



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

**Alguns resultados de rigidez em variedades  
Riemannianas tridimensionais com o bordo  
médio-convexo**

**João Vinícius da Silva**

**Teresina - 2025**

**João Vinícius da Silva**

**Tese de Doutorado:**

**Alguns resultados de rigidez em variedades Riemannianas  
tridimensionais com o bordo médio-convexo**

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista

Co-Orientador:

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima

**Teresina - 2025**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Alguns resultados de rigidez em variedades Riemannianas  
tridimensionais com o bordo médio-convexo*

João Vinícius da Silva

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 07 de março de 2025.

**Banca Examinadora:**

Documento assinado digitalmente  
 **RONDINELLE MARCOLINO BATISTA**  
Data: 22/03/2025 18:49:23-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista (Orientador)  
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Documento assinado digitalmente  
 **BARNABE PESSOA LIMA**  
Data: 22/03/2025 19:51:26-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima (Coorientador)  
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Documento assinado digitalmente  
 **PAULO ALEXANDRE ARAUJO SOUSA**  
Data: 22/03/2025 20:09:34-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo de Sousa (Examinador)  
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Documento assinado digitalmente  
 **ABDENAGO ALVES DE BARROS**  
Data: 22/03/2025 20:35:47-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Examinador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Documento assinado digitalmente  
 **LEVI LOPES DE LIMA**  
Data: 26/03/2025 07:53:42-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Levi Lopes Lima (Examinador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Documento assinado digitalmente  
 **BENEDITO LEANDRO NETO**  
Data: 23/03/2025 15:02:44-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Benedito Leandro Neto (Examinador)  
Universidade de Brasília (UNB)

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI  
Biblioteca Setorial do CCN

S586a Silva, João Vinícius da.  
Alguns resultados de rigidez em variedades Reimannianas tridimensionais com o bordo médio-convexo / João Vinicius da Silva. -- 2025.  
75 f.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Piauí. Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2025.  
“Orientador: Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista. Coorientador: Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima .”

1. Bordo livre. 2. Massa de Hawking. 3. Geometria Reimanniana. I. Batista, Rondinelle Marcolino. II. Lima, Barnabé Pessoa. III. Título.

CDD 516.36

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

*Dedico esta tese à memória do meu saudoso pai, João Artur da Silva (in memoriam), e à minha querida mãe, Valda Maria da Silva.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por iluminar meu caminho ao longo desta jornada e por colocar pessoas tão especiais em minha vida.

Agradeço a todos os meus familiares, em especial à minha amada mãe, Valda Maria, cujo apoio incondicional e dedicação, mesmo diante de tantas dificuldades, foram fundamentais para minha formação. Serei eternamente grato a ela, assim como à minha irmã, Geovana Maria, por estar sempre ao meu lado, pela confiança em mim depositada e por acreditar no meu potencial. Ao meu avô Valdimir, que, aos 92 anos, testemunhou com orgulho a jornada de seu neto até se tornar doutor em Matemática.

Ao meu pai, João Artur, que, apesar do pouco tempo de convivência, me transmitiu valiosos ensinamentos sobre a importância do trabalho árduo, dedicação e da constante busca por fazer o que é certo. Sou eternamente grato por suas lições, que levarei comigo por toda a vida.

À minha querida esposa, Kátia Sousa, sou imensamente grato pelo seu companheirismo, incentivo e por estar sempre ao meu lado nos momentos em que mais precisei. Agradeço pelas dificuldades que enfrentamos juntos e pelas alegrias que vivemos. Sua compreensão em todos os momentos tornou meus dias mais felizes. Amo você profundamente e sou grato por tê-la em minha vida.

Agradeço ao meu eterno orientador e amigo, professor Barnabé Pessoa Lima, por sua orientação desde minha iniciação científica na graduação até este momento. Sua dedicação, exemplo de integridade e excelência profissional sempre foram inspiradores para mim. Sou imensamente grato por sua condução ao longo do desenvolvimento deste trabalho, por suas valiosas sugestões e por acreditar no meu potencial. Sua paciência e confiança foram fundamentais nessa jornada. É uma honra ser seu aluno.

---

Agradeço ao meu orientador no doutorado e amigo, professor Rondinelle Marcolino Batista, por sua paciência, dedicação e comprometimento ao longo de toda essa jornada. Sou grato por sua constante disposição em esclarecer minhas dúvidas e pelo incentivo inestimável. Mesmo durante seu pós-doutorado nos EUA, nunca deixou de estar presente, acompanhando de perto o andamento do trabalho em nossas longas reuniões. Agradeço também pelos momentos de descontração, que tornaram essa caminhada ainda mais especial.

Ao professor Disson Soares dos Prazeres, meus sinceros agradecimentos por sua valiosa contribuição para este trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFPI, em especial aos professores Paulo Alexandre, Halysen Baltazar, Jurandir Oliveira, João Xavier, José Francisco, Leandro Pessoa, Gleison Nascimento, Vitaliano Amaral, Antônio Wilson e Mykael Cardoso, expresso minha profunda gratidão pela valiosa contribuição à minha formação acadêmica.

Aos professores Paulo Alexandre Araújo Sousa, Abdênago Alves de Barros, Levi Lopes Lima e Benedito Leandro Neto, minha sincera gratidão por aceitarem o convite para compor a banca examinadora. Agradeço pelas valiosas sugestões, pelo esclarecimento de dúvidas e pela contribuição essencial para o aprimoramento deste trabalho.

Agradeço a todos os amigos que fiz ao longo da pós-graduação e no Departamento de Matemática da UFPI pelo incentivo, apoio e companheirismo. Em especial, expresso minha gratidão a Erisvaldo Veras, José Edilson, José Márcio, Ruan Diego, Antônio Nilson, Dieme, Pedro Paulo, Pedro Rodrigues, Raimundo Bruno, Christopher, Emanuely, Leonardo Silva, Edimilson Lopes, Thassio Luan, Igor Fontenele, Ricael, Jeferson Brito, Anderson Brito, Sillas Augusto, Felipe Cavalcante, Lázaro, Jonatas Arrais, Jonas Bloch, Bruno Vasconcelos, Gustavo de Sousa, Atécio Alves, Jefferson de Brito Sousa, João Santos, Alexandre Bezerra, Jeferson Silva, Rafael Emanuel, Lucas Aurélio, Maiara Veras e Victor Bento. A amizade e o apoio de cada um de vocês tornaram essa caminhada muito mais leve e significativa.

Agradeço a todos os funcionários da pós-graduação pelo suporte e dedicação, em especial à dona Larisse, por seu empenho, disponibilidade e prontidão em nos ajudar sempre que necessário. Seu trabalho e atenção fizeram toda a diferença ao longo dessa jornada.

Agradeço também aos meus amigos de infância pelo apoio constante, carinho e amizade ao longo de toda essa jornada.

Por fim, agradeço a FAPEPI pelo apoio financeiro.

*“Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá.”*

Ayrton Senna.

# Resumo

Neste trabalho, inicialmente estudamos a rigidez de discos mínimos com bordo livre que maximizam localmente a massa de Hawking modificada em uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante positiva e com bordo médio convexo. Supondo que tais discos são estritamente estáveis, provamos que uma vizinhança deste é isométrico a um espaço semi de Sitter-Schwarzschild.

Na segunda parte, exploramos a relação entre massa e capacidade através do estudo dos conjuntos de nível de funções harmônicas, afim de deduzirmos algumas desigualdades geométricas em variedades assintoticamente planas com bordo não compacto. Como consequência, estabelecemos um teorema de rigidez para o semi-Schwarzschild.

**Palavras-Chaves:** Bordo livre; Massa de Hawking Modificada; Métricas do Tipo Schwarzschild; Capacidade.

# Abstract

In this work, we initially study the rigidity of free boundary minimal disks that locally maximize the modified Hawking mass in a three-dimensional Riemannian manifold with scalar curvature bounded below by a positive constant and mean convex boundary. Assuming that such disks are strictly stable, we prove that a neighborhood of this is isometric to one of the half de Sitter-Schwarzschild space.

In the second part, we explore the relationship between mass and capacity through the study of level sets of harmonic functions, in order to deduce some geometric inequalities in asymptotically flat manifolds with non-compact boundary. As a consequence, we establish a rigidity theorem for the half-Schwarzschild.

**Keywords:** Free Boundary; Modified Hawking Mass; Schwarzschild-Type Metrics; Capacity.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Um resultado de rigidez local do semi de Sitter-Schwarzschild</b>	<b>10</b>
2.1 Preliminares . . . . .	10
2.2 Estabilidade e fórmulas de variação da massa de Hawking modificada . . .	13
2.3 Rigidez local de discos mínimos com bordo livre em variedade com bordo médio convexo . . . . .	23
<b>3 Massa e capacidade de métricas Assintoticamente planas</b>	<b>28</b>
3.1 Preliminares . . . . .	28
3.2 Massa, capacidade e curvas de nível de funções harmônicas . . . . .	38
3.3 Desigualdades geométricas via conjunto de nível de funções harmônicas . .	47
3.4 Um teorema de rigidez do semi-Schwarzschild . . . . .	53
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>60</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas décadas, muita atenção tem sido dada ao estudo de variedades Riemannianas com curvatura escalar limitada inferiormente, uma vez que isso tem fortes conexões com a teoria de superfícies mínimas.

Vários resultados de rigidez envolvendo a curvatura escalar foram obtidos assumindo a existência de superfícies minimizantes de área. Schoen e Yau em [37] observaram pela primeira vez que a fórmula da segunda variação da área fornece uma interação interessante entre a curvatura escalar de uma variedade  $(M^3, g)$  e a topologia de uma superfície mínima estável  $\Sigma \subset M$ . Como consequência, eles provaram que se  $(M^3, g)$  tem curvatura escalar não negativa e  $\Sigma$  é dois-lados e compacta, então ou  $\Sigma$  é topologicamente uma esfera bidimensional ou um toro plano totalmente geodésico. Em [14], Cai e Galloway, demonstraram que, se uma variedade Riemanniana tridimensional possui curvatura escalar não negativa e  $\Sigma$  é um toro mergulhado, dois-lados e localmente minimizante de área (que é uma condição mais forte que estabilidade), então a métrica é plana em alguma vizinhança de  $\Sigma$ . Recentemente, em [10], Bray, Brendle e Neves mostraram que, se  $(M^3, g)$  é uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar  $R \geq 2$  e  $\Sigma^2 \subset M^3$  é uma esfera bidimensional mergulhada que é localmente minimizante de área, então  $\Sigma$  tem área menor ou igual a  $4\pi$  e, se a igualdade ocorrer, então com a métrica induzida,  $\Sigma$  tem curvatura de Gauss constante igual a 1 e localmente  $M$  se divide ao longo de  $\Sigma$ . Depois, Nunes [33] estudou o mesmo problema no cenário hiperbólico; ele provou que, se  $(M^3, g)$  é uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar  $R \geq -2$  e  $\Sigma^2 \subset M^3$  é uma superfície Riemanniana compacta mergulhada, bidimensional e de gênero  $\gamma(\Sigma) \geq 2$ , que é localmente minimizante de área, então a área de  $\Sigma$  com respeito à métrica induzida

é maior ou igual a  $4\pi(\gamma(\Sigma) - 1)$ . Além disso, se a igualdade ocorrer, então  $\Sigma$  tem curvatura Gaussiana constante igual a  $-1$  e localmente  $M$  se divide ao longo de  $\Sigma$ . No belo trabalho [31], Micallef e Moraru unificaram os resultados provados em [10], [14] e [33]. Além disso, um resultado de rigidez semelhante para planos projetivos e minimizantes de área foi obtido por Bray, Brendle, Eichmair e Neves em [9]. Finalmente, resultados de rigidez semelhantes foram obtidos para MOTS estáveis fechados em conjuntos de dados iniciais por Galloway e Mendes em [18], assim como por Mendes em [29].

Motivados por esses resultados, Máximo e Nunes [27] estabeleceram um resultado de rigidez local para o espaço de Sitter-Schwarzschild, envolvendo superfícies mínimas estritamente estáveis e a massa de Hawking. Para isso, é importante recordar a massa quasi-local, chamada de massa de Hawking, de uma superfície compacta  $\Sigma^2 \subset (M^3, g)$ , que é definida como

$$m_H(\Sigma) = \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} \left( \frac{\chi(\Sigma)}{2} - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \left( H^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) d\sigma \right), \quad (1.1)$$

onde  $\chi(\Sigma)$  é a característica de Euler de  $\Sigma$ ,  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma$ ,  $|\Sigma|$  é a área de  $\Sigma$  e  $\Lambda$  é o ínfimo da curvatura escalar de  $M$ . Essa noção de massa quasi-local desempenhou um papel crucial na prova da desigualdade de Penrose Riemanniana para variedades assintoticamente planas, provada de forma independente por Huisken e Ilmanen [20] e Bray [12]. Esta afirma que, se  $(M^3, g)$  é uma variedade Riemanniana completa assintoticamente plana com curvatura escalar não negativa, e o bordo  $\Sigma = \partial M \neq \emptyset$  é uma esfera bidimensional mínima outermost, então a massa ADM de  $M$  é maior ou igual à massa de Hawking de  $\Sigma$ , com a igualdade ocorrendo se, e somente se,  $M$  for isométrica a metade da métrica de Schwarzschild em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

Mais precisamente, Máximo e Nunes provaram o seguinte resultado.

**Teorema 1.1** (Máximo e Nunes, [27]). *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana com curvatura escalar  $R \geq 2$ . Se  $\Sigma \subset M$  é uma esfera mínima estritamente estável mergulhada que maximiza localmente a massa de Hawking, então a curvatura Gaussiana de  $\Sigma$  é constante, igual a  $1/a^2$  para algum  $a \in (0, 1)$ , e uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $(M, g)$  é isométrica ao espaço de Sitter-Schwarzschild  $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, g_a)$  para algum  $\varepsilon > 0$ .*

Na presença de bordo não vazio, os objetos de estudo são as superfícies mínimas de bordo livre. Essas superfícies surgem como pontos críticos do funcional área para

superfícies em uma variedade tridimensional  $M$  com bordo  $\partial M$ . Segue-se da fórmula da primeira variação de área que tais superfícies intersectam  $\partial M$  ortogonalmente.

Neste contexto, Ambrozio [3] estabeleceu a seguinte versão de bordo dos resultados de rigidez mencionados anteriormente.

**Teorema 1.2** (Ambrozio, [3]). *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M$ . Suponha que  $R$  e  $H^{\partial M}$  são limitadas inferiormente. Se  $\Sigma$  é uma superfície mínima estável de bordo livre, propriamente mergulhada e dois-lados, então*

$$I(\Sigma) = \frac{1}{2} \inf_M R |\Sigma| + \inf_{\partial M} H^{\partial M} |\partial \Sigma| \leq 2\pi\chi(\Sigma).$$

*Suponha que  $\Sigma$  seja uma superfície de bordo livre, propriamente mergulhada, dois-lados e localmente minimizante de área, tal que*

$$I(\Sigma) = 2\pi\chi(\Sigma).$$

*Além disso, se uma das seguintes hipóteses ocorrer:*

- (i) cada componente de  $\partial \Sigma$  é localmente minimizante de comprimento em  $\partial M$ ; ou*
- (ii)  $\inf H^{\partial M} = 0$ ,*

*então existe uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $(M, g)$  que é isométrica a  $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$ , onde  $(\Sigma, g_\Sigma)$  tem curvatura Gaussiana constante  $\frac{1}{2} \inf R$  e  $\partial \Sigma$  tem curvatura geodésica constante  $\inf H^{\partial M}$  em  $\Sigma$ .*

Um resultado similar foi obtido por Alaae, Lesourd e Yau em [1], no contexto de superfícies MOTS de bordo livre em conjuntos de dados iniciais.

**Problema 1.** *É possível obter o resultado de Ambrozio para o caso estritamente estável, ou seja, obter o Teorema 1.1 no contexto de variedades de bordo livre?*

A primeira parte desta tese baseia-se em um trabalho realizado em colaboração com Batista e Lima [6], onde abordamos o Problema 1. O objetivo principal é estabelecer uma conexão entre superfícies mínimas de bordo livre e a Relatividade Geral, utilizando a massa de Hawking modificada como ferramenta central. Recordamos que a massa de Hawking modificada de uma superfície  $\Sigma^2$  compacta com bordo livre em uma variedade Riemanniana  $(M^3, g)$  é definida como

$$\tilde{m}_H(\Sigma) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\Sigma|}{8\pi}} \left( \chi(\Sigma) - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \left( H^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) d\sigma \right), \quad (1.2)$$

onde  $\chi(\Sigma)$  é a característica de Euler de  $\Sigma$ ,  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma$ ,  $|\Sigma|$  é a área de  $\Sigma$  e  $\Lambda$  é o ínfimo da curvatura escalar de  $M$ . Essa noção foi introduzida por Marquardt, em [26], para estudar soluções do fluxo pelo inverso da curvatura média fraca de superfícies com bordo livre, que desempenhou um papel crucial na prova da desigualdade de Penrose Riemanniana para variedades assintoticamente planas com bordo não compacto, dada por Koerber, em [22].

Antes de prosseguir, apresentamos a definição do espaço modelo que estudaremos na primeira parte da tese, a saber, a variedade semi de Sitter-Schwarzschild, definida por Lima na Observação 4.8 de [16]. Fixado  $0 < m < \frac{1}{3\sqrt{3}}$ ; a métrica semi de Sitter-Schwarzschild com parâmetro de massa  $m$  e curvatura escalar igual a 2 é definida como a métrica

$$g_m = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{3} - \frac{2m}{r}} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}_+^2}, \quad (1.3)$$

na variedade  $(r_-(m), r_+(m)) \times \mathbb{S}_+^2$ , onde  $0 < r_-(m) < r_+(m) < 1$  são as únicas raízes positivas da função  $f_m(r) = 1 - r^2 - 2mr^{-1}$ ,  $f_m(r) > 0$  para todo o  $r \in (r_-(m), r_+(m))$  e  $g_{\mathbb{S}_+^2}$  é a métrica canônica em  $\mathbb{S}_+^2$  de curvatura Gaussiana constante igual a 1. Após reflexões da métrica  $g_m$ , podemos definir uma métrica rotacionalmente simétrica completa e periódica em  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_+^2$  com curvatura escalar  $R = 2$  e bordo totalmente geodésico  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ , para mais detalhes consulte [15].

Deve-se ressaltar que o Problema 1 está relacionado ao estudo de rigidez/flexibilidade das variedades semi de Sitter-Schwarzschild que aparece no excelente survey devido a Lima [Observação 4.8, [16]].

Desta forma em nosso primeiro resultado, estabelecemos o seguinte teorema de rigidez local:

**Teorema 1.3.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M$  satisfazendo  $R \geq 2$  e  $H^{\partial M} \geq 0$ . Se  $\Sigma$  é um disco mínimo dois-lados de bordo livre propriamente mergulhado, estritamente estável que maximiza localmente a massa de Hawking modificada, então a curvatura Gaussiana de  $\Sigma$  é constante e igual a  $1/a^2$  para algum  $a \in (0, 1)$ , a curvatura geodésica de  $\partial\Sigma$  se anula e existe uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $(M, g)$  isométrica ao espaço semi de Sitter-Schwarzschild  $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, g_a)$  para algum  $\varepsilon > 0$ .*

Na segunda parte da tese, iremos abordar a surpreendente relação entre as noções de massa e capacidade em variedades assintoticamente planas com bordo não compacto. Dado uma variedade  $(M^3, g)$  assintoticamente plana, a massa ADM é dada por

$$m_{\text{ADM}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{|x|=r} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \nu^i d\sigma,$$

onde  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  é um sistema de coordenadas e  $\nu$  é vetor normal unitário a  $\{|x| = r\}$ . Se  $\Sigma = \partial M$ , a capacidade  $c_\Sigma$  é definida por

$$c_\Sigma = \inf \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_M |\nabla f|^2 d\sigma \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções localmente Lipschitz tais que  $f|_\Sigma = 1$  e  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f = 0$ . A massa ADM é um invariante geométrico associado a variedade assintoticamente planas, enquanto a capacidade  $c_\Sigma$  é definida em termos de funções harmônicas satisfazendo condições específicas em  $\Sigma$  e no infinito.

Um resultado seminal nessa direção foi dado por Bray [12]. Ele demonstrou que, se  $(M^3, g)$  é uma variedade completa, assintoticamente plana, com curvatura escalar não negativa cujo bordo é uma superfície mínima  $\Sigma = \partial M$ , então:

$$m_{\text{ADM}} \geq c_\Sigma,$$

a igualdade ocorre se, e somente se,  $(M^3, g)$  é isométrica a uma variedade de Schwarzschild cujo o bordo é um horizonte, ou seja, uma esfera mínima rotacionalmente simétrica. Onde a variedade de Schwarzschild com parametro de massa  $m$  é dada por

$$(M^3, g) = \left( \mathbb{R}^3 \setminus \{|x| < r\}, \left( 1 + \frac{m}{2|x|} \right)^4 \delta \right),$$

sendo  $r > 0$  uma constante e  $\delta$  a métrica Euclidiana.

