolev)*** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e considere* $m \in \mathbb{N}$. *O espaço de Sobolev de ordem* m*, denotado por* $W^{m,p}(\Omega)$*, é o espaço vetorial das (classes de) funções* $u \in L^p(\Omega)$ *tais que* $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$*, para todo multi-índice* α*, com* $|\alpha| \leqslant m$*, sendo* $D^\alpha u$ *a derivada de* u *no sentido das distribuições. Simbolicamente,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ \forall\, \alpha \text{ com } |\alpha| \leqslant m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ torna-se um espaço de Banach quando munido com a norma

$$|u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Também, o espaço $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$|u|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess}\, |D^\alpha u(x)|.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ será representado por $H^m(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx$$

e norma induzida

$$|u|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observe que, embora o espaço das funções testes $\mathfrak{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, para cada $1 \leqslant p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isso acontece porque a norma do espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior"que a norma de $L^p(\Omega)$ e é por isso que $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos sequências convergentes. Esse fato motiva a seguinte definição:

Definição 1.4.2. *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho do conjunto $\mathfrak{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Quando $p = 2$, escrevemos $H_0^m(\Omega)$ em vez de $W_0^{m,2}(\Omega)$.

Definição 1.4.3. *Seja Γ a fronteira de Ω. Para $m \in \mathbb{N}$, definimos*

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega);\, u(x) = 0 \quad \forall\, x \in \Gamma.\}$$

Em particular, $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert quando munido com o produto interno

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

e a norma induzida

$$|u|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 1.4.4. *Sejam $1 \leqslant p < \infty$ e $1 < q \leqslant \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representamos o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ por $W^{-m,q}(\Omega)$. Quando $p = 2$, o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ é denotado por $H^{-m}(\Omega)$.*

Definição 1.4.5. *Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. A injeção*

$$\begin{aligned} i:\ & X \to Y \\ & x \mapsto i(x) = x \end{aligned} \tag{1.1}$$

é chamada de imersão de X em Y.

Definição 1.4.6. ***(Imersão Contínua)*** *Dizemos que a aplicação i definida em (1.1) é uma imersão contínua de X em Y, e denotamos $X \hookrightarrow Y$, quando existe uma constante positiva C tal que*

$$|x|_Y \leqslant C|x|_X \quad \forall\, x \in X.$$

Definição 1.4.7. ***(Imersão Compacta)*** *Dizemos que a aplicação* i *definida em* (1.1) *é uma imersão compacta de* X *em* Y*, e denotamos* $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$*, quando é uma imersão contínua e toda sequência limitada em* X *possui subsequência convergente em* Y*.*

Teorema 1.4.1. ***(Imersão de Sobolev)*** *Sejam* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *com fronteira limitada* Γ *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Então:*

(i) Se $p < n$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$*, onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$*;*

(ii) Se $p = n$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [p, +\infty)$*;*

(iii) Se $p > n$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$*.*

Além disso, se $p > n$*, temos para todo* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, temos*

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|u|_{W^{1,p}(\Omega)}|x-y|^\gamma, \text{ q.s. } x, y \in \Omega,$$

onde $\gamma = 1 - \dfrac{n}{p}$ *e* C *depende apenas de* Ω, p *e* n*.*

Em particular, temos $W^{1,p} \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$*.*

Demonstração: Ver [4].

Teorema 1.4.2. ***(Rellich-Kondrachov)*** *Sejam* Ω *um subconjunto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *com fronteira* Γ *regular. Então:*

(i) Se $p < n$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p^*}(\Omega) \quad \forall\, q \in [1, p^*)$ *com* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$*;*

(ii) Se $p = n$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [p, +\infty)$*;*

(iii) Se $p > n$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$*.*

Em particular, temos $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$*.*

Demonstração: Ver [4].

1.5 Espaços $L^p(0,T;X)$

Nesta seção apresentaremos alguns outros tipos de espaços, esses compreendendo o tempo de mapeamento de funções no espaço de Banach. Esses espaços são essenciais nas construções de soluções fracas de equações diferenciais parabólicas e hiperbólicas, sendo elas lineares ou não lineares.

No que segue, consideramos $\big(X, |\cdot|_X\big)$ um espaço de Banach e $T > 0$. As definições e mais detalhes podem ser encontrados em [10].

Definição 1.5.1. *Definimos o espaço* $L^p(0,T;X)$*, para* $1 \leqslant p < \infty$*, como sendo espaço vetorial das (classes de) funções fortemente mensuráveis* $u : (0,T) \to X$ *tal que a função que leva* $t \mapsto |u(t)|_X^p$ *é integrável à Lebesgue em* $(0,T)$*.*

O espaço $L^p(0,T;X)$, com $1 \leqslant p < \infty$, torna-se um espaço de Banach quando munido com a norma

$$|u|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T |u(t)|_X^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.5.2. *Definimos o espaço* $L^\infty(0,T;X)$ *como sendo espaço vetorial das (classes de) funções fortemente mensuráveis* $u : (0,T) \to X$ *tal que a função* $t \mapsto |u(t)|_X$ *pertence ao espaço* $L^\infty(0,T)$*.*

O espaço $L^\infty(0,T;X)$ é um espaço de Banach com a norma

$$|u|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} \operatorname{ess} |u(t)|_X = \inf\{C > 0;\, |u(x)|_X \leqslant C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Apenas no caso em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ torna-se um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \big(u(t), v(t)\big)_X \, dt.$$

Definição 1.5.3. *O espaço de Banach das funções contínuas* $u : [0,T] \to X$ *munido com a norma da convergência uniforme*

$$|u|_{C([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} |u(t)|_X$$

é definido por $C([0,T];X)$*.*

Teorema 1.5.1. *Sejam* X, Y *espaços de Hilbert tal que* $X \hookrightarrow Y$ *e para* $1 \leqslant p < \infty$*, temos que* $u \in L^p(0,T;X)$ *e* $u' \in L^p(0,T;Y)$*. Então,* $u \in C([0,T];Y)$*.*

Demonstração: Ver [10].

Teorema 1.5.2. *Suponha que* $u \in L^2\big(0,T;H_0^1(X)\big)$ *com* $u' \in L^2\big(0,T;H^{-1}(X)\big)$*. Então*

$$u \in C\big([0,T];L^2(X)\big).$$

Demonstração: Ver [10].

1.6 Alguns Resultados Importantes

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados importantes que serão úteis para o problema de controlabilidade.

Para os próximos quatro teoremas, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto limitado com fronteira $\Gamma \in C^1$.

Teorema 1.6.1. ***(Gauss-Green)*** *Suponha que* $u \in C^1(\overline{\Omega})$*. Então*

$$\int_\Omega u_{x_i}\,dx = \int_\Gamma u\eta_i\,d\Gamma \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Demonstração: Ver [10].

Teorema 1.6.2. ***(Divergência)*** *Suponha que* $u \in C^1(\overline{\Omega})$*. Então*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(u)\,dx = \int_\Gamma \langle u, \eta\rangle\,d\Gamma.$$

Demonstração: Ver [10].

Teorema 1.6.3. ***(Fórmula de Integração por Partes)*** *Sejam* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$*. Então*

$$\int_\Omega u_{x_i}v\,dx = -\int_\Omega uv_{x_i}\,dx + \int_\Gamma uv\eta_i\,d\Gamma \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Demonstração: Ver [10].

Teorema 1.6.4. ***(Fórmulas de Green)*** *Sejam* $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$*. Então*

(1) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u\,dx = \int_\Gamma u_\eta\,d\Gamma$*;*

(2) $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v\,dx = -\int_\Omega \langle\nabla u, \nabla v\rangle\,dx + \int_\Gamma uv_\eta\,d\Gamma$*;*

(3) $\displaystyle\int_\Omega \big(u\Delta v - v\Delta u\big)\,dx = \int_\Gamma \big(uv_\eta - vu_\eta\big)\,d\Gamma.$

Demonstração: Ver [10].

Teorema 1.6.5. ***(Aubin-Lions)*** *Sejam* X, Y, Z *espaços de Banach, com* $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y \hookrightarrow Z$ *e* X *reflexivo. Suponha que* $\{u_m\}_m \subset L^p(0, T; X)$ *seja uma sequência uniformemente limitada em* $L^p(0, T; X)$ *tal que* $\{(u_m)_t\}_m \subset L^p(0, T; Z)$ *seja limitada em* $L^p(0, T; Z)$ *para cada* $p > 1$*. Então, existe uma subsequência de* $\{u_m\}_m$ *que converge fortemente no espaço* $L^p(0, T; Y)$*.*

Demonstração: Ver [6].

Lema 1.6.1. ***(Lions)*** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado e* $\{g_m\}_m \subset L^p(\Omega)$ *uma sequência, com* $1 < p < \infty$. *Suponha que exista uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$|g_m|_{L^p(\Omega)} \leqslant C$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ *e* $g \in L^p(\Omega)$ *tal que*

$$g_m \to g \ \ q.s. \ \ em \ \Omega.$$

Então,

$$g_m \rightharpoonup g \ \ em \ L^p(\Omega).$$

Demonstração: Ver [23].

Teorema 1.6.6. ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Sejam* $z, w : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas não negativas e seja* $\gamma \geqslant 0$. *Se*

$$z(t) \leqslant \gamma + \int_\gamma^t z(s)w(s)\,ds,$$

então,

$$z(t) \leqslant \gamma e^{\int_\gamma^t w(s)\,ds} \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Demonstração: Ver [10].

Teorema 1.6.7. ***(Regra de Leibniz)*** *Dado* $U \subset \mathbb{R}^n$, *aberto, seja* $f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função com as seguintes propriedades:*

(i) Para todo $x \in U$, *a função* $t \mapsto f(x, t)$ *é integrável em* $a \leqslant t \leqslant b$;

(ii) Para cada $(x, t) \in U \times [a, b]$, *a i-ésima derivada parcial* $f_{x_i} : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *existe e é contínua.*

Então, a função $g : U \to \mathbb{R}$, *dada por* $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)\,dt$, *possui i-ésima derivada parcial em cada ponto* $x \in U$, *sendo*

$$g_{x_i}(x) = \int_a^b f_{x_i}(x, t)\,dt.$$

Demonstração: Ver [21].

Definição 1.6.1. ***(Derivada de Gateaux)*** *Seja* U *um subconjunto aberto do espaço de Banach* E *e* $f : U \to \mathbb{R}$ *uma funcional. Dizemos que o funcional* f *tem uma derivada de Gateaux* $g \in E'$ *em* $u \in U$ *se, para todo* $k \in E$*,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(u + tk) - f(u) - \langle g, tk \rangle}{t} = 0.$$

Para mais detalhes veja [31].

Agora, apresentaremos um teorema que generaliza o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para um função multivaluada

$$\begin{aligned} \Psi : \ & X \to \mathcal{P}(X) \\ & x \mapsto \Psi(x), \end{aligned}$$

onde $\Psi(x)$ é um conjunto não vazio.

Denotaremos

$$2^X = \{A;\ A \text{ é um subconjunto não vazio de X}\} = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}.$$

Definição 1.6.2. ***(Espaços Localmente Convexos)*** *Seja* X *um espaço vetorial topológico não vazio. Dizemos que* X *é localmente convexo se* X *admite uma base de vizinhanças formada por conjuntos convexos.*

Definição 1.6.3. ***(Ponto Fixo)*** *Sejam* X *um conjunto não vazio e* $f : X \to X$ *uma função. Dizemos que* $x \in X$ *é um ponto fixo de* f *se* $f(x) = x$.

Teorema 1.6.8. ***(Ponto Fixo de Kakutani)*** *Sejam* X *um espaço vetorial topológico localmente convexo,* $B \subset X$ *um subconjunto não vazio, convexo e compacto e uma aplicação multivaluada*

$$\begin{aligned} \Psi : \ & B \to 2^B \\ & \overline{p} \mapsto \Psi(\overline{p}) \end{aligned}$$

tal que para cada $\overline{p} \in B$ *o conjunto* $\Psi(\overline{p})$ *seja não vazio, convexo, compacto e* Ψ *tenha gráfico fechado. Então o conjunto dos pontos fixos de* Ψ *é não vazio, isto é,*

$$\exists\, \overline{p} \in B \text{ tal que } \overline{p} \in \Psi(\overline{p}).$$

Demonstração: Ver [15].

Capítulo 2

Formulação do Problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e conexo, com fronteira $\Gamma \in C^2$ e $\omega \subset \Omega$ um subconjunto aberto não-vazio. Para um número real $T > 0$, considere $Q = (0,T)\times\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $Q_\omega = (0,T) \times \omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\Sigma = (0,T) \times \Gamma$.

Representamos os pontos de Q por (t,x), onde $t \in (0,T)$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, ..., n$.

Considere o seguinte sistema parabólico não-linear com memória:

$$\begin{cases} p_t(t,x) - \Delta p(t,x) + g(p(t,x)) + \displaystyle\int_0^t h(t,\tau)p(\tau,x)\,d\tau = \chi_\omega u(t,x) \quad \text{em} \quad Q; \\ p(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p(0,x) = p_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

No sistema (2.1):

- $p : Q \to \mathbb{R}$ e $u : Q \to \mathbb{R}$ são, respectivamente, as funções temperatura e controle;
- $\chi_\omega : \Omega \to \mathbb{R}$ é a função característica de ω;
- $p_0(x)$ representa o dado inicial do problema;
- p_t representa a derivada da função p com respeito à variável t;
- Δp representa o laplaciano da função p;
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e globalmente Lipschitz contínua em relação à p, isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que $|g(p_1)-g(p_2)| \leqslant M|p_1-p_2|, \forall\, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ e $g(0) = 0$;

- $h : (0,T)\times(0,T) \to \mathbb{R}$ é a função núcleo de memória, suficientemente suave e satisfaz a seguinte condição:

$$h(t,\tau) = 0\big|_{\tau=0,T}. \tag{2.2}$$

A seguir, daremos a definição formal de solução forte e fraca para o problema (2.1). Mais precisamente, temos que:

2.1 Solução Forte

Sejam X e Y espaços de Hilbert. Suponhamos que $X \hookrightarrow Y$. Definimos o espaço vetorial

$$W(0,T;X;Y) \coloneqq \{p \in L^2(0,T;X); p_t \in L^2(0,T;Y)\},$$

onde p_t é a derivada de p no sentido das distribuições com relação ao tempo t. Temos que W é um espaço de Hilbert e assim podemos o munir com a norma

$$|p|^2_{W(0,T;X;Y)} = |p|^2_{L^2(0,T;X)} + |p_t|^2_{L^2(0,T;Y)},$$

e ainda é imerso continuamente no espaço $C^0([0,T];Y)$. Assim, se $p \in W(0,T;X;Y)$, então faz sentido falar em $p(0)$ e $p(T)$.

Definição 2.1.1. *Dizemos que* $p : Q \to \mathbb{R}$ *é solução forte de* (2.1) *quando*

$$p \in W\big(0,T;H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega);L^2(\Omega)\big)$$

e

$$p_t - \Delta p + g(p) + H^t_0 * p = \chi_\omega u \quad \text{q.s. em } Q,$$

com $p(0) = p_0$, *onde no sistema* (2.1) *denotamos* $H^t_0 * p = \displaystyle\int_0^t h(t,\tau)p(\tau,x)\,d\tau$ *e omitimos a dependência das variáveis* (t,x).

2.2 Solução Fraca

Nosso objetivo nesta seção é considerar o problema (2.1) com dados iniciais menos regulares. A solução obtida com este grau de regularidade é chamado de solução fraca. Mais precisamente, temos:

Definição 2.2.1. *Dizemos que* $p : Q \to \mathbb{R}$ *é solução fraca para o prblema* (2.1) *quando*

$$p \in W\big(0,T; H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega)\big),$$

satisfaz a condição inicial $p(0) = p_0$ *e satisfaz a identidade*

$$-\int_Q p\xi_t \, dxdt + \int_Q \nabla p \nabla \xi \, dxdt + \int_Q g(p)\xi \, dxdt + \int_Q (H_0^t * p)\xi \, dxdt = \int_Q \chi_\omega u \xi \, dxdt,$$

para todo $\xi \in W\big(0,T; H_0^1(\Omega); L^2(\Omega)\big)$ *tal que* $\xi(0) = \xi(T) = 0$*, onde no sistema* (2.1) *denotamos* $H_0^t * p = \displaystyle\int_0^t h(t,\tau)p(\tau,x)\, d\tau$ *e omitimos a dependência das variáveis* (t,x).

Observação 2.2.1. *No presente trabalho, não apresentaremos a demonstração da existência e unicidade de soluções para o problema dado em* (2.1)*. De fato, existência de soluções pode ser obtida pelo Método de Faedo - Galerkin e Método do Ponto Fixo. A unicidade é obtida pelo método padrão, ou seja, supomos que existem duas soluções e aplicamos estimativas de energia para concluir que a diferença é a função identicamente nula. Para maiores detalhes, veja [22].*

O problema de controlabilidade para o sistema (2.1) pode ser formulado como segue:

Definição 2.2.2. ***(Controlabilidade Nula)*** *Dizemos que o sistema* (2.1) *é nulamente controlável em* $L^2(\Omega)$ *se, dado* $T > 0$*, para todo* $p_0(x) \in L^2(\Omega)$*, existe um controle* $u \in L^2(Q)$ *tal que a correspondente solução* p *de* (2.1) *satisfaz*

$$p(T,x) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Definição 2.2.3. ***(Controlabilidade Aproximada)*** *Dizemos que o sistema* (2.1) *é aproximadamente controlável em* $L^2(\Omega)$ *se, dado* $T > 0$*, para todo* $p_0(x), p_T(x) \in L^2(\Omega)$ *e* $\varepsilon > 0$*, existe um controle* $u \in L^2(Q)$ *tal que a correspondente solução* p *de* (2.1) *satisfaz*

$$|p(T,x) - p_T(x)|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Neste momento, nosso propósito é linearizar o sistema (2.1). Para isso, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$f(p) := \begin{cases} \dfrac{g(p)}{p}, & \text{se} \quad |p| > 0; \\ \\ g'(0), & \text{se} \quad p = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Note que f é uniformemente limitada. De fato, como $g(0) = 0$, então

$$|f(p)| = \left|\frac{g(p)}{p}\right| = \frac{|g(p) - 0|}{|p|} = \frac{|g(p) - g(0)|}{|p|},$$

e como g é globalmente Lipschitz, segue que:

$$|f(p)| \leqslant M\left(\frac{|p - 0|}{|p|}\right) = M\frac{|p|}{|p|} = M. \tag{2.4}$$

Com o auxílio da função f dada em (2.3), obtemos o seguinte sistema linear associado ao sistema (2.1):

$$\begin{cases} p_t(t,x) - \Delta p(t,x) + f(\overline{p}(t,x))p(t,x) + \displaystyle\int_0^t h(t,\tau)p(\tau,x)\,d\tau = \chi_\omega u(t,x) \quad \text{em} \quad Q; \\ p(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p(0,x) = p_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $\overline{p}$ pertence ao espaço $L^2(Q)$ que introduziremos no capítulo 7.

O problema de controlabilidade para o sistema (2.5) pode ser formulado como segue:

Definição 2.2.4. ***(Controlabilidade Nula)*** *Dizemos que o sistema* (2.5) *é nulamente controlável em* $L^2(\Omega)$ *se, dado* $T > 0$*, para todo* $p_0(x) \in L^2(\Omega)$*, existe um controle* $u \in L^2(Q_\omega)$ *tal que a correspondente solução* p *de* (2.5) *satisfaz*

$$p(T,x) = 0 \quad \textit{em} \quad \Omega.$$

Definição 2.2.5. ***(Controlabilidade Aproximada)*** *Dizemos que o sistema* (2.5) *é aproximadamente controlável em* $L^2(\Omega)$ *se, dado* $T > 0$*, para todo* $p_0(x), p_T(x) \in L^2(\Omega)$ *e* $\varepsilon > 0$*, existe um controle* $u \in L^2(Q_\omega)$ *tal que a correspondente solução* p *de* (2.5) *satisfaz*

$$|p(T,x) - p_T(x)|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon \quad \textit{em} \quad \Omega.$$

Definamos $a(t,x) \coloneqq f(\overline{p}(t,x))$ e assuma que o termo $a(t,x)$ seja limitado, isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que:

$$|a(t,x)| \leqslant M. \tag{2.6}$$

Dessa forma, o sistema (2.5) torna-se:

$$\begin{cases} p_t(t,x) - \Delta p(t,x) + a(t,x)p(t,x) + \displaystyle\int_0^t h(t,\tau)p(\tau,x)\,d\tau = \chi_\omega u(t,x) \quad \text{em} \quad Q; \\ p(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p(0,x) = p_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

2.3 O Adjunto do Sistema Linearizado

Para o nosso propósito precisamos do sistema adjunto de (2.7) para a partir dele obtermos uma estimativa do tipo Carleman. Para isto, considere w a variável de estado adjunta.

Multiplicando por $-w(t,x)$ em ambos os lados da equação em (2.7) e após isso integrando em Q, obtemos:

$$\begin{aligned} &-\int_Q p_t w\,dxdt + \int_Q \Delta p w\,dxdt - \int_Q a(t,x)pw\,dxdt \\ &-\int_Q \left[\int_0^t h(t,\tau)p(\tau,x)\,d\tau\right] w(t,x)\,dxdt = -\int_Q \chi_\omega u w\,dxdt, \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde acima omitimos a dependência das variáveis (t,x).

- **Análise dos termos de** (2.8)**.**

Usando integração por partes e como $p(0,x) = p_0(x)$ em Ω, segue que:

$$\begin{aligned} -\int_Q p_t w\,dx\,dt &= -\int_\Omega \left[\int_0^T p_t w\,dt\right] dx \\ &= -\int_\Omega \left[pw\Big|_0^T - \int_0^T p w_t\,dt\right] dx \\ &= -\int_\Omega \left[p(T)w(T) - p(0)w(0) - \int_0^T p w_t\,dt\right] dx \\ &= -\int_\Omega p(T)w(T)\,dx + \int_\Omega p(0)w(0)\,dx + \int_Q p w_t\,dxdt \\ &= -\int_\Omega p(T)w(T)\,dx + \int_\Omega p_0(x)w(0)\,dx + \int_Q p w_t\,dxdt \\ &= -\big(p(T),w(T)\big)_{L^2(\Omega)} + \big(p_0(x),w(0)\big)_{L^2(\Omega)} + \int_Q p w_t\,dxdt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-\int_Q p_t w \, dx \, dt = -\big(p(T), w(T)\big)_{L^2(\Omega)} + \big(p_0(x), w(0)\big)_{L^2(\Omega)} + \int_Q p w_t \, dxdt. \tag{2.9}$$

Também, pela Fórmula de Green e sabendo que $p = 0$ sobre Σ, encontramos que:

$$\begin{aligned}
\int_Q \Delta p w \, dx \, dt &= \int_0^T \left[\int_\Omega \Delta p w \, dx \right] dt \\
&= \int_0^T \left[-\int_\Omega \nabla p \nabla w \, dx + \int_\Gamma w p_\eta \, d\Gamma \right] dt \\
&= \int_0^T \left[\left(\int_\Omega p \Delta w \, dxdt - \int_\Gamma p w_\eta \, d\Gamma \right) + \int_\Gamma w p_\eta \, d\Gamma \right] dt \\
&= \int_Q p \Delta w \, dxdt - \int_\Sigma p w_\eta \, d\Sigma + \int_\Sigma w p_\eta \, d\Sigma \\
&= \int_Q p \Delta w \, dxdt + \int_\Sigma w p_\eta \, d\Sigma,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_Q \Delta p w \, dxdt = \int_Q p \Delta w \, dx \, dt + \int_\Sigma w p_\eta \, d\Sigma. \tag{2.10}$$

Agora, como w não depende de τ, segue que:

$$-\int_Q \left[\int_0^t h(t,\tau) p(\tau,x) \, d\tau \right] w(t,x) \, dxdt = -\int_\Omega \left[\int_0^T \int_0^t h(t,\tau) p(\tau,x) w(t,x) \, d\tau dt \right] dx. \tag{2.11}$$

Daí, por uma mudança de variável, temos que:

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega \left[\int_0^T \int_0^t h(t,\tau) p(\tau,x) w(t,x) \, d\tau dt \right] dx \\
&= -\int_\Omega \left[\int_0^T \int_\tau^T h(t,\tau) p(\tau,x) w(t,x) \, dt d\tau \right] dx \\
&= -\int_\Omega \left[\int_0^T \int_t^T h(\tau,t) p(t,x) w(\tau,x) \, d\tau dt \right] dx,
\end{aligned}$$

e como p não depende de τ, obtemos:

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega \left[\int_0^T \int_0^t h(t,\tau) p(\tau,x) w(t,x) \, d\tau dt \right] dx \\
&= -\int_\Omega \int_0^T \left[\int_t^T h(\tau,t) w(\tau,x) \, d\tau \right] p(t,x) \, dtdx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$-\int_\Omega \left[\int_0^T \int_0^t h(t,\tau) p(\tau,x) w(t,x) \, d\tau dt \right] dx = -\int_Q \left[\int_t^T h(\tau,t) w(\tau,x) \, d\tau \right] p(t,x) \, dxdt. \tag{2.12}$$

Assim, de (2.11) e (2.12), resulta que:

$$-\int_Q \left[\int_0^t h(t,\tau)p(\tau,x)\,d\tau\right] w(t,x)\,dxdt = -\int_Q \left[\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau\right] p(t,x)\,dxdt. \tag{2.13}$$

Por conseguinte, substituindo (2.9), (2.10) e (2.13) em (2.8), segue que:

$$\begin{aligned}
&-\big(p(T),w(T)\big)_{L^2(\Omega)} + \big(p_0(x),w(0)\big)_{L^2(\Omega)} + \int_Q p w_t\,dx\,dt + \int_Q p\Delta w\,dxdt \\
&+\int_\Sigma w p_\eta\,d\Sigma - \int_Q a(t,x)pw\,dxdt - \int_Q \left(\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau\right) p(t,x)\,dxdt \\
&= -\int_Q \chi_\omega u w\,dxdt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&-\big(p(T),w(T)\big)_{L^2(\Omega)} + \big(p_0(x),w(0)\big)_{L^2(\Omega)} \\
&+\int_Q \left(w_t + \Delta w - a(t,x)w - \int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau\right) p\,dxdt + \int_\Sigma w p_\eta\,d\Sigma \\
&= -\int_Q \chi_\omega u w\,dxdt.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Motivados por (2.14) definimos o sistema adjunto associado ao sistema (2.7) como sendo:

$$\begin{cases}
w_t(t,x) + \Delta w(t,x) - a(t,x)w(t,x) - \displaystyle\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau = f_1(t,x) \quad \text{em} \quad Q; \\
w(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\
w(T,x) = w_T(x) \quad \text{em} \quad \Omega,
\end{cases} \tag{2.15}$$

onde $w_T \in L^2(\Omega)$ e $f_1 \in L^2(Q)$.

Capítulo 3

Desigualdade de Carleman

As desigualdades de Carleman são estimativas com peso inicialmente introduzida pelo matemático Torsten Carleman (veja [5]) para provar a continuação única de um sistema de Equações Diferenciais Parciais. O uso dessas desigualdades em problemas de controlabilidade ganhou importante destaque após os trabalhos de Fursikov-Imanuvilov (veja [14]). Embora esta seja uma ferramenta técnica de cálculos extensos que dependem da natureza de cada problema, a mesma fornece informações sobre o comportamento da solução a partir de dados referentes a uma pequena parte desse domínio. Desse modo, podemos encontrar uma desigualdade de observabilidade e, como consequência, devido ao Método da Unicidade de Hilbert (veja [29]), garantir a controlabilidade para o sistema.

Neste capítulo iremos provar a desigualdade de Carleman para o sistema adjunto (2.15). O seguinte resultado é de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho, pois ele nos possibilitará definir funções peso que nos auxiliarão na prova da desigualdade de Carleman.

Lema 3.0.1. ***(Fursikov-Imanuvilov)*** *Seja* $\omega_0 \subset \omega \subset \Omega$ *um subconjunto aberto não-vazio. Então, existe uma função* $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, *tal que*

$$\begin{cases} \psi(x) > 0 \quad \forall\, x \in \Omega; \\ \psi(x) = 0 \quad \forall\, x \in \Gamma; \\ |\nabla\psi(x)| > 0 \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \setminus \omega_0. \end{cases}$$

Demonstração: Vide [14].

Usando a função ψ do Lema 3.0.1, introduzimos as funções $\phi, \alpha : Q \to \mathbb{R}$ como segue:

$$\phi(t,x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\beta(t)} \quad \text{e} \quad \alpha(t,x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{2\lambda\|\psi\|}}{\beta(t)}, \tag{3.1}$$

onde $\beta(t) = t(T-t)$, $0 < t < T$, $\lambda > 0$ uma constante apropriada e $\|\psi\| = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |\psi(x)|$.
Note que:

$$\phi_{x_i} = \lambda\psi_{x_i}\frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\beta(t)} \quad \text{e} \quad \alpha_{x_i} = \lambda\psi_{x_i}\frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\beta(t)},$$

e assim,

$$\nabla\phi = \nabla\alpha = \lambda\left(\frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\beta(t)}\right)\nabla\psi = \lambda\phi\nabla\psi. \tag{3.2}$$

Teorema 3.0.1. ***(Desigualdade de Carleman)*** *Sejam ϕ e α as funções definidas em* (3.1) *e suponha que o núcleo de memória satisfaça* (2.2). *Então, existem constantes $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega,\omega)$, $s_0 = s_0(\Omega,\omega)$ e $\widetilde{C} = \widetilde{C}(\Omega,\omega)$ tais que, para qualquer $\lambda > \lambda_0$ e $s > s_0(T+T^2)$ a solução do sistema adjunto* (2.15) *satisfaz:*

$$\begin{aligned} &\int_Q e^{2s\alpha}\left[(s\phi)^{-1}\left(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + |H_t^T * w|^2\right) + s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\right] dxdt \\ &\leqslant \widetilde{C}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\, dxdt\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $H_t^T * w = \displaystyle\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau.$

Demonstração:

A prova consiste em quatro etapas elencadas como segue:

1. Etapa 1: Mudança de variáveis;

2. Etapa 2: Análise de certos termos que aparecem na etapa 1;

3. Etapa 3: Retorno às variáveis originais;

4. Etapa 4: Conclusão do teorema.

3.0.1 Etapa 1: Mudança de Variáveis

Considere a mudança de variável

$$w(t,x) = e^{-s\alpha(t,x)}p(t,x). \tag{3.4}$$

Derivando (3.4) com respeito à variável t, obtemos:

$$w_t = -s\alpha_t e^{-s\alpha}p + e^{-s\alpha}p_t,$$

isto é,

$$w_t = \big(-s\alpha_t p + p_t\big)e^{-s\alpha}. \tag{3.5}$$

Por outro lado, derivando (3.4) com respeito à variável x_i, encontramos que:

$$w_{x_i} = -s\alpha_{x_i}e^{-s\alpha}p + e^{-s\alpha}p_{x_i}. \tag{3.6}$$

Derivando novamente (3.6) com respeito à variável x_i, obtemos:

$$\begin{aligned} w_{x_ix_i} &= \Big[-s\alpha_{x_ix_i}(e^{-s\alpha}p) - s\alpha_{x_i}\big(-s\alpha_{x_i}e^{-s\alpha}p + e^{-s\alpha}p_{x_i}\big)\Big] \\ &\quad + \Big[-s\alpha_{x_i}e^{-s\alpha}p_{x_i} + e^{-s\alpha}p_{x_ix_i}\Big] \\ &= -s\alpha_{x_ix_i}e^{-s\alpha}p + s^2\big(\alpha_{x_i}\big)^2e^{-s\alpha}p - 2s\alpha_{x_i}e^{-s\alpha}p_{x_i} + e^{-s\alpha}p_{x_ix_i}, \end{aligned}$$

desse modo,

$$\Delta w = -s\Delta\alpha e^{-s\alpha}p + s^2|\nabla\alpha|^2e^{-s\alpha}p - 2se^{-s\alpha}\langle\nabla\alpha, \nabla p\rangle + e^{-s\alpha}\Delta p. \tag{3.7}$$

Agora, de (3.2), segue que:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= div(\nabla\alpha) \\ &= div(\lambda\phi\nabla\psi) \\ &= \lambda\langle\nabla\phi, \nabla\psi\rangle + \lambda\phi div(\nabla\psi) \\ &= \lambda\langle\lambda\phi\nabla\psi, \nabla\psi\rangle + \lambda\phi div(\nabla\psi), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta\alpha = \lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 + \lambda\phi\Delta\psi. \tag{3.8}$$

Usando novamente (3.2), vale que:

$$|\nabla\alpha|^2 = |\lambda\phi\nabla\psi|^2,$$

e portanto,

$$|\nabla\alpha|^2 = \lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2. \tag{3.9}$$

Dessa forma, substituindo (3.8) e (3.9) em (3.7) e usando (3.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta w &= -s\big(\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 + \lambda\phi\Delta\psi\big)e^{-s\alpha}p + s^2\big(\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2\big)e^{-s\alpha}p \\ &\quad - 2se^{-s\alpha}\langle\lambda\phi\nabla\psi, \nabla p\rangle + e^{-s\alpha}\Delta p, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\Delta w &= \big(-s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p - s\lambda\phi\Delta\psi p + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p \\ &\quad -2s\lambda\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle + \Delta p\big)e^{-s\alpha}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Portanto, como $w = e^{-s\alpha}p$, de (3.5) e (3.10) podemos reescrever a equação em (2.15) como sendo:

$$\begin{aligned}&\big(-s\alpha_t p + p_t\big)e^{-s\alpha} + \big(-s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p - s\lambda\phi\Delta\psi p + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p \\ &-2s\lambda\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle + \Delta p\big)e^{-s\alpha} - a(t,x)pe^{-s\alpha} - H_t^T * \big(e^{-s\alpha}p\big) = f_1,\end{aligned}$$

e como

$$-s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p = -2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p,$$

então resulta que:

$$\begin{aligned}&\big(-s\alpha_t p + p_t\big)e^{-s\alpha} + \big[\big(-2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p\big) - s\lambda\phi\Delta\psi p + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p \\ &-2s\lambda\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle + \Delta p\big]e^{-s\alpha} - a(t,x)pe^{-s\alpha} - H_t^T * \big(e^{-s\alpha}p\big) = f_1.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Multiplicando ambos os lados de (3.11) por $e^{s\alpha}$, obtemos:

$$\begin{aligned}&\big(-s\alpha_t p + p_t\big) + \big(-2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p - s\lambda\phi\Delta\psi p + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p \\ &-2s\lambda\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle + \Delta p\big) - a(t,x)p - \big(H_t^T * \big(e^{-s\alpha}p\big)\big)e^{s\alpha} = f_1 e^{s\alpha},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&p_t + \big(-2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p - 2s\lambda\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle\big) + \big(\Delta p + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p \\ &-s\alpha_t p\big) = f_1 e^{s\alpha} + \big(s\lambda\phi\Delta\psi p + a(t,x)p + \big(H_t^T * \big(e^{-s\alpha}p\big)\big)e^{s\alpha}\big).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Agora, mostraremos o seguinte resultado:

Afirmação 3.0.1. $p(0,x) = p(T,x) = 0$ *em* Ω.