Quando não supomos a minimalidade de  $\Sigma \subset (M, g)$ , Bray e Miao [11] estudaram o comportamento dessas superfícies utilizando o fluxo pelo inverso da curvatura média fraco desenvolvido por Huisken e Ilmanen [20], obtendo assim a seguinte desigualdade:

$$m_{\text{ADM}} c_\Sigma^{-1} \geq 1 - \left( \frac{1}{16\pi} \int_\Sigma H^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.4)$$

desde que  $\int_\Sigma H^2 \leq 16\pi$  e  $H_2(M^3, \Sigma) = 0$ , com a igualdade ocorrendo se, e somente se,  $(M^3, g)$  for isométrica a uma variedade de Schwarzschild cujo bordo é uma esfera rotacionalmente simétrica com curvatura média constante e não negativa.

Recentemente, curvas de nível de funções harmônicas emergiram como uma técnica poderosa para investigar problemas relacionados a curvatura escalar em variedades tri-dimensionais. No estudo conduzido por Stern [39], foi revelada uma conexão marcante entre essas estruturas e as superfícies mínimas anteriormente obtidas por Schoen e Yau [36]. Já em variedades assintoticamente planas, Bray, Kazaras, Khuri e Stern [13] desenvolveram uma abordagem inovadora para demonstrar o Teorema da Massa Positiva, fundamentando-se no comportamento assintótico de determinadas funções harmônicas.

Nessa perspectiva, Miao em [30] estudou como determinadas funções harmônicas podem influenciar na estrutura geométrica de variedades assintoticamente planas.

Mais precisamente, Miao considerou  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana assintoticamente plana bordo fechado  $\Sigma$ , e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  função suave satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } M \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ u \rightarrow 1 & \text{no } \infty, \end{cases}$$

onde  $u$  é denominada função capacidade em  $(M^3, g)$ . Além disso, pode-se provar que  $u$  admite a seguinte expansão

$$u(x) = 1 - c|x|^{-1} + o(|x|^{-1}),$$

onde a constante  $c$  está relacionada à capacidade de  $\Sigma$ . Em seu trabalho, Miao estabeleceu importantes relações entre funções harmônicas e os conceitos de massa e capacidade.

Inspirado pelo trabalho de Bray [12], onde foram empregados métodos variacionais e de monotonicidade para estudar propriedades geométricas e físicas de variedades assintoticamente planas, Miao explorou teoremas de rigidez tendo como modelo a variedade de Schwarzschild. Dentre os vários resultados significativos obtidos destacamos: Seja  $(M^3, g)$  variedade assintoticamente plana com bordo conexo  $\Sigma$ , curvatura escalar não negativa e  $H_2(M, \Sigma) = 0$ . Se  $u$  é uma função capacidade de  $\Sigma$ , então

$$\frac{m_{\text{ADM}}}{2c_\Sigma} \geq 1 - \left( \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se,  $(M, g)$  for isométrico a uma variedade de Schwarzschild cujo bordo é uma esfera rotacionalmente simétrica.

Nas mesmas condições do resultado anterior, Miao provou

$$\frac{m_{\text{ADM}}}{c_\Sigma} \geq 1 - \left( \frac{1}{16\pi} \int_\Sigma H^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se,  $(M^3, g)$  for isométrico a uma variedade de Schwarzschild com bordo dado por uma esfera rotacionalmente simétrica. Note que o resultado acima remove a condição  $\int_{\Sigma} H^2 d\sigma \leq 16\pi$  imposta por Bray e Miao em [11].

Desta forma surge naturalmente o seguinte problema:

**Problema 2.** *É possível obter esses resultados para variedades assintoticamente planas com bordo não compacto, utilizando como modelo a variedade semi-Schwarzschild?*

Na segunda parte desta tese, nosso objetivo principal é apresentar esses resultados nesse contexto. Mais precisamente, consideraremos  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana e conformemente plana no infinito com  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta que encontra ortogonalmente  $\Gamma$  superfície não compacta, e  $\partial \Sigma = \partial \Gamma$ . Nesse contexto, a massa é dada por

$$m_{\text{ABL}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \left\{ \int_{S_{r,+}^2} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \nu^i d\sigma + \int_{\partial S_{r,+}^2} g_{\alpha 3} \mu^\alpha d\theta \right\},$$

onde  $S_{r,+}^2$  é um hemisfério de coordenadas Euclidianas canônicas de raio  $r$  com vetor normal unitário  $\nu$  apontando para fora, e  $\mu$  é o vetor conormal a  $\partial S_{r,+}^2$ . Além disso, a capacidade de  $\Sigma$  é dada de forma similar ao caso clássico. No entanto, agora o ínfimo é atingido por uma função  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } M \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Gamma \\ u \rightarrow 1 & \text{no } \infty, \end{cases}$$

onde  $\eta$  é um vetor normal unitário à  $\Gamma$ , apontando para fora.

Dessa forma, nosso primeiro resultado estabelece uma desigualdade que envolve a função capacidade, a massa e a capacidade.

**Teorema 1.4.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana e conformemente plana no infinito com  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta que encontra ortogonalmente  $\Gamma$  superfície não compacta, e  $\partial \Sigma = \partial \Gamma$ . Suponha que  $\Sigma$  seja conexa e  $H_2(M, \Sigma) = 0$ . Se  $R \geq 0$ ,  $H^{\partial M} \geq 0$  e  $u \in C^\infty(M)$  é uma função satisfazendo*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } M \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Gamma \\ u \rightarrow 1 & \text{no } \infty, \end{cases}$$

onde  $\eta$  é um vetor normal unitário à  $\Gamma$ , apontando para fora. Então

$$\frac{m_{\text{ABL}}}{2c_\Sigma} \geq 1 - \left( \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.5)$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $(M^3, g)$  for isométrica a uma variedade semi-Schwarzschild, cuja parte compacta do bordo é um hemisfério rotacionalmente simétrico. Ou seja,

$$(M^3, g) = \left( \mathbb{R}_+^3 \setminus \{|\mathbf{x}| < r\}, \left( 1 + \frac{m_{\text{ABL}}}{4|\mathbf{x}|} \right)^4 \delta \right),$$

onde  $r > 0$  é uma constante e  $\delta$  é a métrica Euclidiana.

Finalmente, como consequência do teorema acima bem como de uma série de resultados que serão apresentados no Capítulo 3, obtemos o resultado principal de rigidez para a variedade modelo semi-Schwarzschild.

**Teorema 1.5.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana e conformemente plana no infinito com  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta que encontra ortogonalmente  $\Gamma$  superfície não compacta, e  $\partial \Sigma = \partial \Gamma$ . Suponha que  $\Sigma$  seja conexa e  $H_2(M, \Sigma) = 0$ . Se  $R \geq 0$ ,  $H^{\partial M} \geq 0$ , então*

$$\frac{m_{\text{ABL}}}{c_\Sigma} \geq 1 - \left( \frac{1}{8\pi} \int_\Sigma H^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $(M^3, g)$  for isométrico a uma variedade semi-Schwarzschild, cuja parte compacta do bordo é um hemisfério rotacionalmente simétrico com curvatura média constante não negativa.

O presente trabalho inicia, no Capítulo 2, com as Seções 2.1 e 2.2, nas quais revisamos aspectos fundamentais sobre estabilidade de superfícies mínimas com bordo livre. Derivamos as fórmulas de variação da massa de Hawking modificada e, inspirados pelos argumentos apresentados em [3] e [27], utilizamos as condições de estabilidade estrita e maximizante local da massa de Hawking modificada para construir em uma vizinhança de  $\Sigma$ , uma folheação composta por superfícies mergulhadas de bordo livre com curvatura média constante (CMC). Finalmente, na Seção 2.3, apresentamos a demonstração do Teorema 1.3.

No Capítulo 3, na Seção 3.1, revisamos conceitos fundamentais sobre massa e capacidade. Em seguida, na Seção 3.2, exploramos a relação entre massa e capacidade através

---

dos conjuntos de nível de funções harmônicas. Na Seção 3.3, deduzimos algumas desigualdades geométricas em variedades assintoticamente planas com bordo não compacto. Finalmente, na Seção 3.4, demonstramos o teorema principal de rigidez deste capítulo no contexto do modelo semi-Schwarzschild.

# Capítulo 2

## Um resultado de rigidez local do semi de Sitter-Schwarzschild

### 2.1 Preliminares

Nesta seção, reuniremos alguns fatos básicos que serão úteis para o estabelecimento dos resultados principais. Seja  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana tridimensional com bordo não vazio  $\partial M$ . Denote por  $R$  a curvatura escalar de  $M$  e denote a curvatura média de  $\partial M$  por  $H^{\partial M}$ . Seja  $\Sigma^2$  uma variedade compacta suave com bordo não vazio, e suponha que  $\Sigma$  é propriamente mergulhada em  $M$ , isto é,  $\Sigma$  é um mergulho em  $M^3$  e  $\partial \Sigma = \Sigma \cap \partial M$ .

Além disso, assumimos que  $\Sigma$  é dois-lados, isto é, existe um campo de vetores unitário  $N$  ao longo de  $\Sigma$  que é normal a  $\Sigma$ . Fixe um campo de vetores normais unitários  $X$  apontando para fora em  $\partial M$ , e seja  $\nu$  o conormal apontando para fora ao longo de  $\partial \Sigma$  em  $\Sigma$ . Definimos  $A(U, V) = g(-\nabla_U N, V)$  como a segunda forma fundamental de  $\Sigma$ , e seja  $\Pi(U, V) = g(\nabla_U X, V)$  a segunda forma fundamental de  $\partial M$  em relação a  $-X$ . Dizemos que  $\Sigma$  é bordo livre se  $\Sigma$  intercepta  $\partial M$  ortogonalmente. Em outras palavras,  $\Sigma$  é de bordo livre se  $\nu = X$  ao longo de  $\partial \Sigma$ .

Seja  $f : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  uma variação normal suave própria de  $\Sigma$ , ou seja,  $f$  é uma aplicação suave tal que,

- Para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , a aplicação  $f_t = f(\cdot, t) : \Sigma \rightarrow M$  é propriamente mergulhada em  $M$ ;
- $f(x, 0) = x$  para todo  $x \in \Sigma$ ;

- $\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \phi(x)N(x)$  para cada  $x \in \Sigma$ , onde  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ .

Agora recordamos algumas equações de evolução de quantidades geométricas relevantes. Para esse propósito, usaremos o subscrito  $t$  para denotar quantidades associadas a  $\Sigma_t = f_t(\Sigma)$ . Mais precisamente,  $N_t$  denotará um campo de vetores unitário normal a  $\Sigma_t$ ,  $H_t$  a curvatura média de  $\Sigma_t$ ,  $\nu_t$  o conormal apontando para fora ao longo de  $\partial\Sigma_t$  e  $\phi_t$  é a função em  $\Sigma_t$  definida por  $\phi_t = g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, N_t\right)$ .

Primeiro, recordamos a variação da curvatura média.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H(t)\Big|_{t=0} = L_\Sigma\phi \text{ em } \Sigma, \\ \frac{d}{dt}g(N_t, \nu)\Big|_{t=0} = -\frac{\partial\phi}{\partial\nu} + \Pi(N, N)\phi \text{ sobre } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $L_\Sigma = \Delta_\Sigma + \text{Ric}(N, N) + |A|^2$  é o operador de Jacobi de  $\Sigma$ ,  $\text{Ric}$  é o tensor de Ricci de  $M$  e  $\Delta_\Sigma$  é o operador Laplaciano de  $\Sigma$  com respeito à métrica induzida de  $M$ .

Em particular, se cada  $\Sigma_t$  é uma superfície com bordo livre de curvatura média constante, então

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H(t) = L_{\Sigma_t}\phi_t \text{ em } \Sigma, \\ \frac{\partial\phi_t}{\partial\nu_t} = \Pi(N_t, N_t)\phi_t \text{ sobre } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (2.2)$$

A primeira variação da área é dada por

$$\frac{d}{dt}|\Sigma_t|\Big|_{t=0} = -\int_\Sigma H\phi d\sigma + \int_{\partial\Sigma} \phi g(N, \nu) ds, \quad (2.3)$$

onde  $H = \text{tr } A$  é a curvatura média de  $\Sigma$  em  $M$ . Da equação (2.3), segue que  $\Sigma$  é um ponto crítico para a funcional área se, e somente se,  $\Sigma$  é mínima com bordo livre. Para mais detalhes, veja [3].

Se  $\Sigma$  é mínima com bordo livre, então a segunda variação da área é dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}|\Sigma_t|\Big|_{t=0} = -\int_\Sigma \phi L_\Sigma\phi d\sigma + \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu} - \Pi(N, N)\phi\right)\phi ds. \quad (2.4)$$

Alternativamente, em termos de formas quadrática, isso pode ser escrito como

$$\frac{d^2}{dt^2}|\Sigma_t|\Big|_{t=0} = \mathcal{Q}(\phi, \phi),$$

onde a forma quadrática  $\mathcal{Q} : C^\infty(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de forma índice de  $\Sigma$ , dada por

$$\mathcal{Q}(\phi, \psi) = -\int_\Sigma \phi(\Delta_\Sigma\psi + (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)\psi) d\sigma + \int_{\partial\Sigma} \phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \Pi(N, N)\psi\right) ds. \quad (2.5)$$

A condição de Robin no bordo

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \Pi(N, N)\phi$$

é uma condição de bordo elíptica para  $L_\Sigma$ , portanto, existe uma sequência não decrescente e divergente  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \nearrow \infty$  de autovalores associados a uma base ortonormal de soluções no espaço  $L^2(M, d\sigma)$  para o problema de autovalores

$$\begin{cases} L_\Sigma \phi + \lambda \phi = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \Pi(N, N)\phi & \text{sobre } \partial \Sigma. \end{cases} \quad (2.6)$$

Desta forma, dizemos que  $\Sigma$  é estável se, e somente se,  $\mathcal{Q}(\phi, \phi) \geq 0$  para todo  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ , equivalentemente o primeiro autovalor de  $L_\Sigma$  é não negativo. Se o primeiro autovalor for positivo, dizemos que a superfície é estritamente estável. Portanto, se  $\phi$  é uma auto-função do operador de Jacobi associada ao primeiro autovalor do problema (2.6), ou seja,  $\mathcal{Q}(\phi, \phi) = \lambda_1(L_\Sigma) \int_\Sigma \phi^2 d\sigma$ , então

$$\lambda_1(L_\Sigma) \int_\Sigma \phi^2 d\sigma = - \int_\Sigma \phi (\Delta_\Sigma \phi + (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)\phi) d\sigma. \quad (2.7)$$

Agora, relembremos a definição da variedade modelo deste capítulo. Fixado  $0 < m < \frac{1}{3\sqrt{3}}$ , a métrica semi de Sitter-Schwarzschild com parâmetro de massa  $m$  e curvatura escalar igual a 2 é definida como a métrica

$$g_m = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{3} - \frac{2m}{r}} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}_+^2}, \quad (2.8)$$

na variedade  $(r_-(m), r_+(m)) \times \mathbb{S}_+^2$ , onde  $0 < r_-(m) < r_+(m) < 1$  são as únicas raízes positivas da função  $f_m(r) = 1 - r^2 - 2mr^{-1}$ ,  $f_m(r) > 0$  para todo o  $r \in (r_-(m), r_+(m))$  e  $g_{\mathbb{S}_+^2}$  é a métrica canônica em  $\mathbb{S}_+^2$  de curvatura Gaussiana constante igual a 1. Através de uma mudança de variável, a métrica semi de Sitter-Schwarzschild (2.8) pode ser reescrita da forma

$$g_m = ds^2 + u(s)^2 g_{\mathbb{S}_+^2}, \quad \text{em } [a, b] \times \mathbb{S}^2, \quad (2.9)$$

onde  $u : (a, b) \rightarrow (r_-(m), r_+(m))$  é uma função que se estende continuamente a  $[a, b]$  com  $u(a) = r_-(m)$ ,  $u(b) = r_+(m)$  e  $\frac{ds}{dr} = f_m(r)^{-1/2} > 0$  em  $(r_-(m), r_+(m))$ . Além disso, a função  $u$  resolve a seguinte equação diferencial não linear de segunda ordem:

$$u''(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - u'(s)^2}{u(s)} \right) - \frac{u(s)}{2}. \quad (2.10)$$

Outro fato interessante é que quaisquer soluções positivas  $u(r)$  da equação (2.10) que sejam definidas para todos  $r \in \mathbb{R}$  definem uma métrica rotacionalmente simétrica periódica

$g_{\mathbf{a}} = dr^2 + u_{\mathbf{a}}(r)^2 g_{\mathbb{S}^2}$  com curvatura escalar constante igual a 2, onde  $\mathbf{a} \in (0, 1)$  e  $u_{\mathbf{a}}(r)$  satisfaz  $u_{\mathbf{a}}(0) = \mathbf{a} = \min u$  e  $u'_{\mathbf{a}}(0) = 0$ ; para mais detalhes, veja [[34], Seção 2.1].

Finalmente, recordemos a definição de massa de Hawking modificada. Dada uma superfície  $\Sigma^2$  compacta com bordo livre em uma variedade Riemanniana  $(M^3, g)$  a massa de Hawking modificada é definida por

$$\tilde{m}_H(\Sigma) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\Sigma|}{8\pi}} \left( \chi(\Sigma) - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \left( H^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) d\sigma \right), \quad (2.11)$$

onde  $\chi(\Sigma)$  é a característica de Euler de  $\Sigma$ ,  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma$ ,  $|\Sigma|$  é a área de  $\Sigma$  e  $\Lambda$  é o ínfimo da curvatura escalar de  $M$ .

## 2.2 Estabilidade e fórmulas de variação da massa de Hawking modificada

Nesta seção, derivamos as fórmulas da primeira e segunda variação da massa de Hawking modificada. Além disso, sob a hipótese de estabilidade estrita e maximizante local da massa de Hawking modificada buscamos construir uma folheação em uma vizinhança de  $\Sigma$  por superfícies mergulhadas de bordo livre e curvatura média constante, que desempenham um papel crucial na prova do teorema principal deste capítulo.

**Proposição 2.1.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana tridimensional com bordo  $\partial M$  e curvatura escalar  $R$  limitada inferiormente. Seja  $\Sigma$  uma superfície de bordo livre, propriamente mergulhada e dois-lados. Dada uma variação normal, como definida na seção anterior, temos que*

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dt} \tilde{m}_H(\Sigma_t) \Big|_{t=0} &= -\frac{2|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} H \Delta_{\Sigma} \phi d\sigma + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (\Lambda - R) H \phi d\sigma \\ &\quad + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} \left[ 2K_{\Sigma} - \frac{4\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|} + \frac{1}{2|\Sigma|} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma - |\Lambda|^2 \right] H \phi d\sigma, \end{aligned}$$

onde  $\Lambda = \inf_M R$  e  $K_{\Sigma}$  é a curvatura Gaussiana de  $\Sigma$ .

*Demonstração.* Tomando a derivada da massa de Hawking modificada dada em (2.11) para a variação normal  $f_t$  de  $\Sigma$ , obtemos

$$2 \frac{d}{dt} \tilde{m}_H(\Sigma_t) = \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \left( \chi(\Sigma_t) - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} H_t^2 d\sigma_t - \frac{1}{12\pi} \Lambda |\Sigma_t| \right) \frac{d}{dt} (d\sigma_t)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \left[ 2H_t \frac{d}{dt} (H_t) d\sigma_t + H_t^2 \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right] - \frac{1}{12\pi} \Lambda \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right) \\
= & -\frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \left( \chi(\Sigma_t) - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} H_t^2 d\sigma_t - \frac{1}{12\pi} \Lambda |\Sigma_t| \right) \left( \int_{\Sigma_t} H_t \phi_t d\sigma_t \right. \\
& \left. - \int_{\partial\Sigma_t} \phi_t g(N_t, \nu_t) ds_t \right) - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} 2H_t L_{\Sigma_t} \phi_t d\sigma_t - H_t^2 \phi_t H_t d\sigma_t \right. \\
& \left. + H_t^2 \phi_t g(N_t, \nu_t) ds_t \right] + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{\Lambda}{12\pi} \left( \int_{\Sigma_t} H_t \phi_t d\sigma_t - \int_{\partial\Sigma_t} \phi_t g(N_t, \nu_t) ds_t \right) \\
= & -\frac{2|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t \Delta_{\Sigma_t} \phi_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t (2\text{Ric}(N_t, N_t) + 2|\mathcal{A}_t|^2) \phi_t d\sigma_t \\
& + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t^3 \phi_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\partial\Sigma_t} H_t^2 \phi_t g(N_t, \nu_t) ds_t \\
& - \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}} \chi(\Sigma_t)}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t \phi_t d\sigma_t + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t \phi_t d\sigma_t \int_{\Sigma_t} H_t^2 d\sigma_t \\
& + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}} \chi(\Sigma_t)}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\partial\Sigma_t} \phi_t g(N_t, \nu_t) ds_t + \frac{3}{2} \frac{\Lambda |\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{12\pi (8\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t \phi_t d\sigma_t \\
& - \frac{3}{2} \frac{\Lambda |\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{12\pi (8\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\partial\Sigma_t} \phi_t g(N_t, \nu_t) ds_t, \tag{2.12}
\end{aligned}$$

onde usamos as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} H_t &= \Delta_{\Sigma_t} \phi_t + \text{Ric}(N_t, N_t) \phi_t + |\mathcal{A}_t|^2 \phi_t \\
\frac{d}{dt} (d\sigma_t) &= -\phi_t H_t d\sigma_t + \phi_t g(N_t, \nu_t) ds_t.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela equação de Gauss, temos que

$$2\text{Ric}(N_t, N_t) + 2|\mathcal{A}_t|^2 = R - 2K_{\Sigma_t} + H_t^2 + |\mathcal{A}_t|^2, \tag{2.13}$$

donde substituindo em (2.12), tem-se

$$\begin{aligned}
2 \frac{d}{dt} \tilde{m}_H(\Sigma_t) &= -\frac{2|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t \Delta_{\Sigma_t} \phi_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t (R - 2K_{\Sigma_t} + H_t^2 + |\mathcal{A}_t|^2) \phi_t d\sigma_t \\
& + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} (H_t^3 + \Lambda H_t) \phi_t d\sigma_t + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t \phi_t d\sigma_t \int_{\Sigma_t} H_t^2 d\sigma_t \\
& - \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}} \chi(\Sigma_t)}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} H_t \phi_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\partial\Sigma_t} (\Lambda + H_t^2) \phi_t g(N_t, \nu_t) ds_t \\
& + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\partial\Sigma_t} \phi_t g(N_t, \nu_t) ds_t. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Considerando a avaliação em  $t = 0$  e sabendo que  $\Sigma$  é uma superfície de bordo livre,

obtemos a expressão desejada

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dt} \tilde{m}_H(\Sigma_t) \Big|_{t=0} &= -\frac{2|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} H \Delta_{\Sigma} \phi d\sigma + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (\Lambda - R) H \phi d\sigma \\ &+ \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} \left[ 2K_{\Sigma} - \frac{4\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|} + \frac{1}{2|\Sigma|} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma - |A|^2 \right] H \phi d\sigma. \end{aligned}$$

□

Para a prova da fórmula da segunda variação da massa de Hawking modificada, é crucial recordar a primeira variação do operador de Jacobi cuja prova pode ser encontrada em [27]. Denotemos por  $L_{\Sigma_t}$  o operador de Jacobi associado a  $\Sigma_t$ .