De fato, pelo Lema de Fursikov-Imanuvilov (Lema 3.0.1), temos que $\psi(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$. Assim, para $\lambda > 0$

$$\lambda\psi(x) < 2\lambda||\psi||,$$

então,

$$e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||} < 0.$$

Como $\beta(t) = t(T-t) > 0$, para $t \in (0,T)$, então

$$\alpha(t,x) = \frac{e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)} < 0,$$

ademais,

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t,x) = -\infty.$$

Logo, como $p = e^{s\alpha}w$ é contínua e w é limitada, encontramos que:

$$p(0,x) = \lim_{t\to 0} p(t,x) = \lim_{t\to 0} e^{s\alpha(t,x)}w(t,x) = 0.$$

Analogamente, obtemos:

$$p(T,x) = 0.$$

Portanto,

$$p(0,x) = p(T,x) = 0 \text{ em } \Omega,$$

e assim concluímos a prova da Afirmação 3.0.1 .

Desse modo, usando (3.12) e o resultado da Afirmação 3.0.1, segue que $p = e^{s\alpha}w$ é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} p_t + \big(-2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2p - 2s\lambda\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle\big) + \big(\Delta p + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2p + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2p \\ -s\alpha_t p\big) = f_1e^{s\alpha} + \big(s\lambda\phi\Delta\psi p + a(t,x)p + \big[H_t^T * \big(e^{-s\alpha}p\big)\big]e^{s\alpha}\big) \quad \text{em} \quad Q; \\ p(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p(0,x) = p(T,x) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

Agora, considere:

$$\begin{aligned} U(t)p &= -2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2p - 2s\lambda\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle, \\ V(t)p &= -\big(\Delta p + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2p + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2p - s\alpha_t p\big), \\ Z(t)p &= s\lambda\phi\Delta\psi p + a(t,x)p + \big[H_t^T * \big(e^{-s\alpha}p\big)\big]e^{s\alpha}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Então, podemos reescrever a equação em (3.13) como sendo:

$$p_t + U(t)p - V(t)p = e^{s\alpha}f_1 + Z(t)p,$$

isto é,

$$p_t = e^{s\alpha} f_1 + Z(t)p + V(t)p - U(t)p. \tag{3.15}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}\Big\{\big[V(t)p\big]p\Big\}_t &= \big[V(t)p\big]_t p + \big[V(t)p\big]p_t \\ &= \big[V_t(t)p + V(t)p_t\big]p + \big[V(t)p\big]p_t,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Big\{\big[V(t)p\big]p\Big\}_t = \big[V_t(t)p\big]p + \big[V(t)p_t\big]p + \big[V(t)p\big]p_t. \tag{3.16}$$

Integrando (3.16) em Ω, obtemos:

$$\int_\Omega \Big\{\big[V(t)p\big]p\Big\}_t dx = \int_\Omega \big[V_t(t)p\big]p\, dx + \int_\Omega \big[V(t)p_t\big]p\, dx + \int_\Omega \big[V(t)p\big]p_t\, dx. \tag{3.17}$$

O seguinte resultado é válido:

Afirmação 3.0.2. $\displaystyle\int_\Omega \big[V(t)p_t\big]p\, dx = \int_\Omega \big[V(t)p\big]p_t\, dx.$

Com efeito, por um lado temos que:

$$\big[V(t)p\big]_t p = \big[V_t(t)p\big]p + \big[V(t)p_t\big]p,$$

e por outro lado, de (3.14), segue que:

$$\begin{aligned}\big[V(t)p\big]_t p &= \big(-\Delta p - s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p - s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p + s\alpha_t p\big)_t p \\ &= \big[-\big(\Delta p\big)_t - s^2\lambda^2|\nabla\psi|^2\big(\phi^2 p\big)_t - s\lambda^2|\nabla\psi|^2\big(\phi p\big)_t + s\big(\alpha_t p\big)_t\big]p \\ &= \big[-\Delta p_t - s^2\lambda^2|\nabla\psi|^2\big(2\phi\phi_t p + \phi^2 p_t\big) - s\lambda^2|\nabla\psi|^2\big(\phi_t p + \phi p_t\big) \\ &\quad + s\big(\alpha_{tt} p + \alpha_t p_t\big)\big]p \\ &= \big(-2s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2 p - s\lambda^2\phi_t|\nabla\psi|^2 p + s\alpha_{tt} p\big)p \\ &\quad + \big(-\Delta p_t - s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p_t - s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p_t + s\alpha_t p_t\big)p \\ &= \big[V_t(t)p\big]p + \big[V(t)p_t\big]p,\end{aligned}$$

onde

$$\big[V_t(t)p\big]p = \big(-2s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2 p - s\lambda^2\phi_t|\nabla\psi|^2 p + s\alpha_{tt} p\big)p \tag{3.18}$$

e

$$\big[V(t)p_t\big]p = \big(-\Delta p_t - s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p_t - s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p_t + s\alpha_t p_t\big)p. \tag{3.19}$$

Note que, para (t,x) sobre Σ, vale que:

$$p_t(t,x) = \lim_{h\to 0}\frac{p(t+h,x)-p(t,x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$

ou seja,

$$p_t = 0 \text{ sobre } \Sigma. \tag{3.20}$$

Portanto, pela Fórmula de Green e sabendo de (3.13) e (3.20), temos que:

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \Delta p_t p\, dx &= \int_\Omega \nabla p \nabla p_t\, dx - \int_\Sigma p\big(p_t\big)_\eta\, d\Sigma\\
&= \int_\Omega \nabla p \nabla p_t\, dx\\
&= \int_\Omega \nabla p \nabla p_t\, dx - \int_\Sigma p_t p_\eta\, d\Sigma\\
&= -\int_\Omega \Delta p p_t\, dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$-\int_\Omega \Delta p_t p\, dx = -\int_\Omega \Delta p p_t\, dx. \tag{3.21}$$

Por conseguinte, de (3.19) e (3.21), deduzimos que:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \big[V(t)p_t\big]p\, dx\\
&= \int_\Omega \big(-\Delta p_t - s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p_t - s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p_t + s\alpha_t p_t\big)p\, dx\\
&= -\int_\Omega \Delta p_t p\, dx + \int_\Omega \big(-s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p_t p - s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p_t p + s\alpha_t p_t p\big)\, dx\\
&= -\int_\Omega \Delta p p_t\, dx + \int_\Omega \big(-s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p_t p - s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p_t p + s\alpha_t p_t p\big)\, dx\\
&= \int_\Omega \big(-\Delta p - s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p - s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p + s\alpha_t p\big)p_t\, dx\\
&= \int_\Omega \big[V(t)p\big]p_t\, dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_\Omega \big[V(t)p_t\big]p\, dx = \int_\Omega \big[V(t)p\big]p_t\, dx, \tag{3.22}$$

e assim concluímos a prova da Afirmação 3.0.2.

Agora, de (3.15), (3.17) e pela Afirmação 3.0.2 resulta que:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big\{ \big[V(t)p\big]p \Big\}_t \, dx \\
&= \int_\Omega \big[V_t(t)p\big]p \, dx + \int_\Omega 2\big[V(t)p\big]p_t \, dx \\
&= \int_\Omega \big[V_t(t)p\big]p \, dx + \int_\Omega 2\big[V(t)p\big]\left[e^{s\alpha}f_1 + Z(t)p + V(t)p - U(t)p\right] dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Big\{ \big[V(t)p\big]p \Big\}_t \, dx &= \int_\Omega \big[V_t(t)p\big]p \, dx + 2\int_\Omega \left[V(t)p\right]\left[e^{s\alpha}f_1 + Z(t)p\right] dx \\
&\quad + 2\int_\Omega \left|V(t)p\right|^2 dx - 2\int_\Omega \left[V(t)p\right]\left[U(t)p\right] dx.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Então, integrando (3.23) de 0 a T, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega \Big\{ \big[V(t)p\big]p \Big\}_t \, dxdt &= \int_Q \big[V_t(t)p\big]p \, dxdt + 2\int_Q \left[V(t)p\right]\left[e^{s\alpha}f_1 + Z(t)p\right] dxdt \\
&\quad + 2\int_Q \left|V(t)p\right|^2 dxdt + 2\Big\{ -\int_Q \left[V(t)p\right]\left[U(t)p\right] dxdt \Big\},
\end{aligned}$$

e como

$$\int_0^T \int_\Omega \Big\{ \big[V(t)p\big]p \Big\}_t \, dxdt = \int_\Omega \Big\{ \int_0^T \Big\{ \big[V(t)p\big]p \Big\}_t \, dt \Big\} dx = \int_\Omega \Big\{ \big[V(t)p\big]p \Big|_0^T \Big\} dx = 0,$$

pois $p(0,x) = p(T,x) = 0$ em Ω (veja a Afirmação 3.0.1), encontramos:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_Q \big[V_t(t)p\big]p \, dxdt + 2\int_Q \left[V(t)p\right]\left[e^{s\alpha}f_1 + Z(t)p\right] dxdt + 2\int_Q \left|V(t)p\right|^2 dxdt \\
&\quad + 2\Big\{ -\int_Q \left[V(t)p\right]\left[U(t)p\right] dxdt \Big\},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&2\Big\{ -\int_Q \left[V(t)p\right]\left[U(t)p\right] dxdt \Big\} + 2\int_Q \left|V(t)p\right|^2 dxdt \\
&= -\int_Q \big[V_t(t)p\big]p \, dxdt - 2\int_Q \left[V(t)p\right]\left[e^{s\alpha}f_1 + Z(t)p\right] dxdt.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Considere:

$$\begin{aligned}
X &= -\int_Q \left[V(t)p\right]\left[U(t)p\right] dxdt, \\
X_1 &= \left| \int_Q \big[V_t(t)p\big]p \, dxdt \right|, \\
X_2 &= \left| 2\int_Q \left[V(t)p\right]\left[e^{s\alpha}f_1 + Z(t)p\right] dxdt \right|.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Logo, de (3.24) segue a desigualdade:

$$2X + 2\int_Q \left|V(t)p\right|^2 dxdt \leqslant X_1 + X_2. \tag{3.26}$$

Vamos analisar os termos X_1 e X_2 em (3.25).

- **Análise dos Termos X_1 e X_2**

Inicialmente, note que, como $\psi(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$ (Lema 3.0.1), então:

$$||\psi|| - \psi(x) < ||\psi||,$$

implicando em

$$2\lambda||\psi|| - 2\lambda\psi(x) < 2\lambda||\psi||,$$

donde

$$e^{2\lambda||\psi|| - 2\lambda\psi(x)} < e^{2\lambda||\psi||}. \tag{3.27}$$

Note também que, como

$$\beta(t) \quad = t(T-t),$$

então

$$\beta'(t) \quad = T - 2t. \tag{3.28}$$

Para obtermos as próximas estimativas, considere:

$$C_0 = \max\left\{|T-2t|, |T-2t||1+e^{2\lambda||\psi||}|, \left(2|\beta(t)| + 2|T-2t|^2\right)\left(1+e^{2\lambda||\psi||}\right)\right\}.$$

Agora, pela definição de ϕ e usando (3.28), resulta que:

$$\begin{aligned}
|\phi_t| &= \left|\left(\frac{e^{\lambda\psi}}{\beta(t)}\right)_t\right| \\
&= \left|\frac{-e^{\lambda\psi}\beta'(t)}{\beta(t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{-e^{\lambda\psi}(T-2t)}{\beta(t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{-e^{\lambda\psi}(T-2t)}{\beta(t)^2}\frac{e^{\lambda\psi}}{e^{\lambda\psi}}\right| \\
&= \left|\frac{-(T-2t)}{e^{\lambda\psi}}\left(\frac{e^{\lambda\psi}}{\beta(t)}\right)^2\right| \\
&= \frac{|T-2t|}{e^{\lambda\psi}}\phi^2 \\
&\leqslant |T-2t|\phi^2 \\
&\leqslant C_0\phi^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|\phi_t| \leqslant C_0\phi^2. \tag{3.29}$$

Também, pela definição de α e usando (3.27) e (3.28), segue que:

$$\begin{aligned}
|\alpha_t| &= \left|\left(\frac{e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}\right)_t\right| \\
&= \left|\frac{-\big(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\big)\beta'(t)}{\beta(t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{-\big(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\big)(T-2t)}{\beta(t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{-\big(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\big)(T-2t)}{\beta(t)^2}\frac{e^{2\lambda\psi}}{e^{2\lambda\psi}}\right| \\
&= \left|\frac{-\big(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\big)(T-2t)}{e^{2\lambda\psi}}\left(\frac{e^{\lambda\psi}}{\beta(t)}\right)^2\right| \\
&= |T-2t|\left|\frac{1}{e^{\lambda\psi}} - e^{2\lambda||\psi||-2\lambda\psi}\right|\phi^2 \\
&\leqslant |T-2t|\left|\frac{1}{e^{\lambda\psi}} + e^{2\lambda||\psi||-2\lambda\psi}\right|\phi^2 \\
&\leqslant |T-2t||1+e^{2\lambda||\psi||}|\phi^2 \\
&\leqslant C_0\phi^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\alpha_t| \leqslant C_0\phi^2. \tag{3.30}$$

Além disso, pela definição de ϕ e usando (3.27) e (3.28), obtemos:

$$\begin{aligned}
|\alpha_{tt}| &= \big|(\alpha_t)_t\big| \\
&= \left|\left(\frac{-\big(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\big)\beta'(t)}{\beta(t)^2}\right)_t\right| \\
&= \left|\frac{-\big(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\big)\beta''(t)\beta(t)^2 + \big(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\big)2\beta(t)\beta'(t)^2}{\beta(t)^4}\right| \\
&= \left|\frac{-\beta''(t)\beta(t)^2 + 2\beta(t)\beta'(t)^2}{\beta(t)^4}\big(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\big)\right| \\
&= \left|\frac{-\beta''(t)\beta(t) + 2\beta'(t)^2}{\beta(t)^3}\big(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\big)\right| \\
&= \left|\frac{-\beta''(t)\beta(t) + 2(T-2t)^2}{\beta(t)^3}\big(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\big)\right|,
\end{aligned}$$

e como $-\beta''(t)\beta(t) \leqslant 2\beta(t)$, segue que:

$$
\begin{aligned}
|\alpha_{tt}| &\leqslant \left| \frac{2\beta(t) + 2(T-2t)^2}{\beta(t)^3} \left(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\right) \right|, \\
&= \left| \frac{2\beta(t) + 2(T-2t)^2}{\beta(t)^3} \left(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\right) \frac{e^{3\lambda\psi}}{e^{3\lambda\psi}} \right| \\
&= \left| \frac{2\beta(t) + 2(T-2t)^2}{e^{\lambda\psi}} \frac{e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}}{e^{2\lambda\psi}} \left(\frac{e^{\lambda\psi}}{\beta(t)} \right)^3 \right| \\
&= \left| \frac{2\beta(t) + 2|T-2t|^2}{e^{\lambda\psi}} \right| \left| \frac{e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}}{e^{2\lambda\psi}} \right| \phi^3 \\
&\leqslant \left(2|\beta(t)| + 2|T-2t|^2\right) \left| \frac{e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}}{e^{2\lambda\psi}} \right| \phi^3 \\
&\leqslant \left(2|\beta(t)| + 2|T-2t|^2\right)\left(1 + e^{2\lambda||\psi||}\right)\phi^3 \\
&\leqslant C_0\phi^3,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$|\alpha_{tt}| \leqslant C_0\phi^3. \tag{3.31}$$

Portanto, temos:

$$|\phi_t| \leqslant C_0\phi^2, \quad |\alpha_t| \leqslant C_0\phi^2 \quad \text{e} \quad |\alpha_{tt}| \leqslant C_0\phi^3, \tag{3.32}$$

onde $C_0 = \max\left\{|T-2t|, |T-2t||1 + e^{2\lambda||\psi||}|, \left(2|\beta(t)| + 2|T-2t|^2\right)\left(1 + e^{2\lambda||\psi||}\right)\right\}$, ou seja, $C_0 = C_0(\Omega, \omega, T, \lambda)$.

Observe que, como $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, com Ω limitado, então existe uma constante $\overline{C_0} > 0$ tal que

$$|\nabla\psi|^2 \leqslant \overline{C_0}. \tag{3.33}$$

Assim, de (3.18), (3.32) e (3.33), e usando a Desigualdade de Minkowski (Teorema 1.2.4), encontramos que:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \left| \int_Q \left[V_t(t)p\right] p \, dxdt \right| \\
&= \left| \int_Q \left(-2s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2p^2 - s\lambda^2\phi_t|\nabla\psi|^2p^2 + s\alpha_{tt}p^2\right) dxdt \right| \\
&\leqslant \int_Q 2s^2\lambda^2\phi|\phi_t||\nabla\psi|^2p^2 \, dxdt + \int_Q s\lambda^2|\phi_t||\nabla\psi|^2p^2 \, dxdt + \int_Q s|\alpha_{tt}|p^2 \, dxdt \\
&\leqslant \int_Q 2s^2\lambda^2\phi(C_0\phi^2\overline{C_0})p^2 \, dxdt + \int_Q s\lambda^2(C_0\phi^2\overline{C_0})p^2 \, dxdt + \int_Q s(C_0\phi^3)p^2 \, dxdt,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$X_1 \leqslant 2C_0\overline{C_0}\int_Q s^2\lambda^2\phi^3 p^2\,dxdt + C_0\overline{C_0}\int_Q s\lambda^2\phi^2 p^2\,dxdt + C_0\int_Q s\phi^3 p^2\,dxdt.$$

Tomando $C_1 = C_1(\Omega, \omega, T, \lambda) = \max\left\{2C_0\overline{C_0}, C_0\overline{C_0}, C_0\right\}$ na última expressão, segue que:

$$X_1 \leqslant C_1\left(\int_Q s^2\lambda^2\phi^3 p^2\,dxdt + \int_Q s\lambda^2\phi^2 p^2\,dxdt + \int_Q s\phi^3 p^2\,dxdt\right),$$

ou seja,

$$X_1 \leqslant C_1\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3\right)p^2 dxdt. \tag{3.34}$$

Agora, usando as Desigualdades de Minkowski e de Young (Teorema 1.2.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
X_2 &= \left|2\int_Q \left[V(t)p\right]\left[e^{s\alpha}f_1 + Z(t)p\right]\,dxdt\right| \\
&= \left|2\int_Q \left[V(t)p\right]e^{s\alpha}f_1\,dxdt + 2\int_Q \left[V(t)p\right]Z(t)p\,dxdt\right| \\
&\leqslant 2\int_Q \left(\left|V(t)p\right|\right)\left(e^{s\alpha}\left|f_1\right|\right)\,dxdt + 2\int_Q \left(\left|V(t)p\right|\right)\left(\left|Z(t)p\right|\right)\,dxdt \\
&\leqslant 2\int_Q \frac{1}{2}\left(\left|V(t)p\right|\right)^2\,dxdt + 2\int_Q \frac{1}{2}\left(e^{s\alpha}\left|f_1\right|\right)^2\,dxdt \\
&\quad + 2\int_Q \frac{1}{2}\left(\left|V(t)p\right|\right)^2\,dxdt + 2\int_Q \frac{1}{2}\left(\left|Z(t)p\right|\right)^2\,dxdt \\
&= \int_Q \left|V(t)p\right|^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2\,dxdt + \int_Q \left|V(t)p\right|^2\,dxdt + \int_Q \left|Z(t)p\right|^2\,dxdt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$X_2 \leqslant 2\int_Q \left|V(t)p\right|^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2\,dxdt + \int_Q \left|Z(t)p\right|^2\,dxdt. \tag{3.35}$$

Observe que, como $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, com Ω limitado, então existe uma constante positiva $\overline{C_1} = \overline{C_1}(\Omega, \omega)$ tal que

$$|\Delta\psi|^2 \leqslant \overline{C_1}. \tag{3.36}$$

Assim, de (2.6), (3.14) e (3.36), e usando as Desigualdades de Minkowski e de Young, segue que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left|Z(t)p\right|^2 dxdt \\
&= \int_Q \left|s\lambda\phi\Delta\psi p + a(t,x)p + \left[H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right]e^{s\alpha}\right|^2 dxdt \\
&\leqslant \int_Q \left(\left|s\lambda\phi\Delta\psi p + a(t,x)p\right| + \left|\left[H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right]e^{s\alpha}\right|\right)^2 dxdt \\
&\leqslant 2\int_Q \left|s\lambda\phi\Delta\psi p + a(t,x)p\right|^2 dxdt + 2\int_Q \left|\left[H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right]e^{s\alpha}\right|^2 dxdt \\
&\leqslant 4\int_Q \left|s\lambda\phi\Delta\psi p\right|^2 dxdt + 4\int_Q \left|a(t,x)p\right|^2 dxdt + 2\int_Q \left|\left[H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right]e^{s\alpha}\right|^2 dxdt \\
&= 4\int_Q s^2\lambda^2\phi^2\left|\Delta\psi\right|^2 p^2 dxdt + 4\int_Q \left|a(t,x)\right|^2 p^2 dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left|Z(t)p\right|^2 dxdt \\
&\leqslant 4\overline{C_1}\int_Q s^2\lambda^2\phi^2 p^2 dxdt + 4M^2\int_Q p^2 dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Tomando $C_2 = C_2(\Omega,\omega) = \max\left\{4\overline{C_1}, 4M^2, 2\right\}$ na última expressão, temos que:

$$\int_Q \left|Z(t)p\right|^2 dxdt \leqslant C_2\left(\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^2 + 1\right)p^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt\right). \tag{3.37}$$

Agora, substituindo (3.37) em (3.35), obtemos:

$$\begin{aligned}
X_2 &\leqslant 2\int_Q \left|V(t)p\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt \\
&\quad + C_2\left(\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^2 + 1\right)p^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt\right).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Dessa forma, de (3.26), (3.34) e (3.38), resulta que:

$$\begin{aligned}
&2X + 2\int_Q \left|V(t)p\right|^2 dxdt \\
&\leqslant C_1\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3\right)p^2 dxdt + 2\int_Q \left|V(t)p\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt \\
&\quad + C_2\left(\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^2 + 1\right)p^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt\right),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
2X &\leqslant C_1\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3\right)p^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt \\
&\quad + C_2\left(\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^2 + 1\right)p^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt\right),
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} X &\leqslant \frac{C_1}{2}\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3\right)p^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt \\ &+ \frac{C_2}{2}\left(\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^2 + 1\right)p^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt\right). \end{aligned}$$

Portanto, tomando $C_3 = C_3(\Omega, \omega, T, \lambda) = \max\left\{\frac{C_1}{2}, \frac{C_2}{2}\right\}$ na última estimativa, concluímos que:

$$\begin{aligned} X &\leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + C_3\left(\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3 + s^2\lambda^2\phi^2 + 1\right)p^2 dxdt\right. \\ &\left. + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt\right). \end{aligned} \tag{3.39}$$

3.0.2 Etapa 2: Análise dos Termos de X

De (3.25) e (3.14) temos que:

$$\begin{aligned} X &= -2\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p\Delta p \, dxdt - 2\int_Q s\lambda\phi\langle\nabla\psi, \nabla p\rangle\Delta p \, dxdt \\ &- 2\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt - 2\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi, \nabla p\rangle p \, dxdt \\ &- 2\int_Q s^2\lambda^4\phi^2|\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt - 2\int_Q s^2\lambda^3\phi^2|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi, \nabla p\rangle p \, dxdt \\ &+ 2\int_Q s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2 p^2 \, dxdt + 2\int_Q s^2\lambda\phi\alpha_t\langle\nabla\psi, \nabla p\rangle p \, dxdt \\ &= \left(-2\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p\Delta p \, dxdt\right) + \left(-2\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt\right. \\ &\left. - 2\int_Q s^2\lambda^4\phi^2|\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt\right) + \left(-2\int_Q s\lambda\phi\langle\nabla\psi, \nabla p\rangle\Delta p \, dxdt\right) \\ &+ \left(-2\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi, \nabla p\rangle p \, dxdt - 2\int_Q s^2\lambda^3\phi^2|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi, \nabla p\rangle p \, dxdt\right) \\ &+ \left(2\int_Q s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2 p^2 \, dxdt + 2\int_Q s^2\lambda\phi\alpha_t\langle\nabla\psi, \nabla p\rangle p \, dxdt\right). \end{aligned}$$

Considere:

$$M_1 = -2\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p\Delta p\,dxdt;$$

$$M_2 = -2\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4 p^2\,dxdt - 2\int_Q s^2\lambda^4\phi^2|\nabla\psi|^4 p^2\,dxdt;$$

$$M_3 = -2\int_Q s\lambda\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle\Delta p\,dxdt;$$

$$M_4 = -2\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle p\,dxdt - 2\int_Q s^2\lambda^3\phi^2|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle p\,dxdt;$$

$$M_5 = 2\int_Q s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2 p^2\,dxdt + 2\int_Q s^2\lambda\phi\alpha_t\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle p\,dxdt.$$

Dessa maneira, podemos escrever

$$X = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5. \tag{3.40}$$

Vamos analisar cada termo M_i, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

- **ANÁLISE DE** M_1

Pela Fórmula de Green (Teorema 1.6.4) e sabendo que $p = 0$ sobre Σ, obtemos:

$$\begin{aligned} M_1 &= -2\int_Q s\lambda^2\big(\phi|\nabla\psi|^2 p\big)\big(\Delta p\big)\,dxdt \\ &= 2\int_Q s\lambda^2\big\langle\nabla\big(\phi|\nabla\psi|^2 p\big),\nabla p\big\rangle\,dxdt - 2\int_\Sigma s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p p_\eta\,d\Sigma \\ &= 2\int_Q s\lambda^2\big\langle\nabla\big(\phi|\nabla\psi|^2 p\big),\nabla p\big\rangle\,dxdt, \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned} \nabla\big(\phi|\nabla\psi|^2 p\big) &= \nabla\phi\big(|\nabla\psi|^2 p\big) + \phi\nabla\big(|\nabla\psi|^2 p\big) \\ &= \nabla\phi|\nabla\psi|^2 p + \phi\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big)p + \phi|\nabla\psi|^2\nabla p, \end{aligned}$$

segue de (3.2) que:

$$\begin{aligned} M_1 &= 2\int_Q s\lambda^2\big\langle\big(\nabla\phi|\nabla\psi|^2 p + \phi\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big)p + \phi|\nabla\psi|^2\nabla p\big),\nabla p\big\rangle\,dxdt \\ &= 2\int_Q s\lambda^2\big\langle\nabla\phi|\nabla\psi|^2 p,\nabla p\big\rangle\,dxdt + 2\int_Q s\lambda^2\big\langle\phi\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big)p,\nabla p\big\rangle\,dxdt \\ &\quad + 2\int_Q s\lambda^2\big\langle\phi|\nabla\psi|^2\nabla p,\nabla p\big\rangle\,dxdt \\ &= 2\int_Q s\lambda^2\big\langle\big(\lambda\phi\nabla\psi\big)|\nabla\psi|^2 p,\nabla p\big\rangle\,dxdt + 2\int_Q s\lambda^2\big\langle\phi\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big)p,\nabla p\big\rangle\,dxdt \\ &\quad + 2\int_Q s\lambda^2\big\langle\phi|\nabla\psi|^2\nabla p,\nabla p\big\rangle\,dxdt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} M_1 &= 2\int_Q s\lambda^3\phi|\nabla\psi|^2\big\langle\nabla\psi,\nabla p\big\rangle p\,dxdt + 2\int_Q s\lambda^2\phi\big\langle\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big),\nabla p\big\rangle p\,dxdt \\ &\quad + 2\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Note que, como $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, com Ω limitado, então existe uma constante $\overline{C_2} = \overline{C_2}(\Omega,\omega) > 0$ tal que

$$|\nabla\psi|^4 \leqslant \overline{C_2}. \tag{3.42}$$

Assim, de (3.42) e pelas Desigualdades de Minkowski (Teorema 1.2.4), Cauchy-Schwarz (Teorema 1.1.1) e de Young (Teorema 1.2.1), obtemos:

$$\begin{aligned} &\left|2\int_Q s\lambda^3\phi|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle p\,dxdt\right| \\ &\leqslant 2\int_Q s\lambda^3\phi|\nabla\psi|^2|\nabla\psi||\nabla p||p|\,dxdt \\ &= 2\int_Q s\phi\big(2\lambda^2|\nabla\psi|^2|p|\big)\left(\frac{\lambda}{2}|\nabla\psi||\nabla p|\right)dxdt \\ &\leqslant 2\int_Q s\phi\frac{1}{2}\big(2\lambda^2|\nabla\psi|^2|p|\big)^2\,dxdt + 2\int_Q s\phi\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}|\nabla\psi||\nabla p|\right)^2 dxdt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \left|2\int_Q s\lambda^3\phi|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle p\,dxdt\right| &\leqslant 4\overline{C_2}\int_Q s\lambda^4\phi|p|^2\,dxdt \\ &\quad + \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} 2\int_Q s\lambda^3\phi|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle p\,dxdt &\geqslant -4\overline{C_2}\int_Q s\lambda^4\phi|p|^2\,dxdt \\ &\quad - \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Além disso, veja que:

$$\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big) = \nabla\big(|\nabla\psi||\nabla\psi|\big) = \nabla\big(|\nabla\psi|\big)|\nabla\psi| + |\nabla\psi|\nabla\big(|\nabla\psi|\big),$$

ou seja,

$$\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big) = 2|\nabla\psi|\nabla\big(|\nabla\psi|\big). \tag{3.44}$$

Posto isso, como $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, com Ω limitado, então existe uma constante $\overline{C_3} = \overline{C_3}(\Omega, \omega) > 0$ tal que $\left|\nabla\big(|\nabla\psi|\big)\right| \leqslant \overline{C_3}$ e pelas Desigualdades de Minkowski, Cauchy-Schwarz e de Young, vale que:

$$
\begin{aligned}
&\left|2\int_Q s\lambda^2\phi\langle\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big), \nabla p\rangle p \, dxdt\right| \\
&= \left|2\int_Q s\lambda^2\phi\langle 2|\nabla\psi|\nabla\big(|\nabla\psi|\big), \nabla p\rangle p \, dxdt\right| \\
&\leqslant 2\int_Q s\lambda^2\phi 2|\nabla\psi|\left|\nabla\big(|\nabla\psi|\big)\right||\nabla p||p| \, dxdt \\
&= 2\int_Q s\lambda^2\phi\left(4\left|\nabla\big(|\nabla\psi|\big)\right||p|\right)\left(\frac{1}{2}|\nabla\psi||\nabla p|\right) dxdt \\
&\leqslant 2\int_Q s\lambda^2\phi\frac{1}{2}\left(4\left|\nabla\big(|\nabla\psi|\big)\right||p|\right)^2 dxdt + 2\int_Q s\lambda^2\phi\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|\nabla\psi||\nabla p|\right)^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\left|2\int_Q s\lambda^2\phi\langle\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big), \nabla p\rangle p \, dxdt\right| &\leqslant 16\overline{C_3}\int_Q s\lambda^2\phi|p|^2 \, dxdt \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt,
\end{aligned}
$$

e assim,

$$
\begin{aligned}
2\int_Q s\lambda^2\phi\langle\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big), \nabla p\rangle p \, dxdt &\geqslant -16\overline{C_3}\int_Q s\lambda^2\phi|p|^2 \, dxdt \\
&\quad - \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

Agora, de (3.41), (3.43) e (3.45), deduzimos que:

$$
\begin{aligned}
M_1 &\geqslant \left(-4\overline{C_2}\int_Q s\lambda^4\phi|p|^2 \, dxdt - \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt\right) \\
&\quad + \left(-16\overline{C_3}\int_Q s\lambda^2\phi|p|^2 \, dxdt - \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt\right) \\
&\quad + 2\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt,
\end{aligned}
$$

logo,

$$
M_1 \geqslant -4\overline{C_2}\int_Q s\lambda^4\phi|p|^2 \, dxdt - 16\overline{C_3}\int_Q s\lambda^2\phi|p|^2 \, dxdt + \frac{3}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt.
$$

Portanto, tomando $C_4 = C_4(\Omega, \omega) = \max\left\{4\overline{C_2}, 16\overline{C_3}\right\}$, segue que:

$$
M_1 \geqslant \frac{3}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt - C_4\int_Q s\phi\big(\lambda^4 + \lambda^2\big)|p|^2 \, dxdt. \tag{3.46}
$$

- **ANÁLISE DE** M_3

Pela Fórmula de Green (Teorema 1.6.4), encontramos:

$$\begin{aligned} M_3 &= -2\int_Q s\lambda\big(\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\big)\Delta p\, dxdt \\ &= 2\int_Q s\lambda\big\langle \nabla\big(\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\big), \nabla p\big\rangle\, dxdt - 2\int_\Sigma s\lambda\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle p_\eta\, d\Sigma, \end{aligned}$$

agora como

$$p_\eta = \big\langle \nabla p, \eta\big\rangle,$$

podemos escrever:

$$M_3 = 2\int_Q s\lambda\big\langle \nabla\big(\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\big), \nabla p\big\rangle\, dxdt - 2\int_\Sigma s\lambda\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\big\langle \nabla p, \eta\big\rangle\, d\Sigma. \tag{3.47}$$

Veja que, como

$$\begin{aligned} \nabla\big(\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\big) &= \nabla\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle + \phi\nabla\big(\langle \nabla\psi, \nabla p\rangle\big) \\ &= \big(\lambda\phi\nabla\psi\big)\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle + \phi\nabla\big(\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\big) \\ &= \lambda\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\nabla\psi + \phi\nabla\bigg(\sum_{i=1}^{n}\psi_{x_i}p_{x_i}\bigg) \\ &= \lambda\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\nabla\psi + \phi\xi, \end{aligned}$$

onde $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, com

$$\begin{aligned} \xi_j &= \bigg(\sum_{i=1}^{n}\psi_{x_i}p_{x_i}\bigg)_{x_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\psi_{x_ix_j}p_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}\psi_{x_i}p_{x_ix_j}, \quad j = 1, ..., n, \end{aligned} \tag{3.48}$$

então

$$\begin{aligned} \big\langle \nabla\big(\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\big), \nabla p\big\rangle &= \big\langle \lambda\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\nabla\psi + \phi\xi, \nabla p\big\rangle \\ &= \lambda\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle + \phi\big\langle \xi, \nabla p\big\rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$\big\langle \nabla\big(\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\big), \nabla p\big\rangle = \lambda\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle^2 + \phi\big\langle \xi, \nabla p\big\rangle. \tag{3.49}$$