**Proposição 2.2** ([27], Proposição 6.2). *Para cada função  $\psi \in C^{\infty}(\Sigma)$ , temos:*

$$\begin{aligned} L'_{\Sigma}(0)\psi &= \frac{d}{dt} L_{\Sigma_t} \Big|_{t=0} \psi = 2\phi g(A, \text{Hess}\psi) + 2\psi g(A, \text{Hess}\phi) - 2\phi\omega(\nabla\psi) - 2\psi\omega(\nabla\phi) \\ &+ \phi g(\nabla H, \nabla\psi) - Hg(\nabla\psi, \nabla\phi) + 2A(\nabla\phi, \nabla\psi) - \psi \text{div}_{\Sigma}(\text{div}_{\Sigma}\omega) - \phi\psi HK_{\Sigma} \\ &+ \phi\psi H \text{Ric}(N, N) + \phi\psi H|A|^2 + \phi\psi A_{ij}A_{ik}A_{jk} + \phi\psi R_{iNNj}A_{ij} \end{aligned}$$

onde  $\omega$  é a 1-forma em  $\Sigma$  definida por  $\omega(X) = \text{Ric}(X, N)$ .

Agora, seguindo o procedimento adotado em [27], apresentaremos a fórmula da segunda variação da massa de Hawking modificada, que pode ser expressa da seguinte forma:

**Proposição 2.3.** *Sob as condições da Proposição 2.1. Se  $\Sigma \subset M$  é um ponto crítico da massa de Hawking modificada, então*

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2}{dt^2} \tilde{m}_H(\Sigma_t) \Big|_{t=0} &= -\frac{3\tilde{m}_H(\Sigma)}{4|\Sigma|^2} \left( \int_{\Sigma} H \phi d\sigma \right)^2 - \frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} ((L_{\Sigma}\phi)^2 + H L'_{\Sigma}(0)\phi) d\sigma \\ &+ \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (H^2 + \frac{2}{3}\Lambda)(\phi L_{\Sigma}\phi - H^2\phi^2) d\sigma + \frac{4|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} H^2\phi L_{\Sigma}\phi d\sigma \\ &- \frac{\tilde{m}_H(\Sigma)}{2|\Sigma|} \int_{\Sigma} (\phi L_{\Sigma}\phi - H^2\phi^2 - \text{div}_{\Sigma}(\nabla_X X)) d\sigma \\ &- \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\partial\Sigma} (H^2 + \frac{2}{3}\Lambda) \left( \frac{\partial\phi}{\partial\nu} - g(N, \nabla_N X)\phi \right) \phi ds \\ &+ \frac{\tilde{m}_H(\Sigma)}{2|\Sigma|} \int_{\partial\Sigma} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\nu} - g(N, \nabla_N X)\phi \right) \phi ds, \end{aligned}$$

onde  $X(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0)$ .

*Demonstração.* Vimos na Proposição 2.1 que a primeira variação da massa de Hawking modificada é dada por

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dt} \tilde{m}_H(\Sigma_t) &= \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \left( \chi(\Sigma_t) - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \left( H_t^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) d\sigma_t \right) \\ &\quad + \left( \frac{|\Sigma_t|}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} 2H_t \frac{d}{dt} (H_t) d\sigma_t - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \left( H_t^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right). \end{aligned}$$

Derivando a expressão acima, temos que

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2}{dt^2} \tilde{m}_H(\Sigma_t) &= -\frac{1}{4} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{3}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \left( \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right)^2 \left( \chi(\Sigma_t) - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \left( H_t^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) d\sigma_t \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{d^2}{dt^2} (d\sigma_t) \left( \chi(\Sigma_t) - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} \left( H_t^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) d\sigma_t \right) \\ &\quad - \frac{1}{16\pi} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \left( \int_{\Sigma_t} 2H_t \frac{d}{dt} (H_t) d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} \left( H_t^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right) \\ &\quad + \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{2(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \left[ -\int_{\Sigma_t} 2H_t \frac{d}{dt} (H_t) d\sigma_t - \int_{\Sigma_t} \left( H_t^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right] \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \left( \int_{\Sigma_t} 2 \left( \frac{d}{dt} (H_t) \right)^2 d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} 2H_t \frac{d^2}{dt^2} (H_t) d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} 2H_t \frac{d}{dt} (H_t) \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right) \\ &\quad + \int_{\Sigma_t} 2H_t \frac{d}{dt} (H_t) \frac{d}{dt} (d\sigma_t) + \int_{\Sigma_t} \left( H_t^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) \frac{d^2}{dt^2} (d\sigma_t). \end{aligned}$$

Usando o fato de que a fórmula da segunda variação do elemento de área é dada por

$$\frac{d^2}{dt^2} |\Sigma_t| \Big|_{t=0} = \int_{\Sigma} (-\phi L_{\Sigma} \phi + H^2 \phi - H \operatorname{div}_{\Sigma} (\nabla_X X)) d\sigma + \int_{\partial \Sigma} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \Pi(N, N) \phi \right) \phi ds.$$

Assim, calculando  $\frac{d^2}{dt^2} \tilde{m}_H(\Sigma_t)$  em  $t = 0$  obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2}{dt^2} \tilde{m}_H(\Sigma_t) \Big|_{t=0} &= -\frac{\tilde{m}_H(\Sigma)}{4|\Sigma|^2} \left( -\int_{\Sigma} H\phi d\sigma + \int_{\partial \Sigma} g(X, \nu) ds \right)^2 \\ &\quad + \frac{\tilde{m}_H(\Sigma)}{2|\Sigma|} \int_{\Sigma} (-\phi L\phi + H^2 \phi^2 + \operatorname{div}_{\Sigma} (\nabla_X X)) d\sigma \\ &\quad + \frac{\tilde{m}_H(\Sigma)}{2|\Sigma|} \int_{\partial \Sigma} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - g(N, \nabla_N X) \phi \right) \phi ds \\ &\quad - \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{2(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( -\int_{\Sigma} H\phi d\sigma + \int_{\partial \Sigma} g(X, \nu) ds \right) \left( \int_{\Sigma} 2HL\phi d\sigma \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Sigma} \left( H^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) H\phi d\sigma + \int_{\partial \Sigma} \left( H^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) g(X, \nu) ds \right) \\ &\quad + \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{2(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \int_{\Sigma} H\phi d\sigma - \int_{\partial \Sigma} g(X, \nu) ds \right) \left( \int_{\Sigma} 2HL\phi d\sigma \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Sigma} \left( H^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) H\phi d\sigma + \int_{\partial \Sigma} \left( H^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) g(X, \nu) ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \int_{\Sigma} (2(L\phi)^2 + 2HL'(0)\phi - 4H^2\phi L\phi) d\sigma + \int_{\partial\Sigma} 4HL\phi g(X, \nu) ds \right) \\
 & - \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (H^2 + \frac{2}{3}\Lambda)(-\phi L\phi + H^2\phi^2 + \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_X X)) d\sigma \\
 & - \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\partial\Sigma} (H^2 + \frac{2}{3}\Lambda) \left( \frac{\partial \nu}{\partial \nu} - g(N, \nabla_N X)\phi \right) \phi ds.
 \end{aligned}$$

Como  $\Sigma$  é um ponto crítico para a massa de Hawking modificada, então

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{m}_H(\Sigma)}{2|\Sigma|} \left( \int_{\Sigma} H\phi d\sigma - \int_{\partial\Sigma} g(X, \nu) ds \right) &= \frac{-|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[ \int_{\Sigma} 2HL_{\Sigma}\phi d\sigma - \int_{\Sigma} (H^2 + \frac{2\Lambda}{3})H\phi d\sigma \right. \\
 & \left. + \int_{\partial\Sigma} (H^2 + \frac{2\Lambda}{3})g(\nu, X) ds \right].
 \end{aligned}$$

Assim, a partir da igualdade acima, considerando que em  $t = 0$  a superfície  $\Sigma$  é de bordo livre, teremos

$$\begin{aligned}
 2 \frac{d^2}{dt^2} \tilde{m}_H(\Sigma_t) \Big|_{t=0} &= -\frac{3\tilde{m}_H(\Sigma)}{4|\Sigma|^2} \left( \int_{\Sigma} H\phi d\sigma \right)^2 - \frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} ((L_{\Sigma}\phi)^2 + HL'_{\Sigma}(0)\phi) d\sigma \\
 & + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (H^2 + \frac{2}{3}\Lambda)(\phi L_{\Sigma}\phi - H^2\phi^2) d\sigma + \frac{4|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} H^2\phi L_{\Sigma}\phi d\sigma \\
 & - \frac{\tilde{m}_H(\Sigma)}{2|\Sigma|} \int_{\Sigma} (\phi L_{\Sigma}\phi - H^2\phi^2 - \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_X X)) d\sigma \\
 & - \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\partial\Sigma} (H^2 + \frac{2}{3}\Lambda) \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - g(N, \nabla_N X)\phi \right) \phi ds \\
 & + \frac{\tilde{m}_H(\Sigma)}{2|\Sigma|} \int_{\partial\Sigma} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - g(N, \nabla_N X)\phi \right) \phi ds,
 \end{aligned}$$

□

**Proposição 2.4.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M$  satisfazendo  $R \geq 2$  e  $H^{\partial M} \geq 0$ . Se  $\Sigma$  é um disco mínimo dois-lados de bordo livre, propriamente mergulhado, estritamente estável, que maximiza localmente a massa de Hawking modificada, então*

$$|\Sigma| = \frac{2\pi}{\lambda_1(L_{\Sigma}) + 1},$$

onde  $\lambda_1(L_{\Sigma})$  é o primeiro autovalor do operador de Jacobi. Além disso, ao longo de  $\Sigma$ , tem-se  $A = 0$ ,  $R = 2$ ,  $\operatorname{Ric}(N, N) = -\lambda_1(L_{\Sigma})$ , a curvatura Gaussiana  $K_{\Sigma} = \frac{2\pi}{|\Sigma|}$ , e, a curvatura geodésica e  $H^{\partial M}$  são nulas ao longo de  $\partial\Sigma$ . Em particular,  $\Sigma$  é um hemisfério com a métrica redonda.

## Capítulo 2. Um resultado de rigidez local do semi de Sitter-Schwarzschild 18

*Demonstração.* Uma vez que  $\Sigma$  é estritamente estável, temos que  $\lambda_1(L_\Sigma) \int_\Sigma \phi^2 d\sigma \leq \mathcal{Q}(\phi, \phi)$  para qualquer função suave  $\phi$  em  $\Sigma$ . Escolhendo  $\phi = 1$ , obtemos

$$\lambda_1(L_\Sigma)|\Sigma| \leq - \int_\Sigma (\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + |\mathbf{A}|^2) d\sigma - \int_{\partial\Sigma} \Pi(\mathbf{N}, \mathbf{N}) ds. \quad (2.15)$$

Segue da equação de Gauss que

$$\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + |\mathbf{A}|^2 = \frac{\mathbf{R}}{2} - \mathbf{K}_\Sigma + \frac{|\mathbf{A}|^2}{2} \geq 1 - \mathbf{K}_\Sigma,$$

onde na última desigualdade usamos que  $\mathbf{R} \geq 2$ .

Assim, usando o Teorema de Gauss-Bonnet e o fato de que  $H^{\partial M} = k_g + \Pi(\mathbf{N}, \mathbf{N})$  ao longo de  $\partial\Sigma$ , deduzimos

$$\begin{aligned} (1 + \lambda_1(L_\Sigma))|\Sigma| &\leq \int_\Sigma \mathbf{K}_\Sigma d\sigma - \int_{\partial\Sigma} \Pi(\mathbf{N}, \mathbf{N}) ds \\ &= 2\pi - \int_{\partial\Sigma} (k_g + \Pi(\mathbf{N}, \mathbf{N})) ds \\ &= 2\pi - \int_{\partial\Sigma} H^{\partial M} ds, \end{aligned}$$

onde  $k_g$  denota a curvatura geodésica de  $\partial\Sigma$  em  $\Sigma$ . Uma vez que por hipótese  $H^{\partial M} \geq 0$ , temos que

$$|\Sigma| \leq \frac{2\pi}{\lambda_1(L_\Sigma) + 1}. \quad (2.16)$$

Além disso, se a igualdade ocorrer, todas as desigualdades acima devem ser igualdades. Consequentemente,  $\mathcal{Q}(1, 1) = \lambda_1(L_\Sigma)|\Sigma|$ ,  $\Sigma$  é totalmente geodésica,  $\mathbf{R} = 2$  e  $H^{\partial M} = 0$  ao longo de  $\Sigma$ . Assim, segue de  $\mathcal{Q}(\phi, \phi) \geq \lambda_1(L_\Sigma) \int_\Sigma \phi^2 d\sigma$  para qualquer  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$  que

$$\mathcal{F}(\phi, \mathbf{h}) := \mathcal{Q}(\phi, \mathbf{h}) - \lambda_1(L_\Sigma) \int_\Sigma \phi \mathbf{h} d\sigma,$$

satisfaz  $\mathcal{F}(\phi, \phi) \geq 0$  e  $\mathcal{F}(1, 1) = 0$  para todo  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ . Ao mesmo tempo, verifica-se facilmente que  $\mathcal{F}(1, \phi) = 0$  para qualquer  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ . De fato, dados  $t \in \mathbb{R}$  e  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1 - \phi, 1 - t\phi) &= \mathcal{F}(1, 1) - \mathcal{F}(1, t\phi) - \mathcal{F}(t\phi, 1) + \mathcal{F}(t\phi, t\phi) \\ &= t^2 \mathcal{F}(\phi, \phi) - 2t \mathcal{F}(1, \phi) \geq 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

como,  $\mathcal{F}(\phi, \phi) \geq 0$ , então  $\mathcal{F}(1, \phi) = 0$  para cada  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ . Daí, segue que

$$0 = \mathcal{F}(1, \phi) = - \int_\Sigma (\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + \lambda_1(L_\Sigma)) \phi d\sigma - \int_{\partial\Sigma} \Pi(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \phi ds. \quad (2.18)$$

Isso nos permite concluir que, ao longo de  $\Sigma$ ,  $\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = -\lambda_1(\mathbf{L}_\Sigma)$ ,  $\Pi(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = k_g = 0$  ao longo de  $\partial\Sigma$ . Além disso, da equação de Gauss segue que a curvatura Gaussiana  $K_\Sigma = \frac{2\pi}{|\Sigma|}$ .

Finalmente, derivamos a desigualdade inversa em (2.16); usando o fato de que  $\Sigma$  maximiza localmente a massa de Hawking modificada na Proposição 2.3, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (\mathbf{L}_\Sigma \phi)^2 d\sigma - \left( \frac{\tilde{m}_H(\Sigma)}{2|\Sigma|} - \frac{4|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{3(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \right) \int_{\Sigma} \phi \mathbf{L}_\Sigma \phi d\sigma \\ &\quad - \left( \frac{4|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{3(8\pi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\tilde{m}_H(\Sigma)}{2|\Sigma|} \right) \int_{\partial\Sigma} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\nu} - g(\mathbf{N}, \nabla_{\mathbf{N}}\mathbf{X})\phi \right) \phi ds. \end{aligned}$$

Além disso, substituindo na última desigualdade a autofunção associada ao primeiro autovalor do problema (2.6) satisfazendo  $\int_{\Sigma} \phi^2 d\sigma = 1$ , teremos

$$-\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \lambda_1(\mathbf{L}_\Sigma)^2 + \frac{\tilde{m}_H(\Sigma)}{2|\Sigma|} \lambda_1(\mathbf{L}_\Sigma) - \frac{4|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{3(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \lambda_1(\mathbf{L}_\Sigma) \leq 0,$$

usando a definição da massa de Hawking modificada, concluímos que

$$(8\pi - 4|\Sigma|)\lambda_1(\mathbf{L}_\Sigma) \leq 4|\Sigma|\lambda_1(\mathbf{L}_\Sigma)^2,$$

e, uma vez que  $\lambda_1(\mathbf{L}_\Sigma) > 0$ , inferimos

$$|\Sigma| \geq \frac{2\pi}{\lambda_1(\mathbf{L}_\Sigma) + 1}$$

o que conclui a prova da proposição. □

O próximo resultado é um passo crucial na prova do resultado principal. Sua prova é inspirado em argumentos utilizados em [27] e [3]. Pode-se construir uma folheação  $\Sigma(\mathbf{t})$  em uma vizinhança de  $\Sigma$  tal que  $\Sigma(\mathbf{t})$  seja uma superfície de bordo livre e tenha curvatura média constante.

**Proposição 2.5.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M$  satisfazendo  $R \geq 2$  e  $H^{\partial M} \geq 0$ . Se  $\Sigma$  é um disco mínimo dois-lados, propriamente mergulhado, com bordo livre e estritamente estável, satisfazendo*

$$|\Sigma| = \frac{2\pi}{\lambda_1(\mathbf{L}_\Sigma) + 1}.$$

*Então existe  $\varepsilon > 0$  e uma função suave  $\mu : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\Sigma_{\mathbf{t}} = \{\exp_x(\mu(\mathbf{t}, \mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{x})); \mathbf{x} \in \Sigma\}$$

## Capítulo 2. Um resultado de rigidez local do semi de Sitter-Schwarzschild 20

é uma família de superfícies de bordo livre com curvatura média constante e  $\mathbf{N}$  é o campo vetorial normal unitário ao longo de  $\Sigma$ . Além disso, as seguintes propriedades são válidas:

$$\mu(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = 1 \quad e \quad \int_{\Sigma} (\mu(\mathbf{t}, \mathbf{x}) - \mathbf{t}) d\sigma = 0$$

para quaisquer  $(\mathbf{t}, \mathbf{x}) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ . Em particular, existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\{\Sigma_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t} \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$  é uma folheação em uma vizinhança de  $\Sigma_0 = \Sigma$  em  $\mathcal{M}$ .

*Demonstração.* Se  $\mathbf{N}$  é campo vetorial normal unitário a  $\Sigma$ , e seja  $\mathbf{X}$  o campo vetorial normal unitário a  $\partial\mathcal{M}$  que coincide com o conormal externo  $\mathbf{v}$  de  $\partial\Sigma$ .

Para uma função  $\mathbf{u} \in C^{2,\alpha}(\Sigma)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , definimos  $\Sigma_{\mathbf{u}} = \{\exp_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{x})); \mathbf{x} \in \Sigma\}$ . Note que  $\Sigma_{\mathbf{u}}$  é uma superfície propriamente mergulhada quando  $\|\mathbf{u}\|_{2,\alpha}$  é suficientemente pequeno. A seguir, consideramos os espaços de Banach  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{u} \in C^{2,\alpha}(\Sigma); \int_{\Sigma} \mathbf{u} d\sigma = 0\}$  e  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{u} \in C^{0,\alpha}(\Sigma); \int_{\Sigma} \mathbf{u} d\sigma = 0\}$ . Dadas  $\varepsilon, \delta > 0$  suficientemente pequenos, definimos a aplicação  $\Upsilon : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (B(0, \delta) \cap \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Y} \times C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$  por

$$\Upsilon(\mathbf{t}, \mathbf{u}) = \left( H_{\Sigma_{\mathbf{t}+\mathbf{u}}} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H_{\Sigma_{\mathbf{u}+\mathbf{t}}} d\sigma, g(\mathbf{N}_{\Sigma_{\mathbf{u}+\mathbf{t}}}, \mathbf{X}_{\Sigma_{\mathbf{u}+\mathbf{t}}}) \right),$$

onde  $B(0, \delta) = \{\mathbf{u} \in C^{2,\alpha}(\Sigma); \|\mathbf{u}\|_{2,\alpha} < \delta\}$ ,  $H_{\Sigma_{\mathbf{t}+\mathbf{u}}}$  e  $\mathbf{N}_{\Sigma_{\mathbf{u}+\mathbf{t}}}$  denotam a curvatura média e o campo vetorial normal unitário de  $\Sigma_{\mathbf{u}+\mathbf{t}}$ , respectivamente, e  $\mathbf{X}_{\Sigma_{\mathbf{u}+\mathbf{t}}}$  denota a restrição de  $\mathbf{X}$  a  $\partial\Sigma_{\mathbf{u}+\mathbf{t}}$ .

Note que  $\Upsilon(0, 0) = (0, 0)$ , pois  $\Sigma = \Sigma_0$ . Pela Proposição 2.4, o operador de Jacobi de  $\Sigma$  é dado por  $L_{\Sigma} = \Delta_{\Sigma} - \lambda_1(L_{\Sigma})$ .

Consequentemente, para cada  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}$ , usamos (2.1) para obtermos

$$\begin{aligned} D\Upsilon(0, 0) \cdot \mathbf{v} &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \Upsilon(0, s\mathbf{v}) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left( H_{\Sigma_{s\mathbf{v}}} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H_{\Sigma_{s\mathbf{v}}} d\sigma, g(\mathbf{N}_{\Sigma_{s\mathbf{v}}}, \mathbf{X}_{\Sigma_{s\mathbf{v}}}) \right) \\ &= \left( L_{\Sigma} \mathbf{v} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma} \mathbf{v} d\sigma + \frac{\lambda_1(L_{\Sigma})}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \mathbf{v} d\sigma, -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} \right) \\ &= \left( \Delta_{\Sigma} \mathbf{v} - \lambda_1(L_{\Sigma}) \mathbf{v} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} ds, -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} \right). \end{aligned}$$

Agora, afirmamos que  $D\Upsilon(0, 0)$  é um isomorfismo quando restrito a  $0 \times \mathbf{Z}$ . Para provar isso, basta mostrar que existe uma única função  $\varphi \in \mathbf{Z}$  que resolve o seguinte problema como condição de bordo de Neumann

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma} \varphi - \lambda_1(L_{\Sigma}) \varphi = f + \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\partial\Sigma} z ds & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{v}} = z & \text{sobre } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (2.19)$$

## Capítulo 2. Um resultado de rigidez local do semi de Sitter-Schwarzschild 21

para quaisquer  $f \in Y$  e  $z \in C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$ . Para tal, basta aplicar [[23], Teorema 3.2] ou [[32], Teorema 3.1] para resolver o problema (2.19).

Consequentemente, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita para concluir que, existem  $\varepsilon > 0$  e  $(t, \mathbf{u}(t)) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B(0, \delta)$  tal que  $\mathbf{u}(0) = 0$  e  $\Upsilon(t, \mathbf{u}(t)) = (0, 0)$  para qualquer  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Mais precisamente, as superfícies

$$\Sigma_{t+\mathbf{u}(t)} = \{\exp_x((t + \mathbf{u}(t)(x))\mathbf{N}(x)); x \in \Sigma\}$$

são superfícies de curvatura média constante com bordo livre.

Prosseguindo, é fácil ver que a função suave  $\mu : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\mu(t, x) = t + \mathbf{u}(t)(x)$  satisfaz  $\mu(0, x) = 0$  para cada  $x \in \Sigma$  e  $\int_{\Sigma} (\mu(t, x) - t) d\sigma = 0$  para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Daqui, segue que

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \mu}{\partial t}(0, \cdot) d\sigma = |\Sigma|. \quad (2.20)$$

Além disso, uma vez que  $\Sigma_{\mu(t,x)}$  é uma superfície de bordo livre e curvatura média constante (CMC), temos que

$$H_{\mu(t,\cdot)} = \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H_{\mu(t,\cdot)} d\sigma.$$

Assim, após a diferenciação em  $t = 0$  e usando (2.2), deduzimos

$$\begin{aligned} L_{\Sigma} \left( \frac{\partial \mu}{\partial t}(0, \cdot) \right) &= \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} (\Delta_{\Sigma} - \lambda_1(L_{\Sigma})) \frac{\partial \mu}{\partial t}(0, \cdot) d\sigma \\ &= \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial t}(0, \cdot) \right) d\sigma - \frac{\lambda_1(L_{\Sigma})}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \frac{\partial \mu}{\partial t}(0, \cdot) d\sigma \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial t}(0, \cdot) \right) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Sigma,$$

uma vez que, pela Proposição 2.4,  $\Pi(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 0$  em  $\Sigma$ . Disto, e por (2.20), segue que

$$\begin{cases} L_{\Sigma} \left( \frac{\partial \mu}{\partial t}(0, \cdot) \right) = L_{\Sigma}(1) & \text{em } \Sigma_t, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial t}(0, \cdot) \right) = 0 & \text{sobre } \partial\Sigma_t. \end{cases}$$

Daí, temos que  $\frac{\partial \mu}{\partial t}(0, x) = 1$  para cada  $x \in \Sigma$ , o que conclui a prova da proposição.  $\square$

Para as provas que se seguirão, usamos a Proposição 2.5 para definir a aplicação  $f_t : \Sigma \rightarrow M$  por  $f_t(x) = \exp_x(\mu(x, t)\mathbf{N}(x))$  para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Seja  $\mathbf{N}_t(x)$  o campo vetorial normal unitário ao longo de  $\Sigma_t$ , de modo que  $\mathbf{N}_0(x) = \mathbf{N}(x)$  para todos  $x \in \Sigma$ , e denotemos  $d\sigma_t$  e  $ds_t$  como os elementos de área de  $\Sigma_t$  e  $\partial\Sigma_t$ , respectivamente, com relação à métrica induzida por  $f_t$ .

Além disso, seja  $H(t)$  a curvatura média de  $\Sigma_t$  com respeito a  $\nu_t$ , bem como a função de lapso  $\rho_t : \Sigma_t \rightarrow \mathbb{R}$ , que é definida por

$$\rho_t(x) = \left\langle N_t(x), \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) \right\rangle,$$

para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Conseqüentemente, uma vez que  $\{\Sigma_t\}$  é uma folheação de  $\Sigma$  por superfícies de bordo livre e CMC, segue de (2.1) e (2.2) que

$$\begin{cases} H'(t) = L_{\Sigma_t} \rho_t & \text{em } \Sigma_t, \\ \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} = g(N_t, \nabla_{N_t} X) \rho_t & \text{sobre } \partial \Sigma_t, \end{cases} \quad (2.21)$$

onde  $L_{\Sigma_t}$  é o operador de Jacobi associado à superfície  $\Sigma_t$ .

Da Proposição 2.5, é fácil verificar que  $\rho_0 \equiv 1$ . Então, usamos a Proposição 2.4 e (2.21) para concluir que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(t) = L_{\Sigma}(1) = -\lambda_1(L_{\Sigma}) < 0. \quad (2.22)$$

Isso implica que podemos escolher  $\varepsilon$  suficientemente pequeno de modo que  $H(t) > 0$  para  $t \in (-\varepsilon, 0)$  e  $H(t) < 0$  para  $t \in (0, \varepsilon)$ , portanto  $H$  é uma função decrescente em  $t$ . Para provar o Teorema principal, precisamos fornecer a monotonicidade da massa de Hawking modificada ao longo dessa folheação. Este é o conteúdo do seguinte Lema.

**Lema 2.1.** *Seja  $\{\Sigma_t\}_t$  uma família de superfícies obtidas na Proposição 2.5. Então*

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) \rho_t d\sigma_t &= \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) d\sigma_t + H'(t) \theta(t, x) \\ &+ \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t + \bar{\rho}_t \int_{\partial \Sigma_t} g(N_t, \nabla_{N_t} X) ds_t - \int_{\Sigma_t} (\Delta_{\Sigma_t} \rho_t) d\sigma_t, \end{aligned}$$

onde  $\bar{\rho}_t = \frac{1}{|\Sigma_t|} \int_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t$  e  $\theta(x, t)$  é uma função não positiva.

*Demonstração.* Como  $\rho_0 \equiv 1$ , por continuidade podemos assumir  $\rho_t > 0$  em uma vizinhança de  $t = 0$ . Assim, multiplicando a equação (2.21) por  $1/\rho_t$  e integrando sobre  $\Sigma_t$ , concluímos que

$$\begin{aligned} H'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t &= \int_{\Sigma_t} \frac{\Delta_{\Sigma_t} \rho_t}{\rho_t} d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) d\sigma_t \\ &= \int_{\partial \Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} ds_t + \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) d\sigma_t. \end{aligned}$$

Multiplicando a última equação por  $\bar{\rho}_t = \frac{1}{|\Sigma_t|} \int_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t$  e subtraindo-a da integral da equação (2.21), encontramos:

$$\begin{aligned} H'(t) \left( \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t - |\Sigma_t| \right) &= \bar{\rho}_t \int_{\partial\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} ds_t + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t \\ &\quad + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_t) + |\mathcal{A}_t|^2) d\sigma_t - \int_{\Sigma_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t \\ &\quad - \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_t) + |\mathcal{A}_t|^2) \rho_t d\sigma_t. \end{aligned}$$

Daí, segue de  $\frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} = g(\mathbf{N}_t, \nabla_{\mathbf{N}_t} X) \rho_t$  que:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_t) + |\mathcal{A}_t|^2) \rho_t d\sigma_t &= \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_t) + |\mathcal{A}_t|^2) d\sigma_t + H'(t) \theta(t, \mathbf{x}) \\ &\quad + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t + \bar{\rho}_t \int_{\partial\Sigma_t} g(\mathbf{N}_t, \nabla_{\mathbf{N}_t} X) ds_t - \int_{\Sigma_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t, \end{aligned}$$

onde  $\theta(t, \mathbf{x}) = |\Sigma_t| - \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t$  é uma função não positiva. Isso conclui a prova do Lema.  $\square$

## 2.3 Rigidez local de discos mínimos com bordo livre em variedade com bordo médio convexo

Nesta seção, demonstramos um teorema de rigidez local, que representa o resultado central deste capítulo.

**Teorema 2.1.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana tridimensional com bordo  $\partial M$  não vazio satisfazendo  $R \geq 2$  e  $H^{\partial M} \geq 0$ . Se  $\Sigma$  é um disco mínimo dois-lados de bordo livre propriamente mergulhado, estritamente estável que maximiza localmente a massa de Hawking modificada, então a curvatura Gaussiana de  $\Sigma$  é constante e igual a  $1/a^2$  para algum  $a \in (0, 1)$ , a curvatura geodésica de  $\partial\Sigma$  se anula, e existe uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $(M^3, g)$  isométrica ao espaço semi de Sitter-Schwarzschild  $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, g_a)$  para algum  $\varepsilon > 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Sigma \subset M$  uma superfície de bordo livre sob as hipóteses do enunciado. Como consequência das Proposições 2.4 e 2.5, o operador de Jacobi de  $\Sigma$  é dado por  $L_\Sigma = \Delta - \lambda_1(\Sigma)$ , e existe uma família de superfícies de bordo livre com curvatura média constante  $\{\Sigma_t\}_{|t| < \varepsilon}$  em uma vizinhança

de  $\Sigma = \Sigma_0$ . Assim, podemos usar a Proposição 2.1 e a primeira variação da massa de Hawking modificada, para inferir

$$\begin{aligned}
 2 \frac{d}{dt} \tilde{m}_H(\Sigma_t) &= -\frac{1}{2} \frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \left( 1 - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} (H_t^2 + \frac{4}{3}) d\sigma_t \right) \left( \int_{\Sigma_t} H_t \rho_t d\sigma_t - \int_{\partial\Sigma_t} \rho_t g(\nu_t, X) ds_t \right) \\
 &+ \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \left( -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} [2H_t(\Delta_{\Sigma_t} \rho_t + \text{Ric}(N_t, N_t) \rho_t + |A_t|^2 \rho_t)] d\sigma_t \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} (H_t^2 + \frac{4}{3}) H_t \rho_t d\sigma_t - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma_t} (H_t^2 + \frac{4}{3}) \rho_t g(\nu_t, X) ds_t \right) \\
 &= \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} H_t \left[ -\frac{4\pi}{|\Sigma_t|} \int_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t + \left( \frac{3H_t^2}{2} + 2 \right) \int_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t - 2 \int_{\Sigma_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t d\sigma_t \right. \\
 &\left. - 2 \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) \rho_t d\sigma_t \right],
 \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos que  $\{\Sigma_t\}_t$  é uma família de superfícies de bordo livre com curvatura média constante.

Em conjunto com o Lema 2.1 e (2.13), observa-se que

$$\begin{aligned}
 2 \frac{d}{dt} \tilde{m}_H(\Sigma_t) &= \frac{-|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} H_t \left[ 4\pi \bar{\rho}_t - \left( \frac{3H_t^2}{2} + 2 \right) |\Sigma_t| \bar{\rho}_t + 2\bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) d\sigma_t \right. \\
 &+ \left. 2H'(t)\theta(t, x) + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t + 2\bar{\rho}_t \int_{\partial\Sigma_t} g(N_t, \nabla_{N_t} X) ds_t \right] \\
 &= \frac{-|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} H_t \left[ 4\pi \bar{\rho}_t - 2\bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} K_{\Sigma_t} d\sigma_t + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} (R - 2) d\sigma_t + 2H'(t)\theta(t, x) \right. \\
 &+ \left. \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \left( |A_t|^2 - \frac{H_t^2}{2} \right) d\sigma_t + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t + 2\bar{\rho}_t \int_{\partial\Sigma_t} g(N_t, \nabla_{N_t} X) ds_t \right],
 \end{aligned}$$

e, portanto, ao utilizar a identidade  $H^{\partial M} = k_g + \Pi(N_t, N_t)$  e o Teorema de Gauss-Bonnet, obtemos

$$\begin{aligned}
 2 \frac{d}{dt} \tilde{m}_H(\Sigma_t) &= -\frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{3}{2}}} H_t \left[ 2\bar{\rho}_t \int_{\partial\Sigma_t} H^{\partial M} ds_t + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} (R - 2) d\sigma_t + 2H'(t)\theta(t, x) \right. \\
 &+ \left. \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \left( |A_t|^2 - \frac{H_t^2}{2} \right) d\sigma_t + \bar{\rho}_t \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t \right]. \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Uma vez que  $\rho_0(x) = 1$  para todo  $x \in \Sigma$ , podemos escolher  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno de modo que  $\rho_t(x) > 0$  para cada  $x \in \Sigma_t$  e  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Assim, basta usar  $H^{\partial M} \geq 0$  juntamente com  $R \geq 2$  e que a função  $H'(t)\theta(t, x)$  é positiva para concluir que  $2 \frac{d}{dt} \tilde{m}_H(\Sigma_t) \geq 0$  para  $t \in [0, \varepsilon)$  e  $2 \frac{d}{dt} \tilde{m}_H(\Sigma_t) \leq 0$  para  $t \in (-\varepsilon, 0]$ . Isso implica que

$$\tilde{m}_H(\Sigma_t) \geq \tilde{m}_H(\Sigma),$$

para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Consequentemente, levando em conta que  $\Sigma$  maximiza localmente a massa de Hawking modificada, concluímos que  $\frac{d}{dt} \tilde{m}_H(\Sigma_t) \equiv 0$ . Isso garante imediatamente que  $\Sigma_t$  é umbílica,  $R = 2$  ao longo de  $\Sigma_t$ , e  $H^{\partial M} = 0$  ao longo de  $\partial \Sigma_t$ . Então, usamos (2.23) para concluir

$$\frac{\bar{\rho}_t}{2} \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t + H'(t)\theta(t, x) = 0$$

para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Por outro lado, a partir de (2.22) e do Lema 2.1, temos  $H'(t)\theta(t, x) \geq 0$ , o que permite concluir que  $\rho_t = 1$  para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Portanto,  $f(x, t) = \exp_x(tN(x))$  define uma isometria entre  $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ , e uma vizinhança de  $\Sigma$  tal que a métrica é dada por  $g = dt^2 + g_{\Sigma_t}$ , onde  $g_{\Sigma_t}$  é a métrica induzida pela isometria  $f$ .

Agora, basta aplicar o Teorema 3.2 em [8] para concluir que

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{\Sigma_t} = -H_t g_{\Sigma_t},$$

onde usamos  $\rho_t \equiv 1$ ,  $H_t$  é constante e  $\Sigma_t$  é umbílica para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Consequentemente,  $g_{\Sigma_t} = u_a(t)^2 g_{\mathbb{S}_+^2}$  para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , onde  $u_a(t) = a e^{-\frac{1}{2} \int_0^t H(s) ds}$  e  $a^2 = \frac{|\Sigma|}{2\pi}$ .

Portanto, a métrica induzida pela isometria  $f(x, t) = \exp_x(tN(x))$  implica que  $g = dt^2 + u_a(t)^2 g_{\mathbb{S}_+^2}$  em  $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Além disso, é fácil ver que a função  $u_a(t)$  é uma solução de (2.10). De fato,

$$u_a''(t) = -\frac{H_t'}{2} u_a(t) + \frac{H_t^2}{4} u_a(t).$$

Veja que, como  $H'(t) = L_{\Sigma_t} \rho_t$ ,  $\rho_t \equiv 1$ , temos que

$$\begin{aligned} H_t' &= \Delta_{\Sigma_t} \rho_t + (\text{Ric}(N_t, N_t) + \frac{H_t^2}{2}) \rho_t \\ &= \text{Ric}(N_t, N_t) + \frac{H_t^2}{2} \\ &= \frac{R}{2} - K_{\Sigma_t} + \frac{H_t^2}{2} + \frac{H_t^2}{4} \\ &= \frac{R}{2} - \frac{1}{u_a(t)^2} + \frac{3H_t^2}{4}, \end{aligned}$$

onde acima usamos a equação de Gauss (2.13) e o fato que  $g_{\Sigma_t} = u_a(t)^2 g_{\mathbb{S}_+^2}$  implica  $K_{\Sigma_t} = \frac{1}{u_a(t)^2}$ , donde temos

$$\begin{aligned} u_a''(t) &= -\frac{u_a(t)}{2} + \frac{1}{2u_a(t)} - \frac{H_t^2}{8} u_a(t) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - u_a'(t)^2}{u_a(t)} \right) - \frac{u_a(t)}{2}. \end{aligned}$$

Pela unicidade da solução da EDO, concluímos que  $g$  é exatamente uma métrica de semi de Sitter-Schwarzschild em  $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Assim, a prova está concluída.  $\square$

Destacamos que o Teorema 2.1 é uma versão de bordo livre dos resultados de Máximo e Nunes [27]. Além disso, uma observação relevante é que a métrica  $g_m$  definida em (2.9) converge para a métrica produto  $dr^2 + g_{\mathbb{S}_+^2}$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_+^2$  quando  $\alpha \rightarrow 1$ . Assim, pode-se verificar facilmente que  $\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{S}_+^2$  é um disco mínimo estritamente estável (na verdade, totalmente geodésico) de área  $2\pi\alpha^2$  em  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}_+^2, g_m)$ , para cada  $\alpha \in (0, 1)$ . No entanto, na métrica produto  $dr^2 + g_{\mathbb{S}_+^2}$ , ou seja, no limite em que  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $\Sigma_0$  é apenas estável e não estritamente estável. Consequentemente, nosso teorema fornece, de certa forma, uma generalização do teorema devido a Ambrozio [3].

Finalmente, concluímos este capítulo com um resultado que indica que certos slices da variedade semi de Sitter-Schwarzschild são máximos locais da massa de Hawking modificada.

**Teorema 2.2.** *Seja  $\Sigma_r = \{r\} \times \mathbb{S}_+^2$  uma slice da variedade semi de Sitter-Schwarzschild  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}_+^2, g_m)$ . Então, existe um  $\varepsilon = \varepsilon(r) > 0$  tal que, se  $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{S}_+^2$  é um disco dois-lados de bordo livre propriamente mergulhado, que é um gráfico normal sobre  $\Sigma_r$  dado por  $\phi \in C^2(\Sigma_r)$  com  $\|\phi\|_{C^2(\Sigma_r)} < \varepsilon$ , então tem-se:*

(i) ou  $\tilde{m}_H(\Sigma) < \tilde{m}_H(\Sigma_r)$ ;

(ii) ou  $\Sigma$  é um slice  $\Sigma_s$  para algum  $s$ .