Assim, substituindo (3.49) em (3.47), obtemos:

$$\begin{aligned} M_3 &= 2\int_Q s\lambda\big(\lambda\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle^2+\phi\langle\xi,\nabla p\rangle\big)\,dxdt-2\int_\Sigma s\lambda\phi\big\langle\nabla\psi,\nabla p\big\rangle\big\langle\nabla p,\eta\big\rangle\,d\Sigma\\ &= 2\int_Q s\lambda^2\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle^2\,dxdt+2\int_Q s\lambda\phi\langle\xi,\nabla p\rangle\,dxdt\\ &\quad -2\int_\Sigma s\lambda\phi\big\langle\nabla\psi,\nabla p\big\rangle\big\langle\nabla p,\eta\big\rangle\,d\Sigma\\ &= 2\int_Q s\lambda^2\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle^2\,dxdt+2\sum_{j=1}^{n}\int_Q s\lambda\phi\xi_j p_{x_j}\,dxdt\\ &\quad -2\int_\Sigma s\lambda\phi\big\langle\nabla\psi,\nabla p\big\rangle\big\langle\nabla p,\eta\big\rangle\,d\Sigma, \end{aligned}$$

e assim de (3.48) segue que:

$$\begin{aligned} M_3 &= 2\int_Q s\lambda^2\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle^2\,dxdt\\ &\quad +2\sum_{j=1}^{n}\int_Q s\lambda\phi\bigg(\sum_{i=1}^{n}\psi_{x_ix_j}p_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}\psi_{x_i}p_{x_ix_j}\bigg)p_{x_j}\,dxdt\\ &\quad -2\int_\Sigma s\lambda\phi\big\langle\nabla\psi,\nabla p\big\rangle\big\langle\nabla p,\eta\big\rangle\,d\Sigma\\ &= 2\int_Q s\lambda^2\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle^2\,dxdt+2\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_j}p_{x_i}p_{x_j}\,dxdt\\ &\quad +2\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q s\lambda\phi\psi_{x_i}p_{x_ix_j}p_{x_j}\,dxdt-2\int_\Sigma s\lambda\phi\big\langle\nabla\psi,\nabla p\big\rangle\big\langle\nabla p,\eta\big\rangle\,d\Sigma, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} M_3 &= 2\int_Q s\lambda^2\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle^2\,dxdt+2\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_j}p_{x_i}p_{x_j}\,dxdt\\ &\quad +2\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q s\lambda\phi\psi_{x_i}p_{x_ix_j}p_{x_j}\,dxdt-2\int_\Sigma s\lambda\phi\big\langle\nabla\psi,\nabla p\big\rangle\big\langle\nabla p,\eta\big\rangle\,d\Sigma. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Considere:

$$N_{ij}=2\int_Q s\lambda\phi\psi_{x_i}p_{x_ix_j}p_{x_j}\,dxdt.$$

Como

$$p_{x_ix_j}p_{x_j}=\frac{1}{2}\Big(\big(p_{x_j}\big)^2\Big)_{x_i},$$

então podemos reescrever

$$N_{ij} = \int_Q s\lambda\phi\psi_{x_i}\Big(\big(p_{x_j}\big)^2\Big)_{x_i}\,dxdt.$$

Observe que, por um lado, pelo Teorema de Gauss-Green (Teorema 1.6.1), obtemos:

$$\int_Q \left(s\lambda\phi\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\right)_{x_i} dxdt \;= \int_\Sigma s\lambda\phi\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\eta_i \, d\Sigma \tag{3.51}$$

e por outro lado, vale que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left(s\lambda\phi\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\right)_{x_i} dxdt \\
&= \int_Q s\lambda\phi_{x_i}\left(\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\right) dxdt + \int_Q s\lambda\phi\left(\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\right)_{x_i} dxdt \\
&= \int_Q s\lambda\phi_{x_i}\psi_{x_i}(p_{x_j})^2 \, dxdt + \int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_i}(p_{x_j})^2 \, dxdt + \int_Q s\lambda\phi\psi_{x_i}\left((p_{x_j})^2\right)_{x_i} dxdt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\int_Q \left(s\lambda\phi\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\right)_{x_i} dxdt \;&= \int_Q s\lambda\phi_{x_i}\psi_{x_i}(p_{x_j})^2 \, dxdt + \int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_i}(p_{x_j})^2 \, dxdt \\
&\quad + N_{ij}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Combinando (3.51) e (3.52), resulta que:

$$\int_\Sigma s\lambda\phi\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\eta_i \, d\Sigma \;= \int_Q s\lambda\phi_{x_i}\psi_{x_i}(p_{x_j})^2 \, dxdt + \int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_i}(p_{x_j})^2 \, dxdt + N_{ij},$$

ou seja,

$$N_{ij} \;= -\int_Q s\lambda\phi_{x_i}\psi_{x_i}(p_{x_j})^2 \, dxdt - \int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_i}(p_{x_j})^2 \, dxdt + \int_\Sigma s\lambda\phi\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\eta_i \, d\Sigma. \tag{3.53}$$

De (3.2) segue que:

$$\phi_{x_i} = \lambda\phi\psi_{x_i},$$

e assim,

$$s\lambda\phi_{x_i}\psi_{x_i} = s\lambda^2\phi(\psi_{x_i})^2. \tag{3.54}$$

Daí, substituindo (3.54) em (3.53), encontramos que:

$$\begin{aligned}
N_{ij} \;&= -\int_Q s\lambda^2\phi(\psi_{x_i})^2(p_{x_j})^2 \, dxdt - \int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_i}(p_{x_j})^2 \, dxdt \\
&\quad + \int_\Sigma s\lambda\phi\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\eta_i \, d\Sigma,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} N_{ij} &= -\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt - \int_Q s\lambda\phi\Delta\psi|\nabla p|^2\,dxdt \\ &\quad + \int_\Sigma s\lambda\phi|\nabla p|^2\langle\nabla\psi,\eta\rangle\,d\Sigma.\end{aligned} \tag{3.55}$$

Substituindo (3.55) em (3.50), obtemos:

$$\begin{aligned}M_3 &= 2\int_Q s\lambda^2\phi\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle^2\,dxdt + 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_j}p_{x_i}p_{x_j}\,dxdt \\ &\quad - \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt - \int_Q s\lambda\phi\Delta\psi|\nabla p|^2\,dxdt \\ &\quad + \int_\Sigma s\lambda\phi|\nabla p|^2\langle\nabla\psi,\eta\rangle\,d\Sigma - 2\int_\Sigma s\lambda\phi\big\langle\nabla\psi,\nabla p\big\rangle\big\langle\nabla p,\eta\big\rangle\,d\Sigma.\end{aligned} \tag{3.56}$$

Agora, mostraremos o seguinte resultado:

Afirmação 3.0.3.

$$-2\int_\Sigma s\lambda\phi\big\langle\nabla\psi,\nabla p\big\rangle\big\langle\nabla p,\eta\big\rangle\,d\Sigma = -2\int_\Sigma s\lambda\phi|\nabla p|^2\langle\nabla\psi,\eta\rangle\,d\Sigma. \tag{3.57}$$

Com efeito, como Γ é a fronteira de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^2, então Γ é uma superfície de dimensão $n-1$ e assim, para $x \in \Gamma$, o espaço tangente $T_x(\Gamma)$ tem dimensão $n-1$, e portanto:

$$\dim\big\{\big(T_x(\Gamma)\big)^\perp\big\} = 1.$$

Daí, podemos concluir que $\big(T_x(\Gamma)\big)^\perp$ é o espaço gerado pelo vetor $\eta(x)$. Agora, fixando $t \in (0,T)$ e considerando $p(x) = p(t,x)$, segue pelas definições das funções ψ e p que:

$$\psi|_\Gamma = 0 \quad \text{e} \quad p|_\Gamma = 0,$$

e assim,

$$\langle\nabla\psi(x),\nu\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle\nabla p(x),\nu\rangle = 0 \quad \forall\,\nu \in T_x(\Gamma) \text{ e } \forall\,x \in \Gamma.$$

Dessa forma, obtemos que $\nabla\psi(x), \nabla p(x) \in \big(T_x(\Gamma)\big)^\perp$ e como $|\eta(x)| = 1$, resulta que:

$$\begin{cases}\nabla\psi = \eta\langle\nabla\psi,\eta\rangle \text{ em } \Gamma; \\[2ex] \nabla p = \eta\langle\nabla p,\eta\rangle \text{ em } \Gamma,\end{cases}$$

donde

$$\begin{cases}\nabla\psi = \eta\langle\nabla\psi,\eta\rangle \text{ em } \Gamma; \\[2ex] \langle\nabla p,\eta\rangle^2 = |\nabla p|^2 \text{ em } \Gamma.\end{cases} \tag{3.58}$$

De (3.58) vale que:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla\psi, \nabla p\rangle\langle \nabla p, \eta\rangle &= \langle \eta\langle \nabla\psi, \eta\rangle, \nabla p\rangle\langle \nabla p, \eta\rangle \\
&= \langle \nabla\psi, \eta\rangle\langle \eta, \nabla p\rangle\langle \nabla p, \eta\rangle \\
&= \langle \nabla\psi, \eta\rangle\langle \nabla p, \eta\rangle^2 \\
&= \langle \nabla\psi, \eta\rangle|\nabla p|^2,
\end{aligned}$$

e consequentemente,

$$-2\int_\Sigma s\lambda\phi\big\langle \nabla\psi, \nabla p\big\rangle\big\langle \nabla p, \eta\big\rangle \, d\Sigma = -2\int_\Sigma s\lambda\phi|\nabla p|^2\big\langle \nabla\psi, \eta\big\rangle \, d\Sigma,$$

concluindo a prova da Afirmação 3.0.3.

Substituindo (3.57) em (3.56), encontramos que:

$$\begin{aligned}
M_3 &= 2\int_Q s\lambda^2\phi\langle \nabla\psi, \nabla p\rangle^2 \, dxdt + 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_j}p_{x_i}p_{x_j} \, dxdt \\
&\quad - \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt - \int_Q s\lambda\phi\Delta\psi|\nabla p|^2 \, dxdt \\
&\quad - \int_\Sigma s\lambda\phi|\nabla p|^2\langle \nabla\psi, \eta\rangle \, d\Sigma,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
M_3 &= \int_Q s\lambda^2\phi\langle \nabla\psi, \nabla p\rangle^2 \, dxdt + 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_j}p_{x_i}p_{x_j} \, dxdt \\
&\quad + \int_Q s\lambda^2\phi\big(\langle \nabla\psi, \nabla p\rangle^2 - |\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\big) \, dxdt - \int_Q s\lambda\phi\Delta\psi|\nabla p|^2 \, dxdt \\
&\quad - \int_\Sigma s\lambda\phi|\nabla p|^2\langle \nabla\psi, \eta\rangle \, d\Sigma.
\end{aligned}$$

Considere:

$$N = -\int_\Sigma s\lambda\phi|\nabla p|^2\langle \nabla\psi, \eta\rangle \, d\Sigma,$$

vamos verificar que N é positivo.

De fato, como η é o vetor normal exterior a Γ, então dado $x \in \Gamma$ e $h < 0$, com h suficientemente pequeno, temos que $x + h\eta \in \Omega$. Contudo, por definição, $\psi(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$, em particular $\psi(x+h\eta) > 0$. Posto isso, dado $x \in \Gamma$, como $\psi(x) = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned}\langle \nabla\psi, \eta\rangle &= \psi_\eta(x)\\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\psi(x+h\eta) - \psi(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\psi(x+h\eta)}{h}\\ &< 0,\end{aligned}$$

e portanto,

$$N = -\int_\Sigma s\lambda\phi|\nabla p|^2 \langle \nabla\psi, \eta\rangle \, d\Sigma > 0. \tag{3.59}$$

Além disso, como $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, com Ω limitado, então existem constantes $\overline{C_4} = \overline{C_4}(\Omega, \omega) > 0$ e $\overline{C_5} = \overline{C_5}(\Omega, \omega) > 0$ tais que

$$|\psi_{x_i x_j}| \leqslant \overline{C_4} \quad \text{e} \quad |\Delta\psi| \leqslant \overline{C_5}. \tag{3.60}$$

Assim, de (3.59), (3.60) e usando as Desigualdades de Minkowski e de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$\begin{aligned}|M_3 - N| &= \Big| \int_Q s\lambda^2\phi \langle \nabla\psi, \nabla p\rangle^2 \, dxdt + 2\sum_{i,j=1}^n \int_Q s\lambda\phi\psi_{x_i x_j} p_{x_i} p_{x_j} \, dxdt\\ &\quad + \int_Q s\lambda^2\phi\big(\langle \nabla\psi, \nabla p\rangle^2 - |\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\big) \, dxdt - \int_Q s\lambda\phi\Delta\psi|\nabla p|^2 \, dxdt \Big|\\ &\leqslant \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt + 2\sum_{i,j=1}^n \int_Q s\lambda\phi|\psi_{x_i x_j}||p_{x_i}||p_{x_j}| \, dxdt\\ &\quad + \int_Q s\lambda^2\phi\big(|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 - |\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\big) \, dxdt + \int_Q s\lambda\phi|\Delta\psi||\nabla p|^2 \, dxdt\\ &\leqslant \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt + 2n^2\overline{C_4}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2 \, dxdt\\ &\quad + \overline{C_5}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2 \, dxdt\\ &\leqslant \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt + \big(2n^2\overline{C_4} + \overline{C_5}\big)\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2 \, dxdt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$|M_3 - N| \leqslant \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt + \widehat{C_0}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2 \, dxdt,$$

onde $\widehat{C_0} = \widehat{C_0}(\Omega, \omega) = 2n^2\overline{C_4} + \overline{C_5}$, e assim

$$M_3 - N \geqslant -\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 \, dxdt - \widehat{C_0}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2 \, dxdt,$$

e como $N > 0$, então

$$M_3 \geqslant -\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt - \widehat{C_0}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2\,dxdt. \tag{3.61}$$

Por conseguinte, somando (3.46) com (3.61), encontramos que:

$$\begin{aligned} M_1 + M_3 &\geqslant \frac{3}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt - C_4\int_Q s\phi\big(\lambda^4+\lambda^2\big)|p|^2\,dxdt \\ &- \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt - \widehat{C_0}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2\,dxdt \end{aligned}$$

e tomando $C_5 = C_5(\Omega,\omega) = \max\big\{C_4, \widehat{C_0}\big\}$, concluímos que:

$$\begin{aligned} M_1 + M_3 &\geqslant \frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt - C_5\int_Q s\phi\big(\lambda^4+\lambda^2\big)|p|^2\,dxdt \\ &- C_5\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2\,dxdt. \end{aligned} \tag{3.62}$$

- **ANÁLISE DE** M_4

Inicialmente, vamos mostrar que a afirmação seguinte é verdadeira:

Afirmação 3.0.4. $2\nabla pp = \nabla p^2$.

De fato, como $p = e^{s\alpha}w$, então $p^2 = e^{2s\alpha}w^2$. Assim, temos que:

$$p_{x_i} = s\alpha_{x_i}e^{s\alpha}w + e^{s\alpha}w_{x_i} = s\alpha_{x_i}p + e^{s\alpha}w_{x_i},$$

e portanto,

$$\nabla p = s\nabla\alpha p + e^{s\alpha}\nabla w.$$

Também, temos que:

$$\begin{aligned} \big(p^2\big)_{x_i} &= 2s\alpha_{x_i}e^{2s\alpha}w^2 + 2e^{2s\alpha}ww_{x_i} \\ &= 2s\alpha_{x_i}\big(e^{s\alpha}w\big)^2 + 2e^{s\alpha}w_{x_i}\big(e^{s\alpha}w\big) \\ &= 2s\alpha_{x_i}p^2 + 2e^{s\alpha}w_{x_i}p, \end{aligned}$$

e então,

$$\nabla p^2 = 2s\nabla\alpha p^2 + 2e^{s\alpha}\nabla wp = 2\big(s\nabla\alpha p + 2e^{s\alpha}\nabla w\big)p = 2\nabla pp,$$

ou seja,

$$2\nabla p p = \nabla p^2,$$

e assim concluímos a prova da Afirmação 3.0.4.

Além disso, observe que, como

$$\phi^2 = \frac{e^{2\lambda\psi}}{\beta(t)^2} \quad \text{e} \quad \phi^3 = \frac{e^{3\lambda\psi}}{\beta(t)^3},$$

então,

$$\left(\phi^2\right)_{x_i} = 2\lambda\psi_{x_i}\frac{e^{2\lambda\psi}}{\beta(t)^2} = 2\lambda\psi_{x_i}\phi^2,$$

e de forma análoga concluímos que:

$$\left(\phi^3\right)_{x_i} = 3\lambda\psi_{x_i}\phi^3.$$

Portanto,

$$\nabla\phi^2 = 2\lambda\phi^2\nabla\psi \quad \text{e} \quad \nabla\phi^3 = 3\lambda\phi^3\nabla\psi. \tag{3.63}$$

Posto isso, passamos para a análise de M_4. Temos que:

$$\begin{aligned} M_4 &= -2\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi, \nabla p\rangle p \, dxdt - 2\int_Q s^2\lambda^3\phi^2|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi, \nabla p\rangle p \, dxdt \\ &= -\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi, 2\nabla p p\rangle \, dxdt - \int_Q s^2\lambda^3\phi^2|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi, 2\nabla p p\rangle \, dxdt \end{aligned}$$

e pela Afirmação 3.0.4, segue que:

$$\begin{aligned} M_4 &= -\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi, \nabla p^2\rangle \, dxdt - \int_Q s^2\lambda^3\phi^2|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi, \nabla p^2\rangle \, dxdt \\ &= s^3\lambda^3\left(-\int_Q\langle\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi, \nabla p^2\rangle \, dxdt\right) + s^2\lambda^3\left(-\int_Q\langle\phi^2|\nabla\psi|^2\nabla\psi, \nabla p^2\rangle \, dxdt\right). \end{aligned}$$

Daí, considere:

$$A = -\int_Q\langle\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi, \nabla p^2\rangle \, dxdt$$

e

$$B = -\int_Q\langle\phi^2|\nabla\psi|^2\nabla\psi, \nabla p^2\rangle \, dxdt.$$

Agora, usando (3.63), obtemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\big(p^2\big(\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\big)\big) &= \langle\nabla p^2, \phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\rangle + p^2\mathrm{div}\big(\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\big)\\
&= \langle\nabla p^2, \phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\rangle + p^2\langle\nabla\phi^3, |\nabla\psi|^2\nabla\psi\rangle\\
&\quad + p^2\phi^3\mathrm{div}\big(|\nabla\psi|^2\nabla\psi\big)\\
&= \langle\nabla p^2, \phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\rangle + p^2\langle\nabla\phi^3, |\nabla\psi|^2\nabla\psi\rangle\\
&\quad + p^2\phi^3\langle\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big), \nabla\psi\rangle + p^2\phi^3|\nabla\psi|^2\mathrm{div}\big(\nabla\psi\big)\\
&= \langle\nabla p^2, \phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\rangle + p^2\langle 3\lambda\phi^3\nabla\psi, |\nabla\psi|^2\nabla\psi\rangle\\
&\quad + p^2\phi^3\langle\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big), \nabla\psi\rangle + p^2\phi^3|\nabla\psi|^2\mathrm{div}\big(\nabla\psi\big)\\
&= \langle\nabla p^2, \phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\rangle + 3\lambda\phi^3|\nabla\psi|^2\langle\nabla\psi, \nabla\psi\rangle p^2\\
&\quad + p^2\phi^3\langle\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big), \nabla\psi\rangle + p^2\phi^3|\nabla\psi|^2\mathrm{div}\big(\nabla\psi\big),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathrm{div}\big(p^2\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\big) = \langle\nabla p^2, \phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\rangle + 3\lambda\phi^3|\nabla\psi|^4p^2 + p^2\phi^3F,$$

onde $F = \langle\nabla\big(|\nabla\psi|^2\big), \nabla\psi\rangle + p^2\phi^3|\nabla\psi|^2\Delta\psi$.

Dessa forma, por um lado, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_Q \mathrm{div}\big(p^2\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\big)\,dxdt &= \int_Q\langle\nabla p^2, \phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\rangle\,dxdt + \int_Q 3\lambda\phi^3|\nabla\psi|^4p^2\,dxdt\\
&\quad + \int_Q p^2\phi^3F\,dxdt\\
&= -A + 3\lambda\int_Q\phi^3|\nabla\psi|^4p^2\,dxdt + \int_Q p^2\phi^3F\,dxdt,
\end{aligned}$$

e por outro lado, pelo Teorema da Divergência (Teorema 1.6.2) e sabendo que $p = 0$ sobre Σ, deduzimos que:

$$\int_Q \mathrm{div}\big(p^2\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\big)\,dxdt = \int_\Sigma\langle p^2\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi, \eta\rangle\,d\Sigma = 0,$$

e assim podemos concluir que:

$$A = 3\lambda\int_Q\phi^3|\nabla\psi|^4p^2\,dxdt + \int_Q p^2\phi^3F\,dxdt. \tag{3.64}$$

Também, pelos mesmos argumentos usados para obtermos (3.64), encontramos que:

$$B = 2\lambda \int_Q \phi^2 |\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt + \int_Q p^2\phi^2 F \, dxdt. \tag{3.65}$$

Por conseguinte, de (3.64) e (3.65), segue que:

$$\begin{aligned} M_4 &= s^3\lambda^3 A + s^2\lambda^3 B \\ &= s^3\lambda^3\left(3\lambda \int_Q \phi^3 |\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt + \int_Q p^2\phi^3 F \, dxdt\right) \\ &\quad + s^2\lambda^3\left(2\lambda \int_Q \phi^2 |\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt + \int_Q p^2\phi^2 F \, dxdt\right) \\ &= \int_Q \lambda^4\big(3s^3\phi^3 + 2s^2\phi^2\big)|\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt + \int_Q \big(s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2\big)p^2 F \, dxdt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$M_4 - \int_Q \lambda^4\big(3s^3\phi^3 + 2s^2\phi^2\big)|\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt = \int_Q \big(s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2\big)p^2 F \, dxdt,$$

donde

$$\begin{aligned} \left| M_4 - \int_Q \lambda^4\big(3s^3\phi^3 + 2s^2\phi^2\big)|\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt \right| &= \left| \int_Q \big(s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2\big)p^2 F \, dxdt \right| \\ &\leqslant \int_Q \big(s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2\big)p^2 |F| \, dxdt. \end{aligned}$$

Como $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, com Ω limitado, então existe uma constante $\overline{C_6} = \overline{C_6}(\Omega, \omega) > 0$ tal que

$$|F| \leqslant \overline{C_6},$$

e portanto,

$$\left| M_4 - \int_Q \lambda^4\big(3s^3\phi^3 + 2s^2\phi^2\big)|\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt \right| \leqslant \overline{C_6} \int_Q \big(s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2\big)p^2 \, dxdt,$$

e assim,

$$M_4 - \int_Q \lambda^4\big(3s^3\phi^3 + 2s^2\phi^2\big)|\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt \geqslant -\overline{C_6} \int_Q \big(s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2\big)p^2 \, dxdt,$$

isto é,

$$\begin{aligned} M_4 &\geqslant 3\int_Q s^3\lambda^4\phi^3 |\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt + 2\int_Q s^2\lambda^4\phi^2 |\nabla\psi|^4 p^2 \, dxdt \\ &\quad - \overline{C_6} \int_Q \big(s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2\big)p^2 \, dxdt. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Então, somando

$$M_2 = -2\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4p^2\,dxdt - 2\int_Q s^2\lambda^4\phi^2|\nabla\psi|^4p^2\,dxdt$$

com (3.66), obtemos:

$$\begin{aligned} M_2 + M_4 \;&\geqslant \left(-2\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4p^2\,dxdt - 2\int_Q s^2\lambda^4\phi^2|\nabla\psi|^4p^2\,dxdt\right)\\ &+\left(3\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4p^2\,dxdt + 2\int_Q s^2\lambda^4\phi^2|\nabla\psi|^4p^2\,dxdt\right.\\ &\left.-\overline{C_6}\int_Q \left(s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2\right)p^2\,dxdt\right), \end{aligned}$$

e portanto,

$$M_2 + M_4 \;\geqslant \int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\,dxdt - \overline{C_6}\int_Q \left(s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2\right)|p|^2\,dxdt, \tag{3.67}$$

onde $\overline{C_6} = \overline{C_6}(\Omega,\omega)$.

- **ANÁLISE DE** M_5

Procedendo agora com a análise de M_5. De acordo com a Afirmação 3.0.4, segue que:

$$\begin{aligned} M_5 \;&= 2\int_Q s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt + 2\int_Q s^2\lambda\phi\alpha_t\langle\nabla\psi,\nabla p\rangle p\,dxdt\\ &= 2\int_Q s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt + \int_Q s^2\lambda\langle\phi\alpha_t\nabla\psi, 2\nabla p p\rangle\,dxdt\\ &= 2\int_Q s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt + s^2\lambda\int_Q \langle\phi\alpha_t\nabla\psi,\nabla p^2\rangle\,dxdt. \end{aligned}$$

Considere:

$$D = \int_Q \langle\phi\alpha_t\nabla\psi,\nabla p^2\rangle\,dxdt.$$

Então,

$$M_5 = 2\int_Q s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt + s^2\lambda D. \tag{3.68}$$

Note que:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\big(p^2(\phi\alpha_t\nabla\psi)\big) &= \langle \nabla p^2, \phi\alpha_t\nabla\psi\rangle + p^2\operatorname{div}\big(\phi(\alpha_t\nabla\psi)\big)\\
&= \langle \nabla p^2, \phi\alpha_t\nabla\psi\rangle + p^2\langle\nabla\phi, \alpha_t\nabla\psi\rangle + p^2\phi\operatorname{div}\big(\alpha_t\nabla\psi\big)\\
&= \langle \nabla p^2, \phi\alpha_t\nabla\psi\rangle + p^2\langle\nabla\phi, \alpha_t\nabla\psi\rangle + p^2\phi\langle\nabla\alpha_t, \nabla\psi\rangle\\
&\quad + p^2\phi\alpha_t\operatorname{div}(\nabla\psi)\\
&= \langle \nabla p^2, \phi\alpha_t\nabla\psi\rangle + p^2\langle\nabla\phi, \alpha_t\nabla\psi\rangle + p^2\phi\langle(\nabla\alpha)_t, \nabla\psi\rangle\\
&\quad + p^2\phi\alpha_t\operatorname{div}(\nabla\psi),
\end{aligned}
$$

e como $\nabla\phi = \lambda\phi\nabla\psi$ e $(\nabla\alpha)_t = \lambda\phi_t\nabla\psi$, resulta que:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\big(p^2\phi\alpha_t\nabla\psi\big) &= \langle \nabla p^2, \phi\alpha_t\nabla\psi\rangle + p^2\langle\lambda\phi\nabla\psi, \alpha_t\nabla\psi\rangle + p^2\phi\langle\lambda\phi_t\nabla\psi, \nabla\psi\rangle\\
&\quad + p^2\phi\alpha_t\operatorname{div}(\nabla\psi)\\
&= \langle \nabla p^2, \phi\alpha_t\nabla\psi\rangle + p^2\lambda\phi\alpha_t\langle\nabla\psi, \nabla\psi\rangle + p^2\lambda\phi\phi_t\langle\nabla\psi, \nabla\psi\rangle\\
&\quad + p^2\phi\alpha_t\operatorname{div}(\nabla\psi),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\operatorname{div}\big(p^2\phi\alpha_t\nabla\psi\big) = \langle \nabla p^2, \phi\alpha_t\nabla\psi\rangle + \lambda\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2 + \lambda\phi\phi_t|\nabla\psi|^2p^2 + \phi\alpha_t\Delta\psi p^2.
$$

Daí, por um lado, encontramos que:

$$
\begin{aligned}
\int_Q \operatorname{div}\big(p^2\phi\alpha_t\nabla\psi\big)\,dxdt &= \int_Q \langle \nabla p^2, \phi\alpha_t\nabla\psi\rangle\,dxdt + \int_Q \lambda\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt\\
&\quad + \int_Q \lambda\phi\phi_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt + \int_Q \phi\alpha_t\Delta\psi p^2\,dxdt\\
&= D + \int_Q \lambda\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt + \int_Q \lambda\phi\phi_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt\\
&\quad + \int_Q \phi\alpha_t\Delta\psi p^2\,dxdt,
\end{aligned}
$$

e por outro lado, pelo Teorema da Divergência (Teorema 1.6.2), obtemos que:

$$
\int_Q \operatorname{div}\big(p^2\phi\alpha_t\nabla\psi\big)\,dxdt = \int_\Sigma \langle p^2\phi\alpha_t\nabla\psi, \eta\rangle\,d\Sigma = 0,
$$

e assim concluímos que:

$$D = -\int_Q \lambda\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt - \int_Q \lambda\phi\phi_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt - \int_Q \phi\alpha_t\Delta\psi p^2\,dxdt. \tag{3.69}$$

Substituindo (3.69) em (3.68), obtemos:

$$\begin{aligned} M_5 &= 2\int_Q s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt + s^2\lambda\Big(-\int_Q \lambda\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt \\ &\quad -\int_Q \lambda\phi\phi_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt - \int_Q \phi\alpha_t\Delta\psi p^2\,dxdt\Big), \end{aligned}$$

ou seja,

$$M_5 = \int_Q s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt - \int_Q s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt - \int_Q s^2\lambda\phi\alpha_t\Delta\psi p^2\,dxdt.$$

Assim, de (3.32), (3.33),(3.60) e pela Desigualdade de Minkowski (Teorema 1.2.4), resulta que:

$$\begin{aligned} |M_5| &= \Big|\int_Q s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt - \int_Q s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2p^2\,dxdt \\ &\quad -\int_Q s^2\lambda\phi\alpha_t\Delta\psi p^2\,dxdt\Big| \\ &\leqslant \int_Q s^2\lambda^2\phi|\alpha_t||\nabla\psi|^2|p|^2\,dxdt + \int_Q s^2\lambda^2\phi|\phi_t||\nabla\psi|^2|p|^2\,dxdt \\ &\quad +\int_Q s^2\lambda\phi|\alpha_t||\Delta\psi||p|^2\,dxdt \\ &\leqslant \int_Q s^2\lambda^2\phi\big(C_0\phi^2\overline{C_0}\big)|p|^2\,dxdt + \int_Q s^2\lambda^2\phi\big(C_0\phi^2\overline{C_0}\big)|p|^2\,dxdt \\ &\quad +\int_Q s^2\lambda\phi\big(C_0\phi^2\overline{C_5}\big)|p|^2\,dxdt, \end{aligned}$$

isto é,

$$|M_5| \leqslant 2C_0\overline{C_0}\int_Q s^2\lambda^2\phi^3|p|^2\,dxdt + C_0\overline{C_5}\int_Q s^2\lambda\phi^3|p|^2\,dxdt.$$

Tomando $C_6 = C_6(\Omega,\omega,T,\lambda) = \max\big\{2C_0\overline{C_0}, C_0\overline{C_5}\big\}$ na última expressão, concluímos que:

$$M_5 \geqslant -C_6\int_Q s^2\big(\lambda^2+\lambda\big)\phi^3|p|^2\,dxdt. \tag{3.70}$$

- **Conclusão da Análise dos Termos de X**

Agora, de (3.40), (3.62), (3.67) e (3.70), segue que:

$$\begin{aligned} X \ &\geqslant \frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt - C_5\int_Q s\phi\big(\lambda^4+\lambda^2\big)|p|^2\,dxdt \\ &- C_5\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2\,dxdt + \int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\,dxdt \\ &- \overline{C_6}\int_Q \big(s^3\lambda^3\phi^3+s^2\lambda^3\phi^2\big)|p|^2\,dxdt - C_6\int_Q s^2\big(\lambda^2+\lambda\big)\phi^3|p|^2\,dxdt. \end{aligned}$$

Daí, tomando $C_7 = C_7(\Omega,\omega,T,\lambda) = \max\big\{C_5,\overline{C_6},C_6,C_3\big\}$ na estimativa acima, encontramos que:

$$\begin{aligned} X \ &\geqslant \frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt + \int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\,dxdt \\ &- C_7\int_Q s\phi\big(\lambda^4+\lambda^2\big)|p|^2\,dxdt - C_7\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2\,dxdt \\ &- C_7\int_Q \big(s^3\lambda^3\phi^3+s^2\lambda^3\phi^2\big)|p|^2\,dxdt - C_7\int_Q s^2\big(\lambda^2+\lambda\big)\phi^3|p|^2\,dxdt. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Por outro lado, de (3.39), e como $C_7 = \max\big\{C_5,\overline{C_6},C_6,C_3\big\}$, obtemos:

$$\begin{aligned} X \ &\leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + C_7\bigg(\int_Q \big(s^2\lambda^2\phi^3+s\lambda^2\phi^2+s\phi^3+s^2\lambda^2\phi^2+1\big)|p|^2 dxdt \\ &+ \int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T*\big(e^{-s\alpha}p\big)\big|^2 dxdt\bigg). \end{aligned} \tag{3.72}$$

Portanto, de (3.71) e (3.72), concluímos que:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt + \int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\,dxdt \\ &\quad - C_7\int_Q s\phi\big(\lambda^4+\lambda^2\big)|p|^2\,dxdt - C_7\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2\,dxdt \\ &\quad - C_7\int_Q \big(s^3\lambda^3\phi^3+s^2\lambda^3\phi^2\big)|p|^2\,dxdt - C_7\int_Q s^2\big(\lambda^2+\lambda\big)\phi^3|p|^2\,dxdt \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + C_7\bigg(\int_Q \big(s^2\lambda^2\phi^3+s\lambda^2\phi^2+s\phi^3+s^2\lambda^2\phi^2+1\big)|p|^2 dxdt \\ &\quad + \int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T*\big(e^{-s\alpha}p\big)\big|^2 dxdt\bigg), \end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt + \int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\,dxdt\\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + C_7\int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt + C_7\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2\,dxdt\\
&\quad + C_7\int_Q s\phi\left(\lambda^4+\lambda^2\right)|p|^2\,dxdt + C_7\int_Q s^2\left(\lambda^2+\lambda\right)\phi^3|p|^2\,dxdt\\
&\quad + C_7\int_Q \left(s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2\right)|p|^2\,dxdt\\
&\quad + C_7\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3 + s^2\lambda^2\phi^2 + 1\right)|p|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Agora, pela definição da função ϕ, temos que:

$$
\phi = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\beta(t)} \geqslant \frac{1}{\beta(t)} \geqslant \frac{1}{T^2},
$$

isto é, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$
\begin{cases}
k \leqslant \phi;\\
\\
k \leqslant \phi^2.
\end{cases}
\tag{3.73}
$$