*Demonstração.* Para começar, seja  $(M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}_+^2, g_m)$  o semi de Sitter-Schwarzschild com parâmetro de massa  $m > 0$ . Agora, considere a variedade dobrada  $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_m)$  de  $(M, g_m)$  ao longo de  $\partial M$ . Mais precisamente,  $\widetilde{M} = M \times \{0, 1\} / \sim$ , onde  $(x, 0) \sim (x, 1)$  para todo  $x \in \partial M$ , e  $\widetilde{g}_m(x, j) = g_m(x)$  para todo  $x \in M$  e  $j = 0, 1$ . Uma vez que  $\partial M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  é totalmente geodésica, segue que  $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_m)$  é uma variedade Riemanniana  $C^\infty$  e que  $(\widetilde{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2, \widetilde{g}_m)$  é um de Sitter-Schwarzschild.

A seguir, suponha que  $\Sigma$  é um gráfico normal sobre a slice  $\Sigma_r = \{r\} \times \mathbb{S}_+^2$  dado por  $\phi \in C^2(\Sigma_r)$  com  $\|\phi\|_{C^2(\Sigma_r)} < \varepsilon$ , que encontra  $\partial M$  ortogonalmente. É fácil verificar que a massa de Hawking modificada satisfaz  $\tilde{m}_H(\Sigma_r) = m/2$  para qualquer slice de  $M$  e  $\widetilde{\Sigma} \subset \widetilde{M}$ , o dobro de  $\Sigma$ , é uma superfície fechada dada como um gráfico sobre o slice  $\widetilde{\Sigma}_r = \{r\} \times \mathbb{S}^2$  que satisfaz  $|\widetilde{\Sigma}|_{\widetilde{g}_m} = 2|\Sigma|_{g_m}$  e  $|\widetilde{\Sigma}_r|_{\widetilde{g}_m} = 2|\Sigma_r|_{g_m}$ . Isso implica que  $m_H(\widetilde{\Sigma}) = 2\tilde{m}_H(\Sigma)$

## Capítulo 2. Um resultado de rigidez local do semi de Sitter-Schwarzschild 27

e  $m_H(\tilde{\Sigma}_r) = 2\tilde{m}_H(\Sigma_r)$ , onde  $m_H(\cdot)$  e  $\tilde{m}_H(\cdot)$  representam, respectivamente, a massa de Hawking e a massa de Hawking modificada. Assim, basta aplicar o Teorema 1.2 em [27] para concluir que se tem ou  $m_H(\tilde{\Sigma}) < m_H(\tilde{\Sigma}_r)$  ou  $\tilde{\Sigma}$  é uma slice  $\tilde{\Sigma}_s$  para algum  $s$ . Segue que

- (i) ou  $\tilde{m}_H(\Sigma) < \tilde{m}_H(\Sigma_r)$ ;
- (ii) ou  $\Sigma$  é uma slice  $\Sigma_s$  para algum  $s$ ,

o que termina a prova do teorema.

□

# Capítulo 3

## Massa e capacidade de métricas Assintoticamente planas

### 3.1 Preliminares

Nesta seção, reuniremos alguns fatos básicos que serão úteis para o estabelecimento dos resultados principais. A massa ADM, definida em [4], está relacionada à teoria de superfícies mínimas e a geometria de curvaturas escalares, conforme evidenciado pelos trabalhos fundamentais [35] e [36]. Os teoremas desses trabalhos afirmam que, para uma variedade assintoticamente plana com uma taxa de decaimento relativa à métrica, e curvatura escalar não negativa, a massa ADM será não negativa. Além disso, o espaço Euclidiano é a única variedade com massa nula. Este resultado foi estendido por Almaraz, Barbosa e de Lima [2] para variedades assintoticamente planas com bordo não compacto. Nesse trabalho, os autores introduziram a noção de massa nesse contexto, sugerida por F. C. Marques.

A partir deste ponto, introduziremos o conceito de variedade assintoticamente plana, que será utilizado ao longo deste trabalho. Grosseiramente falando, variedades assintoticamente planas são variedades Riemannianas que, fora de um conjunto compacto, são difeomorfas ao complemento de uma bola fechada centrada na origem em  $\mathbb{R}_+^3$ , cuja métrica se aproxima da métrica Euclidiana no infinito com determinada taxa de decaimento.

**Definição 3.1.** *Dizemos que  $(M^3, g)$  é uma variedade assintoticamente plana de ordem  $\tau > \frac{1}{2}$  com um fim se existirem um compacto  $K \subset M$  e um difeomorfismo  $\varphi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}_+^3 \setminus B_{\mathbb{R}}(0)$ , tais que, nas coordenadas induzidas por  $\varphi$ , denotadas por  $x = (x^1, x^2, x^3)$ ,*

temos

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad \text{com} \quad \sigma_{ij} = O_2(r^{-\tau}), \quad (3.1)$$

onde  $\delta$  é a métrica canônica do  $\mathbb{R}_+^3$ , ou, equivalentemente,

$$|\sigma_{ij}| + r|\partial\sigma_{ij}| + r^2|\partial^2\sigma_{ij}| = O(r^{-\tau}).$$

Aqui,  $|x| = r$  e  $\partial$  denota as derivadas parciais em  $\mathbb{R}_+^3$  com respeito ao sistema de coordenadas  $x^i$ , conhecido como sistema de coordenadas admissíveis.

Agora enunciamos a definição de massa introduzida por Almaraz, Barbosa e Lima em [2].

**Definição 3.2.** *Se  $(M^3, g)$  é uma variedade assintoticamente plana com bordo não compacto, então sua massa é dada por*

$$m_{ABL} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \left\{ \int_{S_{r,+}^2} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \nu^i d\sigma + \int_{\partial S_{r,+}^2} g_{a3} \mu^a d\theta \right\},$$

onde  $S_{r,+}^2 \subset M$  é um hemisfério de coordenadas Euclidianas canônicas de raio  $r$  com normal unitária exterior  $\nu$ , e  $\mu$  é o co-normal a  $\partial S_{r,+}^2$  em  $\partial M$ . Se a curvatura escalar  $R_g \in L^1(M)$  e curvatura média  $H_g \in L^1(\partial M)$ , então a massa ABL está bem definida.

Neste capítulo, consideraremos variedades conformemente planas no infinito, cuja definição é dada por:

**Definição 3.3.** *Dizemos que  $(M^3, g)$  é uma variedade conformemente plana no infinito, quando existirem  $K \subset M$  compacto e  $f > 0$  função suave tais que  $g = f^4 \delta$  em  $M \setminus K$ .*

Um aspecto interessante a cerca de métricas conformemente planas foi demonstrado por Almaraz, Barbosa e Lima que, dada uma variedade assintoticamente plana, sempre é possível encontrar uma métrica assintoticamente plana que seja conformemente plana no infinito e massas suficientemente próximas. Mas precisamente

**Proposição 3.1** (Almaraz, Barbosa e de Lima, [2]). *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana com decaimento  $\tau$ , onde  $\tau > 1/2$ , e suponha que  $R_g \geq 0$  e  $H_g \geq 0$ . Então, para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe uma métrica assintoticamente plana  $\bar{g}$  com decaimento  $\tau - \epsilon$  satisfazendo:*

- (i)  $R_{\bar{g}} \geq 0$  e  $H_{\bar{g}} \geq 0$ , com  $R_{\bar{g}} \equiv 0$  e  $H_{\bar{g}} \equiv 0$  próximo do infinito;

(ii)  $\bar{g}$  é conformemente plana próximo do infinito;

(iii)  $|\mathfrak{m}_{\text{ABL}}(M, \bar{g}) - \mathfrak{m}_{\text{ABL}}(M, g)| \leq \epsilon$ .

Além disso, diversas outras pesquisas exploram variedades assintoticamente planas com essa propriedade, como os trabalhos de Yao e Mazurowski em [28] e de Freire e Schwartz em [17].

Agora, introduziremos uma classe especial de superfícies que, no infinito de uma variedade assintoticamente plana  $(M^3, g)$ , apresentam características quase hemisféricas redondas. Vale destacar que Shi, Wang e Wu, em [38], estudaram o caso de superfícies quase redondas. Iniciaremos com a seguinte definição.

**Definição 3.4.** *Seja  $\{\Sigma_r\} \subset M^3$  uma família de superfícies que são topologicamente hemisférios com  $r = \min_{x \in \Sigma_r} r(x)$ . Dizemos que  $\{\Sigma_r\}$  é uma família **quase hemisférica redonda**, quando  $r$  tende ao infinito se as seguintes condições são satisfeitas:*

1.  $|\mathring{A}| + r|\nabla \mathring{A}| \leq Cr^{-1-\tau}$ ,
2.  $\max_{x \in \Sigma_r} r(x) \leq C \min_{x \in \Sigma_r} r(x) + C$ ,
3.  $\text{diam}(\Sigma_r) \leq Cr$ ,
4.  $\text{Area}(\Sigma_r) \leq Cr^2$ .

Onde  $C$  é uma constante independente de  $r$ .  $\text{diam}(\Sigma_r)$ ,  $\nabla$  e  $|\cdot|$  denotam, respectivamente, o diâmetro da superfície, derivadas covariantes e a norma com respeito à métrica induzida por  $g$ .  $r(x)$  é a distância de  $x$  a algum ponto fixo em  $(M^3, g)$ ,  $A$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma_r$  em  $(M^3, g)$ , e  $\mathring{A}$  é a parte de traço nulo de  $A$ .

Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana com  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta que encontra ortogonalmente  $\Gamma$  superfície não compacta, e  $\partial \Sigma = \partial \Gamma$ . A capacidade, também conhecida como  $L^2$  capacidade, de  $\Sigma$  é definida por

$$c_\Sigma = \inf \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_M |\nabla f|^2 d\sigma \right\}, \quad (3.2)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções localmente Lipschitz tais que  $f|_\Sigma = 1$  e

$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f = 0$ . É sabido que, o ínfimo é atingido por uma função  $u \in C^\infty(M)$ , que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } M \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Gamma \\ u \rightarrow 1 & \text{no } \infty, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $\eta$  é um vetor normal unitário à  $\Gamma$ , apontando para fora. Para detalhes sobre a prova de existência e unicidade de  $u$ , consulte a Proposição 1.4 de [21].

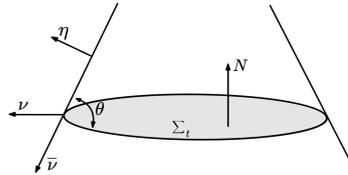


Figura 3.1: Figura adaptada de [25].

Agora, note que a hipótese  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$  ao longo de  $\Gamma$ , implica que cada  $\Sigma_t = \{x \in M \mid u(x) = t\}$  curva de nível tem bordo livre em  $\Gamma$ .

Com efeito, sejam as bases ortonormais  $\{N, \nu\}$  e  $\{\eta, \bar{\nu}\}$  conforme a Figura 3.1, então temos que

$$\begin{cases} \eta = (\cos\theta)N + (\sen\theta)\nu \\ \bar{\nu} = -(\sen\theta)N + (\cos\theta)\nu, \end{cases}$$

onde  $\cos\theta = g(N, \eta)$  ao longo de  $\partial\Sigma_t$ . Considerando que  $N = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$  em  $\partial M$ , temos que  $g(\nabla u, \eta) = 0$ . Isso implica que  $g(N, \eta) = 0$ . Assim, pelo sistema apresentado, conclui-se que  $\cos\theta = 0$ , o que leva a  $\theta = \frac{\pi}{2}$  pois  $\theta \in (0, \pi)$ . Além disso, segue que  $\eta = \nu$  e  $\bar{\nu} = -N$ .

Em seguida, provaremos um lema que será fundamental na prova de quase todos os resultados deste capítulo.

**Lema 3.1.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana e conformemente plana no infinito com  $\tau \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Se  $u : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução do problema (3.3), então existe uma constante  $c > 0$ , tal que em coordenadas Euclidianas*

$$u(x) = 1 - \frac{c}{|x|} + O_2(|x|^{-1-\tau}),$$

para  $|x|$  suficientemente grande.

*Demonstração.* Considere  $w = 1 - u$ , denote por  $\Delta_e$  o Laplaciano Euclidiano. Defina  $\psi = ar^{-1} - r^{-1-\epsilon}$ , onde  $r = |x|$  e  $a, \epsilon > 0$ . Então,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^j} = -\frac{ax^j}{|x|^3} + (1 + \epsilon) \frac{x^j}{|x|^{3+\epsilon}}$$

e

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} = 3a \frac{x^i x^j}{|x|^5} - (1 + \epsilon)(3 + \epsilon) \frac{x^i x^j}{|x|^{5+\epsilon}} - a \frac{\delta_{ij}}{|x|^3} + (1 + \epsilon) \frac{\delta_{ij}}{|x|^{3+\epsilon}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta_g \psi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right) \\ &= g^{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ij}) \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \\ &= \delta^{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} + \sigma^{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} + \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}) g^{ij} + \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{ij}) \right) \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \\ &= \Delta_e \psi + \sigma^{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} + k_j \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \\ &= -(1 + \epsilon)(3 + \epsilon)r^{-3-\epsilon} + O(r^{-3-\tau}), \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde  $\sigma^{ij} = O_2(r^{-\tau})$  e  $k_j = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}) g^{ij} + \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{ij}) = O_1(r^{-1-\tau})$ .

Escolha  $\epsilon < \tau$  tal que  $\Delta_g \psi \leq 0$  em  $\mathbb{R}_+^3 \setminus B_{R_0}(0)$  e  $R_0 > 0$  independa de  $a$ . Uma vez que,  $g = v^4 \delta$ , onde  $\delta$  é a métrica Euclidiana, temos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta_g} = v^{-2} \frac{\partial \psi}{\partial (-e_3)} = 0 \quad \text{em} \quad \partial \mathbb{R}_+^3 \setminus B_{R_0}(0).$$

Assim,  $\psi$  satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta_g \psi \leq 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^3 \setminus B_{R_0}(0) \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial \mathbb{R}_+^3 \setminus B_{R_0}(0). \end{cases}$$

Seja  $\delta > 0$  tal que  $w \leq \delta \psi$  em  $\mathbb{R}_+^3 \cap S_{R_0}^3(0)$ . Afirmamos que  $w \leq \delta \psi$  para todo  $x \in \mathbb{R}_+^3 \setminus B_{R_0}(0)$ . Suponha por contradição, que exista  $x_0 \in \mathbb{R}_+^3 \cap S_{R_1}^3(0)$  tal que  $w(x_0) - \delta \psi(x_0) > 0$ . Tome  $\epsilon = w(x_0) - \delta \psi(x_0) > 0$ . Como  $w \rightarrow 0$  no  $\infty$  existe  $R_2 > R_1$  tal que  $w < \epsilon + \delta \psi$  em  $\mathbb{R}_+^3 \cap S_{R_2}^3(0)$ . Assim,  $w < \epsilon + \psi \delta$  em  $\mathbb{R}_+^3 \cap (S_{R_0}^3(0) \cup S_{R_2}^3(0))$ . Note que, no conjunto  $\Omega = \mathbb{R}_+^3 \cap \{B_{R_2}(0) \setminus B_{R_0}(0)\}$  temos o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta_g(w - \delta \psi - \epsilon) > 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial(w - \delta \psi - \epsilon)}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \{x_3 = 0\} \cap \Omega. \end{cases}$$

Pelo Lema de Hopf,  $w - \delta\psi - \epsilon$  tem um ponto de máximo no interior. Daí, pelo Princípio do Máximo Forte  $w - \delta\psi - \epsilon \equiv \text{constante}$  em  $\Omega$ , contradição pois para todo  $x \in \mathbb{R}_+^3 \cap (\mathbb{S}_{\mathbb{R}_0}^3(0) \cup \mathbb{S}_{\mathbb{R}_2}^3(0))$ ,  $(w - \delta\psi - \epsilon)(x) > 0 = (w - \delta\psi - \epsilon)(x_0)$ . Portanto temos uma barreira para  $w$  e além disso pelas estimativas de Schauder, Teorema 6.2 em [19],

$$|w| \leq C|x|^{-1}, \quad |\partial w| \leq C|x|^{-2}, \quad |\partial\partial w| \leq C|x|^{-3}.$$

Estendendo  $w$  suavemente ao conjunto  $\mathbb{R}_+^3 \cap \mathbb{B}_{\mathbb{R}_0}(0)$ , obtemos  $w$  definida em  $\mathbb{R}_+^3$ , satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta_e w = f & \text{em } \mathbb{R}_+^3 \\ \frac{\partial w}{\partial e_3} = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^3, \end{cases}$$

com  $f = O(r^{-3-\tau})$  por (3.3) e (3.4). Seja  $G(x, y) = |x - y|^{-1} - |x - \tilde{y}|^{-1}$  a função de Green do  $\mathbb{R}_+^3$  e

$$\phi(x) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}_+^3} G(x, y) f(y) dy,$$

onde  $\tilde{y} = (y_1, y_2, -y_3)$  se  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . Observe que  $\Delta_x G(x, y) = 0$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}_+^3$ , e  $\frac{\partial}{\partial x_3} G(x, y) = 0$  para todo  $x \in \partial\mathbb{R}_+^3$  e  $y \in \mathbb{R}_+^3$ . Para mais detalhes, consulte o Lema A.1 em [2].

Pela taxa de decaimento de  $f$ ,  $\phi$  está bem definida e  $\Delta_e \phi \equiv f$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^3} G(x, y) f(y) dy &= \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap \mathbb{B}_{r/2}(x)} G(x, y) f(y) dy + \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap \mathbb{B}_{r/2}(0)} G(x, y) f(y) dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+^3 \setminus (\mathbb{B}_{r/2}(x) \cup \mathbb{B}_{r/2}(0))} G(x, y) f(y) dy. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sejam I, II e III a primeira, segunda e terceira parcela do lado direito de (3.5), respectivamente.

Como  $|\tilde{y}| = |y| \geq \frac{r}{2}$  para  $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}_+^3 \cap \mathbb{B}_{r/2}(x)$ ,

$$|I| \leq Cr^{-3-\tau} \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap \mathbb{B}_{r/2}(x)} G(x, y) dy \leq Cr^{-1-\tau}.$$

Fora de  $\mathbb{B}_{r/2}(x)$ ,  $|x - y| \geq \frac{r}{2}$  e  $|x - \tilde{y}| \geq \frac{r}{2}$ . Por isso,

$$|III| \leq Cr^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^3 \setminus \mathbb{B}_{r/2}(0)} |y|^{-3-\tau} dy \leq Cr^{-1-\tau}.$$

Para a estimativa II, seja

$$\tilde{a} =: - \int_{\mathbb{R}_+^3} f(y) dy.$$

Note que  $\mathbf{a}$  é um número finito devido ao decaimento de  $f$ . Para  $r = |\mathbf{x}| > 1$ ,

$$\text{II} + \frac{\tilde{\mathbf{a}}}{r} = -\frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}_+^3 \setminus B_{r/2}(0)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap B_{r/2}(0)} \left( G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3.6)$$

Sejam  $\text{IV}$  e  $\text{V}$  a primeira e segunda parcela do lado direito de (3.6), respectivamente.

Assim por integração direta temos que

$$|\text{IV}| \leq Cr^{-1-\tau}.$$

Como  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \frac{r}{2}$  e  $|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{y}}| \geq \frac{r}{2}$  para  $\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}_+^3 \cap B_{r/2}(0)$ , temos que

$$|\text{V}| = \left| \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap B_{r/2}(0)} \left( G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq Cr^{-1-\tau}. \quad (3.7)$$

Por (3.5) e (3.7), temos  $\phi = \tilde{\mathbf{a}}r^{-1} + O(r^{-1-\tau})$ . Assim, pelo Princípio do Máximo  $\phi \equiv w$ .  $\square$

Note que podemos considerar  $\mathbf{c} = 2c_\Sigma$  no lema anterior. Com efeito, observamos que para  $w = 1 - u$  tem-se  $0 < w < 1$  em  $M \setminus \Sigma$ , pelo Princípio do Máximo Forte, portanto, o comportamento de  $w$  no infinito é dado pelo lema. Além disso, pelo Lema de Hopf,  $|\nabla w| > 0$  em  $\Sigma$ . Em particular, 1 é um valor regular de  $w$ , assim, o campo vetorial normal unitário ao longo de  $\Sigma$  pode ser expresso em termos de  $w$ . Seja  $K$  conjunto compacto em  $M$  dado na definição de assintoticamente plana. Aplicando o Teorema da Divergência, obtemos que

$$0 = \int_{K \cup \{|\mathbf{x}| < R\}} \Delta w d\mu = \int_{\Sigma} g \left( \nabla w, \frac{\nabla w}{|\nabla w|} \right) d\sigma + \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap \{|\mathbf{x}| = R\}} g \left( \nabla w, \frac{\nabla |\mathbf{x}|}{|\nabla |\mathbf{x}||} \right) d\sigma,$$

pois  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$  em  $\Gamma$ . Consequentemente,

$$\int_{\Sigma} |\nabla w| d\sigma = \int_{\Sigma} g \left( \nabla w, \frac{\nabla w}{|\nabla w|} \right) d\sigma = - \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap \{|\mathbf{x}| = R\}} g \left( \nabla w, \frac{\nabla |\mathbf{x}|}{|\nabla |\mathbf{x}||} \right) d\sigma.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap \{|\mathbf{x}| = R\}} g \left( \nabla w, \frac{\nabla |\mathbf{x}|}{|\nabla |\mathbf{x}||} \right) d\sigma &= \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap \{|\mathbf{x}| = R\}} \delta \left( \nabla_e w, \frac{\mathbf{x}^i}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) d\sigma_e + O(R^{2-\tau}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap \{|\mathbf{x}| = R\}} \delta \left( \nabla_e \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{x}|}, \frac{\mathbf{x}^i}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) d\sigma_e + O(R^{2-\tau}) \\ &= -c|\mathbb{S}_+^2| + O(R^{2-\tau}). \end{aligned}$$

Então,

$$\int_{\Sigma} |\nabla w| d\sigma = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap \{|\mathbf{x}| = R\}} g \left( \nabla w, \frac{\nabla |\mathbf{x}|}{|\nabla |\mathbf{x}||} \right) d\sigma = c|\mathbb{S}_+^2|,$$

ou seja,

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} |\nabla w| \, d\sigma.$$

Novamente, o Teorema da Divergência implica que

$$\begin{aligned} \int_{K \cup \{|x| < R\}} |\nabla w|^2 \, d\mu &= \int_{K \cup \{|x| < R\}} \operatorname{div}(w \nabla w) \, d\mu \\ &= \int_{\Sigma} w g \left( \nabla w, \frac{\nabla w}{|\nabla w|} \right) \, d\sigma + \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap \{|x|=R\}} w g \left( \nabla w, \frac{\nabla |x|}{|\nabla |x||} \right) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Como  $w$  é identicamente 1 em  $\Sigma$ , então, para  $R \rightarrow +\infty$ , obtemos a igualdade desejada, pois o último termo tende a zero. Assim,

$$\int_M |\nabla w|^2 \, d\mu = \int_{\Sigma} |\nabla w| \, d\sigma = 2\pi c.$$

Portanto,  $c = 2c_{\Sigma}$ .

Seja  $u$  solução do problema (3.3), dado valor qualquer  $t \in [0, 1]$ , defina  $\Sigma_t = \{x \in M \mid u(x) = t\}$  como o conjunto de nível de  $u$ . Pelo Princípio do Máximo como  $u = 0$  em  $\Sigma$  e  $u \rightarrow 1$  no  $\infty$ , temos que  $\max_K u < 1$ , onde  $K$  é um conjunto compacto em  $M$ , logo  $|x|$  está bem definida para valores de  $t$  próximos a 1; além disso,  $\min_{\Sigma_t} |x| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow 1$ . Suponha agora que  $\tau \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Pelo Lema 3.1,  $u$  possui a expansão assintótica

$$u = 1 - \frac{2c_{\Sigma}}{|x|} + O_2(|x|^{-1-\tau}), \quad (3.8)$$

onde  $x = (x^1, x^2, x^3)$  e  $c_{\Sigma} > 0$  é a capacidade de  $\Sigma$ . Segue de (3.8), que

$$\nabla u = \frac{2c_{\Sigma}}{|x|^3} x + O_2(|x|^{-2-\tau}),$$

donde

$$|\nabla u|^2 = \frac{4c_{\Sigma}^2}{|x|^4} + O(|x|^{-4-\tau})$$

e o hessiano é dado por

$$(\nabla^2 u)_{ij} = 2c_{\Sigma} |x|^{-3} (-3|x|^{-2} x_i x_j + \delta_{ij}) + O(|x|^{-3-\tau}).$$

Portanto, o comportamento assintótico da curvatura média de  $\Sigma_t$  é dado por

$$H = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{2}{|x|} + O(|x|^{-1-\tau}). \quad (3.9)$$

Seja  $(M^3, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  uma tripla que satisfaz o problema (3.3). Consideremos agora uma função positiva  $v$  solução do problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } M \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Gamma \\ v \rightarrow 1 & \text{no } \infty. \end{cases}$$

Com respeito a  $v$  e a tripla  $(M^3, \mathbf{g}, v)$  é sabido que:

1. a métrica  $\bar{\mathbf{g}} := v^4 \mathbf{g}$  é assintoticamente plana, possui curvatura escalar não negativa;
2. a função  $\bar{\mathbf{u}} := v^{-1} \mathbf{u}$  é solução do problema (3.3) na métrica  $\bar{\mathbf{g}}$ .

Portanto, os resultados das seções subsequentes podem ser aplicados a  $(M, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{u}})$ .

Para dar continuidade, calcularemos algumas quantidades relacionadas ao resultado principal deste capítulo. Denotemos por  $\bar{\nabla}$  o gradiente em  $(M, \bar{\mathbf{g}})$ ,  $\bar{H}$  a curvatura média de  $\Sigma$  em  $(M, \bar{\mathbf{g}})$ , com a normal apontando para fora, e por  $\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{\eta}}$  a derivada normal em  $(M, \bar{\mathbf{g}})$  onde  $\bar{\eta}$  é um vetor normal unitário à  $\Gamma$ , apontando para fora. Além disso,  $d\sigma$  e  $d\bar{\sigma}$  representam os elementos de área em  $\Sigma$  com  $(M, \mathbf{g})$  e  $(M, \bar{\mathbf{g}})$ , respectivamente.

Como  $\Sigma$  é uma superfície de dimensão dois, temos que

$$\int_{\Sigma} |\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}|_{\bar{\mathbf{g}}}^2 d\bar{\sigma} = \int_{\Sigma} v^4 \mathbf{g} (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}, \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}) d\bar{\sigma} = \int_{\Sigma} v^4 \mathbf{g} (v^{-4} \nabla \bar{\mathbf{u}}, v^{-4} \nabla \bar{\mathbf{u}}) v^4 d\sigma = \int_{\Sigma} |\nabla \bar{\mathbf{u}}|_{\mathbf{g}}^2 d\sigma.$$

Uma vez que, as curvatura média  $\bar{H}$  e  $H$  de  $\Sigma$  com respeito as métricas  $\bar{\mathbf{g}}$  e  $\mathbf{g}$  se relacionam por  $\bar{H} = v^{-2} (4v^{-1} \frac{\partial v}{\partial \eta_{\mathbf{g}}} + H)$ , teremos

$$\int_{\Sigma} \bar{H} |\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}|_{\bar{\mathbf{g}}} = \int_{\Sigma} (4v^{-1} \frac{\partial v}{\partial \eta_{\mathbf{g}}} + H) |\nabla \bar{\mathbf{u}}| d\sigma. \quad (3.10)$$

Para a derivada normal, temos que

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{\eta}} = \bar{\mathbf{g}} (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}, \bar{\eta}) = v^4 \mathbf{g} (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}, \bar{\eta}) = v^4 \mathbf{g} (v^{-4} \nabla \bar{\mathbf{u}}, v^{-2} \eta) = v^{-2} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \eta}.$$

Se  $\bar{m}_{\text{ABL}}$  é a massa de  $(M, \bar{\mathbf{g}})$ , então  $\bar{m}_{\text{ABL}}$  e  $m_{\text{ABL}}$  estão relacionadas por

$$\bar{m}_{\text{ABL}} = m_{\text{ABL}} - 2c_v, \quad (3.11)$$

onde  $c_v$  é a constante da expansão

$$v = 1 - \frac{c_v}{|x|} + o(|x|^{-1}),$$

quando  $x \rightarrow \infty$ . Para mais detalhes, consulte [24] página 74.

Como  $\bar{u} = v^{-1}u$ , então

$$\bar{u} = 1 - \frac{2(c_\Sigma - c_v)}{|x|} + o(|x|^{-1}),$$

onde  $c_\Sigma > c_v$  pelo fato de  $v > u$  e pelo Princípio do Máximo. A capacidade de  $\Sigma$  em  $(M, \bar{g})$ , que denotamos por  $\bar{c}_\Sigma$ , é então dada por

$$\bar{c}_\Sigma = c_\Sigma - c_v. \quad (3.12)$$

Finalmente, notamos que, como  $u = 0$  em  $\Sigma$ , então

$$|\nabla \bar{u}| = v^{-1}|\nabla u|. \quad (3.13)$$

Apresentaremos a seguir uma proposição, provada por Bray, Kazaras, Khuri e Stern em [13], que recentemente vem sendo bastante utilizada na literatura e tem um certo grau de importância neste capítulo.

**Proposição 3.2.** *Seja  $(\Omega^3, g)$  uma variedade Riemanniana compacta orientável com bordo decomposto por  $\partial\Omega = P_1 \dot{\cup} P_2$ . Seja  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica satisfazendo a condição de Neumann  $\frac{\partial u}{\partial \eta} \equiv 0$  em  $P_1$  e a condição não degenerescência  $|\nabla u|_{P_2} > 0$  em  $P_2$ . Então*

$$\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \left( \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} \left( \frac{|\nabla^2 u|^2}{|\nabla u|^2} + R_g \right) d\sigma_t + \int_{\partial\Sigma_t \cap P_1} H_{P_1} ds_t \right) dt \leq \int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \left( 2\pi\chi(\Sigma_t) - \int_{\partial\Sigma_t \cap P_2} k_{\partial\Sigma_t} ds_t \right) dt + \int_{P_2} \frac{\partial |\nabla u|}{\partial \eta} d\sigma_t,$$

onde  $k_{\partial\Sigma_t}$  denota a curvatura geodésica de  $\partial\Sigma_t \subset \Sigma_t$ ,  $H_{P_1}$  denota a curvatura média de  $P_1$ , e  $\eta$  é o normal unitário exterior a  $\partial\Omega$ . Para o caso  $P_1 = \emptyset$ , temos o seguinte.

$$\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} \left( \frac{|\nabla^2 u|^2}{|\nabla u|^2} + R_g - R_{\Sigma_t} \right) d\sigma_t dt \leq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial |\nabla u|}{\partial \eta} d\sigma_t.$$

*Demonstração.* Consulte [13]. □

Antes de continuarmos, apresentamos uma definição precisa do espaço modelo deste capítulo, que é a variedade espacial semi-Schwarzschild  $M_m = \{x \in \mathbb{R}_+^3; |x| \geq (m/2)\}$  com métrica conforme

$$g_m = \left( 1 + \frac{m}{2|x|} \right)^4 \delta,$$

onde  $\delta$  é a métrica Euclidiana e  $m > 0$  é uma constante positiva. Assim,  $g_m$  é escalar-plana com bordo  $\partial M_m = \mathbb{R}_+^3 \cap (\{x_3 = 0\} \cup \{|x| = m/2\})$  não compacto. Além disso, a métrica  $M_m$  pode ser vista como uma métrica sobre  $[r_0, \infty) \times \mathbb{S}_+^2$  dada por

$$g_m = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}_+^2}.$$

## 3.2 Massa, capacidade e curvas de nível de funções harmônicas

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados e lemas fundamentais que serão essenciais para a demonstração dos principais resultados deste capítulo.

Para o que se segue e, a menos que se enuncie o contrário, nesta seção, consideraremos  $(M^3, g)$  variedade assintoticamente plana e conformemente plana no infinito com  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta que encontra ortogonalmente  $\Gamma$  superfície não compacta, e  $\partial \Sigma = \partial \Gamma$ , e  $u \in C^\infty(M)$  solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } M \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Gamma \\ u \rightarrow 1 & \text{no } \infty. \end{cases}$$

Para valores de  $t$  próximos de 1, a superfície  $\Sigma_t$  possui curvatura média positiva e é um minimizante de área exterior em  $M$ . No sentido que toda superfície que a contém possui maior área. Além disso,  $\{\Sigma_s\}_{s>t}$  define uma folheação por superfícies com curvatura média convexa. Dessa forma, podemos estabelecer o seguinte lema, cuja demonstração segue a técnica apresentada em [30].

**Lema 3.2.** *Seja  $|\Sigma_t|$  a área de  $\Sigma_t$  em  $(M^3, g)$ . Se  $t$  é um valor regular de  $u$ , então quando  $t \rightarrow 1$ ,*

- 1)  $|\Sigma_t| = 2\pi \left( \frac{2c_\Sigma}{1-t} \right)^2 + O((1-t)^{\tau-2})$
- 2)  $\frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H |\nabla u| d\sigma_t = 4\pi + O((1-t)^\tau)$
- 3)  $\frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t = 2\pi + O((1-t)^\tau)$ .

*Demonstração.* Para a prova de 1), segue de (3.8) que, quando  $t \rightarrow 1$ ,

$$|\chi| = 2c_\Sigma(1-t)^{-1} + O((1-t)^{\tau-1}). \quad (3.14)$$

Seja  $r_-(t) = \min_{\Sigma_t} |\chi|$  e  $r_+(t) = \max_{\Sigma_t} |\chi|$ . Como  $\Sigma_t$  e o hemisfério coordenado  $S_r^+ := \{|\chi| = r\}$  são minimizantes de área exterior em  $(M^3, g)$ , para  $t$  próximo de 1 e  $r$  grande, respectivamente, temos

$$|S_{r_-(t)}^-| \leq |\Sigma_t| \leq |S_{r_+(t)}^+|.$$

Por outro lado,  $g_{ij} = \delta_{ij} + O(|\chi|^{-\tau})$  implica que  $|S_r^+| = 2\pi r^2 + O(r^{2-\tau})$  para  $r$  suficientemente grande. Daí, segue

$$|\Sigma_t| = 8\pi c_\Sigma^2(1-t)^{-2} + O((1-t)^{\tau-2}),$$

pois

$$2\pi r_-^2 + O(r_-^{2-\tau}) \leq |\Sigma_t| \leq 2\pi r_+^2 + O(r_+^{2-\tau}),$$

e assim,

$$8\pi c_\Sigma^2(1-t)^{-2} + O((1-t)^{-2+\tau}) \leq |\Sigma_t| \leq 8\pi c_\Sigma^2(1-t)^{-2} + O((1-t)^{-2+\tau}).$$

Para a prova de 2), segue de (3.9) e (3.14) que

$$H = c_\Sigma^{-1}(1-t) + O((1-t)^{1+\tau}).$$

Portanto, usando o fato que  $\int_{\Sigma_t} |\nabla u| d\sigma_t = 4\pi c_\Sigma$ , temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H |\nabla u| d\sigma_t \right) - 4\pi &= \int_{\Sigma_t} \left( \frac{H}{1-t} - \frac{1}{c_\Sigma} \right) |\nabla u| d\sigma_t \\ &= O((1-t)^\tau). \end{aligned}$$

De forma similar ao caso 2), para 3) temos que

$$|\nabla u| = \frac{1}{2} c_\Sigma^{-1} (1-t)^2 + O((1-t)^{2+\tau}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t \right) - 2\pi &= \left( \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla u|}{(1-t)^2} - \frac{1}{2c_\Sigma} \right) |\nabla u| d\sigma_t \\ &= O((1-t)^\tau). \end{aligned}$$

□

A seguir, enunciaremos um lema importante, cuja prova será omitida e pode ser encontrada em [30].

**Lema 3.3** (Miao, [30]). *Quando  $t \rightarrow 1$ , temos as seguintes estimativas para  $\Sigma_t$ :*

$$1) |\nabla_{\Sigma_t} \nabla \mathbf{u}| = O(|x|^{-3-\tau});$$

$$2) |\mathring{\mathbf{A}}| = O(|x|^{-1-\tau});$$

$$3) \mathbf{K} = |x|^{-2} + O(|x|^{-2-\tau});$$

$$4) \text{ Se } (M^3, g) \text{ satisfaz } \partial\partial\partial g_{ij} = O(|x|^{-3-\tau}), \text{ então}$$

$$|\mathring{D}\mathbf{A}| = O(|x|^{-2-\tau}),$$

onde  $\mathring{\mathbf{A}}$ ,  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{D}$  denotam a parte de traço nulo da segunda forma fundamental, a curvatura Gaussiana e a derivada covariante em  $\Sigma_t$ , respectivamente.

Sejam  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  o normal unitário a  $\Sigma_r$  e  $\mathbf{h}_{ij} = g_{ij} - v_i v_j$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ . Então,  $\mathbf{h}_{ij} dx_i dx_j$  é a métrica induzida sobre  $\Sigma_r$  em  $(M^3, g)$ . Defina  $\mathbf{h}^{ij} := g^{is} g^{jt} h_{st}$ .

Afim de mostrarmos que a massa modificada de Hawking das curvas de nível de certas funções harmônicas convergem para massa  $m_{ABL}$ , iremos adaptar para nosso contexto um resultado devido a Shi, Wang e Wu em [38]. Sejam  $H$  e  $\widehat{H}$  as curvaturas médias de  $\Sigma_r$  em  $(\mathbb{R}_+^3 \setminus K, g)$  e  $(\mathbb{R}_+^3 \setminus K, \delta)$ , respectivamente, ambas calculadas em relação ao vetor normal unitário apontando para fora.

**Lema 3.4** (Shi, Wang e Wu, [38]). *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana com bordo não compacto. Seja  $\sigma_{ij}$  dado por (3.1) e  $\rho$  a distância Euclidiana de  $\Sigma_r$  em  $\mathbb{R}_+^3$ , então*

$$H = \widehat{H} + \frac{H}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \sigma_{st,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} - \sigma_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^j} - g_{ij,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} + \frac{1}{2} g_{jj,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} + O(r^{-1-2\tau}).$$

Aqui e no que segue,  $\sigma_{ij,k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^k}$  e  $g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ .

Veja que no lema acima podemos escrever  $H = \widehat{H} + O(r^{-1-\tau})$  sabendo que  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^j} = O(r^{-1-\tau})$ . Além disso, como  $\rho$  é a distância Euclidiana de  $\Sigma_r$ , temos que

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right)^2 = 1.$$

A partir dessa relação, segue que

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^s} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^s} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right)^2 = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \sigma_{st,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} d\sigma^0 &= \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} d\sigma^0 - \int_{\Sigma} \sigma_{st} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^s} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} d\sigma^0 \\ &= - \int_{\Sigma} \left( \delta_{it} - \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \right) d\sigma^0 + \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x^t} \left( \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \right) d\sigma^0 \\ &= \int_{\Sigma} \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \delta_{it} - \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} \right) d\sigma^0 + \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x^t} \left( \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \right) d\sigma^0 \\ &\quad - \int_{\partial \Sigma} \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \left( \delta_{it} - \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} \right) v^i d\sigma^0 \\ &= - \int_{\Sigma} \widehat{H} \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} d\sigma^0 + \int_{\Sigma} \sigma_{st,t} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 + \int_{\Sigma} \sigma_{st} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^s \partial x^t} d\sigma^0 \\ &\quad - \int_{\partial \Sigma} \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \left( \delta_{it} - \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} \right) v^i d\sigma^0 \\ &= - \int_{\Sigma} \widehat{H} \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} d\sigma^0 + \int_{\Sigma} \sigma_{st,t} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 + \int_{\Sigma} \sigma_{st} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^s \partial x^t} d\sigma^0 \\ &\quad + \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} v^i d\sigma^0 - \int_{\partial \Sigma} \sigma_{st} \delta_{it} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} v^i d\sigma^0 \\ &= - \int_{\Sigma} \widehat{H} \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} d\sigma^0 + \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} g_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} v^i d\sigma^0 \\ &\quad - \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} \delta_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} v^i d\sigma^0 - \int_{\partial \Sigma} g_{st} \delta_{it} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} v^i d\sigma^0 \\ &\quad + \int_{\partial \Sigma} \delta_{st} \delta_{it} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} v^i d\sigma^0 + \int_{\Sigma} \sigma_{st,t} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 + \int_{\Sigma} \sigma_{st} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^s \partial x^t} d\sigma^0 \\ &= - \int_{\Sigma} \widehat{H} \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} d\sigma^0 + \int_{\Sigma} \sigma_{st,t} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 + \int_{\Sigma} \sigma_{st} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^s \partial x^t} d\sigma^0 \\ &\quad - \int_{\partial \Sigma} \delta_{3t} g_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 + O(r^{-5\tau}), \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde  $d\sigma^0$  é o elemento de área em relação à métrica induzida Euclidiana.

Finalmente, provaremos a convergência da massa de Hawking modificada para superfícies quase hemisféricas. É importante mencionar que a convergência da massa de Hawking no caso de superfícies quase redondas foi demonstrada em [38].