Dessa forma, para $s \geqslant \lambda \geqslant 1$, de (3.73), podemos deduzir que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt + \int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\,dxdt \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + C_7\int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T * \big(e^{-s\alpha}p\big)\big|^2 dxdt + C_7\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2\,dxdt \\
&\quad + \frac{C_7}{k}\int_Q ks\phi\big(\lambda^4+\lambda^4\big)|p|^2\,dxdt + C_7\int_Q s^2\big(\lambda^4+\lambda^4\big)\phi^3|p|^2\,dxdt \\
&\quad + C_7\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\,dxdt + \frac{C_7}{k}\int_Q ks^2\lambda^3\phi^2|p|^2\,dxdt + C_7\int_Q s^2\lambda^2\phi^3|p|^2\,dxdt \\
&\quad + \frac{C_7}{k}\int_Q ks\lambda^2\phi^2|p|^2\,dxdt + C_7\int_Q s\phi^3|p|^2\,dxdt + \frac{C_7}{k}\int_Q ks^2\lambda^2\phi^2|p|^2\,dxdt \\
&\quad + \frac{C_7}{k^3}\int_Q k^3|p|^2\,dxdt \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + C_7\int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T * \big(e^{-s\alpha}p\big)\big|^2 dxdt + C_7\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2\,dxdt \\
&\quad + \frac{2C_7}{k}\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2\,dxdt + 2C_7\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2\,dxdt \\
&\quad + C_7\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\,dxdt + \frac{C_7}{k}\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2\,dxdt + C_7\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2\,dxdt \\
&\quad + \frac{C_7}{k}\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2\,dxdt + C_7\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\,dxdt + \frac{C_7}{k}\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2\,dxdt \\
&\quad + \frac{C_7}{k^3}\int_Q \phi^3|p|^2\,dxdt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt + \int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\,dxdt \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + C_7\int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T * \big(e^{-s\alpha}p\big)\big|^2 dxdt + C_7\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2\,dxdt \\
&\quad + \left(\frac{5C_7}{k} + 3C_7\right)\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2\,dxdt + 2C_7\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\,dxdt + \frac{C_7}{k^3}\int_Q \phi^3|p|^2\,dxdt.
\end{aligned}$$

Tomando $C_8 = C_8(\Omega,\omega,T,\lambda) = \max\left\{\frac{1}{2}, C_7, \frac{5C_7}{k} + 3C_7, 2C_7, \frac{C_7}{k^3}\right\}$ na desigualdade acima, encontramos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\,dxdt + \int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\,dxdt \\
&\leqslant C_8\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T * \big(e^{-s\alpha}p\big)\big|^2 dxdt \\
&\quad + \int_Q \Big(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + \big(s^2\lambda^4\phi^3 + s^3\lambda^3\phi^3 + \phi^3\big)|p|^2\Big)\,dxdt\bigg).
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Agora, como ψ satisfaz $|\nabla\psi| > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega} \setminus \omega_0$ e $\psi = 0$ sobre Γ, então $|\nabla\psi|$ possui limite inferior em $\Omega \setminus \omega_0$, e assim em $Q \setminus Q_{\omega_0}$. Portanto, existe uma constante $\gamma > 0$ tal que

$$0 < \gamma \leqslant |\nabla\psi| \text{ em } Q \setminus Q_{\omega_0}. \tag{3.75}$$

Tomando $C_9 = \min\left\{\gamma^2, \gamma^4\right\}$, então temos que:

$$\begin{cases} C_9 \leqslant |\nabla\psi|^2; \\ \\ C_9 \leqslant |\nabla\psi|^4, \end{cases}$$

e portanto, obtemos que:

$$\begin{aligned}
&C_9 \int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant \int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} s\lambda^2\phi\gamma^2|\nabla p|^2\, dxdt + \int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} s^3\lambda^4\phi^3\gamma^4|p|^2\, dxdt \\
&\leqslant \int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\, dxdt + \int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\, dxdt \\
&\leqslant \int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\, dxdt + 2\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\, dxdt \\
&\leqslant 2\left(\frac{1}{2}\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\, dxdt + \int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\, dxdt\right) \\
&\leqslant 2\left(\frac{1}{2}\int_{Q} s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\, dxdt + \int_{Q} s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2\, dxdt\right),
\end{aligned}$$

e de (3.74) resulta que:

$$\begin{aligned}
&C_9 \int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant 2C_8\left(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt\right. \\
&\quad \left. + \int_Q \left(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + \left(s^2\lambda^4\phi^3 + s^3\lambda^3\phi^3 + \phi^3\right)|p|^2\right) dxdt\right).
\end{aligned}$$

Daí, tomando $\widehat{C_1} = \dfrac{2C_8}{C_9}$, $s \geqslant \lambda$, como $\lambda \geqslant \max\left\{2C_{10}, \lambda_0\right\} \geqslant 1$, onde λ_0 é suficientemente grande e $C_{10} = \max\left\{\widehat{C_1}, 3\widehat{C_1}\right\}$, segue que $s^2\lambda^4 \leqslant s^3\lambda^3, 1 \leqslant s^3\lambda^3$ e assim:

$$\begin{aligned}
&\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant \widehat{C_1}\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt \\
&\quad + \int_Q \left(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + \left(s^2\lambda^4\phi^3 + s^3\lambda^3\phi^3 + \phi^3\right)|p|^2\right) dxdt\Bigg) \\
&\leqslant \widehat{C_1}\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt \\
&\quad + \int_Q \left(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + \left(s^3\lambda^3\phi^3 + s^3\lambda^3\phi^3 + s^3\lambda^3\phi^3\right)|p|^2\right) dxdt\Bigg) \\
&= \widehat{C_1}\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt \\
&\quad + \int_Q \left(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + 3s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\right) dxdt\Bigg) \\
&\leqslant C_{10}\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt \\
&\quad + \int_Q \left(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\right) dxdt\Bigg),
\end{aligned}$$

visto que $C_{10} = \max\left\{\widehat{C_1}, 3\widehat{C_1}\right\}$. Como

$$\begin{aligned}
\int_Q \left(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\right) dxdt &= \int_{Q_{\omega_0}} \left(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\right) dxdt \\
&\quad + \int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} \left(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\right) dxdt,
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
&\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant C_{10}\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt \\
&\quad + \int_{Q_{\omega_0}} \left(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\right) dxdt\Bigg) \\
&\quad + C_{10}\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} \left(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\right) dxdt.
\end{aligned}$$

Note que, como $1 \leqslant \max\left\{2C_{10}, \lambda_0\right\} \leqslant \lambda$, segue que:

$$\begin{aligned}
&2C_{10}\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} \left(s\lambda\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant \int_{Q\setminus Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt,
\end{aligned}$$

implicando em

$$
\begin{aligned}
&C_{10}\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}}\left(s\lambda\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\right)dxdt\\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}}\left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right)dxdt,
\end{aligned}
$$

e portanto concluímos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}}\left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right)dxdt\\
&\leqslant C_{10}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2dxdt+\int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T*\left(e^{-s\alpha}p\right)\big|^2dxdt\\
&\quad+\int_{Q_{\omega_0}}\left(s\lambda\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\right)dxdt\bigg)\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}}\left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right)dxdt,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}}\left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right)dxdt\\
&\leqslant C_{10}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2dxdt+\int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T*\left(e^{-s\alpha}p\right)\big|^2dxdt\\
&\quad+\int_{Q_{\omega_0}}\left(s\lambda\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^3\phi^3|p|^2\right)dxdt\bigg).
\end{aligned}
$$

Por conseguinte, como $\lambda\geqslant\max\left\{2C_{10},\lambda_0\right\}\geqslant 1$, então $\lambda\leqslant\dfrac{\lambda^2}{2C_{10}}$, $\lambda^3\leqslant\dfrac{\lambda^4}{2C_{10}}$ e assim:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}}\left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right)dxdt\\
&\leqslant C_{10}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2dxdt+\int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T*\left(e^{-s\alpha}p\right)\big|^2dxdt\\
&\quad+\int_{Q_{\omega_0}}\left(s\frac{\lambda^2}{2C_{10}}\phi|\nabla p|^2+s^3\frac{\lambda^4}{2C_{10}}\phi^3|p|^2\right)dxdt\bigg)\\
&\leqslant C_{10}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2dxdt+\int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T*\left(e^{-s\alpha}p\right)\big|^2dxdt\bigg)\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{Q_{\omega_0}}\left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right)dxdt,
\end{aligned}
$$

e daí, como

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{Q\setminus Q_{\omega_0}}\left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right)dxdt &=\frac{1}{2}\int_Q\left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right)dxdt\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_{Q_{\omega_0}}\left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2+s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right)dxdt,
\end{aligned}
$$

segue que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_Q \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt - \frac{1}{2}\int_{Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant C_{10}\left(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt,
\end{aligned}
$$

implicando em

$$
\begin{aligned}
&\int_Q \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt - \int_{Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant 2C_{10}\left(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt\right) \\
&\quad + \int_{Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&\int_Q \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant 2C_{10}\left(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt\right) \\
&\quad + 2\int_{Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt.
\end{aligned}
$$

Portanto, tomando $C_{11} = C_{11}(\Omega, \omega, T, \lambda) = \max\left\{2C_{10}, 2\right\}$ na última expressão, obtemos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_Q \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant C_{11}\left(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt\right. \\
&\quad \left. + \int_{Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt\right).
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

3.0.3 Etapa 3: Retorno às Variáveis Originais

Como $p = e^{s\alpha}w$, então:

$$
p_{x_i} = s\alpha_{x_i}\left(e^{s\alpha}w\right) + e^{s\alpha}w_{x_i} = s\alpha_{x_i}p + e^{s\alpha}w_{x_i}, \tag{3.77}
$$

e assim,

$$
\nabla p = s\nabla\alpha p + e^{s\alpha}\nabla w,
$$

e daí, segue que:

$$|\nabla p|^2 = |s\nabla \alpha p + e^{s\alpha}\nabla w|^2 = s^2|\nabla\alpha|^2|p|^2 + 2e^{s\alpha}s\langle\nabla\alpha, \nabla w\rangle p + e^{2s\alpha}|\nabla w|^2,$$

ou seja,

$$|\nabla p|^2 = s^2|\nabla\alpha|^2|p|^2 + e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 + 2e^{s\alpha}s\langle\nabla\alpha, \nabla w\rangle p. \tag{3.78}$$

Por outro lado, de (3.77), também temos que:

$$|\nabla p| = e^{s\alpha}s\nabla\alpha w + e^{s\alpha}\nabla w,$$

e dessa forma, como

$$|\nabla\alpha|^2 = |\lambda\phi\nabla\psi|^2 = \lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2, \tag{3.79}$$

então, de (3.33) e pela Desigualdade de Young (Teorema 1.2.1), obtemos que:

$$\begin{aligned}
|\nabla p|^2 &= |e^{s\alpha}s\nabla\alpha w + e^{s\alpha}\nabla w|^2 \\
&\leqslant 2e^{2s\alpha}s^2|\nabla\alpha|^2|w|^2 + 2e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \\
&= 2e^{2s\alpha}s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2|w|^2 + 2e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \\
&\leqslant 2\overline{C_0}e^{2s\alpha}s^2\lambda^2\phi^2|w|^2 + 2e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \\
&\leqslant C_{12}e^{2s\alpha}\big(s^2\lambda^2\phi^2|w|^2 + |\nabla w|^2\big),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\nabla p|^2 \leqslant C_{12}e^{2s\alpha}\big(s^2\lambda^2\phi^2|w|^2 + |\nabla w|^2\big), \tag{3.80}$$

onde $C_{12} = \max\left\{2\overline{C_0}, 2\right\}$.

Substituindo (3.78) no primeiro membro de (3.76) e (3.80) no segundo membro de

(3.76), e sabendo que $|p|^2 = e^{2s\alpha}|w|^2$ e $e^{-s\alpha}p = w$, segue que:

$$
\begin{aligned}
&\int_Q \Big(s\lambda^2\phi\big(s^2|\nabla\alpha|^2|p|^2 + e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 + 2e^{s\alpha}s\langle\nabla\alpha, \nabla w\rangle p\big) + e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\Big)\,dxdt \\
&\leqslant C_{11}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T * w\big|^2 dxdt \\
&\quad + \int_{Q_{\omega_0}} \Big(s\lambda^2\phi\big(C_{12}e^{2s\alpha}\big(s^2\lambda^2\phi^2|w|^2 + |\nabla w|^2\big)\big) + e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\Big)\,dxdt\bigg) \\
&= C_{11}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T * w\big|^2 dxdt \\
&\quad + C_{12}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt + C_{12}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi||\nabla w|^2\,dxdt \\
&\quad + \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\bigg) \\
&= C_{11}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T * w\big|^2 dxdt \\
&\quad + \big(C_{12}+1\big)\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt + C_{12}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi||\nabla w|^2\,dxdt\bigg),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\int_Q \Big(s\lambda^2\phi\big(s^2|\nabla\alpha|^2|p|^2 + e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 + 2e^{s\alpha}s\langle\nabla\alpha, \nabla w\rangle p\big) + e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\Big)\,dxdt \\
&\leqslant C_{13}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T * w\big|^2 dxdt \\
&\quad + \int_{Q_{\omega_0}} \Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi||\nabla w|^2\Big)\,dxdt\bigg),
\end{aligned} \tag{3.81}
$$

onde $C_{13} = \max\big\{C_{11}, C_{11}\big(C_{12}+1\big), C_{11}C_{12}\big\}$.

Reescrevendo a equação (3.81) de uma forma conveniente, encontramos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt + \int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\,dxdt \\
&+2\int_Q e^{s\alpha}s^2\lambda^2\phi\langle\nabla\alpha, \nabla w\rangle p\,dxdt \leqslant N_3,
\end{aligned} \tag{3.82}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
N_3 \;&= C_{13}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T * w\big|^2 dxdt \\
&\quad + \int_{Q_{\omega_0}} \Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi||\nabla w|^2\Big)\,dxdt\bigg).
\end{aligned} \tag{3.83}
$$

Agora, usando as Desigualdades de Minkowski (Teorema 1.2.4), Cauchy-Schwarz (Teorema 1.1.1) e de Young (Teorema 1.2.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_Q e^{s\alpha}s^2\lambda^2\phi\langle\nabla\alpha,\nabla w\rangle p\,dxdt\right|\\
&\leqslant 2\int_Q e^{s\alpha}s^2\lambda^2\phi|\nabla\alpha||\nabla w||p|\,dxdt\\
&=\int_Q 2s\lambda^2\phi\left(\sqrt{2}s|\nabla\alpha||p|\right)\left(\frac{e^{s\alpha}|\nabla w|}{\sqrt{2}}\right)dxdt\\
&\leqslant \int_Q 2s\lambda^2\phi\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}s|\nabla\alpha||p|\right)^2 dxdt+\int_Q 2s\lambda^2\phi\frac{1}{2}\left(\frac{e^{s\alpha}|\nabla w|}{\sqrt{2}}\right)^2 dxdt\\
&=2\int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&2\int_Q e^{s\alpha}s^2\lambda^2\phi\langle\nabla\alpha,\nabla w\rangle p\,dxdt\\
&\geqslant -2\int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\,dxdt-\frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt\\
&=-\int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\,dxdt-\int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\,dxdt-\frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&-\int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\,dxdt-\frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt\\
&\leqslant \int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\,dxdt+2\int_Q e^{s\alpha}s^2\lambda^2\phi\langle\nabla\alpha,\nabla w\rangle p\,dxdt.
\end{aligned}\tag{3.84}$$

De (3.84) e (3.82), segue que:

$$
\begin{aligned}
&\int_Q \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt \\
&= \int_Q e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\, dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\, dxdt \\
&\quad + \left(-\int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\, dxdt - \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\, dxdt \right) \\
&\quad + \int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\, dxdt \\
&\leqslant \left(\left(\int_Q e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\, dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\, dxdt \right.\right. \\
&\quad \left. + \int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\, dxdt + 2\int_Q e^{s\alpha}s^2\lambda^2\phi\langle\nabla\alpha, \nabla w\rangle p\, dxdt \right) \\
&\quad + \int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\, dxdt \\
&\leqslant N_3 + \int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\, dxdt,
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
&\int_Q \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt \\
&\leqslant N_3 + \int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\, dxdt,
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\int_Q \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + \frac{1}{2}e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt \quad \leqslant N_3 + \int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\, dxdt. \tag{3.85}
$$

Observe que, substituindo (3.80) no segundo membro de (3.76) e sabendo que $|p|^2 = e^{2s\alpha}|w|^2$ e $e^{-s\alpha}p = w$, de maneira análoga como feito para obtermos (3.81), concluímos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\, dxdt \\
&\leqslant \int_Q \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant C_{11}\left(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * \left(e^{-s\alpha}p\right)\right|^2 dxdt \right. \\
&\quad \left. + \int_{Q_{\omega_0}} \left(s\lambda^2\phi|\nabla p|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\right) dxdt \right),
\end{aligned}
$$

implicando em

$$
\begin{aligned}
&\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\,dxdt\\
&\leqslant C_{13}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt+\int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T * w\big|^2 dxdt\\
&\quad+\int_{Q_{\omega_0}}\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2+e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi||\nabla w|^2\Big)\,dxdt\bigg)\\
&=N_3,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\,dxdt\leqslant N_3. \tag{3.86}
$$

Assim, de (3.79) e (3.33), segue que

$$
|\nabla\alpha|^2\leqslant\lambda^2\phi^2\overline{C_0},
$$

desse modo,

$$
\int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\,dxdt\leqslant\overline{C_0}\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|p|^2\,dxdt
$$

e de (3.86) deduzimos que:

$$
\int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\,dxdt\quad\leqslant\overline{C_0}N_3. \tag{3.87}
$$

Por conseguinte, substituindo (3.87) em (3.85), obtemos:

$$
\int_Q\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2+\frac{1}{2}e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\leqslant\big(1+\overline{C_0}\big)N_3,
$$

assim,

$$
\begin{aligned}
&\int_Q\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2+e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\\
&\leqslant\int_Q\Big(2e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2+e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\\
&=2\int_Q\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2+\frac{1}{2}e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\\
&\leqslant 2\big(1+\overline{C_0}\big)N_3.
\end{aligned}
$$

Portanto, de (3.83) e tomando $\widehat{C_2} = \widehat{C_2}(\Omega, \omega, T, \lambda) = 2\big(1 + \overline{C_0}\big)C_{13}$, concluímos que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q \Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt \\
&\leqslant \widehat{C_2}\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\big|H_t^T * w\big|^2 dxdt \\
&\quad + \int_{Q_{\omega_0}} \Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\Bigg).
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Para estimarmos a integral de memória do lado direita da equação (3.88), precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.0.2. ***(Termo de Memória)*** *Suponhamos que a função núcleo de memória* $h : (0,T) \times (0,T) \to \mathbb{R}$, *suficientemente suave, satisfaz*

$$h(t,\tau) = 0\big|_{\tau=0,T}.$$

Então, existe uma constante $\widetilde{C_0} > 0$ *tal que*

$$\int_Q e^{2s\alpha}|H_t^T * w|^2\,dxdt \leqslant \widetilde{C_0}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt,$$

onde $H_t^T * w = \displaystyle\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau.$

Demonstração: Considere $\widetilde{\alpha}(\tau) = \inf\limits_{x\in\Omega} \alpha(\tau,x)$. Pela Desigualdade de Hölder (Teorema 1.2.3), encontramos que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}|H_t^T * w|^2\,dxdt \\
&= \int_Q e^{2s\alpha}\left|\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau\right|^2 dxdt \\
&= \int_Q e^{2s\alpha}\left|\int_t^T \Big(e^{-s\alpha(\tau,x)}h(\tau,t)\Big)\Big(e^{s\alpha(\tau,x)}w(\tau,x)\Big)\,d\tau\right|^2 dxdt \\
&\leqslant \int_Q e^{2s\alpha}\left[\left(\int_t^T e^{-2s\alpha(\tau,x)}|h(\tau,t)|^2\,d\tau\right)\left(\int_t^T e^{2s\alpha(\tau,x)}|w(\tau,x)|^2\,d\tau\right)\right] dxdt \\
&\leqslant \int_Q e^{2s\alpha}\left[\left(\int_t^T e^{-2s\widetilde{\alpha}(\tau)}|h(\tau,t)|^2\,d\tau\right)\left(\int_t^T e^{2s\widetilde{\alpha}(\tau)}|w(\tau,x)|^2\,d\tau\right)\right] dxdt.
\end{aligned}$$

Agora, como h é suficientemente suave e satisfaz

$$h(t,\tau) = 0\big|_{\tau=0,T},$$

então podemos assumir que existe uma constante $\overline{C_8} > 0$ tal que

$$\int_t^T e^{-2s\widetilde{\alpha}(\tau)}|h(\tau,t)|^2\,d\tau \leqslant \overline{C_8}.$$

Daí, segue que:

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2s\alpha}|H_t^T * w|^2\,dxdt &\leqslant \overline{C_8}\int_Q e^{2s\alpha}\left(\int_t^T e^{2s\widetilde{\alpha}(\tau)}|w(\tau,x)|^2\,d\tau\right)dxdt\\ &\leqslant \overline{C_8}\int_Q e^{2s\alpha}\left(\int_0^T e^{2s\widetilde{\alpha}(\tau)}|w(\tau,x)|^2\,d\tau\right)dxdt\\ &\leqslant \overline{C_8}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|w(\tau,x)|^2\,dxdt\right)\left(\int_0^T e^{2s\widetilde{\alpha}(\tau)}\,d\tau\right).\end{aligned}$$

Finalmente, sabendo pela definição de ϕ que existe uma constante $\overline{C_9} > 0$ tal que $1 \leqslant \overline{C_9}\phi^3$ e considerando $s \geqslant 1$, então tomando

$$\widetilde{C_0} = \overline{C_8 C_9}\left(\int_0^T e^{2s\widetilde{\alpha}(\tau)}\,d\tau\right),$$

concluímos que:

$$\int_Q e^{2s\alpha}|H_t^T * w|^2\,dxdt \leqslant \widetilde{C_0}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt.$$

■

Por conseguinte, pelo Lema 3.0.2 e considerando $2\widetilde{C_0} \leqslant \lambda^4$, então $1 \leqslant \dfrac{\lambda^4}{2\widetilde{C_0}}$ e assim,

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2s\alpha}|H_t^T * w|^2\,dxdt &\leqslant \widetilde{C_0}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_Q e^{2s\alpha}|H_t^T * w|^2\,dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt. \tag{3.89}$$

De (3.88) e (3.89), deduzimos que:

$$\begin{aligned}&\int_Q \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right)dxdt\\ &\leqslant \widehat{C_2}\left(\int_Q e^{2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\right.\\ &\qquad\left. + \int_{Q_{\omega_0}}\left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right)dxdt\right),\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left(\frac{1}{2}e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt \\
&\leqslant \widehat{C_2}\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt\Bigg).
\end{aligned}$$

Finalmente, temos que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt \\
&\leqslant \int_Q \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + 2e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt \\
&= 2\int_Q \left(\frac{1}{2}e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt \\
&\leqslant 2\widehat{C_2}\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt\Bigg).
\end{aligned}$$

Portanto, tomando $\overline{C_{10}} = \overline{C_{10}}(\Omega, \omega, T, \lambda) = 2\widehat{C_2}$, concluímos que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt \\
&\leqslant \overline{C_{10}}\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt\Bigg).
\end{aligned} \tag{3.90}$$

3.0.4 Etapa 4: Conclusão do Teorema

Considere a equação em (2.15):

$$w_t + \Delta w - H_t^T * w = f_1 + a(t,x)w,$$

onde $H_t^T * w = \displaystyle\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau$. Elevando ao quadrado em ambos os membros dessa última expressão, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\big(w_t + \Delta w - H_t^T * w\big)^2 \\
&= \big(w_t + \Delta w\big)^2 - 2\big(w_t + \Delta w\big)\big(H_t^T * w\big) + \big|H_t^T * w\big|^2 \\
&= |w_t|^2 + 2w_t\Delta w + |\Delta w|^2 - 2\big(w_t + \Delta w\big)\big(H_t^T * w\big) + \big|H_t^T * w\big|^2,
\end{aligned}$$

e

$$\big(f_1 + a(t,x)w\big)^2 = |f_1|^2 + 2f_1 a(t,x)w + |a(t,x)|^2|w|^2.$$

Assim, segue que:

$$
\begin{aligned}
&|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + \left|H_t^T * w\right|^2 \\
&= |f_1|^2 + |a(t,x)|^2|w|^2 + 2f_1 a(t,x)w - 2w_t\Delta w + 2\big(w_t + \Delta w\big)\big(H_t^T * w\big),
\end{aligned}
$$

e multiplicando ambos os membros dessa última expressão por $(s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}$ e integrando em Q, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + \left|H_t^T * w\right|^2\Big)\,dxdt \\
&= \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|f_1|^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|a(t,x)|^2|w|^2\,dxdt \\
&\quad + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}f_1 a(t,x)w\,dxdt - 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t\Delta w\,dxdt \\
&\quad + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Delta w\big(H_t^T * w\big)\,dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t\big(H_t^T * w\big)\,dxdt.
\end{aligned} \tag{3.91}
$$

Dessa forma, temos que:

$$
\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + \left|H_t^T * w\right|^2\Big)\,dxdt = J_1 + J_2 + J_3 - J_4 + J_5 + J_6, \tag{3.92}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|f_1|^2\,dxdt; \\
J_2 &= \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|a(t,x)|^2|w|^2\,dxdt; \\
J_3 &= 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}f_1 a(t,x)w\,dxdt; \\
J_4 &= 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t\Delta w\,dxdt; \\
J_5 &= 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Delta w\big(H_t^T * w\big)\,dxdt; \\
J_6 &= 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t\big(H_t^T * w\big)\,dxdt.
\end{aligned}
$$

Vamos analisar cada termo J_i, para $i = 1, ..., 6$.

- **Análise dos Termos de** (3.91)

Observe inicialmente que, como

$$
\phi(t,x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\beta(t)} \geqslant \frac{4}{T^2},
$$

então considerando $s \geqslant T^2$, segue que $s\phi \geqslant 1$ e assim,

$$(s\phi)^{-1} \leqslant 1 \quad \text{e} \quad (s\phi)^{-1} \leqslant s^3\phi^3. \tag{3.93}$$

De (3.93), obtemos que:

$$|J_1| = \left| \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|f_1|^2 \, dxdt \right| \leqslant \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 \, dxdt,$$

ou seja,

$$J_1 \leqslant \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 \, dxdt. \tag{3.94}$$

Agora, de (3.93) e (2.6), encontramos que:

$$|J_2| = \left| \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|a(t,x)|^2|w|^2 \, dxdt \right| \leqslant M^2 \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2 \, dxdt,$$

e assim,

$$J_2 \leqslant M^2 \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2 \, dxdt. \tag{3.95}$$

Também, de (3.93), (2.6) e usando as Desigualdades de Minkowski (Teorema 1.2.4) e de Young (Teorema 1.2.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
|J_3| &= \left| 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}f_1 a(t,x)w \, dxdt \right| \\
&\leqslant 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big(|f_1|\big)\big(|a(t,x)||w|\big) \, dxdt \\
&\leqslant 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\frac{1}{2}\big(|f_1|\big)^2 \, dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\frac{1}{2}\big(|a(t,x)||w|\big)^2 \, dxdt \\
&\leqslant \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 \, dxdt + M^2\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2 \, dxdt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$J_3 \leqslant \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 \, dxdt + M^2\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2 \, dxdt. \tag{3.96}$$

Além disso, note que, como

$$\big(e^{2s\alpha}\big)_{x_i} = 2s\alpha_{x_i}e^{2s\alpha} = 2s\big(\lambda\phi\psi_{x_i}\big)e^{2s\alpha}$$

e

$$\big(\phi^{-1}\big)_{x_i} = -\phi^{-2}\phi_{x_i} = -\phi^{-2}\lambda\phi\psi_{x_i},$$

então

$$\begin{cases} \nabla e^{2s\alpha} &= 2e^{2s\alpha}s\lambda\phi\nabla\psi; \\ \\ \nabla\phi^{-1} &= -\phi^{-2}\lambda\phi\nabla\psi. \end{cases} \tag{3.97}$$

Ademais, como

$$\alpha(t,x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)} < 0,$$

com $\beta(t) = t(T-t)$, então

$$\alpha(0) = \alpha(T) \to -\infty$$

e portanto,

$$e^{2s\alpha(0)} = e^{2s\alpha(T)} \to 0. \tag{3.98}$$

Posto isso, pela Fórmula de Green (Teorema 1.6.4) e sabendo que $w_t = 0$ sobre Σ, segue que:

$$\begin{aligned} J_4 &= 2\int_Q \big(e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t\big)\Delta w \, dxdt \\ &= -2\int_Q \big\langle \nabla\big(e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t\big), \nabla w\big\rangle \, dxdt + 2\int_\Sigma e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t w_\eta \, d\Sigma \\ &= -2\int_Q \big\langle \nabla\big(e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t\big), \nabla w\big\rangle \, dxdt. \end{aligned}$$

De (3.97), como

$$\begin{aligned} &\nabla\big(\big(e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big)w_t\big) \\ &= \nabla\big(e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big)w_t + e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\nabla w_t \\ &= \big(\nabla e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1} + e^{2s\alpha}\nabla(s\phi)^{-1}\big)w_t + e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\nabla w_t \\ &= \nabla e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t + s^{-1}e^{2s\alpha}\nabla\phi^{-1}w_t + e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\nabla w_t \\ &= \big(2e^{2s\alpha}s\lambda\phi\nabla\psi\big)(s\phi)^{-1}w_t + s^{-1}e^{2s\alpha}\big(-\phi^{-2}\lambda\phi\nabla\psi\big)w_t + e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\nabla w_t \\ &= 2e^{2s\alpha}\lambda w_t\nabla\psi - e^{2s\alpha}\big(s\phi\big)^{-1}\lambda w_t\nabla\psi + e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\nabla w_t \end{aligned}$$

e

$$\big\langle \nabla w_t, \nabla w\big\rangle = \frac{1}{2}\Big(|\nabla w|^2\Big)_t,$$

podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
J_4 &= -2\int_Q \left\langle \left(2e^{2s\alpha}\lambda w_t \nabla\psi - e^{2s\alpha}\left(s\phi\right)^{-1}\lambda w_t\nabla\psi + e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\nabla w_t\right), \nabla w\right\rangle \,dxdt \\
&= -4\int_Q e^{2s\alpha}\lambda w_t\left\langle\nabla\psi, \nabla w\right\rangle \,dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}\left(s\phi\right)^{-1}\lambda w_t\left\langle\nabla\psi,\nabla w\right\rangle \,dxdt \\
&\quad -2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left\langle\nabla w_t, \nabla w\right\rangle \,dxdt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
J_4 &= -4\int_Q e^{2s\alpha}\lambda w_t\left\langle\nabla\psi, \nabla w\right\rangle \,dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}\left(s\phi\right)^{-1}\lambda w_t\left\langle\nabla\psi,\nabla w\right\rangle \,dxdt \\
&\quad -\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left(|\nabla w|^2\right)_t \,dxdt.
\end{aligned}$$

Usando integração por partes nesta última integral e sabendo de (3.98), resulta que:

$$\begin{aligned}
&-\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left(|\nabla w|^2\right)_t \,dxdt \\
&= -\int_\Omega \left[\int_0^T e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left(|\nabla w|^2\right)_t \,dt\right] dx \\
&= -\int_\Omega \left[\left(e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|\nabla w|^2\right)\Big|_0^T - \int_0^T \left(e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\right)_t|\nabla w|^2 \,dt\right] dx \\
&= -\int_\Omega \Bigg[\left(e^{2s\alpha(T)}(s\phi)^{-1}|\nabla w|^2\right) - \left(e^{2s\alpha(0)}(s\phi)^{-1}|\nabla w|^2\right) \\
&\quad - \int_0^T \left(e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\right)_t|\nabla w|^2 \,dt\Bigg] dx \\
&= \int_Q \left(e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\right)_t|\nabla w|^2 \,dxdt,
\end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}
\left(e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\right)_t &= 2s\alpha_t e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1} - e^{2s\alpha}s^{-1}\phi^{-2}\phi_t \\
&= 2e^{2s\alpha}\phi^{-1}\alpha_t - e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}\phi_t,
\end{aligned}$$

segue que:

$$\begin{aligned}
J_4 &= -4\int_Q e^{2s\alpha}\lambda w_t\left\langle\nabla\psi, \nabla w\right\rangle \,dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}\left(s\phi\right)^{-1}\lambda w_t\left\langle\nabla\psi,\nabla w\right\rangle \,dxdt \\
&\quad +2\int_Q e^{2s\alpha}\phi^{-1}\alpha_t|\nabla w|^2 \,dxdt - \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}\phi_t|\nabla w|^2 \,dxdt.
\end{aligned}$$

Desse modo, de (3.32) e usando as Desigualdades de Minkowski e de Cauchy-Schwarz

(Teorema 1.1.1), obtemos:

$$
\begin{aligned}
|J_4| &= \bigg| -4\int_Q e^{2s\alpha}\lambda w_t\langle\nabla\psi,\nabla w\rangle\,dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\lambda w_t\langle\nabla\psi,\nabla w\rangle\,dxdt \\
&\quad + 2\int_Q e^{2s\alpha}\phi^{-1}\alpha_t|\nabla w|^2\,dxdt - \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}\phi_t|\nabla w|^2\,dxdt\bigg| \\
&\leqslant 4\int_Q e^{2s\alpha}\lambda|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\,dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\lambda|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\,dxdt \\
&\quad + 2\int_Q e^{2s\alpha}\phi^{-1}|\alpha_t||\nabla w|^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}|\phi_t||\nabla w|^2\,dxdt \\
&\leqslant 4\int_Q e^{2s\alpha}\lambda|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\,dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\lambda|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\,dxdt \\
&\quad + 2\int_Q e^{2s\alpha}\phi^{-1}C_0\phi^2|\nabla w|^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}C_0\phi^2|\nabla w|^2\,dxdt,
\end{aligned}
$$

e usando (3.93), segue que:

$$
\begin{aligned}
|J_4| &\leqslant 4\int_Q e^{2s\alpha}\lambda|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\,dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}\lambda|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\,dxdt \\
&\quad + 2C_0\int_Q e^{2s\alpha}\phi|\nabla w|^2\,dxdt + C_0\int_Q e^{2s\alpha}\phi|\nabla w|^2\,dxdt,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
|J_4| \leqslant 6\int_Q e^{2s\alpha}\lambda|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\,dxdt + 3C_0\int_Q e^{2s\alpha}\phi|\nabla w|^2\,dxdt.
$$

Tomando $C_{14} = \max\{6, 3C_0\}$ na expressão acima, concluímos que:

$$
|J_4| \leqslant C_{14}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\lambda|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\phi|\nabla w|^2\,dxdt\bigg).
$$

Agora, usando a Desigualdade de Young, encontramos que:

$$
\begin{aligned}
|J_4| &\leqslant C_{14}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\lambda|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\phi|\nabla w|^2\,dxdt\bigg) \\
&= \int_Q e^{2s\alpha}\Big(C_{14}\sqrt{2s\phi}\lambda|\nabla\psi||\nabla w|\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{2s\phi}}|w_t|\Big)\,dxdt + C_{14}\int_Q e^{2s\alpha}\phi|\nabla w|^2\,dxdt \\
&\leqslant \int_Q e^{2s\alpha}\Big(C_{14}\sqrt{2s\phi}\lambda|\nabla\psi||\nabla w|\Big)^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\Big(\frac{1}{\sqrt{2s\phi}}|w_t|\Big)^2\,dxdt \\
&\quad + C_{14}\int_Q e^{2s\alpha}\phi|\nabla w|^2\,dxdt \\
&= 2C_{14}^2\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla w|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|w_t|^2\,dxdt \\
&\quad + C_{14}\int_Q e^{2s\alpha}\phi|\nabla w|^2\,dxdt,
\end{aligned}
$$

e considerando $1 \leqslant s\lambda^2$, e sabendo de (3.33), segue que:

$$\begin{aligned}
|J_4| &\leqslant 2C_{14}^2\overline{C_0}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|w_t|^2\,dxdt \\
&\quad + C_{14}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt \\
&= \left(2C_{14}^2\overline{C_0} + C_{14}\right)\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|w_t|^2\,dxdt.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando $\widehat{C_3} = 2C_{14}^2\overline{C_0} + C_{14}$, obtemos:

$$|J_4| \leqslant \widehat{C_3}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|w_t|^2\,dxdt. \tag{3.99}$$

Vamos para a análise de J_5. Com efeito, usando (3.93) e as Desigualdades de Minkowski e de Young, encontramos que:

$$\begin{aligned}
|J_5| &= \left|2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Delta w\big(H_t^T * w\big)\,dxdt\right| \\
&\leqslant 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|\Delta w|\left|H_t^T * w\right|\,dxdt \\
&= \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(|\Delta w|\Big)\Big(2\left|H_t^T * w\right|\Big)\,dxdt \\
&\leqslant \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\frac{1}{2}\Big(|\Delta w|\Big)^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\frac{1}{2}\Big(2\left|H_t^T * w\right|\Big)^2\,dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|\Delta w|^2\,dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left|H_t^T * w\right|^2\,dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|\Delta w|^2\,dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * w\right|^2\,dxdt,
\end{aligned}$$

e pelo Lema 3.0.2, concluímos que:

$$|J_5| \leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|\Delta w|^2\,dxdt + 2\widetilde{C_0}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt.$$

Portanto, tomando $\widehat{C_4} = 2\widetilde{C_0}$, segue que:

$$J_5 \leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|\Delta w|^2\,dxdt + \widehat{C_4}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt. \tag{3.100}$$

Finalmente, vamos para a análise de J_6. Assim, usando integração por partes e sabendo de (3.98), obtemos:

$$\begin{aligned}
J_6 &= 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t\big(H_t^T * w\big)\,dxdt\\
&= \int_\Omega \left[\int_0^T \Big(2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big(H_t^T * w\big)\Big)w_t\,dt\right]dx\\
&= \int_\Omega \left[\Big(2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big(H_t^T * w\big)w\Big)\Big|_0^T - \int_0^T \Big(2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big(H_t^T * w\big)\Big)_t w\,dt\right]dx\\
&= \int_\Omega \Bigg[\Big(2e^{2s\alpha(T)}(s\phi)^{-1}\big(H_t^T * w\big)w\Big) - \Big(2e^{2s\alpha(0)}(s\phi)^{-1}\big(H_t^T * w\big)w\Big)\\
&\quad - \int_0^T \Big(2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big(H_t^T * w\big)\Big)_t w\,dt\Bigg]dx\\
&= -\int_Q \Big(2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big(H_t^T * w\big)\Big)_t w\,dxdt,
\end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}
&\Big(2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big(H_t^T * w\big)\Big)_t\\
&= \Big(2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big)_t\big(H_t^T * w\big) + 2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big(\big(H_t^T * w\big)\big)_t\\
&= 2\big(2e^{2s\alpha}\phi^{-1}\alpha_t - e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}\phi_t\big)\big(H_t^T * w\big) + 2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big(\big(H_t^T * w\big)\big)_t\\
&= 4e^{2s\alpha}\phi^{-1}\alpha_t\big(H_t^T * w\big) - 2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}\phi_t\big(H_t^T * w\big) + 2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big(\big(H_t^T * w\big)\big)_t,
\end{aligned}$$

segue que,

$$\begin{aligned}
J_6 &= -4\int_Q e^{2s\alpha}\phi^{-1}\alpha_t w\big(H_t^T * w\big)\,dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}\phi_t w\big(H_t^T * w\big)\,dxdt\\
&\quad -2\int_\Omega\left[\int_0^T e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w\big(\big(H_t^T * w\big)\big)_t\,dt\right]dx.
\end{aligned}$$

Daí, pela Regra de Leibniz (Teorema 1.6.7), como

$$\begin{aligned}
&-2\int_\Omega\left[\int_0^T e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w\big(\big(H_t^T * w\big)\big)_t\,dt\right]dx\\
&= -2\int_\Omega\left[\int_0^T e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w\left(\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau\right)_t dt\right]dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau\right)_t &= h(T,t)w(T,x)\big(T\big)_t - h(t,t)w(t,x)\big(t\big)_t\\
&\quad + \int_t^T \Big(h(\tau,t)w(\tau,x)\Big)_t\,d\tau\\
&= 0 - h(t,t)w(t,x) + \int_t^T h_t(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau,
\end{aligned}$$

então obtemos:

$$\begin{aligned}
&-2\int_{\Omega}\left[\int_0^T e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w\big((H_t^T * w)\big)_t\, dt\right] dx\\
&= -2\int_{\Omega}\left[\int_0^T e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w\bigg(-h(t,t)w(t,x) + \int_t^T h_t(\tau,t)w(\tau,x)\, d\tau\bigg)\, dt\right] dx\\
&= 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}h(t,t)w^2\, dxdt - 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w\bigg(\int_t^T h_t(\tau,t)w(\tau,x)\, d\tau\bigg)\, dxdt,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
J_6 &= -4\int_Q e^{2s\alpha}\phi^{-1}\alpha_t w\big(H_t^T * w\big)\, dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}\phi_t w\big(H_t^T * w\big)\, dxdt\\
&\quad + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}h(t,t)|w|^2\, dxdt\\
&\quad - 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w\bigg(\int_t^T h_t(\tau,t)w(\tau,x)\, d\tau\bigg)\, dxdt.
\end{aligned}$$

Agora, considere:

$$\begin{aligned}
L_1 &= -4\int_Q e^{2s\alpha}\phi^{-1}\alpha_t w\big(H_t^T * w\big)\, dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}\phi_t w\big(H_t^T * w\big)\, dxdt;\\
L_2 &= 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}h(t,t)|w|^2\, dxdt;\\
L_3 &= -2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w\bigg(\int_t^T h_t(\tau,t)w(\tau,x)\, d\tau\bigg)\, dxdt.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, temos:

$$J_6 = L_1 + L_2 + L_3. \tag{3.101}$$

Vamos analisar cada termo L_i, para $i = 1, 2, 3$.

Com efeito, pelas Desigualdades de Minkowski e de Young, encontramos que:

$$\begin{aligned}
|L_1| &= \bigg| -4\int_Q e^{2s\alpha}\phi^{-1}\alpha_t w\big(H_t^T * w\big)\, dxdt\\
&\qquad + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}\phi_t w\big(H_t^T * w\big)\, dxdt\bigg|\\
&\leqslant 4\int_Q e^{2s\alpha}|\alpha_t|\Big(|w|\Big)\Big(\phi^{-1}\big|H_t^T * w\big|\Big)\, dxdt\\
&\quad + 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|\phi_t|\Big(|w|\Big)\Big(\phi^{-1}\big|H_t^T * w\big|\Big)\, dxdt\\
&\leqslant 2\int_Q e^{2s\alpha}|\alpha_t||w|^2\, dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}|\alpha_t|\phi^{-2}\big|H_t^T * w\big|^2\, dxdt\\
&\quad + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|\phi_t||w|^2\, dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|\phi_t|\phi^{-2}\big|H_t^T * w\big|^2\, dxdt,
\end{aligned}$$

e de (3.93) e (3.32), segue que:

$$\begin{aligned}|L_1| &\leqslant 2C_0\int_Q e^{2s\alpha}\phi^2|w|^2\,dxdt + 2C_0\int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * w\right|^2 dxdt\\ &\quad + C_0\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^2|w|^2\,dxdt + C_0\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left|H_t^T * w\right|^2 dxdt\\ &\leqslant 2C_0\int_Q e^{2s\alpha}\phi^2|w|^2\,dxdt + 2C_0\int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * w\right|^2 dxdt\\ &\quad + C_0\int_Q e^{2s\alpha}\phi^2|w|^2\,dxdt + C_0\int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * w\right|^2 dxdt,\end{aligned}$$

e como existe uma constante $\overline{C_{11}} > 0$ tal que $1 \leqslant \overline{C_{11}}s^3\phi^2$, pela definição de ϕ, obtemos:

$$\begin{aligned}|L_1| &\leqslant 2C_0\overline{C_{11}}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt + 2C_0\int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * w\right|^2 dxdt\\ &\quad + C_0\overline{C_{11}}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt + C_0\int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * w\right|^2 dxdt\\ &= 3C_0\overline{C_{11}}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt + 3C_0\int_Q e^{2s\alpha}\left|H_t^T * w\right|^2 dxdt.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 3.0.2 e tomando $\widehat{C_5} = \left(3C_0\overline{C_{11}} + 3C_0\widetilde{C_0}\right)$, concluímos que:

$$L_1 \leqslant \widehat{C_5}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt. \tag{3.102}$$

Agora, como h é uma função contínua em $(0,T)\times(0,T)$, então $h \in L_\infty((0,T)\times(0,T))$ e de (3.93) obtemos:

$$\begin{aligned}L_2 &= 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}h(t,t)|w|^2\,dxdt\\ &\leqslant 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|h|_{L_\infty}|w|^2\,dxdt\\ &\leqslant 2|h|_{L_\infty}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt.\end{aligned}$$

Assim, tomando $\widehat{C_6} = 2|h|_{L_\infty}$, temos que:

$$L_2 \leqslant \widehat{C_6}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt. \tag{3.103}$$

Também, de (3.93) e usando as Desigualdades de Minkowski e de Young, obtemos:

$$
\begin{aligned}
|L_3| &= \left| -2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1} w \left(\int_t^T h_t(\tau,t) w(\tau,x)\, d\tau \right) dxdt \right| \\
&\leqslant \int_Q 2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\big(|w|\big) \left(\left| \int_t^T h_t(\tau,t) w(\tau,x)\, d\tau \right| \right) dxdt \\
&\leqslant \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|w|^2\, dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1} \left| \int_t^T h_t(\tau,t) w(\tau,x)\, d\tau \right|^2 dxdt \\
&\leqslant \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\, dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3 \left| \int_t^T h_t(\tau,t) w(\tau,x)\, d\tau \right|^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

pela Desigualdade de Hölder (Teorema 1.2.3), temos

$$
\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3 \left| \int_t^T h_t(\tau,t) w(\tau,x)\, d\tau \right|^2 dxdt \quad \leqslant \widehat{C_7}|h_t|_{L_\infty} \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\, dxdt,
$$

desse modo,

$$
\begin{aligned}
|L_3| &\leqslant \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\, dxdt + \widehat{C_7}|h_t|_{L_\infty} \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\, dxdt \\
&= \big(1 + \widehat{C_7}|h_t|_{L_\infty}\big) \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\, dxdt.
\end{aligned}
$$

Assim, tomando $\widehat{C_8} = \big(1 + \widehat{C_7}|h_t|_{L_\infty}\big)$, segue que:

$$
L_3 \quad \leqslant \widehat{C_8} \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\, dxdt. \tag{3.104}
$$

Portanto, de (3.101) - (3.104), deduzimos que:

$$
\begin{aligned}
J_6 &\leqslant \widehat{C_5} \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\, dxdt + \widehat{C_6} \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\, dxdt + \widehat{C_8} \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\, dxdt \\
&= \big(\widehat{C_5} + \widehat{C_6} + \widehat{C_8}\big) \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\, dxdt.
\end{aligned}
$$

Daí, tomando $\widehat{C_9} = \big(\widehat{C_5} + \widehat{C_6} + \widehat{C_8}\big)$, concluímos que:

$$
J_6 \quad \leqslant \widehat{C_9} \int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\, dxdt. \tag{3.105}
$$

Substituindo (3.94), (3.95), (3.96), (3.99), (3.100) e (3.105) em (3.92) resulta que:

$$
\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(|w_t|^2+|\Delta w|^2+\big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\
&\leqslant \left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt\right)+\left(M^2\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\\
&\quad+\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+M^2\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\\
&\quad+\left(\widehat{C_3}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|w_t|^2\,dxdt\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|\Delta w|^2\,dxdt+\widehat{C_4}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\\
&\quad+\left(\widehat{C_9}\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\\
&=2\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+\big(2M^2+\widehat{C_4}+\widehat{C_9}\big)\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt\\
&\quad+\widehat{C_3}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt+\left(\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(\frac{1}{2}|w_t|^2+\frac{1}{2}|\Delta w|^2\Big)\,dxdt\right),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(\frac{1}{2}|w_t|^2+\frac{1}{2}|\Delta w|^2+\big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\
&\leqslant 2\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+\big(2M^2+\widehat{C_4}+\widehat{C_9}\big)\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\,dxdt\\
&\quad+\widehat{C_3}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt\\
&\leqslant 2\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+\big(2M^2+\widehat{C_4}+\widehat{C_9}\big)\int_Q e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\\
&\quad+\widehat{C_3}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt.
\end{aligned}
$$

Tomando $C_{15}=\max\big\{\big(2M^2+\widehat{C_4}+\widehat{C_9}\big),\widehat{C_3}\big\}$ na última expressão, encontramos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(\frac{1}{2}|w_t|^2+\frac{1}{2}|\Delta w|^2+\big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\
&\leqslant 2\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+C_{15}\int_Q\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2+e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt,
\end{aligned}
$$

e assim de (3.90), podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\varphi)^{-1}\Big(\frac{1}{2}|w_t|^2+\frac{1}{2}|\Delta w|^2+\big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\
&\leqslant 2\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + C_{15}\overline{C_{10}}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\big|f_1\big|^2 dxdt\\
&\quad+\int_{Q_{\omega_0}}\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\varphi^3|w|^2+e^{2s\alpha}s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\bigg)\\
&\leqslant \big(2+C_{15}\overline{C_{10}}\big)\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt\\
&\quad+C_{15}\overline{C_{10}}\bigg(\int_{Q_{\omega_0}}\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\varphi^3|w|^2+e^{2s\alpha}s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\bigg).
\end{aligned}$$

Seja $C_{16}=\max\big\{\big(2+C_{15}\overline{C_{10}}\big), C_{15}\overline{C_{10}}\big\}$, então da última estimativa, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\varphi)^{-1}\Big(\frac{1}{2}|w_t|^2+\frac{1}{2}|\Delta w|^2+\big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\
&\leqslant C_{16}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+\int_{Q_{\omega_0}}\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\varphi^3|w|^2+e^{2s\alpha}s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\bigg),
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\varphi)^{-1}\Big(|w_t|^2+|\Delta w|^2+\big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\
&\leqslant \int_Q e^{2s\alpha}(s\varphi)^{-1}\Big(|w_t|^2+|\Delta w|^2+2\big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\
&=2\int_Q e^{2s\alpha}(s\varphi)^{-1}\Big(\frac{1}{2}|w_t|^2+\frac{1}{2}|\Delta w|^2+\big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\
&\leqslant 2C_{16}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+\int_{Q_{\omega_0}}\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\varphi^3|w|^2+e^{2s\alpha}s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\bigg).
\end{aligned}$$

Portanto, tomando $\widehat{C_{10}}=\widehat{C_{10}}(\Omega,\omega,T,\lambda)=2C_{16}$, concluímos que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\varphi)^{-1}\Big(|w_t|^2+|\Delta w|^2+\big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\
&\leqslant \widehat{C_{10}}\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+\int_{Q_{\omega_0}}\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\varphi^3|w|^2+e^{2s\alpha}s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\bigg).
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Agora, considere a função $\chi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi:\Omega\to\mathbb{R}$ tal que

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{se} \quad x\in\overline{\omega_0},\\[2ex] 0, & \text{se} \quad x\in\Omega\setminus\omega,\end{cases}$$

onde $\omega_0 \subseteq \overline{\omega_0} \subseteq \omega$. Multiplicando a equação (2.15) do sistema adjunto por $e^{2s\alpha}\chi s\phi w$ e integrando em Q, obtemos:

$$\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w w_t \, dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w \Delta w \, dxdt - \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi |w|^2 a(t,x) \, dxdt$$
$$- \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w \big(H_t^T * w\big) \, dxdt = \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w f_1 \, dxdt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w \Delta w \, dxdt &= \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w w_t \, dxdt - \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi |w|^2 a(t,x) \, dxdt \\ &\quad - \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w f_1 \, dxdt - \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w \big(H_t^T * w\big) \, dxdt. \end{aligned} \tag{3.107}$$

Pela Fórmula de Green (Teorema 1.6.4) e de (2.15) temos que:

$$\begin{aligned} &\int_Q \big(e^{2s\alpha}\chi s\phi w\big)\big(\Delta w\big) \, dxdt \\ &= -\int_Q \big\langle \nabla\big(e^{2s\alpha}\chi s\phi w\big), \nabla w \big\rangle \, dxdt + \int_\Sigma e^{2s\alpha}\chi s\phi w w_\eta \, d\Sigma \\ &= -\int_Q s\big\langle \nabla\big(e^{2s\alpha}\chi\phi w\big), \nabla w \big\rangle \, dxdt \\ &= -\int_Q s\big\langle \nabla\big(e^{2s\alpha}\chi\phi\big) w + e^{2s\alpha}\chi\phi\nabla w\big), \nabla w \big\rangle \, dxdt \\ &= -\int_Q s w\big\langle \nabla\big(e^{2s\alpha}\chi\phi\big), \nabla w \big\rangle \, dxdt - \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi |\nabla w|^2 \, dxdt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi |\nabla w|^2 \, dxdt = -\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w \Delta w \, dxdt - \int_Q s w\big\langle \nabla\big(e^{2s\alpha}\chi\phi\big), \nabla w \big\rangle \, dxdt.$$

Então, usando (3.107), segue que:

$$\begin{aligned} \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi |\nabla w|^2 \, dxdt &= \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w w_t \, dxdt - \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi |w|^2 a(t,x) \, dxdt \\ &\quad - \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w f_1 \, dxdt - \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w \big(H_t^T * w\big) \, dxdt \\ &\quad - \int_Q s w\big\langle \nabla\big(e^{2s\alpha}\chi\phi\big), \nabla w \big\rangle \, dxdt. \end{aligned} \tag{3.108}$$

Considere:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w w_t \, dxdt;\\
K_2 &= \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi |w|^2 a(t,x)\, dxdt;\\
K_3 &= \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w f_1 \, dxdt;\\
K_4 &= \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w\big(H_t^T * w\big)\, dxdt;\\
K_5 &= \int_Q s w\big\langle \nabla\big(e^{2s\alpha}\chi\phi\big), \nabla w\big\rangle \, dxdt.
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que:

$$\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi |\nabla w|^2 \, dxdt \leqslant |K_1| + |K_2| + |K_3| + |K_4| + |K_5|. \tag{3.109}$$

Vamos analisar cada termo K_i, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

- **Análise dos Termos de** (3.108)

Inicialmente, veja que, pela definição de ϕ, temos que:

$$1 \leqslant T^2\phi, \tag{3.110}$$

e analogamente, deduzimos que:

$$1 \leqslant T^4\phi^2. \tag{3.111}$$

Agora, usando integração por partes e sabendo de (3.98) e que $w w_t = \frac{1}{2}\Big(|w|^2\Big)_t$, encontramos que:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w w_t \, dxdt\\
&= \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\chi s\phi \Big(|w|^2\Big)_t \, dxdt\\
&= \frac{1}{2}\int_\omega \left[\int_0^T \Big(e^{2s\alpha}\chi s\phi\Big)\Big(|w|^2\Big)_t \, dt\right] dx\\
&= \frac{1}{2}\int_\omega \left[\Big(e^{2s\alpha}\chi s\phi |w|^2\Big)\Big|_0^T - \int_0^T \Big(e^{2s\alpha}\chi s\phi\Big)_t |w|^2 \, dt\right] dx\\
&= \frac{1}{2}\int_\omega \left[\Big(e^{2s\alpha(T)}\chi s\phi |w|^2\Big) - \Big(e^{2s\alpha(0)}\chi s\phi |w|^2\Big) - \int_0^T \Big(e^{2s\alpha}\chi s\phi\Big)_t |w|^2 \, dt\right] dx\\
&= -\frac{1}{2}\int_{Q_\omega} \Big(e^{2s\alpha}\chi s\phi\Big)_t |w|^2 \, dxdt,
\end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}\left(e^{2s\alpha}\chi s\phi\right)_t &= \chi s\left(e^{2s\alpha}\right)_t\phi + \chi s e^{2s\alpha}\left(\phi\right)_t\\ &= 2e^{2s\alpha}\chi s^2\phi\alpha_t + e^{2s\alpha}\chi s\phi_t,\end{aligned}$$

então

$$K_1 = -\frac{1}{2}\int_{Q_\omega}\left(2e^{2s\alpha}\chi s^2\phi\alpha_t + e^{2s\alpha}\chi s\phi_t\right)|w|^2\,dxdt,$$

ou seja,

$$K_1 = -\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\chi s^2\phi\alpha_t|w|^2\,dxdt - \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\chi s\phi_t|w|^2\,dxdt.$$

Daí, considerando $s, \lambda \geqslant 1$, de (3.110), (3.73) e sabendo que $|\chi| \leqslant 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}|K_1| &= \left|-\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\chi s^2\phi\alpha_t|w|^2\,dxdt - \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\chi s\phi_t|w|^2\,dxdt\right|\\
&\leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\left|\chi\right|s^2\phi|\alpha_t||w|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\left|\chi\right|s|\phi_t||w|^2\,dxdt\\
&\leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^2\phi\left(C_0\phi^2\right)|w|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\left(C_0\phi^2\right)|w|^2\,dxdt\\
&= C_0\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^2\phi^3|w|^2\,dxdt + \frac{C_0}{2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi^2|w|^2\,dxdt\\
&\leqslant C_0\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt + \frac{C_0T^2}{2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt\\
&= \left(C_0 + \frac{C_0T^2}{2}\right)\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt.\end{aligned}$$

Assim, tomando $\widehat{C_{11}} = \left(C_0 + \dfrac{C_0T^2}{2}\right)$, segue que:

$$|K_1| \leqslant \widehat{C_{11}}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt. \tag{3.112}$$

Também, de (2.6) e (3.111), obtemos:

$$\begin{aligned}|K_2| &= \left|\int_{Q} e^{2s\alpha}\chi s\phi|w|^2 a(t,x)\,dxdt\right|\\
&\leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|w|^2|a(t,x)|\,dxdt\\
&\leqslant M\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|w|^2\,dxdt\\
&\leqslant MT^4\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt,\end{aligned}$$

isto é,

$$|K_2| \leqslant MT^4 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3 \lambda^2 \phi^3 |w|^2 \, dxdt. \tag{3.113}$$

Além disso, pela Desigualdade de Young (Teorema 1.2.1) e sabendo (3.111), resulta que:

$$\begin{aligned}
|K_3| &= \left| \int_Q e^{2s\alpha} \chi s\phi w f_1 \, dxdt \right| \\
&\leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s\phi |w||f_1| \, dxdt \\
&= \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \Big(\lambda s\phi |w| \Big) \Big(\frac{1}{\lambda} |f_1| \Big) \, dxdt \\
&\leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^2 \lambda^2 \phi^2 |w|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \frac{1}{\lambda^2} |f_1|^2 \, dxdt \\
&\leqslant T^2 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3 \lambda^2 \phi^3 |w|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \frac{1}{\lambda^2} |f_1|^2 \, dxdt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|K_3| \leqslant \int_Q e^{2s\alpha} \frac{1}{\lambda^2} |f_1|^2 \, dxdt + T^2 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3 \lambda^2 \phi^3 |w|^2 \, dxdt. \tag{3.114}$$

Agora, considerando uma constante $\mu > 0$, pelas Desigualdades de Minkowski (Teorema 1.2.4) e de Young, segue que:

$$\begin{aligned}
|K_4| &= \left| \int_Q e^{2s\alpha} \chi s\phi w \big(H_t^T * w \big) \, dxdt \right| \\
&\leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s\phi |w| \big| H_t^T * w \big| \, dxdt \\
&= \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu (s\phi)^{-1}}} s\phi |w| \right) \left(\sqrt{\mu (s\phi)^{-1}} \big| H_t^T * w \big| \right) dxdt \\
&\leqslant \frac{1}{\mu} \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3 \phi^3 |w|^2 \, dxdt + \mu \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} (s\phi)^{-1} \big| H_t^T * w \big|^2 \, dxdt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$|K_4| \leqslant \frac{1}{\mu} \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3 \phi^3 |w|^2 \, dxdt + \mu \int_Q e^{2s\alpha} (s\phi)^{-1} \big| H_t^T * w \big|^2 \, dxdt. \tag{3.115}$$

Observe que, de (3.106) encontramos que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha} (s\phi)^{-1} \big| H_t^T * w \big|^2 \, dxdt \\
&\leqslant \int_Q e^{2s\alpha} (s\phi)^{-1} \Big(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + \big| H_t^T * w \big|^2 \Big) \, dxdt \\
&\leqslant \widehat{C_{10}} \left(\int_Q e^{2s\alpha} |f_1|^2 \, dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \Big(e^{2s\alpha} s^3 \lambda^4 \phi^3 |w|^2 + e^{2s\alpha} s\lambda^2 \phi |\nabla w|^2 \Big) \, dxdt \right),
\end{aligned}$$

portanto,

$$
\begin{aligned}
&\mu \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left|H_t^T * w\right|^2 dxdt \\
&\leqslant \widehat{C_{10}}\bigg(\mu \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \mu \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 dxdt \\
&\quad + \mu \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 dxdt\bigg),
\end{aligned}
$$

substituindo em (3.115), obtemos:

$$
\begin{aligned}
|K_4| &\leqslant \frac{1}{\mu}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2 dxdt + \bigg[\widehat{C_{10}}\bigg(\mu \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt \\
&\quad + \mu \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 dxdt + \mu \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 dxdt\bigg)\bigg],
\end{aligned}
$$

e consequentemente,

$$
\begin{aligned}
|K_4| &\leqslant \frac{1}{\mu}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2 dxdt + \widehat{C_{10}}\bigg(\mu \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt \\
&\quad + \mu \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 dxdt + \mu \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 dxdt\bigg).
\end{aligned}
$$

Daí, considerando uma constante $\zeta > 0$ tal que $\mu = \dfrac{\zeta}{2\lambda^2}$,

$$
\begin{aligned}
|K_4| &\leqslant \frac{2}{\zeta}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2 dxdt + \widehat{C_{10}}\bigg(\frac{\zeta}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{\zeta}{2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2 dxdt + \frac{\zeta}{2}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2 dxdt\bigg) \\
&= \left(\frac{2}{\zeta}+\frac{\zeta}{2}\right)\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2 dxdt + \widehat{C_{10}}\bigg(\frac{\zeta}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{\zeta}{2}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2 dxdt\bigg).
\end{aligned}
$$

Tomando $C_{17} = \max\left\{\left(\dfrac{2}{\zeta}+\dfrac{\zeta}{2}\right), \widehat{C_{10}}\right\}$ na última expressão, concluímos que:

$$
\begin{aligned}
|K_4| &\leqslant C_{17}\bigg(\frac{\zeta}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{\zeta}{2}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2 dxdt\bigg).
\end{aligned}
\tag{3.116}
$$

Finalmente, sabendo de (3.97) e (3.2), obtemos que:

$$\begin{aligned}
\nabla\big(e^{2s\alpha}\chi\phi\big) &= \nabla e^{2s\alpha}\big(\chi\phi\big) + e^{2s\alpha}\nabla\big(\chi\phi\big)\\
&= \nabla e^{2s\alpha}\big(\chi\phi\big) + e^{2s\alpha}\nabla\chi\phi + e^{2s\alpha}\chi\nabla\phi\\
&= \big(2e^{2s\alpha}s\lambda\phi\nabla\psi\big)\big(\chi\phi\big) + e^{2s\alpha}\nabla\chi\phi + e^{2s\alpha}\chi\big(\lambda\phi\nabla\psi\big)\\
&= 2e^{2s\alpha}\chi s\lambda\phi^2\nabla\psi + e^{2s\alpha}\phi\nabla\chi + e^{2s\alpha}\chi\lambda\phi\nabla\psi,
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
K_5 &= \int_Q sw\big\langle\nabla\big(e^{2s\alpha}\chi\phi\big),\nabla w\big\rangle\,dxdt\\
&= \int_Q sw\big\langle\big(2e^{2s\alpha}\chi s\lambda\phi^2\nabla\psi + e^{2s\alpha}\phi\nabla\chi + e^{2s\alpha}\chi\lambda\phi\nabla\psi\big),\nabla w\big\rangle\,dxdt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
K_5 &= 2\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\chi s^2\lambda\phi^2 w\big\langle\nabla\psi,\nabla w\big\rangle\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi w\big\langle\nabla\chi,\nabla w\big\rangle\,dxdt\\
&\quad + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\chi s\lambda\phi w\big\langle\nabla\psi,\nabla w\big\rangle\,dxdt.
\end{aligned}$$

Usando as Desigualdades de Minkowski (Teorema 1.2.4) e de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.1.1) e sabendo que existem constantes positivas $\overline{C_{12}}, \overline{C_{13}}$ tais que $|\nabla\psi| \leqslant \overline{C_{12}}$ e $|\nabla\chi| \leqslant \overline{C_{13}}$, segue que:

$$\begin{aligned}
|K_5| &= \bigg|2\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\chi s^2\lambda\phi^2 w\big\langle\nabla\psi,\nabla w\big\rangle\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi w\big\langle\nabla\chi,\nabla w\big\rangle\,dxdt\\
&\quad + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\chi s\lambda\phi w\big\langle\nabla\psi,\nabla w\big\rangle\,dxdt\bigg|\\
&\leqslant 2\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\big|\chi\big|s^2\lambda\phi^2|w||\nabla\psi||\nabla w|\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|w||\nabla\chi||\nabla w|\,dxdt\\
&\quad + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\big|\chi\big|s\lambda\phi|w||\nabla\psi||\nabla w|\,dxdt\\
&\leqslant 2\overline{C_{12}}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^2\lambda\phi^2|w||\nabla w|\,dxdt + \overline{C_{13}}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|w||\nabla w|\,dxdt\\
&\quad + \overline{C_{12}}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\lambda\phi|w||\nabla w|\,dxdt,
\end{aligned}$$

e de (3.110) resulta que:

$$\begin{aligned}|K_5| &\leqslant 2\overline{C_{12}}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^2\lambda\phi^2|w||\nabla w|\,dxdt + \overline{C_{13}}T^2\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^2\lambda\phi^2|w||\nabla w|\,dxdt\\ &\quad+\overline{C_{12}}T^2\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^2\lambda\phi^2|w||\nabla w|\,dxdt\\ &= \left(2\overline{C_{12}}+\overline{C_{13}}T^2+\overline{C_{12}}T^2\right)\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^2\lambda\phi^2|w||\nabla w|\,dxdt,\end{aligned}$$

e tomando $\widehat{C_{12}} = \left(2\overline{C_{12}}+\overline{C_{13}}T^2+\overline{C_{12}}T^2\right)$, obtemos que:

$$|K_5| \leqslant \widehat{C_{12}}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^2\lambda\phi^2|w||\nabla w|\,dxdt.$$

Agora, pela Desigualdade de Young (Teorema 1.2.1), temos que:

$$|K_5| \leqslant \widehat{C_{12}}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\left((s\phi)^{3\backslash 2}\lambda\frac{1}{\sqrt{\rho}}|w|\right)\left((s\phi)^{1\backslash 2}\sqrt{\rho}|\nabla w|\right)dxdt,$$

isto é,

$$|K_5| \leqslant \frac{\widehat{C_{12}}}{\rho}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt + \widehat{C_{12}}\rho\int_{Q} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2\,dxdt. \tag{3.117}$$

Substituindo (3.112), (3.113),(3.114),(3.116) e (3.117) em (3.109), concluímos que:

$$\begin{aligned}&\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi|\nabla w|^2\,dxdt\\ &\leqslant \left(\widehat{C_{11}}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt\right) + \left(MT^4\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\\ &\quad+\left(\int_Q e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2\,dxdt + T^2\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\\ &\quad+\left(C_{17}\left(\frac{\zeta}{2}\int_Q e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt\right.\right.\\ &\quad\left.\left.+\frac{\zeta}{2}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2\,dxdt\right)\right)\\ &\quad+\left(\frac{\widehat{C_{12}}}{\rho}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt + \widehat{C_{12}}\rho\int_Q e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2\,dxdt\right)\\ &= \left(1+\frac{\zeta C_{17}}{2}\right)\int_Q e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2\,dxdt\\ &\quad+\left(\widehat{C_{11}}+MT^4+T^2+C_{17}+\frac{\widehat{C_{12}}}{\rho}\right)\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt\\ &\quad+\widehat{C_{12}}\rho\int_Q e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2\,dxdt + \frac{\zeta C_{17}}{2}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2\,dxdt,\end{aligned}$$

e tomando $C_{18} = \max\left\{\left(1+\dfrac{\zeta C_{17}}{2}\right), \left(\widehat{C_{11}} + MT^4 + T^2 + C_{17} + \dfrac{\widehat{C_{12}}}{\rho}\right)\right\}$, temos que:

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi|\nabla w|^2\,dxdt &\leqslant C_{18}\left(\int_Q e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^2\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\\ &+ \widehat{C_{12}}\rho\int_Q e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2\,dxdt\\ &+ \frac{\zeta C_{17}}{2}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2\,dxdt.\end{aligned}$$

Daí, multiplicando ambos os lados por λ^2, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt &\leqslant C_{18}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\\ &+ \widehat{C_{12}}\rho\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt\\ &+ \frac{\zeta C_{17}}{2}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt.\end{aligned}$$

Note que, como

$$\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt \leqslant \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt,$$

então

$$\begin{aligned}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt &\leqslant C_{18}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\\ &+ \widehat{C_{12}}\rho\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt\\ &+ \frac{\zeta C_{17}}{2}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt,\end{aligned}$$

e tomando ζ suficientemente pequeno de modo que $\dfrac{\zeta C_{17}}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, segue que:

$$\begin{aligned}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt &\leqslant C_{18}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\\ &+ \widehat{C_{12}}\rho\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt\\ &+ \frac{1}{2}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt,\end{aligned}$$

implicando em

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt &\leqslant C_{18}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\\ &+ \widehat{C_{12}}\rho\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt.\end{aligned}$$

Tomando $\widehat{C_{13}} = 2C_{18}$ e $\widehat{C_{14}} = 2\widehat{C_{12}}$, concluímos que:

$$\begin{aligned}\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha} s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt \quad &\leqslant \widehat{C_{13}}\Big(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\Big)\\ &\quad + \rho\widehat{C_{14}}\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt.\end{aligned} \tag{3.118}$$

Então, somando (3.90) com (3.106), podemos deduzir que:

$$\begin{aligned}&\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + \big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\ &\quad + \int_Q \Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\\ &\leqslant \big(\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}}\big)\Big(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\Big)\\ &\quad + \big(\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}}\big)\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt\\ &\leqslant \big(\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}}\big)\Big(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\Big)\\ &\quad + \big(\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}}\big)\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt,\end{aligned}$$

e usando (3.118), obtemos:

$$\begin{aligned}&\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + \big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\ &\quad + \int_Q \Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\\ &\leqslant \big(\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}}\big)\Big(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\Big)\\ &\quad + \big(\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}}\big)\widehat{C_{13}}\Big(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\Big)\\ &\quad + \rho\widehat{C_{14}}\big(\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}}\big)\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + \big|H_t^T * w\big|^2\Big)\,dxdt\\ &\quad + \int_Q \Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\\ &\leqslant \Big(\big(\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}}\big) + \big(\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}}\big)\widehat{C_{13}}\Big)\Big(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\Big)\\ &\quad + \rho\widehat{C_{14}}\big(\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}}\big)\int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\,dxdt,\end{aligned}$$

e tomando $\widehat{C_{15}} = \left((\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}}) + (\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}})\widehat{C_{13}} \right)$ e $\overline{C_{14}} = \widehat{C_{14}}(\widehat{C_{10}} + \overline{C_{10}})$, temos que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + \left|H_t^T * w\right|^2\right) dxdt \\
&\quad + \int_Q \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt \\
&\leqslant \widehat{C_{15}}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 \, dxdt \right) \\
&\quad + \rho\overline{C_{14}} \int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

Agora, considerando ρ suficientemente pequeno de modo que $\rho\overline{C_{14}} \leqslant \dfrac{1}{2}$, segue que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + \left|H_t^T * w\right|^2\right) dxdt \\
&\quad + \int_Q \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt \\
\leqslant\ & \widehat{C_{15}}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 \, dxdt \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_Q e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 \, dxdt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + \left|H_t^T * w\right|^2\right) dxdt \\
&\quad + \int_Q \left(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + \frac{1}{2}e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\right) dxdt \\
\leqslant\ & \widehat{C_{15}}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 \, dxdt \right),
\end{aligned}$$

assim,

$$
\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(|w_t|^2+|\Delta w|^2+\left|H_t^T * w\right|^2\Big)\,dxdt\\
&\quad+\int_Q\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2+e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\\
&\leqslant \int_Q 2e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(|w_t|^2+|\Delta w|^2+\left|H_t^T * w\right|^2\Big)\,dxdt\\
&\quad+\int_Q\Big(2e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2+e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\\
&=2\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\Big(|w_t|^2+|\Delta w|^2+\left|H_t^T * w\right|^2\Big)\,dxdt\\
&\quad+\int_Q\Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2+\frac{1}{2}e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big)\,dxdt\Bigg)\\
&\leqslant 2\widehat{C_{15}}\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\Bigg).
\end{aligned}
$$

Portanto, definindo $\widetilde{C}=\widetilde{C}(\Omega,\omega,T,\lambda)=2\widehat{C_{15}}$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}\Big[(s\phi)^{-1}\Big(|w_t|^2+|\Delta w|^2+\left|H_t^T * w\right|^2\Big)+s^3\lambda^4\phi^3|w|^2+s\lambda^2\phi|\nabla w|^2\Big]\,dxdt\\
&\leqslant \widetilde{C}\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\,dxdt\Bigg)
\end{aligned}
$$

e assim concluímos a demonstração do Teorema 3.0.1.