**Teorema 3.1.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana com bordo não compacto. Se  $\{\Sigma_r\}_r \subset M$  é uma família de superfícies quase hemisféricas redondas, então*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{m}_H(\Sigma_r) = m_{\text{ABL}}(M). \tag{3.16}$$

*Demonstração.* Multiplicando a expressão dada pelo Lema 3.4 por  $2\widehat{H}$ , tem-se que

$$\begin{aligned} 2H\widehat{H} &= 2\widehat{H}^2 + H \cdot \widehat{H}\sigma_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} + \widehat{H}\sigma_{st,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} \\ &\quad - 2\widehat{H}\sigma_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^j} - 2\widehat{H}g_{ij,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} + \widehat{H}g_{jj,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} + O(r^{-1-2\tau}). \end{aligned}$$

Uma vez que,  $H - \widehat{H} = O(r^{-1-\tau})$  e  $2\widehat{H} - 2H\widehat{H} = \widehat{H}^2 - H^2 + (H - \widehat{H})^2$ . Temos que

$$\begin{aligned} H^2 &= \widehat{H}^2 + H \cdot \widehat{H}\sigma_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} + \widehat{H}\sigma_{st,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} \\ &\quad - 2\widehat{H}\sigma_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^j} - 2\widehat{H}g_{ij,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} + \widehat{H}g_{jj,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} + O(r^{-1-2\tau}). \end{aligned}$$

Integrando essa última expressão e utilizando (3.15) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_r} H^2 d\sigma &= \int_{\Sigma_r} \widehat{H}^2 d\sigma + \int_{\Sigma_r} H\widehat{H}\sigma_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} d\sigma + \widehat{H} \int_{\Sigma_r} \sigma_{st,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} d\sigma^0 \\ &\quad - 2\widehat{H} \int_{\Sigma_r} \sigma_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^j} d\sigma^0 - 2\widehat{H} \int_{\Sigma_r} g_{ij,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} d\sigma^0 + \widehat{H} \int_{\Sigma_r} g_{jj,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} d\sigma^0 + O(r^{-2\tau}) \\ &= \int_{\Sigma_r} \widehat{H}^2 d\sigma + \int_{\Sigma_r} H\widehat{H}\sigma_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} d\sigma^0 - \widehat{H}^2 \int_{\Sigma_r} \sigma_{st} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} \frac{\partial \rho}{\partial x^t} d\sigma^0 \\ &\quad + \widehat{H} \int_{\Sigma_r} \sigma_{st,t} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 + \widehat{H} \int_{\Sigma_r} \sigma_{st} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^s \partial x^t} d\sigma^0 - \widehat{H} \int_{\partial \Sigma_r} g_{s3} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 \\ &\quad - 2\widehat{H} \int_{\Sigma_r} \sigma_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^j} d\sigma^0 - 2\widehat{H} \int_{\Sigma_r} g_{ij,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} d\sigma^0 + \widehat{H} \int_{\Sigma_r} g_{jj,i} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} d\sigma^0 + O(r^{-2\tau}) \\ &= \int_{\Sigma_r} \widehat{H}^2 d\sigma + \widehat{H} \int_{\Sigma_r} (g_{jj,i} - g_{ij,j}) \frac{\partial \rho}{\partial x^i} d\sigma^0 - \widehat{H} \int_{\Sigma_r} \sigma_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^j} d\sigma^0 \\ &\quad - \widehat{H} \int_{\partial \Sigma_r} g_{s3} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 + O(r^{-2\tau}). \end{aligned}$$

Agora, note que

$$d\sigma = (1 + h^{ij}\sigma_{ij} + O(r^{-2\tau}))^{\frac{1}{2}} d\sigma^0 = d\sigma^0 + \frac{1}{2}h^{ij}\sigma_{ij}d\sigma^0 + O(r^{-2\tau}).$$

Combinando isso com o Lema 2.7 de [38], tem-se

$$\int_{\Sigma_r} H^2 d\sigma = \int_{\Sigma_r} \widehat{H}^2 d\sigma^0 + \widehat{H} \int_{\Sigma_r} (g_{jj,i} - g_{ij,j}) \frac{\partial \rho}{\partial x^i} d\sigma^0 - \widehat{H} \int_{\partial \Sigma_r} g_{s3} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 + O(r^{-2\tau}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \widetilde{m}_H(\Sigma_r) &= \frac{|\Sigma_r|^{\frac{1}{2}}}{2(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( 8\pi - \int_{\Sigma_r} H^2 d\sigma \right) \\ &= \frac{|\Sigma_r|^{\frac{1}{2}}}{2(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[ \left( 8\pi - \int_{\Sigma_r} \widehat{H}^2 d\sigma^0 \right) - \widehat{H} \int_{\Sigma_r} (g_{jj,i} - g_{ij,j}) \frac{\partial \rho}{\partial x^i} d\sigma^0 + \widehat{H} \int_{\partial \Sigma_r} g_{s3} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 \right] \\ &\quad + O(r^{1-2\tau}) \\ &= \frac{|\Sigma_r|^{\frac{1}{2}}}{2(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[ 2 \int_{\Sigma_r} |\mathring{\Delta}|^2 d\sigma^0 - \widehat{H} \int_{\Sigma_r} (g_{jj,i} - g_{ij,j}) \frac{\partial \rho}{\partial x^i} d\sigma^0 + \widehat{H} \int_{\partial \Sigma_r} g_{s3} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 \right] \\ &\quad + O(r^{1-2\tau}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|\Sigma_r|^{\frac{1}{2}}}{2(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \widehat{H} \int_{\Sigma_r} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \frac{\partial \rho}{\partial x^i} d\sigma^0 + \frac{|\Sigma_r|^{\frac{1}{2}}}{2(8\pi)^{\frac{3}{2}}} \widehat{H} \int_{\partial \Sigma_r} g_{s3} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 + O(r^{1-2\tau}) \\
 &= \frac{(2\pi r^2)^{\frac{1}{2}}}{2(8\pi)^{\frac{3}{2}}} 2 \int_{\Sigma_r} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \frac{\partial \rho}{\partial x^i} d\sigma^0 + \frac{(2\pi r^2)^{\frac{1}{2}}}{2(8\pi)^{\frac{3}{2}}} 2 \int_{\partial \Sigma_r} g_{s3} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 + O(r^{1-2\tau}) \\
 &= \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_r} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \frac{\partial \rho}{\partial x^i} d\sigma^0 + \frac{1}{16\pi} \int_{\partial \Sigma_r} g_{s3} \frac{\partial \rho}{\partial x^s} d\sigma^0 + O(r^{1-2\tau}),
 \end{aligned}$$

donde o resultado segue.  $\square$

Denotemos por  $\widetilde{m}_H(\Sigma_t)$  a massa de Hawking modificada de  $\Sigma_t$ , onde  $t$  é um valor regular de  $u$ , dada por

$$\widetilde{m}_H(\Sigma_t) = \frac{r_t}{4} \left( 1 - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} H^2 d\sigma_t \right). \quad (3.17)$$

Aqui  $r_t = \sqrt{\frac{|\Sigma_t|}{2\pi}}$  é o raio da área de  $\Sigma_t$ . Pelo Lema 3.2, temos que

$$r_t = 2c_\Sigma(1-t)^{-1} + O((1-t)^{\tau-1}). \quad (3.18)$$

**Proposição 3.3.** *Se  $\lim_{t \rightarrow 1} \widetilde{m}_H(\Sigma_t) = m_{ABL}$ , então*

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{1-t} \left[ 4\pi - \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t \right] = 6\pi m_{ABL} c_\Sigma^{-1}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{1-t} \left[ 2\pi - \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t \right] = 2\pi m_{ABL} c_\Sigma^{-1}.$$

*Demonstração.* Para cada valor regular  $t$ , defina

$$\zeta(t) = 4\pi - \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
 -\zeta'(t) &= \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t + \frac{1}{1-t} \left( \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t \right)' \\
 &= \frac{1}{1-t} \left[ \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t + \left( \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t \right)' \right] \\
 &= \frac{1}{1-t} \left[ 4\pi - \zeta(t) + \left( \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t \right)' \right].
 \end{aligned}$$

Por outro lado, por (2.1) e (2.3) teremos

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t \right)' &= \int_{\Sigma_t} H'|\nabla u| d\sigma_t + H|\nabla u|' d\sigma_t + H|\nabla u|H|\nabla u|^{-1} d\sigma_t \\
 &= \int_{\Sigma_t} -|\nabla u| \Delta_{\Sigma_t} |\nabla u|^{-1} d\sigma_t - (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A|^2) d\sigma_t \\
 &= - \int_{\partial \Sigma_t} g(|\nabla u| \nabla_{\Sigma_t} |\nabla u|^{-1}, \nu_t) ds_t - \int_{\Sigma_t} g \left( \nabla_{\Sigma_t} |\nabla u|, \frac{\nabla_{\Sigma_t} |\nabla u|}{|\nabla u|^2} \right) d\sigma_t \\
 &\quad - \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A|^2) d\sigma_t.
 \end{aligned}$$

Pela equação de Gauss,

$$\text{Ric}(N_t, N_t) + |\mathcal{A}|^2 = \frac{R}{2} - K_{\Sigma_t} + \frac{3H^2}{4} + \frac{|\mathring{\mathcal{A}}|^2}{2},$$

onde  $|\mathring{\mathcal{A}}|^2 = |\mathcal{A}|^2 - \frac{H^2}{2}$ , temos que

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Sigma_t} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_t \right)' &= \int_{\Sigma_t} \left( -\frac{|\nabla_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|^2}{|\nabla \mathbf{u}|^2} + K_{\Sigma_t} - \frac{3H^2}{4} - \frac{|\mathring{\mathcal{A}}|^2}{2} - \frac{R}{2} \right) d\sigma_t \\ &\quad + \int_{\partial \Sigma_t} g \left( \frac{\nabla_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|}{|\nabla \mathbf{u}|}, \nu_t \right) ds_t. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned} 4\pi + \left( \int_{\Sigma_t} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_t \right)' &= 4\pi + \int_{\Sigma_t} \left( K_{\Sigma_t} - \frac{3H^2}{4} \right) d\sigma_t + \int_{\partial \Sigma_t} g \left( \frac{\nabla_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|}{|\nabla \mathbf{u}|}, \nu_t \right) ds_t \\ &\quad - \int_{\Sigma_t} \left( \frac{|\nabla_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|^2}{|\nabla \mathbf{u}|^2} + \frac{|\mathring{\mathcal{A}}|^2}{2} + \frac{R}{2} \right) d\sigma_t \\ &= 4\pi + 2\pi - \int_{\partial \Sigma_t} k_g ds_t - \frac{3}{4} \int_{\Sigma_t} H^2 d\sigma_t + \int_{\partial \Sigma_t} g \left( \frac{\nabla_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|}{|\nabla \mathbf{u}|}, \nu_t \right) ds_t \\ &\quad - \int_{\Sigma_t} \left( \frac{|\nabla_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|^2}{|\nabla \mathbf{u}|^2} + \frac{|\mathring{\mathcal{A}}|^2}{2} + \frac{R}{2} \right) d\sigma_t, \end{aligned}$$

ou seja,

$$4\pi + \left( \int_{\Sigma_t} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_t \right)' = 6\pi - \frac{3}{4} \int_{\Sigma_t} H^2 d\sigma_t - \mathbb{E}(t),$$

onde

$$\mathbb{E}(t) = \int_{\Sigma_t} \left( \frac{|\nabla_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|^2}{|\nabla \mathbf{u}|^2} + \frac{|\mathring{\mathcal{A}}|^2}{2} + \frac{R}{2} \right) d\sigma_t.$$

Assim, segue de (3.17) que

$$\begin{aligned} 4\pi + \left( \int_{\Sigma_t} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_t \right)' &= 6\pi \left( 1 - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_t} H^2 d\sigma_t \right) - \mathbb{E}(t) \\ &= \frac{24\pi \tilde{m}_H(\Sigma_t)}{r_t} - \mathbb{E}(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$-\zeta'(t) = -\frac{\zeta(t)}{1-t} + \frac{24\pi \tilde{m}_H(\Sigma_t)}{(1-t)r_t} - \frac{1}{1-t} \mathbb{E}(t).$$

Pelo Lema 3.2,  $\lim_{t \rightarrow 1} \zeta(t) = 0$ , daí

$$\zeta(t) = \frac{1}{1-t} \int_t^1 \left[ \frac{24\pi \tilde{m}_H(\Sigma_x)}{r_x} - \mathbb{E}(x) \right] dx.$$

Mas por hipótese,  $\tilde{m}_H(\Sigma_t) = m_{ABL} + o(1)$  quando  $t \rightarrow 1$ . Assim, por (3.18)

$$\frac{\tilde{m}_H(\Sigma_t)}{r_t} = \frac{m_{ABL}}{2} c_\Sigma^{-1} (1-t) + (1-t)o(1).$$

Conseqüentemente,

$$\int_t^1 \frac{\tilde{m}_H(\Sigma_x)}{r_x} dx = \frac{1}{4} m_{ABL} c_\Sigma^{-1} (1-t)^2 + o((1-t)^2).$$

Finalmente estimemos  $\int_t^1 E(x) dx$ , segue do Lema 3.3 combinado com (3.14) que

$$|\nabla u|^{-2} |\nabla_{\Sigma_t} \nabla u|^2 + \frac{1}{2} |\mathring{\Lambda}|^2 = O(|x|^{-2-2\tau}) = O((1-t)^{2+2\tau}).$$

Assim, pelo Lema 3.2,

$$\int_{\Sigma_t} \left( \frac{|\nabla_{\Sigma_t} \nabla u|^2}{|\nabla u|^2} + \frac{1}{2} |\mathring{\Lambda}|^2 \right) d\sigma_t = O((1-t)^{2\tau}).$$

Portanto,

$$\int_t^1 \int_{\Sigma_x} \left( \frac{|\nabla_{\Sigma_x} \nabla u|^2}{|\nabla u|^2} + \frac{1}{2} |\mathring{\Lambda}|^2 \right) d\sigma_x dx = O((1-t)^{1+2\tau}).$$

Por outro lado, uma vez que a hipótese sobre  $R$  integrável, quando  $t \rightarrow 1$ , implica

$$o(1) = \int_{u \geq t} |R| dx = \int_t^1 \int_{\Sigma_x} |R| |\nabla u|^{-1} d\sigma_x dx.$$

Como  $|\nabla u|^{-1} \geq \frac{1}{2} c_\Sigma (1-t)^{-2}$  para  $t$  próximo de 1, temos que

$$\int_t^1 \int_{\Sigma_x} |R| |\nabla u|^{-1} d\sigma_x dx \geq \frac{1}{2} c_\Sigma (1-t)^{-2} \int_t^1 \int_{\Sigma_x} |R| d\sigma_x dx,$$

implicando que

$$\int_t^1 \int_{\Sigma_x} |R| d\sigma_x dx = o((1-t)^2),$$

donde

$$\frac{1}{1-t} \zeta(t) = 6\pi m_{ABL} c_\Sigma^{-1} + o(1) + O((1-t)^{2\tau-1}),$$

como  $\tau > \frac{1}{2}$  segue a primeira identidade.

De maneira similar, defina

$$B(t) = 2\pi - \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t.$$

Para qualquer valor regular  $t$ , teremos

$$\begin{aligned} B'(t) &= -\frac{2}{(1-t)^3} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t - \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} (2|\nabla u| |\nabla u|' + |\nabla u| H) d\sigma_t \\ &= -\frac{2}{(1-t)^3} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t + \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} H |\nabla u| d\sigma_t \\ &= -\frac{1}{1-t} \left[ \frac{2}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t - \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H |\nabla u| d\sigma_t \right] \\ &= -\frac{1}{1-t} \left[ 2(2\pi - B(t)) - \frac{1}{1-t} \left( \int_{\Sigma_t} H |\nabla u| d\sigma_t \right) \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$-B'(t) = \frac{1}{1-t} [-2B(t) + \zeta(t)].$$

Como  $\lim_{t \rightarrow 1} B(t) = 0$ , temos que

$$B(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_t^1 (1-x)\zeta(x)dx.$$

Portanto, quando  $t \rightarrow 1$ , pela expressão de  $\zeta(t)$  teremos

$$\frac{1}{1-t} B(t) = 2\pi m_{\text{ABL}} c_{\Sigma_t}^{-1} + o(1) + O((1-t)^{2\tau-1}).$$

□

Agora, demonstraremos o teorema principal desta seção.

**Teorema 3.2.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana e conformemente plana no infinito com  $\partial\partial\partial g_{ij} = O(|x|^{-3-\tau})$  e  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta que encontra ortogonalmente  $\Gamma$  superfície não compacta, e  $\partial\Sigma = \partial\Gamma$ . Se  $R \geq 0$ ,  $H^{\partial M} \geq 0$  e  $u \in C^\infty(M)$  é uma função satisfazendo*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{em } M \\ u = 0 \quad \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } \Gamma \\ u \rightarrow 1 \quad \text{no } \infty, \end{array} \right.$$

onde  $\eta$  é um vetor normal unitário à  $\Gamma$ , apontando para fora. Então

1.  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{1-t} \left[ 4\pi - \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t \right] = 6\pi m_{\text{ABL}} c_{\Sigma}^{-1};$
2.  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{1-t} \left[ 2\pi - \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t \right] = 2\pi m_{\text{ABL}} c_{\Sigma}^{-1}.$

Aqui,  $m_{\text{ABL}}$  é a massa de  $(M, g)$  e  $c_{\Sigma}$  é a capacidade de  $\Sigma$  em  $(M, g)$ .

*Demonstração.* É suficiente mostrar que  $\lim_{t \rightarrow 1} \tilde{m}_H(\Sigma_t) = m_{\text{ABL}}$ . Afim disto, para  $t$  suficientemente próximo de 1, seja  $r_-(t) = \min_{\Sigma_t} |x|$  e  $r_+(t) = \max_{\Sigma_t} |x|$ . Por (3.14),  $r_+(t) \leq C r_-(t)$ . Aqui e abaixo,  $C > 0$  denota uma constante independente de  $t$ . Pelos Lemas 3.2 e 3.3,  $|\Sigma_t| \leq C r_-^2$  e  $K \geq C r_-^{-2}$ , logo  $\text{diam}(\Sigma_t) \leq C r_-$  e além disso,  $|\mathring{A}| \leq C r_-^{-1-\tau}$  e  $|\mathring{D}\mathring{A}| \leq C r_-^{-2-\tau}$ . Portanto,  $\{\Sigma_t\}$  é uma família de superfícies quase hemisféricas próximas ao  $\infty$  em  $(M^3, g)$ . Pelo Teorema 3.1,  $\lim_{t \rightarrow 1} \tilde{m}_H(\Sigma_t) = m_{\text{ABL}}$  e o resultado segue da Proposição 3.3. □

### 3.3 Desigualdades geométricas via conjunto de nível de funções harmônicas

Nesta seção, apresentamos algumas desigualdades geométricas relacionadas às curvas de nível das funções harmônicas abordadas no presente capítulo, que serão fundamentais na prova do resultado principal.

Uma necessidade fundamental na prova de todos os resultados que se seguem é a conexidade das curvas de nível da solução do problema (3.3). Para garantir tal conexidade, é suficiente assumir que  $H_2(M, \Sigma) = 0$ . Esse fato decorre de uma adaptação, ao nosso contexto, da prova da Proposição 1 em [11], juntamente com o uso de [22] na parte do argumento extraída de [20].

**Teorema 3.3.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana e conformemente plana no infinito com  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta que encontra ortogonalmente  $\Gamma$  superfície não compacta, e  $\partial \Sigma = \partial \Gamma$ . Suponha que  $\Sigma$  seja conexa e  $H_2(M, \Sigma) = 0$ . Se  $R \geq 0$ ,  $H^{\partial M} \geq 0$  e  $u \in C^\infty(M)$  é uma função satisfazendo*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } M \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Gamma \\ u \rightarrow 1 & \text{no } \infty, \end{cases}$$

onde  $\eta$  é um vetor normal unitário à  $\Gamma$ , apontando para fora. Então

$$2\pi + \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t \geq \frac{3}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t$$

para todo valor regular  $t$ , e a igualdade é válida para algum  $t$  se, e somente se,  $(M^3, g)$ , é isométrica a  $\mathbb{R}_+^3 \setminus B_R$  com  $\Sigma_t = \mathbb{R}_+^3 \cap \partial B_R$ .