■

Capítulo 4

Desigualdade de Observabilidade

A desigualdade de observabilidade é um elemento fundamental na teoria do controle, intimamente ligado à observabilidade de um sistema. A observabilidade, por sua vez, se refere à capacidade de determinar o estado interno de um sistema a partir da medida de suas saídas (veja [12]).

Imagine um sistema como uma caixa preta. Você pode inserir entradas (controles) e medir as saídas (resultados), mas não pode ver diretamente o que acontece dentro da caixa. A observabilidade nos diz se é possível, a partir das saídas medidas, inferir o que está acontecendo dentro do sistema, ou seja, qual é o seu estado interno.

Neste capítulo iremos provar a desigualdade de observabilidade para soluções fracas do sistema adjunto (2.15). Essa desigualdade é uma consequência da desigualdade de Carleman (Teorema 3.0.1) provada no capítulo anterior.

Associado ao sistema não linear (2.1), considere o sistema adjunto (2.15):

$$\begin{cases} w_t(t,x) + \Delta w(t,x) - a(t,x)w(t,x) - H_t^T * w = f_1(t,x) \quad \text{em} \quad Q; \\ w(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ w(T,x) = w_T(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $H_t^T * w = \displaystyle\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau$, $w_T \in L^2(\Omega)$ e $f_1 \in L^2(Q)$.

Teorema 4.0.1. ***(Desigualdade de Observabilidade)*** *Sejam* ϕ *e* α *as funções definidas em* (3.1)*. Então, para* $\lambda_0 > 0, s \geqslant s_0(\lambda)$*, existe uma constante* $\widetilde{C_1} = \widetilde{C_1}(T,\Omega,\omega) > 0$

tal que vale a seguinte estimativa:

$$\int_{\Omega} |w(0,x)|^2 \, dx \leqslant \widetilde{C_1}\left(\int_{Q} e^{2s\alpha}|f_1|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3|w|^2 \, dxdt \right),$$

onde w *é a solução do sistema adjunto* (2.15).

Demonstração: Multiplicando por w a equação do sistema adjunto em (4.1) e integrando em Ω, obtemos:

$$\int_{\Omega} ww_t \, dx + \int_{\Omega} w\Delta w \, dx = \int_{\Omega} wf_1 \, dx + \int_{\Omega} w\big(H_t^T * w\big) \, dx + \int_{\Omega} w^2 a(t,x) \, dx. \tag{4.2}$$

Note que:

$$\int_{\Omega} ww_t \, dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\Big(|w|^2\Big)_t \, dx = \frac{1}{2}\left(\int_{\Omega} |w|^2 \, dx \right)_t,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} ww_t \, dx = \frac{1}{2}\left(\int_{\Omega} |w|^2 \, dx \right)_t. \tag{4.3}$$

Note também que, pela Fórmula de Green (Teorema 1.6.4) e sabendo que $w = 0$ sobre Σ, encontramos que:

$$\int_{\Omega} w\Delta w \, dx = -\int_{\Omega} \big\langle \nabla w, \nabla w \big\rangle \, dx + \int_{\Sigma} ww_\eta \, d\Sigma = -\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx,$$

isto é,

$$\int_{\Omega} w\Delta w \, dx = -\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx. \tag{4.4}$$

Substituindo (4.3) e (4.4) em (4.2) segue que:

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega} |w|^2 \, dx \right)_t - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx = \int_{\Omega} wf_1 \, dx + \int_{\Omega} w\big(H_t^T * w\big) \, dx + \int_{\Omega} w^2 a(t,x) \, dx.$$

Agora, multiplicando ambos lados dessa última expressão por $2e^{2(M+2)t}$, onde M é tal que $|a(t,x)| \leqslant M$, obtemos:

$$\begin{aligned} &2e^{2(M+2)t}\left[\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega} |w|^2 \, dx \right)_t - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx \right] \\ &= 2e^{2(M+2)t}\left(\int_{\Omega} wf_1 \, dx + \int_{\Omega} w\big(H_t^T * w\big) \, dx + \int_{\Omega} w^2 a(t,x) \, dx \right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Agora, observe que:

$$
\begin{aligned}
&-\left(e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx\right)_t\\
&=-2(M+2)e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx-e^{2(M+2)t}\left(\int_\Omega |w|^2\,dx\right)_t\\
&=2e^{2(M+2)t}\left[-(M+2)\int_\Omega |w|^2\,dx-\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |w|^2\,dx\right)_t\right]\\
&\leqslant 2e^{2(M+2)t}\left[-(M+2)\int_\Omega |w|^2\,dx-\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |w|^2\,dx\right)_t\right]+2e^{2(M+2)t}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx\\
&=-\left(2e^{2(M+2)t}\left[\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |w|^2\,dx\right)_t-\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx\right]\right)-2(M+2)e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

e usando (4.5), deduzimos que:

$$
\begin{aligned}
&-\left(e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx\right)_t\\
&\leqslant-\left(2e^{2(M+2)t}\left(\int_\Omega wf_1\,dx+\int_\Omega w\big(H_t^T*w\big)\,dx+\int_\Omega w^2a(t,x)\,dx\right)\right)\\
&\quad-2(M+2)e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx\\
&=2e^{2(M+2)t}\left[\int_\Omega\Big(-\sqrt{2}w\Big)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}f_1\right)dx+\int_\Omega\Big(-\sqrt{2}w\Big)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\big(H_t^T*w\big)\right)dx\right.\\
&\quad\left.+\int_\Omega |w|^2\big(-a(t,x)\big)\,dx\right]-2(M+2)e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

e pela Desigualdade de Young (Teorema 1.2.1) e sabendo de (2.6), segue que:

$$
\begin{aligned}
&-\left(e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx\right)_t\\
&\leqslant 2e^{2(M+2)t}\left[\int_\Omega |w|^2\,dx+\int_\Omega\frac{1}{4}|f_1|^2\,dx+\int_\Omega |w|^2\,dx+\int_\Omega\frac{1}{4}\left|H_t^T*w\right|^2dx\right.\\
&\quad\left.+M\int_\Omega |w|^2\,dx\right]-2(M+2)e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx\\
&=2e^{2(M+2)t}\left[\big(M+2\big)\int_\Omega |w|^2\,dx+\int_\Omega\frac{1}{4}|f_1|^2\,dx+\int_\Omega\frac{1}{4}\left|H_t^T*w\right|^2dx\right]\\
&\quad-2(M+2)e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx\\
&=\frac{1}{2}e^{2(M+2)t}\left[\int_\Omega |f_1|^2\,dx+\int_\Omega\left|H_t^T*w\right|^2dx\right],
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
-\left(e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx\right)_t\leqslant e^{2(M+2)t}\left(\int_\Omega |f_1|^2\,dx+\int_\Omega\left|H_t^T*w\right|^2dx\right).
$$

Agora, integrando em ambos os lados dessa última expressão de 0 à t, obtemos:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left[-\left(e^{2(M+2)y}\int_\Omega |w|^2\,dx\right)_y\right]dy\\&\leqslant \int_0^t\left[e^{2(M+2)y}\left(\int_\Omega |f_1|^2\,dx+\int_\Omega \left|H_y^T * w\right|^2dx\right)\right]dy.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Veja que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left[-\left(e^{2(M+2)y}\int_\Omega |w|^2\,dx\right)_y\right]dy\\&= -e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w(t,x)|^2\,dx+\int_\Omega |w(0,x)|^2\,dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^t \left[-\left(e^{2(M+2)y}\int_\Omega |w|^2\,dx\right)_y\right]dy \quad = -e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx+|w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)}$$

e substituindo em (4.6) nos conduz a estimativa:

$$\begin{aligned}&-e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx+|w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant \int_0^t\left[e^{2(M+2)y}\left(\int_\Omega |f_1|^2\,dx+\int_\Omega \left|H_y^T * w\right|^2dx\right)\right]dy,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&|w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant e^{2(M+2)t}\int_\Omega |w|^2\,dx+\int_0^t\left[e^{2(M+2)y}\int_\Omega \left(|f_1|^2+\left|H_y^T * w\right|^2\right)dx\right]dy.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Agora, defina a função σ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sigma : (0,T) &\to \mathbb{R}\\ t &\longmapsto \sigma(t)=\sup_{x\in\Omega} e^{-2s\alpha(t,x)}.\end{aligned}$$

Note que, como $e^{2\lambda||\psi||}-e^{\lambda\psi}\leqslant e^{2\lambda||\psi||}$, então

$$-\alpha = -\left(\frac{e^{\lambda\psi}-e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}\right)=\frac{e^{2\lambda||\psi||}-e^{\lambda\psi}}{\beta(t)}\leqslant \frac{e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)},$$

isto é,

$$-2s\alpha \;\leqslant \frac{2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)},$$

implicando em

$$e^{-2s\alpha} \leqslant e^{\dfrac{2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}}.$$

Como essa última expressão vale para todo $x \in \Omega$, então

$$\sigma(t) \leqslant e^{\dfrac{2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}},$$

donde

$$e^{-\dfrac{2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}} \leqslant \frac{1}{\sigma(t)}. \tag{4.8}$$

Também, pela definição de supremo, temos que $e^{-2s\alpha(t,x)} \leqslant \sigma(t)$ e portanto,

$$1 \leqslant e^{2s\alpha(t,x)}\sigma(t). \tag{4.9}$$

Além disso, para $t \in (0,T)$, temos que $t \leqslant T$ e então

$$2(M+2)t \leqslant 2(M+2)T,$$

implicando em

$$e^{2(M+2)t} \leqslant e^{2(M+2)T}.$$

Tomando $\widehat{C_{17}} = e^{2(M+2)T}$, segue que:

$$e^{2(M+2)t} \leqslant \widehat{C_{17}}, \quad \forall\, t \in (0,T). \tag{4.10}$$

Por conseguinte, substituindo (4.9) e (4.10) em (4.7) resulta que:

$$\begin{aligned}
&|w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \widehat{C_{17}} \int_\Omega e^{2s\alpha}\sigma(t)|w|^2\,dx + \widehat{C_{17}} \int_0^t\int_\Omega e^{2s\alpha}\sigma(t)\Big(|f_1|^2 + \big|H_y^T * w\big|^2\Big)\,dxdy \\
&= \widehat{C_{17}}\sigma(t) \int_\Omega e^{2s\alpha}|w|^2\,dx + \widehat{C_{17}}\sigma(t) \int_0^t\int_\Omega e^{2s\alpha}\Big(|f_1|^2 + \big|H_y^T * w\big|^2\Big)\,dxdy,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma(t)}|w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \widehat{C_{17}} \int_\Omega e^{2s\alpha}|w|^2\,dx + \widehat{C_{17}} \int_0^t\int_\Omega e^{2s\alpha}\Big(|f_1|^2 + \big|H_y^T * w\big|^2\Big)\,dxdy,
\end{aligned}$$

e de (4.8) segue que:

$$
\begin{aligned}
&|w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)} e^{-\dfrac{2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}} \\
&\leqslant \widehat{C_{17}} \int_\Omega e^{2s\alpha}|w|^2\,dx + \widehat{C_{17}} \int_0^t \int_\Omega e^{2s\alpha}\left(|f_1|^2 + \left|H^T_y * w\right|^2\right) dxdy.
\end{aligned}
$$

Agora, fixando $t_1, t_2 \in (0, T), t_1 < t_2$ e integrando ambos os lados dessa última expressão de t_1 à t_2, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&|w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\dfrac{2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}}\,dt \\
&\leqslant \widehat{C_{17}} \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega e^{2s\alpha}|w|^2\,dxdt + \widehat{C_{17}} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^t \int_\Omega e^{2s\alpha}\left(|f_1|^2 + \left|H^T_y * w\right|^2\right) dxdy\right)dt \\
&\leqslant \widehat{C_{17}} \int_0^T \int_\Omega e^{2s\alpha}|w|^2\,dxdt + \widehat{C_{17}} \int_0^T \left(\int_0^T \int_\Omega e^{2s\alpha}\left(|f_1|^2 + \left|H^T_y * w\right|^2\right) dxdy\right)dt \\
&= \widehat{C_{17}} \int_Q e^{2s\alpha}|w|^2\,dxdt + \widehat{C_{17}} \int_0^T \left(\int_Q e^{2s\alpha}\left(|f_1|^2 + \left|H^T_y * w\right|^2\right) dxdy\right)dt \\
&= \widehat{C_{17}} \int_Q e^{2s\alpha}|w|^2\,dxdt + \widehat{C_{17}} \left(\int_0^T 1\,dt\right)\left(\int_Q e^{2s\alpha}\left(|f_1|^2 + \left|H^T_y * w\right|^2\right) dxdy\right) \\
&= \widehat{C_{17}} \int_Q e^{2s\alpha}|w|^2\,dxdt + \widehat{C_{17}}T \int_Q e^{2s\alpha}\left(|f_1|^2 + \left|H^T_y * w\right|^2\right) dxdy,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&|w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\dfrac{2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}}\,dt \\
&\leqslant C_{19}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|w|^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\left|H^T_t * w\right|^2 dxdt\right),
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

onde $C_{19} = \max\left\{\widehat{C_{17}}, \widehat{C_{17}}T\right\}$. Por outro lado, tomando $t_1 = \dfrac{T}{4}$ e $t_2 = \dfrac{3T}{4}$, segue que:

$$
\frac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{T^2} \leqslant \frac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}, \quad \forall\, \frac{T}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3T}{4},
$$

então

$$
\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} e^{\dfrac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{T^2}}\,dt \leqslant \int_{t_1}^{t_2} e^{\dfrac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}}\,dt,
$$

e assim,

$$
\frac{T}{2} e^{\dfrac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{T^2}} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} e^{\dfrac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}}\,dt.
$$

Tomando $\overline{C_{15}} = \overline{C_{15}}(T,\lambda) = \frac{T}{2} e^{\frac{2se^{2\lambda||\psi||}}{T^2}}$, então em (4.11) resulta que:

$$\begin{aligned}
&\overline{C_{15}} |w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_{19} \left(\int_Q e^{2s\alpha} |w|^2 \, dxdt + \int_Q e^{2s\alpha} |f_1|^2 \, dxdt + \int_Q e^{2s\alpha} \left| H_t^T * w \right|^2 dxdt \right),
\end{aligned}$$

e pelo Lema 3.0.2, obtemos que:

$$\begin{aligned}
&\overline{C_{15}} |w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_{19} \left(\overline{C_9} \int_Q e^{2s\alpha} \phi^3 |w|^2 \, dxdt + \int_Q e^{2s\alpha} |f_1|^2 \, dxdt + \widetilde{C_0} \int_Q e^{2s\alpha} \phi^3 |w|^2 \, dxdt \right),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\overline{C_{15}} |w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_{19} \left(\left(\overline{C_9} + \widetilde{C_0} \right) \int_Q e^{2s\alpha} \phi^3 |w|^2 \, dxdt + \int_Q e^{2s\alpha} |f_1|^2 \, dxdt \right).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Agora, pela Desigualdade de Carleman (Teorema 3.0.1), temos:

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha} s^3 \lambda^4 \phi^3 |w|^2 \, dxdt \\
&\leqslant \int_Q e^{2s\alpha} \left[(s\phi)^{-1} \left(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + \left| H_t^T * w \right|^2 \right) + s^3 \lambda^4 \phi^3 |w|^2 + s\lambda^2 \phi |\nabla w|^2 \right] dxdt \\
&\leqslant \widetilde{C} \left(\int_Q e^{2s\alpha} |f_1|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3 \lambda^4 \phi^3 |w|^2 \, dxdt \right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha} s^3 \lambda^4 \phi^3 |w|^2 \, dxdt \\
&\leqslant \widetilde{C} \left(\int_Q e^{2s\alpha} |f_1|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3 \lambda^4 \phi^3 |w|^2 \, dxdt \right) \\
&\leqslant s^3 \lambda^4 \widetilde{C} \left(\int_Q e^{2s\alpha} |f_1|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \phi^3 |w|^2 \, dxdt \right),
\end{aligned}$$

implicando em

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha} \phi^3 |w|^2 \, dxdt \\
&\leqslant \widetilde{C} \left(\int_Q e^{2s\alpha} |f_1|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \phi^3 |w|^2 \, dxdt \right).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Finalmente, substituindo 4.13 em (4.12), resulta que:

$$
\begin{aligned}
&\overline{C_{15}}|w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_{19}\left(\left(\overline{C_9}+\widetilde{C_0}\right)\widetilde{C}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3|w|^2\,dxdt\right)\right.\\
&\quad\left.+\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt\right)\\
&= C_{19}\left(\left(\overline{C_9}+\widetilde{C_0}\right)\widetilde{C}+1\right)\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt\\
&\quad + C_{19}\left(\overline{C_9}+\widetilde{C_0}\right)\widetilde{C}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3|w|^2\,dxdt.
\end{aligned}
$$

Portanto, tomando $\widetilde{C_1} = \max\left\{\dfrac{C_{19}\left(\left(\overline{C_9}+\widetilde{C_0}\right)\widetilde{C}+1\right)}{\overline{C_{15}}}, \dfrac{C_{19}\left(\overline{C_9}+\widetilde{C_0}\right)\widetilde{C}}{\overline{C_{15}}}\right\}$ na última expressão, segue que:

$$
|w(0,x)|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \widetilde{C_1}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3|w|^2\,dxdt\right),
$$

ou seja,

$$
\int_\Omega |w(0,x)|^2\,dx \leqslant \widetilde{C_1}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\,dxdt+\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3|w|^2\,dxdt\right).
$$

■

Capítulo 5

Controle Aproximado: Sistema Linear

Em sistemas dinâmicos, a controlabilidade aproximada se refere à capacidade de levar o estado de um sistema a uma vizinhança arbitrariamente pequena de qualquer estado desejado, utilizando uma entrada (controle) adequada. Em outras palavras, não é necessário atingir o estado desejado exatamente, mas sim aproximá-lo o máximo possível (veja [9, 26]).

Associado ao sistema principal não linear (2.1), considere a sistema linear (2.7):

$$\begin{cases} p_t(t,x) - \Delta p(t,x) + a(t,x)p(t,x) + H_0^t * p = \chi_\omega u(t,x) \quad \text{em} \quad Q; \\ \\ p(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ \\ p(0,x) = p_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $H_0^t * p = \displaystyle\int_0^t h(t,\tau)p(\tau,x)\,d\tau$, $a(t,x) = f(\overline{p}(t,x))$, com $|a(t,x)| \leqslant M, u \in L^2(Q)$ e $p_0 \in L^2(\Omega)$.

Lembre que o sistema adjunto associado é dado por

$$\begin{cases} w_t(t,x) + \Delta w(t,x) - a(t,x)w(t,x) - H_t^T * w = f_1(t,x) \quad \text{em} \quad Q; \\ \\ w(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ \\ w(T,x) = w_T(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

onde $H_t^T * w = \displaystyle\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau$, $f_1 \in L^2(Q)$ e $w_T \in L^2(\Omega)$.

Definição 5.0.1. *Dizemos que o sistema* (5.1) *é aproximadamente controlável em* $L^2(\Omega)$ *se, dado* $T > 0$, *para todo* $p_0(x), p_T(x) \in L^2(\Omega)$ *e* $\varepsilon > 0$, *existe um controle* $u \in L^2(Q_\omega)$ *tal que a solução correspondente* p *de* (5.1) *satisfaz*

$$|p(T, x) - p_T(x)|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon \quad em \quad \Omega.$$

Nesta capítulo, iremos provar a controlabilidade aproximada do sistema (5.1) como uma aplicação da Desigualdade de Carleman (Teorema 3.0.1).

Teorema 5.0.1. *Fixe* $T > 0$. *Então, dado* $p_0(x), p_T(x) \in L^2(\Omega)$ *e* $\varepsilon > 0$, *existe um controle* $u \in L^2(Q_\omega)$ *tal que a solução correspondente* p *de* (5.1) *satisfaz*

$$|p(T, x) - p_T(x)|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon \quad em \quad \Omega.$$

Demonstração: Com efeito, pela linearidade do sistema (5.1), é suficiente provarmos a controlabilidade aproximada para tal sistema considerando $p_0(x) = 0$, ou seja, é suficiente considerarmos o sistema:

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + a(t,x)p + H_0^t * p = \chi_\omega u \quad \text{em} \quad Q; \\ p = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p(0) = p_0 = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{5.3}$$

De fato, suponha que o Teorema 5.0.1 seja válido para o sistema (5.3), onde $p_0 = 0, u \in L^2(Q_\omega)$ e p é a solução correspondente do sistema (5.3). Assim, dado $p_0 \in L^2(\Omega)$, existe um controle $u \equiv 0$ e uma solução correspondente $\widehat{p}$ de (5.1)(isso é possível pois o sistema (5.1) possui solução para qualquer valor do lado direito), isto é, $\widehat{p}$ satisfaz:

$$\begin{cases} \widehat{p}_t - \Delta \widehat{p} + a(t,x)\widehat{p} + H_0^t * \widehat{p} = 0 \quad \text{em} \quad Q; \\ \widehat{p} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ \widehat{p}(0) = p_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{5.4}$$

Como o sistema é linear, então pelo princípio da superposição de soluções, $\widetilde{p} = p - \widehat{p}$ é também solução do sistema (5.1), com $\widetilde{p}(0) = 0$, ou seja, $\widetilde{p}$ satisfaz:

$$\begin{cases} \widetilde{p}_t - \Delta\widetilde{p} + a(t,x)\widetilde{p} + H_0^t * \widetilde{p} = \chi_\omega u \quad \text{em} \quad Q; \\ \widetilde{p} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ \widetilde{p}(0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5.5}$$

isto é,

$$\begin{cases} (p - \widehat{p})_t - \Delta(p - \widehat{p}) + a(t,x)(p - \widehat{p}) + H_0^t * (p - \widehat{p}) = \chi_\omega u \quad \text{em} \quad Q; \\ p - \widehat{p} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ (p - \widehat{p})(0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + a(t,x)p + H_0^t * p - \left(\widehat{p}_t - \Delta\widehat{p} + a(t,x)\widehat{p} + H_0^t * \widehat{p}\right) = \chi_\omega u \quad \text{em} \quad Q; \\ p = \widehat{p} \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p(0) = \widehat{p}(0) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases}$$

Assim, do sistema (5.4), concluímos que p satisfaz:

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + a(t,x)p + H_0^t * p = \chi_\omega u \quad \text{em} \quad Q; \\ p = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p(0) = p_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases}$$

Portanto, é suficiente considerarmos o sistema (5.3).

Dessa forma, definamos o seguinte conjunto:

$$A_L(T) := \left\{p(T,x);\ p \text{ é solução de (5.3), com } u \in L^2(Q_\omega)\right\}.$$

$A_L(T)$ é chamado de conjunto dos estados admissíveis para o problema linear. Assim, para provarmos a controlabilidade aproximada é suficiente provarmos que $A_L(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$, isto é, que $\overline{A_L(T)} = L^2(\Omega)$.

De fato, suponha por absurdo que $A_L(T)$ não seja denso em $L^2(\Omega)$. Então, existe uma função $w_T(x)$ não identicamente nula pertencente ao complemento ortogonal de $A_L(T)$

em $L^2(\Omega)$. Dessa maneira, com $w_T(x)$, consideremos o sistema adjunto (5.2) com $f_1 = 0$ (isso é possível pois tal sistema possui solução para qualquer valor do lado direito):

$$\begin{cases} w_t(t,x) + \Delta w(t,x) - a(t,x)w(t,x) - H_t^T * w = 0 \quad \text{em} \quad Q; \\ w(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ w(T,x) = w_T(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5.6}$$

onde $H_t^T * w = \displaystyle\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau$.

Agora, multiplicando por p a equação em (5.6), solução do sistema (5.3), e integrando em Q, obtemos:

$$\int_Q w_t p \, dxdt + \int_Q \Delta w p \, dxdt - \int_Q a(t,x) w p \, dxdt - \int_Q \left(H_t^T * w\right) p \, dxdt = 0. \tag{5.7}$$

Observe que, usando integração por partes, resulta que:

$$\begin{aligned} \int_Q w_t p \, dxdt &= \int_\Omega \left[\int_0^T w_t p \, dt\right] dx \\ &= \int_\Omega \left[(wp)\Big|_0^T - \int_0^T w p_t \, dt\right] dx \\ &= \int_\Omega \left[w(T)p(T) - w(0)p(0) - \int_0^T w p_t \, dt\right] dx \\ &= \int_\Omega \left[w_T p(T) - w(0)p_0 - \int_0^T w p_t \, dt\right] dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_Q w_t p \, dxdt = \int_\Omega w_T p(T) \, dx - \int_\Omega w(0)p_0 \, dx - \int_Q w p_t \, dxdt. \tag{5.8}$$

Como sabemos de (5.3) que $p_0 = 0$ em Ω e que w_T pertence ao complemento ortogonal de $A_L(T)$, então $w_T \perp p(T)$ e assim temos que:

$$\int_\Omega w_T p(T) \, dx = \int_\Omega w(0)p_0 \, dx = 0. \tag{5.9}$$

Substituindo (5.9) em (5.8), resulta que:

$$\int_Q w_t p \, dxdt = -\int_Q p_t w \, dxdt. \tag{5.10}$$

Também, pela Fórmula de Green (Teorema 1.6.4) e sabendo de (5.3) e (5.6) que $p = w = 0$ sobre Σ, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_Q \Delta wp \, dxdt &= -\int_Q \langle \nabla w, \nabla p\rangle \, dxdt + \int_\Sigma p w_\eta \, d\Sigma \\ &= -\int_Q \langle \nabla w, \nabla p\rangle \, dxdt + 0 \\ &= -\int_Q \langle \nabla w, \nabla p\rangle \, dxdt + \int_\Sigma w p_\eta \, d\Sigma \\ &= \int_Q \Delta p w \, dxdt,\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_Q \Delta wp \, dxdt = \int_Q \Delta pw \, dxdt. \tag{5.11}$$

Finalmente, dos cálculos feitos para obtermos o sistema adjunto (2.15), segue que:

$$\int_Q \big(H_t^T * w\big) p \, dxdt = \int_Q \big(H_0^t * p\big) w \, dxdt. \tag{5.12}$$

Portanto, substituindo (5.10), (5.11) e (5.12) em (5.7), obtemos:

$$-\int_Q p_t w \, dxdt + \int_Q \Delta p w \, dxdt - \int_Q a(t,x) wp \, dxdt - \int_Q \big(H_0^t * p\big) w \, dxdt = 0,$$

ou seja,

$$-\int_Q \Big(p_t - \Delta p + a(t,x)p + H_0^t * p\Big) w \, dxdt = 0,$$

e como p satisfaz (5.3), resulta que:

$$-\int_Q \chi_\omega u w \, dxdt = 0 \quad \forall\, u \in L^2(Q_\omega).$$

Daí, como

$$\begin{aligned}-\int_Q \chi_\omega u w \, dxdt &= -\int_{Q_\omega} \chi_\omega u w \, dxdt - \int_{Q \setminus Q_\omega} \chi_\omega u w \, dxdt \\ &= -\int_{Q_\omega} u w \, dxdt,\end{aligned}$$

já que $\chi_\omega = 0$ em $Q \setminus Q_\omega$, então

$$-\int_{Q_\omega} u w \, dxdt = 0 \quad \forall\, u \in L^2(Q_\omega),$$

e pelo Lema de Du Bois-Raymond (Lema 1.3.1), concluímos que:

$$w(t,x) = 0 \text{ q.s. em } Q_\omega. \tag{5.13}$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Carleman (Teorema 3.0.1), considerando $f_1 = 0$, encontramos que:

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\, dxdt \\
&\leqslant \int_Q \left[(s\phi)^{-1}\left(|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + |H_t^T * w|^2\right) + s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 + s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\right] e^{2s\alpha}\, dxdt \\
&\leqslant \widetilde{C}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\, dxdt,
\end{aligned}$$

e por (5.13), segue que:

$$\int_Q e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3|w|^2\, dxdt \quad \leqslant 0 \text{ q.s. em } Q_\omega,$$

ou seja,

$$w(t,x) = 0 \text{ q.s. em } Q,$$

o que é um absurdo já que supomos $w_T(x)$ não identicamente nula. Portanto, $A_L(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$ e assim o sistema (5.1) é aproximadamente controlável.

■

Capítulo 6

Controle Nulo: Sistema Linear

A controlabilidade nula é um conceito fundamental na teoria do controle que se refere à capacidade de levar o estado de um sistema a um estado específico, no caso, o estado nulo (origem), em um tempo finito, utilizando uma entrada (controle) adequada. Em outras palavras, é a habilidade de "parar"completamente o sistema a partir de qualquer condição inicial (veja [12]).

Neste capítulo vamos provar a controlabilidade nula para o sistema linear (2.7) associado ao sistema principal não linear (2.1).

Considere o sistema linear (2.7):

$$\begin{cases} p_t(t,x) - \Delta p(t,x) + a(t,x)p(t,x) + H_0^t * p = \chi_\omega u(t,x) \quad \text{em} \quad Q; \\ \\ p(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ \\ p(0,x) = p_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

onde $H_0^t * p = \displaystyle\int_0^t h(t,\tau)p(\tau,x)\,d\tau$, $a(t,x) = f(\overline{p}(t,x))$, com $|a(t,x)| \leqslant M, u \in L^2(Q)$ e $p_0 \in L^2(\Omega)$. Considere também o sistema adjunto associado:

$$\begin{cases} w_t(t,x) + \Delta w(t,x) - a(t,x)w(t,x) - H_t^T * w = f_1(t,x) \quad \text{em} \quad Q; \\ \\ w(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ \\ w(T,x) = w_T(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.2}$$

onde $H_t^T * w = \displaystyle\int_t^T h(\tau,t)w(\tau,x)\,d\tau$, $f_1 \in L^2(Q)$ e $w_T \in L^2(\Omega)$.

Dessa forma, para mostrar que o sistema (6.1) é nulamente controlável, com $p_0 \in L^2(\Omega)$, precisamos provar o seguinte teorema:

Teorema 6.0.1. *Dado* $p_0 \in L^2(\Omega)$ *e* $T > 0$*, existe um controle* $u \in L^2(Q)$ *tal que a correspondente solução fraca* $p \in W\big(0, T; H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega)\big)$ *para o sistema* (6.1) *satisfaz*

$$p(T, x) = 0 \ \text{ q.s. em } \Omega.$$

Além disso, o controle $u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ *satisfaz*

$$\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2 \, dxdt \leqslant \widetilde{C_4} \int_\Omega |p_0|^2 \, dx,$$

onde $\widetilde{C_4}$ *é uma constante positiva.*

Demonstração: A prova do Teorema 6.0.1 será feita através de um método variacional aplicando a Desigualdade de Observabilidade (Teorema 4.0.1). Inicialmente, mostraremos o seguinte resultado:

Afirmação 6.0.1. *Para* $s \geqslant s_0$ *e* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *suficientemente grandes, existe uma constante* $\widetilde{C_2} = \widetilde{C_2}(\lambda) > 0$ *tal que*

$$e^{-2s\alpha}\phi^{-3} \geqslant \widetilde{C_2}.$$

Com efeito, suponhamos que $\lambda \geqslant \lambda_0$ suficientemente grande de modo que $2 \leqslant e^{\lambda||\psi||}$. Assim, como $e^{\lambda\psi} \leqslant e^{\lambda||\psi||}$, temos que:

$$e^{\lambda\psi} + e^{\lambda||\psi||} \leqslant e^{\lambda||\psi||} + e^{\lambda||\psi||} = 2e^{\lambda||\psi||} \leqslant e^{\lambda||\psi||}e^{\lambda||\psi||} = e^{2\lambda||\psi||},$$

ou seja,

$$e^{\lambda||\psi||} \leqslant e^{2\lambda||\psi||} - e^{\lambda\psi} = -\left(\frac{e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}\right)\beta(t) = -\alpha\beta(t),$$

implicando em

$$-\alpha \geqslant \frac{e^{\lambda||\psi||}}{\beta(t)},$$

donde resulta que:

$$-2s\alpha \geqslant 2s\frac{e^{\lambda||\psi||}}{\beta(t)} \geqslant \frac{1}{\beta(t)},$$

ou seja,

$$e^{-2s\alpha} \geqslant e^{\frac{1}{\beta(t)}}. \tag{6.3}$$

Também, temos que:

$$\phi = \frac{e^{\lambda\psi}}{\beta(t)} \leqslant \frac{e^{\lambda||\psi||}}{\beta(t)},$$

implicando em

$$\phi^{-3} \geqslant \frac{\beta(t)^3}{e^{3\lambda||\psi||}}. \tag{6.4}$$

Portanto, de (6.3) e (6.4), segue que:

$$e^{-2s\alpha}\phi^{-3} \geqslant e^{\frac{1}{\beta(t)}} \frac{\beta(t)^3}{e^{3\lambda||\psi||}}. \tag{6.5}$$

Daí, sabendo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\beta(t)} = \infty,$$

então vale que:

$$\lim_{t\to 0^+} e^{\frac{1}{\beta(t)}} \beta(t)^3 = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\beta(t)}}}{\left(\frac{1}{\beta(t)}\right)^3} = \infty.$$

Assim, existe $T_1 > 0$ tal que

$$e^{\frac{1}{\beta(t)}} \beta(t)^3 \geqslant 1, \quad 0 < t < T_1 < T.$$

Analogamente, como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to T^-} \frac{1}{\beta(t)} = \infty,$$

então

$$\lim_{t\to T^-} e^{\frac{1}{\beta(t)}} \beta(t)^3 = \infty.$$

Assim, existe $T_2 > 0, T_2 > T_1$, tal que

$$e^{\frac{1}{\beta(t)}} \beta(t)^3 \geqslant 1, \quad 0 < T_1 < T_2 < t < T.$$

Agora, consideremos o conjunto compacto $[T_1, T_2]$. Dessa forma, como a função $t \longmapsto e^{\frac{1}{\beta(t)}} \beta(t)^3$ é contínua em $[T_1, T_2]$, segue que existe uma constante $C_{20} > 0$ tal que

$$e^{\frac{1}{\beta(t)}} \beta(t)^3 \geqslant C_{20} \quad \forall\, t \in [T_1, T_2].$$

Tomando $C_{21} = \max\{1, C_{20}\}$, então

$$e^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta(t)^3 \geqslant C_{21} \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{6.6}$$

Portanto, substituindo (6.6) em (6.5) e tomando $\widetilde{C_2} = \dfrac{C_{21}}{e^{3\lambda||\psi||}}$, concluímos que:

$$e^{-2s\alpha}\varphi^{-3} \geqslant \widetilde{C_2},$$

e assim a Afirmação 6.0.1 está provada.

Agora, para cada s, λ, definimos o espaço:

$$L^2(Q, e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}) := \Big\{u : Q \to \mathbb{R}; \int_Q e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}u^2\, dxdt < \infty\Big\}.$$

Além disso, para cada $\varepsilon > 0$, definimos o funcional:

$$N_\varepsilon(u,p) := \int_Q e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}u^2\, dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega p(T,x)^2\, dx,$$

onde $u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\varphi^{-3})$, $p \in W\big(0,T; H^1_0(\Omega); H^{-1}(\Omega)\big)$ é a correspondente solução fraca para o sistema linear (6.1) e $p_0 \in L^2(\Omega)$. Posto isso, provemos a seguinte resultado:

Afirmação 6.0.2. *O funcional* N_ε *é semi-contínuo inferiormente, estritamente convexo e coercivo em* $L^2(Q)$ *e portanto, existe um único controle* $u_\varepsilon \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\varphi^{-3})$ *e* $p \in W\big(0,T; H^1_0(\Omega); H^{-1}(\Omega)\big)$ *a correspondente solução fraca para o sistema linear* (6.1) *tal que*

$$N_\varepsilon(u_\varepsilon, p_\varepsilon) = \min\big\{N_\varepsilon(u,p), u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\varphi^{-3})\big\}.$$

Com efeito, inicialmente, temos que:

- N_ε é estritamente convexo.

Inicialmente, seja X um espaço com produto interno qualquer e $|\cdot|_X$ uma norma em X. Então, dados $a, b \in X$ com $|a|_X \neq |b|_X$ e $\gamma \in [0,1]$, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.1.1), temos que:

$$\begin{aligned}
|(1-\gamma)a - \gamma b|^2_X &\leqslant \big[(1-\gamma)|a|_X + \gamma|b|_X\big]^2 \\
&= \Big\langle \big(\sqrt{1-\gamma}, \sqrt{\gamma}\big), \big(\sqrt{1-\gamma}|a|_X, \sqrt{\gamma}|b|_X\big)\Big\rangle^2 \\
&\leqslant \Big|\big(\sqrt{1-\gamma}, \sqrt{\gamma}\big)\Big|^2 \Big|\big(\sqrt{1-\gamma}|a|_X, \sqrt{\gamma}|b|_X\big)\Big|^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$|(1-\gamma)a-\gamma b|_X^2 \quad < (1-\gamma)|a|_X^2+\gamma|b|_X^2. \tag{6.7}$$

Assim, dados os controles $u_1, u_2 \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$, com $u_1 \neq u_2$ e

$$p_1, p_2 \in W\big(0,T; H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega)\big)$$

suas respectivas soluções fracas para o sistema (6.1), consideremos $\overline{u} = (1-\gamma)u_1 + \gamma u_2$ e $\overline{p} = (1-\gamma)p_1 + \gamma p_2$, onde $\gamma \in [0,1]$. Dessa forma, segue que:

$$\begin{aligned}
&N_\varepsilon\big(\overline{u},\overline{p}\big)\\
&= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\overline{u}^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \overline{p}(T)^2\,dx\\
&= \int_Q \big(e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}\overline{u}\big)^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \overline{p}(T)^2\,dx\\
&= \big|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}\overline{u}\big|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\big|\overline{p}(T)\big|^2_{L^2(\Omega)}\\
&= \big|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}\big((1-\gamma)u_1+\gamma u_2\big)\big|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\big|\big((1-\gamma)p_1+\gamma p_2\big)(T)\big|^2_{L^2(\Omega)}\\
&= \big|(1-\gamma)e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}u_1+\gamma e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}u_2\big|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\big|(1-\gamma)p_1(T)+\gamma p_2(T)\big|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

e de (6.7), resulta que:

$$\begin{aligned}
N_\varepsilon\big(\overline{u},\overline{p}\big) \quad &< (1-\gamma)\big|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}u_1\big|^2_{L^2(Q)} + \gamma\big|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}u_2\big|^2_{L^2(Q)}\\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}(1-\gamma)\big|p_1(T)\big|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\gamma\big|p_2(T)\big|^2_{L^2(\Omega)}\\
&= (1-\gamma)\Big(\big|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}u_1\big|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\big|p_1(T)\big|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\quad + \gamma\Big(\big|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}u_2\big|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\big|p_2(T)\big|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&= (1-\gamma)\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_1^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega p_1(T)^2\,dx\bigg)\\
&\quad + \gamma\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_2^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega p_2(T)^2\,dx\bigg)\\
&= (1-\gamma)N_\varepsilon(u_1,p_1) + \gamma N_\varepsilon(u_2,p_2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$N_\varepsilon\big((1-\gamma)u_1+\gamma u_2,(1-\gamma)p_1+\gamma p_2\big) \quad < (1-\gamma)N_\varepsilon(u_1,p_1)+\gamma N_\varepsilon(u_2,p_2),$$

e assim concluímos que N_ε é estritamente convexo.

- <u>N_ε é coercivo</u>.

Usando a Afirmação 6.0.1, resulta que:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(u,p) &= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega p(T)^2\,dx \\ &\geqslant \widetilde{C_2}\int_Q u^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega p(T)^2\,dx \\ &\geqslant \widetilde{C_2}\int_Q u^2\,dxdt \\ &= \widetilde{C_2}|u|^2_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$N_\varepsilon(u,p) \quad \geqslant \widetilde{C_2}|u|^2_{L^2(Q)},$$

e assim $N_\varepsilon(u,p)$ é coercivo.

- <u>N_ε é semi-contínuo inferiormente</u>.

Sejam $\{u_m\}_m \subset L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ uma sequência tal que $u_m \to u$ em $L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ e seja $\{p_m\}_m \subset L^2(Q)$ a sequência das correspondentes soluções fracas para o sistema linear (6.1). Daí, como o sistema (6.1) está bem-posto, segue que $p_m \to p$ em $L^2(Q)$. Portanto,

$$\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_m^2\,dxdt \to \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2\,dxdt,$$

e

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega p_m(T)^2\,dx \to \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega p(T)^2\,dx,$$

e assim,

$$N_\varepsilon(u_m,,p_m) \to N_\varepsilon(u,p).$$

Assim, como N_ε é semi-contínuo inferiormente, estritamente convexo e coercivo, segue que existe um único controle $u_\varepsilon \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ e $p_\varepsilon \in W\big(0,T; H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega)\big)$ a correspondente solução fraca para o sistema linear (6.1) tal que

$$N_\varepsilon(u_\varepsilon,p_\varepsilon) = \min\left\{N_\varepsilon(u,p), u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})\right\}.$$

Agora, provaremos o seguinte resultado:

Afirmação 6.0.3. *Seja* $u_\varepsilon \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ *o mínimo do funcional* N_ε. *Dessa forma, temos*

$$u_\varepsilon = \chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon \text{ q.s. em } Q,$$

com $w_\varepsilon \in W\big(0, T; H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega)\big)$ *solução fraca para o sistema adjunto*

$$\begin{cases} (w_\varepsilon)_t + \Delta w_\varepsilon - a(t,x)w_\varepsilon - H_t^T * w_\varepsilon = 0 \quad \text{em} \quad Q; \\ w_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ w_\varepsilon(T) = -\dfrac{1}{\varepsilon}p_\varepsilon(T) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.8}$$

onde p_ε *é a solução fraca associada ao controle* u_ε *para o sistema linear* (6.1)*, isto é,* p_ε *satisfaz*

$$\begin{cases} (p_\varepsilon)_t - \Delta p_\varepsilon + a(t,x)p_\varepsilon + H_0^t * p_\varepsilon = \chi_\omega u_\varepsilon \quad \text{em} \quad Q; \\ p_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p_\varepsilon(0) = p_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{6.9}$$

Com efeito, como o sistema (6.1) é linear, então dado um controle

$$u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3}),$$

podemos escrever a correspondente solução fraca p para o sistema (6.1) da forma $p = \widehat{p} + \widetilde{p}$, onde $\widehat{p}$ é a solução fraca para o sistema:

$$\begin{cases} \widehat{p}_t - \Delta\widehat{p} + a(t,x)\widehat{p} + H_0^t * \widehat{p} = 0 \quad \text{em} \quad Q; \\ \widehat{p} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ \widehat{p}(0) = p_0 \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases} \tag{6.10}$$

e $\widetilde{p}$ é a solução fraca para o sistema:

$$\begin{cases} \widetilde{p}_t - \Delta\widetilde{p} + a(t,x)\widetilde{p} + H_0^t * \widetilde{p} = \chi_\omega u \quad \text{em} \quad Q; \\ \widetilde{p} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ \widetilde{p}(0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{6.11}$$

Observe que $\widehat{p}$ não depende do controle u e escrevemos

$$p_u = \widehat{p} + \widetilde{p}_u, \quad \forall u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3}) \tag{6.12}$$

para indicar tal independência.

Observe também que, dado um controle $u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$, existe uma única solução $\widetilde{p}_u$ para o sistema (6.11) e assim, definimos a seguinte função:

$$\begin{aligned} L: \ L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3}) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u \qquad\qquad &\longmapsto Lu(t,x) = \widetilde{p}_u(T,x). \end{aligned}$$

Note que L é linear. De fato, dados os controles $u, v \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, então:

$$\begin{aligned} L(\gamma u + v) &= \widetilde{p}_{(\gamma u + v)}(T) \\ &= \big(\gamma \widetilde{p}_u + \widetilde{p}_v\big)(T) \\ &= \gamma \widetilde{p}_u(T) + \widetilde{p}_v(T) \\ &= \gamma L u + L v. \end{aligned}$$

Dessa maneira, em (6.12) encontramos que:

$$p_u = \widehat{p} + Lu \quad \forall u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3}). \tag{6.13}$$

Posto isso, podemos reescrever $N_\varepsilon(u,p) = J_\varepsilon(u)$, onde

$$J_\varepsilon(u) = \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(\widehat{p}(T) + Lu\big)^2\,dx.$$

Daí, como

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \min\big\{J_\varepsilon(u);\, u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})\big\},$$

então a derivada de Gateaux de J_ε em u_ε é nula em todas as direções $v \in L^2(Q)$, ou seja,

$$\lim_{h\to 0} \frac{J_\varepsilon(u_\varepsilon + hv) - J_\varepsilon(u_\varepsilon)}{h} = 0 \quad \forall v \in L^2(Q). \tag{6.14}$$

Por outro lado, note que:

$$\begin{aligned}
&J_\varepsilon(u_\varepsilon + h\nu) \\
&= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\big(u_\varepsilon + h\nu\big)^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(\widehat{p}(T) + L(u_\varepsilon + h\nu)\big)^2\,dx \\
&= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\big(u_\varepsilon + h\nu\big)^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(\big(p_\varepsilon(T) - Lu_\varepsilon\big) + L(u_\varepsilon + h\nu)\big)^2\,dx \\
&= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\big(u_\varepsilon + h\nu\big)^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T) - Lu_\varepsilon + Lu_\varepsilon + hL\nu\big)^2\,dx \\
&= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\big(u_\varepsilon + h\nu\big)^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T) + hL\nu\big)^2\,dx,
\end{aligned}$$

e então:

$$\begin{aligned}
&J_\varepsilon(u_\varepsilon + h\nu) \\
&= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\big(u_\varepsilon^2 + 2hu_\varepsilon\nu + h^2\nu^2\big)\,dxdt \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(\big(p_\varepsilon(T)\big)^2 + 2h\big(p_\varepsilon(T)\big)L\nu + h^2\big(L\nu\big)^2\big)\,dx \\
&= \left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon^2\,dxdt + 2h\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon\nu\,dxdt + h^2\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\nu^2\,dxdt\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx + 2h\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)L\nu\,dx + h^2\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(L\nu\big)^2\,dx\right) \\
&= \left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx\right) \\
&\quad + 2h\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon\nu\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)L\nu\,dx\right) \\
&\quad + h^2\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\nu^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(L\nu\big)^2\,dx\right),
\end{aligned}$$

e como $\big(p_\varepsilon(T)\big)^2 = \big(\widehat{p}(T) + Lu_\varepsilon\big)^2$, segue que:

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u_\varepsilon + h\nu) \;&= \left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(\widehat{p}(T) + Lu_\varepsilon\big)^2\,dx\right) \\
&\quad + 2h\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon\nu\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)L\nu\,dx\right) \\
&\quad + h^2\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\nu^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(L\nu\big)^2\,dx\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u_\varepsilon + h v) &= J_\varepsilon(u_\varepsilon) + 2h\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon v\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)Lv\,dx\right)\\ &\quad + h^2\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}v^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(Lv\big)^2\,dx\right), \end{aligned}$$

donde encontramos que:

$$\begin{aligned} \frac{J_\varepsilon(u_\varepsilon + h v) - J_\varepsilon(u_\varepsilon)}{h} &= 2\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon v\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)Lv\,dx\right)\\ &\quad + h\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}v^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(Lv\big)^2\,dx\right), \end{aligned}$$

e assim fazendo $h \to 0$, obtemos que:

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0}\frac{J_\varepsilon(u_\varepsilon + h v) - J_\varepsilon(u_\varepsilon)}{h}\\ &= 2\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon v\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)Lv\,dx\right) \quad \forall\, v \in L^2(Q). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Portanto, de (6.14) e (6.15), concluímos que:

$$2\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon v\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)Lv\,dx\right) = 0 \quad \forall\, v \in L^2(Q),$$

isto é,

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)Lv\,dx = \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon v\,dxdt \quad \forall\, v \in L^2(Q).$$

Dessa forma, como $Lv = \widetilde{p}_v(T)$, denotando $z(T) = \widetilde{p}_v(T)$, temos que:

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)z(T)\,dx = \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon v\,dxdt \quad \forall\, v \in L^2(Q), \tag{6.16}$$

onde z é a solução fraca para o sistema (6.11), ou seja, z satisfaz:

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + a(t,x)z + H_0^t * z = \chi_\omega v \quad \text{em} \quad Q;\\[2ex] z = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma;\\[2ex] z(0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{6.17}$$

Agora, multiplicando por w_ε a equação em (6.17), solução fraca do sistema (6.8), e integrando em Q, obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_Q z_t w_\varepsilon\,dxdt - \int_Q (\Delta z)w_\varepsilon\,dxdt + \int_Q a(t,x)zw_\varepsilon\,dxdt + \int_Q \big(H_0^t * z\big)w_\varepsilon\,dxdt\\ &= \int_Q \chi_\omega v w_\varepsilon\,dxdt. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Analisemos os termos de (6.18).

Por integração por partes e sabendo de (6.8) e (6.17) que $w_\varepsilon(T) = -\dfrac{1}{\varepsilon}p_\varepsilon(T)$ e $z(0) = 0$ em Ω, encontramos que:

$$\begin{aligned}
\int_Q z_t w_\varepsilon \, dxdt &= \int_\Omega \left[\int_0^T z_t w_\varepsilon \, dt\right] dx \\
&= \int_\Omega \left[\big(z w_\varepsilon\big)\Big|_0^T - \int_0^T z\big(w_\varepsilon\big)_t \, dt\right] dx \\
&= \int_\Omega \left[z(T)w_\varepsilon(T) - z(0)w_\varepsilon(0) - \int_0^T z\big(w_\varepsilon\big)_t \, dt\right] dx \\
&= \int_\Omega \left[-\frac{1}{\varepsilon}z(T)p_\varepsilon(T) - \int_0^T z\big(w_\varepsilon\big)_t \, dt\right] dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_Q z_t w_\varepsilon \, dxdt = -\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega p_\varepsilon(T)z(T)\, dx - \int_Q \big(w_\varepsilon\big)_t z \, dxdt. \tag{6.19}$$

Também, pela Fórmula de Green (Teorema 1.6.4) e sabendo de (6.8) e (6.17) que $z = w_\varepsilon = 0$ sobre Σ, obtemos que:

$$\begin{aligned}
-\int_Q (\Delta z) w_\varepsilon \, dxdt &= \int_Q \langle \nabla z, \nabla w_\varepsilon\rangle \, dxdt - \int_\Sigma w_\varepsilon z_\eta \, d\Sigma \\
&= \int_Q \langle \nabla z, \nabla w_\varepsilon\rangle \, dxdt \\
&= \int_Q \langle \nabla z, \nabla w_\varepsilon\rangle \, dxdt - \int_\Sigma z(w_\varepsilon)_\eta \, d\Sigma \\
&= -\int_Q \big(\Delta w_\varepsilon\big) z \, dxdt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$-\int_Q (\Delta z) w_\varepsilon \, dxdt = -\int_Q \big(\Delta w_\varepsilon\big) z \, dxdt. \tag{6.20}$$

Além disso, dos cálculos feitos para obtermos o sistema adjunto (2.15), segue que:

$$\int_Q \big(H_0^t * z\big) w_\varepsilon \, dxdt = \int_Q \big(H_t^T * w_\varepsilon\big) z \, dxdt. \tag{6.21}$$

Assim, substituindo (6.19), (6.20) e (6.21) em (6.18), reulta que:

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega p_\varepsilon(T)z(T)\, dx - \int_Q \big(w_\varepsilon\big)_t z \, dxdt\right) - \int_Q \big(\Delta w_\varepsilon\big) z \, dxdt + \int_Q a(t,x) w_\varepsilon z \, dxdt \\
&+ \int_Q \big(H_t^T * w_\varepsilon\big) z \, dxdt = \int_Q \chi_\omega v w_\varepsilon \, dxdt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega p_\varepsilon(T)z(T)\,dx - \int_Q \Big(\big(w_\varepsilon\big)_t + \Delta w_\varepsilon - a(t,x)w_\varepsilon - H_t^T * w_\varepsilon\Big) z\,dxdt \\
&= \int_Q \chi_\omega v w_\varepsilon\,dxdt,
\end{aligned}
$$

e como $\big(w_\varepsilon\big)_t + \Delta w_\varepsilon - a(t,x)w_\varepsilon - H_t^T * w_\varepsilon = 0$, pelo sistema (6.8), segue que:

$$
-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega p_\varepsilon(T)z(T)\,dx = \int_Q \chi_\omega v w_\varepsilon\,dxdt \quad \forall\, v \in L^2(Q).
$$

Finalmente, de (6.16), concluímos que:

$$
\int_Q e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}u_\varepsilon v\,dxdt = \int_Q \chi_\omega v w_\varepsilon\,dxdt \quad \forall\, v \in L^2(Q),
$$

isto é,

$$
\int_Q \Big(e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}u_\varepsilon - \chi_\omega w_\varepsilon\Big) v\,dxdt = 0 \quad \forall\, v \in L^2(Q).
$$

Daí, pelo Lema de Du Bois-Raymond (Lema 1.3.1), segue que:

$$
e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}u_\varepsilon - \chi_\omega w_\varepsilon = 0 \quad \text{q.s. em } Q,
$$

ou seja,

$$
e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}u_\varepsilon = \chi_\omega w_\varepsilon \quad \text{q.s. em } Q,
$$

e portanto,

$$
u_\varepsilon = \chi_\omega e^{2s\alpha}\varphi^{3} w_\varepsilon \quad \text{q.s. em } Q,
$$

concluindo a prova da Afirmação 6.0.3.

Agora, considerando o sistema (6.8):

$$
\begin{cases}
(w_\varepsilon)_t + \Delta w_\varepsilon - a(t,x)w_\varepsilon - H_t^T * w_\varepsilon = 0 \quad \text{em} \quad Q; \\
w_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\
w_\varepsilon(T) = -\dfrac{1}{\varepsilon}p_\varepsilon(T) \quad \text{em} \quad \Omega
\end{cases}
$$

e usando o resultado da Afirmação 6.0.3 e sabendo que $\chi_\omega^2 = \chi_\omega$, o sistema (6.9) torna-se:

$$
\begin{cases}
(p_\varepsilon)_t - \Delta p_\varepsilon + a(t,x)p_\varepsilon + H_0^t * p_\varepsilon = \chi_\omega e^{2s\alpha}\varphi^{3} w_\varepsilon \quad \text{em} \quad Q; \\
p_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\
p_\varepsilon(0) = p_0 \quad \text{em} \quad \Omega.
\end{cases} \tag{6.22}
$$

Multiplicando por p_ε a equação em (6.8) e integrando em Q, obtemos:

$$\int_Q (w_\varepsilon)_t p_\varepsilon \, dxdt + \int_Q (\Delta w_\varepsilon) p_\varepsilon \, dxdt - \int_Q a(t,x) w_\varepsilon p_\varepsilon \, dxdt - \int_Q (H_t^T * w_\varepsilon) p_\varepsilon \, dxdt$$
$$= 0. \tag{6.23}$$

Analisemos os termos de (6.23).

De (6.8) e (6.9) e usando integração por partes, encontramos que:

$$\begin{aligned}
\int_Q (w_\varepsilon)_t p_\varepsilon \, dxdt &= \int_\Omega \left[\int_0^T (w_\varepsilon)_t p_\varepsilon \, dt \right] dx \\
&= \int_\Omega \left[(w_\varepsilon p_\varepsilon)\Big|_0^T - \int_0^T w_\varepsilon (p_\varepsilon)_t \, dt \right] dx \\
&= \int_\Omega \left[w_\varepsilon(T) p_\varepsilon(T) - w_\varepsilon(0) p_\varepsilon(0) - \int_0^T w_\varepsilon (p_\varepsilon)_t \, dt \right] dx \\
&= \int_\Omega \left[-\frac{1}{\varepsilon} \big(p_\varepsilon(T)\big)^2 - w_\varepsilon(0) p_0 - \int_0^T w_\varepsilon (p_\varepsilon)_t \, dt \right] dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_Q (w_\varepsilon)_t p_\varepsilon \, dxdt = -\frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2 dx - \int_\Omega w_\varepsilon(0) p_0 \, dx - \int_Q w_\varepsilon (p_\varepsilon)_t \, dxdt. \tag{6.24}$$

Também, pela Fórmula de Green (Teorema 1.6.4) e de (6.8) e (6.9), obtemos que:

$$\begin{aligned}
\int_Q (\Delta w_\varepsilon) p_\varepsilon \, dxdt &= -\int_Q \langle \nabla w_\varepsilon, \nabla p_\varepsilon \rangle \, dxdt + \int_\Sigma p_\varepsilon (w_\varepsilon)_\eta \, d\Sigma \\
&= -\int_Q \langle \nabla w_\varepsilon, \nabla p_\varepsilon \rangle \, dxdt \\
&= -\int_Q \langle \nabla w_\varepsilon, \nabla p_\varepsilon \rangle \, dxdt + \int_\Sigma w_\varepsilon (p_\varepsilon)_\eta \, d\Sigma \\
&= \int_Q (\Delta p_\varepsilon) w_\varepsilon \, dxdt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_Q (\Delta w_\varepsilon) p_\varepsilon \, dxdt = \int_Q (\Delta p_\varepsilon) w_\varepsilon \, dxdt. \tag{6.25}$$

Além disso, temos que:

$$\int_Q (H_t^T * w_\varepsilon) p_\varepsilon \, dxdt = \int_Q (H_0^t * p_\varepsilon) w_\varepsilon \, dxdt. \tag{6.26}$$

Agora, substituindo (6.24), (6.25) e (6.26) em (6.23), segue que:

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx-\int_\Omega w_\varepsilon(0)p_0\,dx-\int_Q w_\varepsilon\big(p_\varepsilon\big)_t\,dxdt\right)\\&+\int_Q (\Delta p_\varepsilon)w_\varepsilon\,dxdt-\int_Q a(t,x)w_\varepsilon p_\varepsilon\,dxdt-\int_Q \big(H_0^t * p_\varepsilon\big)w_\varepsilon\,dxdt=0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\int_Q \big(p_\varepsilon\big)_t w_\varepsilon\,dxdt-\int_Q (\Delta p_\varepsilon)w_\varepsilon\,dxdt+\int_Q a(t,x)w_\varepsilon p_\varepsilon\,dxdt+\int_Q \big(H_0^t * p_\varepsilon\big)w_\varepsilon\,dxdt\\&=-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx-\int_\Omega w_\varepsilon(0)p_0\,dx.\end{aligned}\tag{6.27}$$

Por outro lado, multiplicando por w_ε a equação em (6.22) e integrando em Q, obtemos:

$$\begin{aligned}&\int_Q \big(p_\varepsilon\big)_t w_\varepsilon\,dxdt-\int_Q (\Delta p_\varepsilon)w_\varepsilon\,dxdt+\int_Q a(t,x)p_\varepsilon w_\varepsilon\,dxdt+\int_Q \big(H_0^t * p_\varepsilon\big)w_\varepsilon\,dxdt\\&=\int_Q \chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt\\&=\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt\\&=\int_Q \big(p_\varepsilon\big)_t w_\varepsilon\,dxdt-\int_Q (\Delta p_\varepsilon)w_\varepsilon\,dxdt+\int_Q a(t,x)p_\varepsilon w_\varepsilon\,dxdt+\int_Q \big(H_0^t * p_\varepsilon\big)w_\varepsilon\,dxdt.\end{aligned}$$

Substituindo (6.27) na última expressão, resulta que:

$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt=-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx-\int_\Omega w_\varepsilon(0)p_0\,dx,$$

isto é,

$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx\ =-\int_\Omega w_\varepsilon(0)p_0\,dx,$$

e assim,

$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx\ =\left|\int_\Omega w_\varepsilon(0)p_0\,dx\right|.\tag{6.28}$$

Agora, pela Desigualdade de Hölder (Teorema 1.2.3), temos que:

$$\left|\int_\Omega w_\varepsilon(0)p_0\,dx\right|\leqslant\left(\int_\Omega w_\varepsilon(0)^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega p_0^2\,dx\right)^{\frac12}.\tag{6.29}$$

Usando a Desigualdade de Observabilidade (Teorema 4.0.1) com $w = w_\varepsilon$ e $f_1 = 0$ obtemos que:

$$\int_\Omega w_\varepsilon(0)^2\,dx \;\leqslant \widetilde{C_1}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt,$$

então,

$$\int_\Omega w_\varepsilon(0)^2\,dx \;\leqslant \widetilde{C_1}\bigg(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx\bigg). \tag{6.30}$$

Substituindo (6.30) em (6.29), resulta que:

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega w_\varepsilon(0)p_0\,dx\right|\\ &\leqslant \left(\widetilde{C_1}\bigg(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx\bigg)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega p_0^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{C_1}\int_\Omega p_0^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

e pela Desigualdade de Young (Teorema 1.2.1), segue que:

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega w_\varepsilon(0)p_0\,dx\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx + \frac{\widetilde{C_1}}{2}\int_\Omega p_0^2\,dx.\end{aligned} \tag{6.31}$$

Por conseguinte, substituindo (6.31) em (6.28), encontramos que:

$$\begin{aligned}&\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx + \frac{\widetilde{C_1}}{2}\int_\Omega p_0^2\,dx,\end{aligned}$$

e assim,

$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx \;\leqslant \widetilde{C_1}|p_0|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{6.32}$$

donde

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx \leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx \leqslant \widetilde{C_1}|p_0|^2_{L^2(\Omega)},$$

implicando em

$$\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx \;\leqslant \varepsilon\widetilde{C_1}|p_0|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall\,\varepsilon > 0,$$

que é equivalente à

$$p_\varepsilon(T) \to 0 \text{ em } L^2(\Omega), \text{ quando } \varepsilon \to 0$$

e assim existe uma subsequência de $\{p_\varepsilon\}_\varepsilon$, que ainda denotaremos por $\{p_\varepsilon\}_\varepsilon$, tal que

$$p_\varepsilon(T) \to 0 \text{ q.s. em } \Omega, \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{6.33}$$

Agora, pelas Afirmações 6.0.1 e 6.0.3, podemos deduzir que:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^2 &= \left(\chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon\right)\left(\chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon\right) \\ &= \left(e^{2s\alpha}\phi^3\right)\left(\chi_\omega^2 e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\widetilde{\widetilde{C_2}}}\left(\chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\right), \end{aligned} \tag{6.34}$$

donde

$$\int_Q u_\varepsilon^2 \, dxdt \leqslant \frac{1}{\widetilde{\widetilde{C_2}}}\int_Q \chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2 \, dxdt = \frac{1}{\widetilde{\widetilde{C_2}}}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2 \, dxdt,$$

e como sabemos de (6.32) que

$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2 \, dxdt \leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2 \, dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \left(p_\varepsilon(T)\right)^2 dx \leqslant \widetilde{C_1}\left|p_0\right|^2_{L^2(\Omega)},$$

então temos que:

$$\int_Q u_\varepsilon^2 \, dxdt \quad \leqslant \frac{1}{\widetilde{\widetilde{C_2}}}\widetilde{C_1}\left|p_0\right|^2_{L^2(\Omega)},$$

que é equivalente à

$$\left|u_\varepsilon\right|^2_{L^2(Q)} \quad \leqslant \frac{\widetilde{C_1}}{\widetilde{\widetilde{C_2}}}\left|p_0\right|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \text{(constante)}$$

ou seja, a sequência $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon \subset L^2(Q)$ é limitada em $L^2(Q)$. Como $L^2(Q)$ é um espaço de Banach reflexivo, então pelo Teorema de Kakutani (Teorema 1.1.2) a sequência $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ possui uma subsequência, que ainda denotaremos por $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$, que converge fracamente para um certo $u \in L^2(Q)$, ou seja,

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ em } L^2(Q), \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{6.35}$$

Dessa forma, consideremos o sistema em (6.9). Como $\{p_\varepsilon\}_\varepsilon \subset W\big(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)\big) \subset L^2(Q)$ é uma sequência limitada em $L^2(Q)$, então, pelos mesmos argumentos usados para obtermos (6.35), existe uma subsequência de $\{p_\varepsilon\}_\varepsilon$, que ainda denotaremos por $\{p_\varepsilon\}_\varepsilon$, que converge fracamente para um certo $p \in L^2(Q)$. Mas, como o sistema (6.9) está bem-posto, então p é a correspondente solução do sistema (6.9) associada ao controle u, limite fraco da sequência $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$. Assim, temos:

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p \text{ em } L^2(Q), \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Daí, pelo Teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.6.5), existe uma subsequência de $\{p_\varepsilon\}_\varepsilon$, que também denotaremos por $\{p_\varepsilon\}_\varepsilon$, que converge fortemente para p em $C\big([0,T];L^2(\Omega)\big) \subset L^2(Q)$, ou seja, temos:

$$p_\varepsilon \to p \ \text{ em } \ L^2(Q), \ \text{quando} \ \varepsilon \to 0. \tag{6.36}$$

Finalmente, concluímos que:

$$p_\varepsilon(t) \to p(t) \ \text{ q.s. em } \ \Omega \quad \forall\, t \in [0,T], \ \text{quando} \ \varepsilon \to 0,$$

em particular, temos que:

$$p_\varepsilon(T) \to p(T) \ \text{ q.s. em } \ \Omega, \ \text{quando} \ \varepsilon \to 0, \tag{6.37}$$

donde de (6.33) e pela unicidade do limite, segue que:

$$p(T,x) = 0 \ \text{ q.s. em } \ \Omega.$$

Além disso, de (6.34), segue que:

$$e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon^2 \leqslant u_\varepsilon^2 \leqslant \frac{1}{\widetilde{C_2}}\big(\chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\big),$$

implicando em

$$\widetilde{C_2}\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon^2\,dxdt \ \leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\varepsilon^2\,dxdt, \tag{6.38}$$

e de (6.32), deduzimos que:

$$\widetilde{C_2}\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\varepsilon^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \big(p_\varepsilon(T)\big)^2\,dx \ \leqslant \widetilde{C_1}\big|p_0\big|^2_{L^2(\Omega)},$$

donde fazendo $\varepsilon \to 0$ nessa última expressão e usando (6.35), obtemos que:

$$\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2\,dxdt \ \leqslant \widetilde{C_4}\int_\Omega |p_0|^2\,dx,$$

onde $\widetilde{C_4} = \dfrac{\widetilde{C_1}}{\widetilde{C_2}}$ e assim concluímos a demonstração de Teorema 6.0.1.

■

Capítulo 7

Controle Nulo: Sistema Não Linear

Neste capítulo, iremos provar a controlabilidade nula para o sistema principal não linear (2.1) como consequência da controlabilidade nula do sistema linear associado (Teorema 6.0.1) através do teorema do ponto fixo de Kakutani (Teorema 1.6.8).

Investigaremos a controlabilidade nula para o sistema parabólico não linear com memória:

$$\begin{cases} p_t(t,x) - \Delta p(t,x) + g(p(t,x)) + \displaystyle\int_0^t h(t,\tau)p(\tau,x)\,d\tau = \chi_\omega u(t,x) \quad \text{em} \quad Q; \\ p(t,x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p(0,x) = p_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

onde $u \in L^2(Q)$, $p_0 \in L^2(\Omega)$, g é globalmente Lipschitz, com $g(0) = 0$ e h suficientemente suave, com $h = 0\big|_{\tau=0,T}$.

Teorema 7.0.1. *Assuma que g é globalmente Lipschitz, com $g(0) = 0$. Então, para cada $p_0 \in L^2(\Omega)$ e $T > 0$, existe um controle $u \in L^2(Q)$ tal que a correspondente solução fraca $p \in W\big(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)\big)$ para o sistema (7.1) satisfaz*

$$p(T,x) = 0 \ \ \textit{q.s. em } \Omega.$$

Demonstração: Inicialmente, notemos que se

$$p \in W\big(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)\big),$$

então

$$p \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big) \quad \text{e} \quad p_t \in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big).$$

Por conveniência, vamos denotar $W\big(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)\big)=G$. Dessa forma, segue que:

$$|\cdot|_{W\left(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)\right)}=|\cdot|_G.$$

Consideremos o conjunto:

$$B:=\left\{\overline{p}\in W\big(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)\big);\big|\overline{p}(t)\big|_G\leqslant M \text{ q.s.}, t\in(0,T)\right\},$$

onde $M>0$ é uma constante.

Afirmação 7.0.1. B *é um conjunto convexo e compacto em* $L^2(Q)$.

- B é convexo.

De fato, dados $\overline{p_1},\overline{p_2}\in B$ e $\gamma\in[0,1]$, temos que:

$$\begin{aligned}\big|(1-\gamma)\overline{p_1}+\overline{p_2}\big|_G &\leqslant (1-\gamma)\big|\overline{p_1}\big|_G+\gamma\big|\overline{p_2}\big|_G\\ &\leqslant (1-\gamma)M+\gamma M\\ &=M,\end{aligned}$$

e assim B é convexo.

- B é compacto em $L^2(Q)$.

Seja $\{\overline{p_m}\}_m\subset B$ uma sequência de pontos em B. Vamos mostrar que $\{\overline{p_m}\}_m$ admite uma subsequência convergente em $L^2(Q)$. Com efeito, pela definição do conjunto B, para todo $m\in\mathbb{N}$, temos que:

$$|\overline{p_m}|_G\leqslant M,$$

e assim,

$$\begin{cases}|\overline{p_m}|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}\leqslant M\\ \big|\big(\overline{p_m}\big)_t\big|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)}\leqslant M,\end{cases}$$

ou seja, a sequência $\{\overline{p_m}\}_m$ é limitada em $L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$ e a sequência $\big\{\big(\overline{p_m}\big)_t\big\}_m$ é limitada em e $L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big)$. Daí, como

$$L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)\overset{c}{\hookrightarrow}L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)\hookrightarrow L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big),$$

com $L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$ reflexivo, pelo Teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.6.5) existem uma subsequência de $\{\overline{p_m}\}_m$, que ainda denotaremos por $\{\overline{p_m}\}_m$, e $p \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \subset L^2(Q)$ tal que

$$\overline{p_m} \to p \ \text{ em } \ L^2(Q), \ \text{quando } m \to \infty.$$

Assim, segue que B é compacto em $L^2(Q)$ e concluímos a prova da Afirmação 7.0.1.

Posto isso, para cada $\overline{p} \in B$, $p_0 \in L^2(\Omega)$ e $u \in L^2\big(e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\big)$, considere o sistema linear:

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + f(\overline{p})p + H_0^t * p = \chi_\omega u \quad \text{em} \quad Q; \\ p = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p(0) = p_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{7.2}$$

onde

$$f(p) = \begin{cases} \dfrac{g(p)}{p}, \quad \text{se} \quad |p| > 0; \\ g'(0), \quad \text{se} \quad p = 0. \end{cases}$$

Observe que o sistema (7.2) é a linearização do sistema não linear (7.1) já que, para $\overline{p} \in B$, $f(\overline{p}) = a(t,x)$ é uniformemente limitada. Dessa forma, para provarmos o Teorema 7.0.1, precisamos do seguinte resultado:

Proposição 7.0.1. *Para cada* $p_0 \in L^2(\Omega)$ *e* $u \in L^2(Q_\omega)$, *a correspondente solução* p *para o sistema linear* (7.2) *satisfaz*

$$|p|_R^2 \leqslant \widetilde{C_5}\Big(|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(Q_\omega)}\Big),$$

onde $R = C\big([0,T];L^2(\Omega)\big) \cap W\big(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)\big)$ *e* $\widetilde{C_5} > 0$ *é uma constante.*

Demonstração: Ver [1].

Defina a função de múltiplos valores $\Psi : B \to 2^B$, onde para cada $\overline{p} \in B$, temos:

$$\Psi(\overline{p}) := \left\{ \begin{array}{l} p \in W\big(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)\big); \text{ para } p_0 \in L^2(\Omega) \text{ e } u \in L^2\big(Q;e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\big), \\ p \text{ é solução fraca de (7.2) e } p(T,x) = 0 \text{ q.s. em } \Omega. \end{array} \right\} \tag{7.3}$$

Note que, para $p_0 \in L^2(\Omega), u \in L^2\big(Q;e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\big)$, existe $p \in W\big(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)\big)$ solução fraca para o sistema (7.2) conforme o Teorema 6.0.1. Portanto, $\Psi(\overline{p}) \neq \emptyset$ para todo $\overline{p} \in B$, e assim a função Ψ está bem-definida.

Agora, faremos a seguinte afirmação que será útil para o próximo resultado:

Afirmação 7.0.2. *Suponha que* $p_0 \in L^2(\Omega)$ *e*

$$p \in C\big([0,T];L^2(\Omega)\big) \cap W\big(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)\big).$$

Então,

$$|p(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_Q \Big(|p_t|^2 + |\Delta p|^2 + \big|H_0^t * p\big|^2\Big)\, dxdt \leqslant \widetilde{C_6}\Big(|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + |p_0|^2_{L^2(\Omega)}\Big) \quad \forall\, t \in [0,T],$$

onde $\widetilde{C_6}$ *é uma constante positiva.*

Com efeito, multiplicando por $p_t - \Delta p$ a equação em (7.2) e integrando em Ω, obtemos:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega p_t\big(p_t - \Delta p\big)\, dx - \int_\Omega \Delta p\big(p_t - \Delta p\big)\, dx + \int_\Omega f(\overline{p})p\big(p_t - \Delta p\big)\, dx\\ &+ \int_\Omega \big(H_0^t * p\big)\big(p_t - \Delta p\big)\, dx = \int_\Omega \chi_\omega u\big(p_t - \Delta p\big)\, dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&-2\int_\Omega p_t \Delta p\, dx + \int_\Omega |p_t|^2\, dx + \int_\Omega |\Delta p|^2\, dx\\ &= \int_\Omega \chi_\omega u\big(p_t - \Delta p\big)\, dx - \int_\Omega f(\overline{p})p\big(p_t - \Delta p\big)\, dx - \int_\Omega \big(H_0^t * p\big)\big(p_t - \Delta p\big)\, dx.\end{aligned}$$

Note que, pela Fórmula de Green (Teorema 1.6.4) e sabendo de (7.2) que $p = 0$ sobre Σ, segue que:

$$-2\int_\Omega p_t \Delta p\, dx = \Big(|p|^2_{H_0^1(\Omega)}\Big)_t$$

e assim,

$$\begin{aligned}&\Big(|p|^2_{H_0^1(\Omega)}\Big)_t + \int_\Omega \Big(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\Big)\, dx\\ &= \int_\Omega \chi_\omega u\big(p_t - \Delta p\big)\, dx - \int_\Omega f(\overline{p})p\big(p_t - \Delta p\big)\, dx - \int_\Omega \big(H_0^t * p\big)\big(p_t - \Delta p\big)\, dx.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Agora, usando as Desigualdades de Minkowski (Teorema 1.2.4) e de Young com ε

(Teorema 1.2.2) e sabendo que $\left|\chi_\omega\right| \leqslant 1$ e $|f(\overline{p})| \leqslant M$, encontramos que:

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \chi_\omega u\big(p_t - \Delta p\big)\, dx - \int_\Omega f(\overline{p}) p\big(p_t - \Delta p\big)\, dx - \int_\Omega \big(H_0^t * p\big)\big(p_t - \Delta p\big)\, dx \right| \\
&\leqslant \int_\Omega |u||p_t - \Delta p|\, dx + M \int_\Omega |p||p_t - \Delta p|\, dx + \int_\Omega \left|H_0^t * p\right| |p_t - \Delta p|\, dx \\
&\leqslant \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega |u|^2\, dx + \varepsilon \int_\Omega |p_t - \Delta p|^2\, dx + \frac{M}{4\varepsilon} \int_\Omega |p|^2\, dx + \varepsilon M \int_\Omega |p_t - \Delta p|^2\, dx \\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega \left|H_0^t * p\right|^2 dx + \varepsilon \int_\Omega |p_t - \Delta p|^2\, dx \\
&= \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega \left(|u|^2 + M|p|^2 + \left|H_0^t * p\right|^2 \right) dx + \varepsilon(M+2) \int_\Omega |p_t - \Delta p|^2\, dx,
\end{aligned}
$$

e como pela desigualdade de Young (Teorema 1.2.1) temos que:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |p_t - \Delta p|^2\, dx &\leqslant \int_\Omega \left(|p_t|^2 + 2|p_t||\Delta p| + |\Delta p|^2 \right) dx \\
&\leqslant \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |p_t|^2 + |\Delta p|^2 + |\Delta p|^2 \right) dx \\
&= 2 \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2 \right) dx,
\end{aligned}
$$

então

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \chi_\omega u\big(p_t - \Delta p\big)\, dx - \int_\Omega f(\overline{p}) p\big(p_t - \Delta p\big)\, dx - \int_\Omega \big(H_0^t * p\big)\big(p_t - \Delta p\big)\, dx \right| \\
&\leqslant \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega \left(|u|^2 + M|p|^2 + \left|H_0^t * p\right|^2 \right) dx + 2\varepsilon(M+2) \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2 \right) dx.
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Substituindo (7.5) em (7.4), resulta que:

$$
\begin{aligned}
&\left(|p|^2_{H_0^1(\Omega)} \right)_t + \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2 \right) dx \\
&\leqslant \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega \left(|u|^2 + M|p|^2 + \left|H_0^t * p\right|^2 \right) dx + 2\varepsilon(M+2) \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2 \right) dx.
\end{aligned}
$$

Tomando ε de modo que $2\varepsilon(M+2) \leqslant \dfrac{1}{2}$ e tomando $C_{22} = \max\left\{ \dfrac{1}{4\varepsilon}, \dfrac{M}{4\varepsilon} \right\}$, obtemos da última expressão acima que:

$$
\begin{aligned}
&\left(|p|^2_{H_0^1(\Omega)} \right)_t + \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2 \right) dx \\
&\leqslant C_{22} \int_\Omega \left(|u|^2 + |p|^2 + \left|H_0^t * p\right|^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2 \right) dx,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\left(|p|^2_{H_0^1(\Omega)} \right)_t + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2 \right) dx \;\leqslant C_{22} \int_\Omega \left(|u|^2 + |p|^2 + \left|H_0^t * p\right|^2 \right) dx,
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\left(|p|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)_t + \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\right) dx &\leqslant 2\left(|p|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)_t + \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\right) dx \\
&= 2\left(\left(|p|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)_t + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\right) dx\right) \\
&\leqslant 2C_{22}\int_\Omega \left(|u|^2 + |p|^2 + \left|H^t_0 * p\right|^2\right) dx,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\left(|p|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)_t + \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\right) dx \leqslant C_{23}\int_\Omega \left(|u|^2 + |p|^2 + \left|H^t_0 * p\right|^2\right) dx, \tag{7.6}
$$

onde $C_{23} = 2C_{22}$.

Agora, integrando ambos os lados de (7.6) de 0 à t, $t \leqslant T$, concluímos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \left(|p|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)_t dt + \int_0^t\int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant C_{23}\int_0^t\int_\Omega \left(|u|^2 + |p|^2 + \left|H^t_0 * p\right|^2\right) dxdt,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\left(|p(t)|^2_{H^1_0(\Omega)} - |p(0)|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) + \int_0^t\int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant C_{23}\int_0^t\int_\Omega \left(|u|^2 + |p|^2 + \left|H^t_0 * p\right|^2\right) dxdt \\
&\leqslant C_{23}\int_0^T\int_\Omega \left(|u|^2 + |p|^2 + \left|H^t_0 * p\right|^2\right) dxdt,
\end{aligned}
$$

e assim,

$$
\begin{aligned}
&|p(t)|^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\right) dxdt \\
&\leqslant |p_0|^2_{H^1_0(\Omega)} + C_{23}\left(|u|^2_{L^2(Q)} + |p|^2_{L^2(Q)} + \left|H^t_0 * p\right|^2_{L^2(Q)}\right).
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

Agora, pela Afirmação 6.0.1 temos que:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{C_2}|u|^2_{L^2(\Omega)} &= \widetilde{C_2}\int_Q |u|^2\, dxdt \\
&\leqslant \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}|u|^2\, dxdt \\
&\leqslant \widetilde{C_3}\int_\Omega |p_0|^2\, dx,
\end{aligned}
$$

ou seja, tomando $\overline{C_{16}} = \dfrac{\widetilde{C_3}}{\widetilde{C_2}}$, segue que:

$$
|u|^2_{L^2(Q)} \leqslant \overline{C_{16}}|p_0|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{7.8}
$$

Observe também que:

$$
\begin{aligned}
|H_0^t * p|^2_{L^2(Q)} &= \int_Q \left| \int_0^t h(t,\tau)p(\tau,x)\,d\tau \right|^2 dxdt \\
&\leqslant \int_Q \left(\int_0^t |h(t,\tau)||p(\tau,x)|\,d\tau \right)^2 dxdt \\
&\leqslant |h|^2_{L^\infty(0,T)} \int_Q \left(\int_0^T |p(\tau,x)|\,d\tau \right)^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

e pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.1.1) existe uma constante $C_{24} > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|H_0^t * p|^2_{L^2(Q)} &\leqslant C_{24}|h|^2_{L^\infty(0,T)} \int_Q \int_0^T |p(\tau,x)|^2\,d\tau\,dxdt \\
&= C_{24}|h|^2_{L^\infty(0,T)} \int_\Omega \int_0^T \int_0^T |p(\tau,x)|^2\,d\tau\,dtdx \\
&= C_{24}|h|^2_{L^\infty(0,T)} \left(\int_0^T dt \right) \left(\int_Q |p(\tau,x)|^2\,dxd\tau \right) \\
&= C_{24}T|h|^2_{L^\infty(0,T)} \left(\int_Q |p(\tau,x)|^2\,dxd\tau \right),
\end{aligned}
$$

e tomando $C_{25} = C_{24}T|h|^2_{L^\infty(0,T)}$, obtemos que:

$$
|H_0^t * p|^2_{L^2(Q)} \leqslant C_{25}|p|^2_{L^2(Q)}. \tag{7.9}
$$

Substituindo (7.8) e (7.9) em (7.7), resulta que:

$$
\begin{aligned}
&|p(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2 \right) dxdt \\
&\leqslant |p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_{23}\left(\overline{C_{16}}|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + |p|^2_{L^2(Q)} + C_{25}|p|^2_{L^2(Q)} \right) \\
&= |p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_{23}\overline{C_{16}}|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + C_{23}\big(1 + C_{25}\big)|p|^2_{L^2(Q)} \\
&\leqslant |p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_{23}\overline{C_{16}}|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + C_{23}\big(1 + C_{25}\big)|p|^2_{R},
\end{aligned}
$$

onde $R = C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \cap W\big(0,T; H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega)\big)$ e assim,

$$
|p(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2 \right) dxdt \leqslant C_{26}\left(|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + |p_0|^2_{L^2(\Omega)} + |p|^2_{R} \right),
$$

onde $C_{26} = \max\big\{1, C_{23}\overline{C_{16}}, C_{23}\big(1 + C_{25}\big)\big\}$.

Daí, pela Proposição 7.0.1 e por (7.8), como

$$\begin{aligned}|p|_R^2 &\leqslant \widetilde{C_5}\Big(|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + |p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + |u|^2_{L^2(Q_\omega)}\Big)\\ &\leqslant \widetilde{C_5}\Big(|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + |p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + \overline{C_{16}}|p_0|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\\ &= \widetilde{C_5}\big(1+\overline{C_{16}}\big)|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + \widetilde{C_5}|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

segue que,

$$\begin{aligned}&|p(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega \Big(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\Big)\,dxdt\\ &\leqslant C_{26}\Big(|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + |p_0|^2_{L^2(\Omega)} + \widetilde{C_5}\big(1+\overline{C_{16}}\big)|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + \widetilde{C_5}|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)}\Big)\\ &\leqslant C_{26}\Big(\big(1+\widetilde{C_5}\big)|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + \big(1+\widetilde{C_5}\big(1+\overline{C_{16}}\big)\big)|p_0|^2_{L^2(\Omega)}\Big),\end{aligned}$$

e tomando $C_{27} = \max\Big\{C_{26}\big(1+\widetilde{C_5}\big), C_{26}\big(1+\widetilde{C_5}\big(1+\overline{C_{16}}\big)\big)\Big\}$, obtemos que:

$$|p(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega \Big(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\Big)\,dxdt \;\leqslant C_{27}\Big(|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + |p_0|^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Agora, como vale:

$$\int_0^t\int_\Omega \Big(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\Big)\,dxdt \;\leqslant C_{27}\Big(|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + |p_0|^2_{L^2(\Omega)}\Big),$$

para todo $t \leqslant T$, então, em particular, para $t = T$, encontramos que:

$$\int_Q \Big(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\Big)\,dxdt \;\leqslant C_{27}\Big(|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + |p_0|^2_{L^2(\Omega)}\Big). \tag{7.10}$$

Analogamente, temos que:

$$|p(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} \;\leqslant C_{27}\Big(|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + |p_0|^2_{L^2(\Omega)}\Big) \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{7.11}$$

Somando (7.11) e (7.11), deduzimos que:

$$|p(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_Q \Big(|p_t|^2 + |\Delta p|^2\Big)\,dxdt \;\leqslant C_{28}\Big(|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + |p_0|^2_{L^2(\Omega)}\Big) \quad \forall\, t \in [0,T], \tag{7.12}$$

onde $C_{28} = 2C_{27}$.

Finalmente, sabendo de (7.9) e usando os mesmos argumentos para obtermos (7.12), podemos concluir que existe uma constante $C_{29} > 0$ tal que

$$\int_Q \left|H_0^t * p\right|^2 dxdt \leqslant C_{29}\Big(|p_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + |p_0|^2_{L^2(\Omega)}\Big),$$

e somando essa última expressão com (7.12), segue que:

$$|p(t)|^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_Q \left(|p_t|^2 + |\Delta p|^2 + \left|H^t_0 * p\right|^2\right) dxdt \leqslant \widetilde{C_6}\left(|p_0|^2_{H^1_0(\Omega)} + |p_0|^2_{L^2(\Omega)}\right) \quad \forall\, t \in [0, T],$$

onde $\widetilde{C_6} = C_{28} + C_{29}$.

Agora, usaremos a Afirmação 7.0.2 para provar o resultado a seguir:

Afirmação 7.0.3. *Considere a função* $\Psi : B \to 2^B$ *dada em* (7.3). *Então, dado* $\overline{p} \in B$*, temos:*

(i) $\Psi(B) \subset B$*;*

(ii) $\Psi(\overline{p})$ *é convexo;*

(iii) $\Psi(\overline{p})$ *é compacto em* $L^2(Q)$*;*

(iv) $\Psi(\overline{p})$ *tem gráfico fechado em* $L^2(Q) \times L^2(Q)$.

De fato,

- $\underline{\Psi(B) \subset B}$.

Dado $\overline{p} \in B$, seja $p \in \Psi(\overline{p})$. Pela Proposição 7.0.1, temos que:

$$|p|^2_R \leqslant \widetilde{C_5}\left(|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + |p_0|^2_{H^1_0(\Omega)} + |u|^2_{L^2(Q_\omega)}\right),$$

onde $R = C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \cap W\big(0,T; H^1_0(\Omega); H^{-1}(\Omega)\big)$. Daí, como

$$R \hookrightarrow W\big(0,T; H^1_0(\Omega); H^{-1}(\Omega)\big) = G,$$

então

$$|p|^2_G \leqslant |p|^2_R \leqslant \widetilde{C_5}\left(|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + |p_0|^2_{H^1_0(\Omega)} + |u|^2_{L^2(Q_\omega)}\right),$$

e como $|u|^2_{L^2(Q_\omega)} \leqslant \overline{C_{16}}|p_0|^2_{L^2(\Omega)}$, segue que:

$$|p|^2_G \leqslant \widetilde{C_5}\left((1 + \overline{C_{16}})|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + |p_0|^2_{H^1_0(\Omega)}\right).$$

Tomando $M \geqslant \widetilde{C_5}\left((1 + \overline{C_{16}})|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + |p_0|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)$, temos que $|p|^2_G \leqslant M$, ou seja, $p \in B$ e concluímos que $\Psi(B) \subset B$.

- $\underline{\Psi(\overline{p}) \text{ é convexo}}$.

Com efeito, dados $p_1, p_2 \in \Psi(\overline{p})$ e $\gamma \in [0,1]$, então pelo princípio da superposição de solução para o sistema linear, temos que:

$$(1-\gamma)p_1 + \gamma p_2 \in \Psi(\overline{p}),$$

e portanto $\Psi(\overline{p})$ é convexo.

- $\underline{\Psi(\overline{p}) \text{ é compacto em } L^2(Q)}$.

Observe que é suficiente mostrarmos que $\Psi(\overline{p})$ é fechado em $L^2(Q)$ pois como $\Psi(B) \subset B$ pelo item (i) e B é compacto pela Afirmação 7.0.1, segue que $\Psi(\overline{p})$ é compacto. De fato, seja $\{p_m\}_m \subset \Psi(\overline{p})$ uma sequência tal que

$$p_m \to p \text{ em } L^2(Q), \text{ quando } m \to \infty.$$

Vamos mostrar que $p \in \Psi(\overline{p})$. Como $p_m \in \Psi(\overline{p})$ para todo $m \in \mathbb{N}$, então p_m é solução fraca para o sistema linear (7.2), isto é, p_m satisfaz:

$$\begin{cases} (p_m)_t - \Delta p_m + f(\overline{p})p_m + H_0^t * p_m = \chi_\omega u_m \quad \text{em} \quad Q; \\ \\ p_m = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ \\ p_m(0) = p_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{7.13}$$

onde $p_0 \in L^2(\Omega)$ e $u_m \in L^2\big(e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\big)$.

Daí, usando a Afirmação 7.0.2, para cada $p_m \in \Psi(\overline{p})$, segue que as sequências $\{(p_m)_t\}_m$, $\{\Delta p_m\}_m$ e $\{H_0^t * p_m\}_m$ são limitadas em $L^2(Q)$. Também, como $|u|^2_{L^2(Q)} \leqslant \overline{C_{16}}|p_0|^2_{L^2(\Omega)}$, podemos concluir que a sequência $\{u_m\}_m$ também é limitada em $L^2(Q)$. Portanto, como $L^2(Q)$ é um espaço reflexivo, pelo Teorema de Kakutani (Teorema 1.1.2), existem subsequências de $\{(p_m)_t\}_m$, $\{\Delta p_m\}_m$, $\{H_0^t * p_m\}_m$ e $\{u_m\}_m$, que também denotaremos por $\{(p_m)_t\}_m$, $\{\Delta p_m\}_m$, $\{H_0^t * p_m\}_m$ e $\{u_m\}_m$ e pontos $p_t, \Delta p, H_0^t * p, u \in L^2(Q)$ tais que, quando $m \to \infty$, nos leva as seguintes convergências:

$$\begin{cases} (p_m)_t \rightharpoonup p_t \text{ em } L^2(Q); \\ \\ \Delta p_m \rightharpoonup \Delta p \text{ em } L^2(Q); \\ \\ H_0^t * p_m \rightharpoonup H_0^t * p \text{ em } L^2(Q); \\ \\ u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(Q). \end{cases}$$

Além disso, como por hipótese temos que:

$$p_m \to p \text{ em } L^2(Q), \text{ quando } m \to \infty,$$

então

$$p_m \rightharpoonup p \text{ em } L^2(Q), \text{ quando } m \to \infty,$$

e assim

$$f(\overline{p})p_m \rightharpoonup f(\overline{p})p \text{ em } L^2(Q), \text{ quando } m \to \infty.$$

Portanto, quando $m \to \infty$, obtemos:

$$\begin{cases} (p_m)_t \rightharpoonup p_t \text{ em } L^2(Q); \\ \Delta p_m \rightharpoonup \Delta p \text{ em } L^2(Q); \\ H_0^t * p_m \rightharpoonup H_0^t * p \text{ em } L^2(Q); \\ u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(Q); \\ f(\overline{p})p_m \rightharpoonup f(\overline{p})p \text{ em } L^2(Q); \\ p_m \to p \text{ em } L^2(Q). \end{cases} \tag{7.14}$$

Por conseguinte, passando ao limite em (7.13), quando $m \to \infty$ obtemos por (7.14) que:

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + f(\overline{p})p + H_0^t * p = \chi_\omega u \quad \text{em} \quad Q; \\ p = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p(0) = p_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases}$$

onde $p_0 \in L^2(\Omega)$ e $u \in L^2\big(e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\big)$. Portanto, $p \in \Psi(\overline{p})$ e concluímos que $\Psi(\overline{p})$ é compacto em $L^2(Q)$.

- <u>$\Psi(\overline{p})$ tem gráfico fechado em $L^2(Q) \times L^2(Q)$.</u>

Sejam $\{\overline{p_m}\}_m \subset B$ e $\{p_m\}_m \subset \Psi(\overline{p_m})$ sequências tais que

$$\begin{cases} \overline{p_m} \to \overline{p} \text{ em } L^2(Q), \\ p_m \to p \text{ em } L^2(Q). \end{cases} \tag{7.15}$$

Consideremos a sequência $\left\{\left(\overline{p_m}, p_m\right)\right\}_m \subset \mathsf{Gr}(\Psi)$ tal que

$$\left(\overline{p_m}, p_m\right) \to \left(\overline{p}, p\right) \text{ em } L^2(Q) \times L^2(Q).$$

Vamos mostrar que $\left(\overline{p}, p\right) \in \mathsf{Gr}(\Psi)$, ou seja, que $p \in \Psi(\overline{p})$.

De fato, como $p_m \in \Psi(\overline{p_m})$, para todo $m \in \mathbb{N}$, então p_m é solução fraca para o sistema linear (7.2), isto é, p_m satisfaz

$$\begin{cases} \left(p_m\right)_t - \Delta p_m + f(\overline{p_m})p_m + H_0^t * p_m = \chi_\omega u_m \quad \text{em} \quad Q; \\ p_m = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\ p_m(0) = p_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{7.16}$$

onde $p_0 \in L^2(\Omega)$ e $u_m \in L^2\left(e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\right)$. Pelos mesmos argumentos usados para obtermos (7.14), segue que:

$$\begin{cases} \left(p_m\right)_t \rightharpoonup p_t \text{ em } L^2(Q); \\ \Delta p_m \rightharpoonup \Delta p \text{ em } L^2(Q); \\ H_0^t * p_m \rightharpoonup H_0^t * p \text{ em } L^2(Q); \\ u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(Q); \\ p_m \to p \text{ em } L^2(Q). \end{cases} \tag{7.17}$$

Resta mostrarmos que $f(\overline{p_m})p_m \rightharpoonup f(\overline{p})p$ em $L^2(Q)$. Com efeito, de (7.15), obtemos:

$$\begin{cases} \overline{p_m} \to \overline{p} \text{ q.s. em } Q, \\ p_m \to p \text{ q.s. em } Q. \end{cases} \tag{7.18}$$

Pela continuidade da função f, segue de (7.18) que:

$$f(\overline{p_m}) \to f(\overline{p}) \text{ q.s. em } Q. \tag{7.19}$$

Agora, de (7.18) e (7.19) ganhamos que:

$$f(\overline{p_m})p_m \to f(\overline{p})p \text{ q.s. em } Q. \tag{7.20}$$

Daí, como $\left|f(\overline{p_m})\right| = |a(t,x)| \leqslant M$, então vale que:

$$\begin{aligned}
\left|f(\overline{p_m})p_m\right|^2_{L^2(Q)} &= \int_Q \left|f(\overline{p_m})p_m\right|^2 dxdt \\
&= \int_Q \left|f(\overline{p_m})\right|^2 \left|p_m\right|^2 dxdt \\
&\leqslant M^2 \int_Q \left|p_m\right|^2 dxdt \\
&= M^2 \left|p_m\right|^2_{L^2(Q)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|f(\overline{p_m})p_m\right|^2_{L^2(Q)} \leqslant C, \quad \text{(constante)} \tag{7.21}$$

visto que $\left\{p_m\right\}_m$ é uma sequência convergente, e portanto limitada.

Assim, de (7.21) e (7.20), segue pelo Lema de Lions (Lema 1.6.1) que:

$$f(\overline{p_m})p_m \rightharpoonup f(\overline{p})p \text{ em } L^2(Q). \tag{7.22}$$

Dessa forma, passando ao limite em (7.16), quando $m \to \infty$, de (7.17) e (7.22) obtemos que:

$$\begin{cases}
p_t - \Delta p + f(\overline{p})p + H_0^t * p = \chi_\omega u \quad \text{em} \quad Q; \\
p = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma; \\
p(0) = p_0 \quad \text{em} \quad \Omega,
\end{cases}$$

onde $p_0 \in L^2(\Omega)$ e $u \in L^2\left(e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\right)$. Assim, $p \in \Psi(\overline{p})$ e com maior razão $\Psi(\overline{p})$ tem gráfico fechado em $L^2(Q) \times L^2(Q)$ concluindo dessa forma a prova da Afirmação 7.0.3.

Portanto, pelos resultados obtidos nas Afirmações 7.0.1 e 7.0.3, estamos aptos a invocar o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani (Teorema 1.6.8), garantindo que existe um ponto $\overline{p} \in B$ tal que $\overline{p} \in \Psi(\overline{p})$. Consequentemente, pela definição da função Ψ, isso implica que, dados $p_0 \in L^2(\Omega)$ e $T > 0$, existe um controle $u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ tal que a corresponde solução fraca $p \in W\big(0,T; H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega)\big)$ para o sistema (7.1) satisfaz

$$p(T,x) = 0 \text{ q.s. em } \Omega.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] Aniculăesei, G., and Aniţa, S. Null controllability of a nonlinear heat equation. Abstract and Applied Analysis 7, 7 (2002), 375–383.

[2] Barbu, V., and Iannelli, M. Controllability of the heat equation with memory. Differential and Integral Equations 13 (2000), 1393–1412.

[3] Botelho, G., Pellegrino, D., and Teixeira, E. Fundamentos de Análise Funcional. SBM, Coleção de Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2015.

[4] Brezis, H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science & Business Media, 2011.

[5] Carleman, T. Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Almqvist & Wiksell, 1939.

[6] Castro, N. D. O. Soluçoes Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano. Joao Pessoa: Universidade Federal da Paraıba. Notas de um Curso de Verao, 2005.

[7] Cattaneo, C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation. Comptes Rendus 247 (1958), 431–433.

[8] Chaves-Silva, F. W., Zhang, X., and Zuazua, E. Controllability of evolution equations with memory. SIAM Journal on Control and Optimization 55, 4 (2017), 2437–2459.

[9] Díaz, J., and Lions, J. L. On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies. Ocean Circulation and Pollution Control Mathematical and Numerical Investigation, Springer, 2005.

[10] Evans, L. C. Partial Differential Equations, Second Edition. Graduate Studies Mathematics Society, Providence, RI, 2010.

[11] Fernández Cara, E., and Zuazua, E. Control theory: History, mathematical achievements and perspectives. Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, 26 (2003), 79–140.

[12] Fernández-Cara, E., and Guerrero, S. Global carleman inequalites for parabolic systems and applications to controllability. Siam J. Control Optim 45, 4 (2006), 1395–1446.

[13] Folland, G. B. Real analysis: modern techniques and their applications, Second Edition. John Wiley & Sons, 1999.

[14] Fursikov, A. V., and Imanuvilov, O. Y. Controllability of evolution equations. Lecture Notes Ser. 34, Reseach Institute of Mathematics, Seoul National University, Korea, 1996.

[15] Glicksberg, I. L. A further generalization of the kakutani fixed point theorem, with application to nash equilibrium points. Proceedings of the American Mathematical Society 3, 1 (1952), 170–174.

[16] Guerrero, S., and Imanuvilov, O. Y. Remarks on non controllability of the heat equation with memory***. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 19, 1 (2013), 288–300.

[17] Gurtin, M. E., and Pipkin, A. C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. Archive for Rational Mechanics and Analysis 3 (1968), 113–126.

[18] Jesus, I. P., Lima, O. A., and Clark, M. R. Análise Funcional: Uma introdução. Teresina, EDUFPI, 2018.

[19] Jesus, I. P., Oliveira, A. M., Clark, M. R., and Oliveira, P. P. A. Controllability for semilinear heat equation with globally lipschitz nonlinearities and memory term. Nonlinear Analysis: Real World Applications 60 (2021), 103–277.

[20] Lavanya, R., and Balachandran, K. Null controllability of nonlinear heat equation with memory effects. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 3, 2 (2009), 163–175.

[21] Lima, E. L. Curso de Análise, vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[22] Límaco, J., Medeiros, L. A., and Zuazua, E. Existence, uniqueness and controllability for parabolic equations in non-cylindrical domains. Mat. Contemp 23 (2002), 49–70.

[23] Lions, J. L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. Dunford/Gauthier-Villars, 1969.

[24] Lions, J. L. Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systemes distribués. tome 1. contrôlabilité exacte. Rech. Math. Appl 8 (1988).

[25] Lions, J. L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. SIAM review 30, 1 (1988), 1–68.

[26] Lions, J. L. Remarks sur la Controlabilite Approchee. Jornadas Hispano-Francesas sobre Controle de Sistemas Distribuídos, Octubre, 1990.

[27] Medeiros, L. A., and Miranda, M. M. Introdução aos espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais. Rio de Janeiro, 1989.

[28] Medeiros, L. A., and Miranda, M. M. Espaços de Sobolev. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.

[29] Miranda, M. M. HUM and the wave equation with variable coeficients. Asymptotic Analysis 11 (1995), 317–341.

[30] Siam. Future directions in Control Theory, report of the panel of future Directions in Control Theory. SIAM Report on Issues in Mathematical Sciences, Philadelphia, 1988.

[31] Willem, M., et al. Progress in nonlinear differential equations and their applications, vol. 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[32] Zuazua, E. Approximate controllability for semilinear heat equations with globally lipschitz nonlinearities. Control and Cybernetics 28, 3 (1999), 665–683.