Em particular,

$$2\pi + \int_{\Sigma} H|\nabla u| d\sigma \geq 3 \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma.$$

*Demonstração.* Aplicando a Proposição 3.2, ao conjunto  $\Omega_{[t_1, t_2]} = \{x \in M; t_1 \leq u(x) \leq t_2\}$ , cujo bordo  $\partial \Omega_{[t_1, t_2]} = P_1 \cup P_2$ , onde  $P_1 = \partial \Omega_{[t_1, t_2]} \cap \partial M$  e  $P_2 = \Sigma_{t_1} \cup \Sigma_{t_2}$  com  $\Sigma_{t_i} = \{x \in M; u(x) = t_i\}$ ,  $i = 1, 2$ . Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} \left( \frac{|\nabla^2 u|^2}{|\nabla u|^2} + R_g \right) d\sigma_t \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left( 2\pi \chi(\Sigma_t) - \int_{\partial \Sigma_t \cap P_2} k_{\partial \Sigma_t} ds_t \right) dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\partial \Omega_{[t_1, t_2]} \cap P_1} H_{P_1} ds_t \right) dt \leq \int_{\Sigma_{t_1}} H|\nabla u| d\sigma_{t_1} - \int_{\Sigma_{t_2}} H|\nabla u| d\sigma_{t_2}. \end{aligned}$$

Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma_t)$ , temos que

$$\nabla^2 \mathbf{u}(X, Y) = |\nabla \mathbf{u}| \mathbf{A}(X, Y), \quad \nabla^2 \mathbf{u}(X, \nu) = X(|\nabla \mathbf{u}|), \quad \nabla^2 \mathbf{u}(\nu, \nu) = -H|\nabla \mathbf{u}|, \quad (3.19)$$

onde na última equação usamos o fato que  $\Delta \mathbf{u} = 0$ . Assim,

$$|\nabla \mathbf{u}|^{-2} |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{A}|^2 + 2|\nabla \mathbf{u}|^{-2} |\nabla_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}||^2 + H^2$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} \left( \frac{1}{2} |\overset{\circ}{\mathbf{A}}|^2 + |\nabla \mathbf{u}|^{-2} |\nabla_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}||^2 + \frac{3}{4} H^2 + \frac{\mathbf{R}}{2} \right) d\sigma_t dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega_{[t_1, t_2]} \cap P_1} H_{P_1} ds_t dt \\ & \leq 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \chi(\Sigma_t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Sigma_t \cap P_2} k_{\partial \Sigma_t} ds_t dt + \int_{\Sigma_{t_1}} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_{t_1} - \int_{\Sigma_{t_2}} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_{t_2}. \end{aligned}$$

Podemos reescrever a desigualdade anterior da seguinte forma,

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} \left( \frac{1}{2} |\overset{\circ}{\mathbf{A}}|^2 + |\nabla \mathbf{u}|^{-2} |\nabla_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}||^2 + \frac{3}{4} \left( H - \frac{2|\nabla \mathbf{u}|}{1-u} \right)^2 + \frac{\mathbf{R}}{2} \right) d\sigma_t dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega_{[t_1, t_2]} \cap P_1} H_{P_1} ds_t dt \\ & \leq 3 \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_t + \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma_t \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Sigma_t \cap P_2} k_{\partial \Sigma_t} ds_t dt \\ & + 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \chi(\Sigma_t) dt + \int_{\Sigma_{t_1}} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_{t_1} - \int_{\Sigma_{t_2}} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_{t_2}. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Como  $\Sigma_t$  é de bordo livre,

$$\left( \int_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma_t \right)' = \int_{\Sigma_t} (2|\nabla \mathbf{u}| |\nabla \mathbf{u}|' + |\nabla \mathbf{u}|^2 (H|\nabla \mathbf{u}|^{-1})) d\sigma_t = - \int_{\Sigma_t} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_t,$$

temos que,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma_t \right) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma_t - \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_t.$$

Assim, se  $[t_1, t_2]$  não tiver valores críticos, segue diretamente que

$$\begin{aligned} & - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma_t \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma_t \right) dt \quad (3.21) \\ & = \frac{1}{1-t_2} \int_{\Sigma_{t_2}} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma_{t_2} - \frac{1}{1-t_1} \int_{\Sigma_{t_1}} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma_{t_1}. \end{aligned}$$

De modo geral, se  $[t_1, t_2]$  tiver valores críticos, pode-se usar um argumento de regularização para obter (3.21). De fato, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , temos que

$$\operatorname{div} \left( \frac{\sqrt{|\nabla \mathbf{u}|^2 + \epsilon} \nabla \mathbf{u}}{1-u} \right) = \frac{\sqrt{|\nabla \mathbf{u}|^2 + \epsilon}}{(1-u)^2} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \frac{1}{1-u} \frac{\nabla^2 \mathbf{u}(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})}{\sqrt{|\nabla \mathbf{u}|^2 + \epsilon}}.$$

Daí,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\sqrt{|\nabla\mathbf{u}|^2 + \epsilon}}{1 - \mathbf{u}} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta} ds = \int_{\Omega} \frac{\sqrt{|\nabla\mathbf{u}|^2 + \epsilon}}{(1 - \mathbf{u})^2} |\nabla\mathbf{u}|^2 d\sigma + \int_{\Omega} \frac{1}{1 - \mathbf{u}} \frac{\nabla^2\mathbf{u}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u})}{\sqrt{|\nabla\mathbf{u}|^2 + \epsilon}} d\sigma. \quad (3.22)$$

Para o terceiro termo em (3.22), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{1 - \mathbf{u}} \frac{\nabla^2\mathbf{u}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u})}{\sqrt{|\nabla\mathbf{u}|^2 + \epsilon}} d\sigma &= \int_{\{\nabla\mathbf{u} \neq 0\} \subset \Omega} \frac{1}{1 - \mathbf{u}} \nabla^2\mathbf{u}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) \frac{1}{\sqrt{|\nabla\mathbf{u}|^2 + \epsilon}} d\sigma \\ &= \int_{\{\nabla\mathbf{u} \neq 0\} \subset \Omega} \frac{1}{1 - \mathbf{u}} \nabla^2\mathbf{u} \left( \frac{\nabla\mathbf{u}}{|\nabla\mathbf{u}|}, \frac{\nabla\mathbf{u}}{|\nabla\mathbf{u}|} \right) \frac{|\nabla\mathbf{u}|^2}{\sqrt{|\nabla\mathbf{u}|^2 + \epsilon}} d\sigma. \end{aligned}$$

Assim, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  em (3.22) e utilizando para  $\mathbf{u}$  em  $[t_1, t_2]$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - t_2} \int_{\Sigma_{t_2}} |\nabla\mathbf{u}|^2 d\sigma_{t_2} - \frac{1}{1 - t_1} \int_{\Sigma_{t_1}} |\nabla\mathbf{u}|^2 d\sigma_{t_1} &= \int_{\{\nabla\mathbf{u} \neq 0\} \subset \Omega_{[t_1, t_2]}} \frac{1}{1 - \mathbf{u}} |\nabla\mathbf{u}|^{-1} \nabla^2\mathbf{u}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) d\sigma_t \\ &\quad + \int_{\Omega_{[t_1, t_2]}} \frac{|\nabla\mathbf{u}|^3}{(1 - \mathbf{u})^2} d\sigma_t. \end{aligned}$$

Isso, juntamente com a fórmula da córea e (3.19), fornece (3.21). Agora, de (3.20) e (3.21) temos que

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} \left( \frac{1}{2} |\mathring{\mathbf{A}}|^2 + |\nabla\mathbf{u}|^{-2} |\nabla_{\Sigma_t} |\nabla\mathbf{u}|^2 + \frac{3}{4} \left( \mathbf{H} - \frac{2|\nabla\mathbf{u}|}{1 - \mathbf{u}} \right)^2 + \frac{\mathbf{R}}{2} \right) d\sigma_t dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_{[t_1, t_2]} \cap \mathbf{P}_1} \mathbf{H}_{\mathbf{P}_1} ds_t dt \\ &\leq 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \chi(\Sigma_t) dt + \int_{\Sigma_{t_1}} \mathbf{H} |\nabla\mathbf{u}| d\sigma_{t_1} - \int_{\Sigma_{t_2}} \mathbf{H} |\nabla\mathbf{u}| d\sigma_{t_2} + \frac{3}{1 - t_2} \int_{\Sigma_{t_2}} |\nabla\mathbf{u}|^2 d\sigma_{t_2} \\ &\quad - \frac{3}{1 - t_1} \int_{\Sigma_{t_1}} |\nabla\mathbf{u}|^2 d\sigma_{t_1} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Sigma_t \cap \mathbf{P}_2} \mathbf{k}_{\partial\Sigma_t} ds_t dt. \end{aligned}$$

Note que,  $\partial\Sigma_t \cap \mathbf{P}_2 = \emptyset$ , pois se existisse  $\mathbf{p} \in \partial\Sigma_t \cap \mathbf{P}_2$  teríamos que  $\mathbf{p} \in \partial\Sigma_t \subset \Sigma_{t_1}$  ou  $\mathbf{p} \in \partial\Sigma_t \subset \Sigma_{t_2}$  que implicaria  $t_1 = t$  ou  $t = t_2$ , contradição.

Uma vez que  $\mathbf{R} \geq 0$ ,  $\mathbf{H}^{\partial\mathbf{M}} \geq 0$  e  $\Sigma_t$  é conexo já que  $\mathbf{H}_2(\mathbf{M}, \Sigma) = 0$ ,  $\chi(\Sigma_t) \leq 1$ , segue que

$$\begin{aligned} 2\pi(t_1 - t_2) &\leq \int_{\Sigma_{t_1}} \mathbf{H} |\nabla\mathbf{u}| d\sigma_{t_1} - \int_{\Sigma_{t_2}} \mathbf{H} |\nabla\mathbf{u}| d\sigma_{t_2} \\ &\quad + \frac{3}{1 - t_2} \int_{\Sigma_{t_2}} |\nabla\mathbf{u}|^2 d\sigma_{t_2} - \frac{3}{1 - t_1} \int_{\Sigma_{t_1}} |\nabla\mathbf{u}|^2 d\sigma_{t_1}. \end{aligned}$$

Finalmente, fazendo  $t_2 \rightarrow 1$ , segue do Lema 3.2 que

$$2\pi(t_1 - 1) \leq \int_{\Sigma_{t_1}} \mathbf{H} |\nabla\mathbf{u}| d\sigma_{t_1} - \frac{3}{1 - t_1} \int_{\Sigma_{t_1}} |\nabla\mathbf{u}|^2 d\sigma_{t_1} \quad (3.23)$$

Em particular, quando  $t_1 = 0$  tem-se

$$2\pi + \int_{\Sigma} H|\nabla u|d\sigma \geq 3 \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma.$$

Para demonstrar a rigidez, basta considerarmos  $t = 0$ . Suponha que a igualdade acima seja válida. Então, com base em (3.23) e sua demonstração, para cada valor regular  $t \in [0, 1]$ , a superfície  $\Sigma_t$  é conexa (orientável), todas as desigualdades são igualdades, consequentemente  $\chi(\Sigma_t) = 1$ , ou seja,  $\Sigma_t$  é um disco,  $R = 0$ ,  $|\nabla u|$  depende apenas de  $t$ ,  $\Sigma_t$  é totalmente umbílica, e  $H = \frac{2}{1-t}|\nabla u|$ .

Para provar que  $(M^3, g)$  é isométrico a  $\mathbb{R}_+^3$  menos uma bola redonda, normalizamos  $(M^3, g)$  de tal forma que  $|\Sigma| = 2\pi$ . Da igualdade

$$2\pi + \int_{\Sigma} H|\nabla u|d\sigma = 3 \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma,$$

segue que  $|\nabla u| = 1$  e  $H = 2$  em  $\Sigma = \Sigma_0$ . Em uma vizinhança de  $\Sigma_0$ , a métrica  $g$  pode ser expressa localmente como  $g = \eta(t)^{-2}dt^2 + \gamma_t$ , onde  $t = u$ ,  $\eta(t) = |\nabla u|$  e  $\gamma_t$  denota a métrica induzida em  $\Sigma_t$ . Além disso, observe que  $\gamma_t$  satisfaz

$$\partial_t \gamma_t = 2\eta(t)^{-1}A_t = \eta(t)^{-1}H\gamma_t = \frac{2}{1-t}\gamma_t.$$

Dessa forma,  $(1-t)^2\gamma_t$  é uma métrica independente de  $t$ . Analogamente, como  $|\nabla u|' = -H$ , temos que  $\eta(t)$  satisfaz

$$\eta'(t) = -\frac{2}{1-t}\eta(t).$$

Consequentemente,  $(1-t)^{-2}\eta(t)$  é constante. Sabendo que  $|\nabla u| = 1$  em  $\Sigma$ , segue que  $\eta(t) = (1-t)^2$  e

$$g = (1-t)^{-4}dt^2 + (1-t)^{-2}\sigma_0,$$

onde  $\sigma_0$  é uma métrica em  $\Sigma$ . Usando o fato de que  $R = 0$  nas vizinhanças de  $\Sigma$ , temos que  $\sigma_0$  é uma métrica redonda com curvatura Gaussiana igual a 1 em  $\Sigma$ .

Suponha agora que  $u$  admita um valor crítico, e denote por  $t_0 \in (0, 1)$  o menor valor crítico de  $u$ . Pelo argumento apresentado, segue que  $(u^{-1}([0, t_0]), g)$  é isométrico a

$$(\Sigma \times [0, t_0], (1-t)^{-4}dt^2 + (1-t)^{-2}\sigma_0).$$

Em particular, isso implica que  $|\nabla u| = (1-t_0)^2 \neq 0$  no conjunto  $\partial\{u < t_0\} = \partial\{u \geq t_0\}$ . Assim,  $\partial\{u \geq t_0\}$  é uma superfície mergulhada em  $M$ . Consequentemente,  $\partial\{u \geq t_0\} = \{u = t_0\}$  pelo Princípio do Máximo Forte.

Em síntese, isso demonstra que  $\nabla u \neq 0$  no conjunto  $\{u = t_0\}$ , o que contradiz a hipótese de que  $t_0$  é um valor crítico. Portanto,  $u$  não apresenta valores críticos. Dessa forma, concluímos que  $(M, g)$  é isométrico a

$$(\Sigma \times [0, 1), \quad (1-t)^{-4} dt^2 + (1-t)^{-2} \sigma_0),$$

o que, após uma mudança de variável  $1-t = r^{-1}$ , é isométrico a  $\mathbb{R}_+^3$  menos uma bola unitária.  $\square$

**Observação 3.1.** *Note que, pelo Teorema 3.3 as quantidades*

$$\zeta(t) = 4\pi - \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t \quad e \quad B(t) = 2\pi - \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t,$$

*estudadas na Seção 3.2, satisfazem*

$$\begin{aligned} 2\pi + \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t &\geq \frac{3}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t \\ 6\pi - \frac{3}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t &\geq 4\pi - \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} H|\nabla u| d\sigma_t, \end{aligned}$$

*ou seja,*

$$3B(t) \geq \zeta(t).$$

A seguir, aplicando o Teorema 3.3 concluímos a monotonicidade da quantidade  $\frac{1}{1-t}B(t)$ .

**Teorema 3.4.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana e conformemente plana no infinito com  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta que encontra ortogonalmente  $\Gamma$  superfície não compacta, e  $\partial \Sigma = \partial \Gamma$ . Suponha que  $\Sigma$  seja conexa e  $H_2(M, \Sigma) = 0$ . Se  $R \geq 0$ ,  $H^{\partial M} \geq 0$  e  $u \in C^\infty(M)$  é uma função satisfazendo*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } M \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Gamma \\ u \rightarrow 1 & \text{no } \infty, \end{cases}$$

*onde  $\eta$  é um vetor normal unitário à  $\Gamma$ , apontando para fora. Então*

$$B(t) = \frac{1}{1-t} \left[ 2\pi - \frac{1}{(1-t)^2} \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 d\sigma_t \right]$$

*é monótona não-decrescente em  $t$ . Além disso,  $B(t) \leq 2\pi m_{\text{ABL}} c_\Sigma^{-1}$  com igualdade ocorrendo se, e somente se,  $(M, g)$  é isométrica a  $\mathbb{R}_+^3$  menos uma bola.*

*Demonstração.* Como  $-\mathcal{B}'(t) = \frac{1}{1-t} [-2\mathcal{B}(t) + \zeta(t)]$  e  $\zeta(t) \leq 3\mathcal{B}(t)$ , tem-se que  $-\mathcal{B}'(t) \leq \frac{1}{1-t}\mathcal{B}(t)$ . Portanto,  $[\frac{1}{1-t}\mathcal{B}(t)]' \geq 0$ , isto implica a monotonicidade de  $\mathcal{B}(t) = \frac{1}{1-t}\mathcal{B}(t)$  no caso que  $u$  não tem valor crítico. Se  $u$  tem valor crítico pode-se usar um argumento de regularidade para obter a monotonicidade de  $\mathcal{B}(t)$ . De fato, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , temos que

$$\operatorname{div} \left( \frac{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon} \nabla u}{(1-u)^3} \right) = \frac{3\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon}}{(1-u)^4} |\nabla u|^2 + \frac{1}{(1-u)^3} \frac{\nabla^2 u(\nabla u, \nabla u)}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon}}.$$

Assim,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon}}{(1-u)^3} \frac{\partial u}{\partial \eta} ds = \int_{\Omega} \frac{3\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon}}{(1-u)^4} |\nabla u|^2 d\sigma + \int_{\Omega} \frac{1}{(1-u)^3} \frac{\nabla^2 u(\nabla u, \nabla u)}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon}} d\sigma. \quad (3.24)$$

A segunda parcela do lado direito da equação acima satisfaz

$$\int_{\Omega} \frac{1}{(1-u)^3} \frac{\nabla^2 u(\nabla u, \nabla u)}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon}} d\sigma = \int_{\{\nabla u \neq 0\} \subset \Omega} \frac{1}{(1-u)^3} \nabla^2 u \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon}} d\sigma.$$

Daí, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  em (3.24) e aplicando para  $\Omega_{[t_1, t_2]} = \{x \mid t_1 \leq u(x) \leq t_2\}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_{t_2}} \frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^3} d\sigma_{t_2} - \int_{\Sigma_{t_1}} \frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^3} d\sigma_{t_1} &= \int_{\Omega_{[t_1, t_2]}} \frac{3|\nabla u|^3}{(1-u)^4} d\sigma \\ &\quad + \int_{\{\nabla u \neq 0\} \subset \Omega_{[t_1, t_2]}} \frac{\nabla^2 u(\nabla u, \nabla u)}{(1-u)^3 |\nabla u|} d\sigma \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} \left[ \frac{3|\nabla u|^2}{(1-t)^4} - \frac{H|\nabla u|}{(1-t)^3} \right] d\sigma_t dt, \end{aligned}$$

isso, combinado com

$$\frac{1}{1-t_2} - \frac{1}{1-t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(1-t)^2} dt,$$

temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t_2) - \mathcal{B}(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{2\pi}{(1-t)^2} + \int_{\Sigma_t} \frac{H|\nabla u|}{(1-t)^3} d\sigma_t - \int_{\Sigma_t} \frac{3|\nabla u|^2}{(1-t)^4} d\sigma_t \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(1-t)^2} [3\mathcal{B}(t) - \zeta(t)] dt, \end{aligned}$$

segue que  $\mathcal{B}(t_2) - \mathcal{B}(t_1) \geq 0$  para  $t_2 > t_1$ .

Além disso, pelo item 2 do Teorema 3.2, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 1} \mathcal{B}(t) = 2\pi m_{\text{ABL}} c_{\Sigma}^{-1},$$

da monotonicidade de  $\mathcal{B}(t)$ , segue que

$$\mathcal{B}(t) \leq 2\pi m_{\text{ABL}} c_{\Sigma}^{-1}.$$

Em particular, temos que

$$\mathcal{B}(t) \leq \mathcal{B}(0) = 2\pi - \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 \leq 2\pi m_{\text{ABL}} c_{\Sigma}^{-1}.$$

Finalmente a rigidez decorre da rigidez do Teorema 3.3.  $\square$

### 3.4 Um teorema de rigidez do semi-Schwarzschild

Nesta seção, demonstramos o resultado principal deste capítulo. Para tal, iniciaremos estabelecendo algumas desigualdades que envolvem a massa e a capacidade. Iniciemos com uma desigualdade geométrica, cuja igualdade é atingida somente pelo semi-Schwarzschild.

**Teorema 3.5.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana e conformemente plana no infinito com  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta que encontra ortogonalmente  $\Gamma$  superfície não compacta, e  $\partial \Sigma = \partial \Gamma$ . Suponha que  $\Sigma$  seja conexa e  $H_2(M, \Sigma) = 0$ . Se  $R \geq 0$ ,  $H^{\partial M} \geq 0$  e  $u \in C^{\infty}(M)$  é uma função satisfazendo*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } M \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Gamma \\ u \rightarrow 1 & \text{no } \infty, \end{cases}$$

onde  $\eta$  é um vetor normal unitário à  $\Gamma$ , apontando para fora. Então, para qualquer constante  $k > 0$ ,

$$2\pi + k \int_{\Sigma} H |\nabla u| d\sigma \geq k(4 - k) \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma.$$

Além disso, a igualdade ocorre para um  $k$  qualquer se, e somente se,  $(M^3, g)$  for isométrica à variedade semi-Schwarzschild, cuja parte compacta do bordo é um hemisfério rotacionalmente simétrico. Ou seja,

$$(M^3, g) = \left( \mathbb{R}_+^3 \setminus \{|x| < r\}, \left( 1 + \frac{m_{\text{ABL}}}{4|x|} \right)^4 \delta \right),$$

onde  $r > 0$  é uma constante e  $\delta$  é a métrica Euclidiana.

*Demonstração.* Considere qualquer função harmônica positiva  $\phi$  em  $(M^3, g)$ , seja  $\bar{g} = \phi^4 g$  e  $\bar{u} = \phi^{-1} u$ . Aplicando o Teorema 3.3 a tripla  $(M^3, \bar{g}, \bar{u})$ , obtemos

$$2\pi + \int_{\Sigma} \bar{H} |\bar{\nabla} \bar{u}|_{\bar{g}} d\bar{\sigma} \geq 3 \int_{\Sigma} |\bar{\nabla} \bar{u}|_{\bar{g}}^2 d\bar{\sigma}, \quad (3.25)$$

donde

$$2\pi + \int_{\Sigma} (4v^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial v} + H) \phi^{-1} |\nabla u| d\sigma \geq 3 \int_{\Sigma} \phi^{-2} |\nabla u|^2 d\sigma. \quad (3.26)$$

Dada uma constante  $k > 0$ , considere a função harmônica em  $(M^3, g)$

$$\phi = u + \frac{1}{k}(1 - u). \quad (3.27)$$

Assim,  $\phi = \frac{1}{k}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial v} = |\nabla u|$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial v} = |\nabla u|(1 - \frac{1}{k})$  em  $\Sigma$ , conseqüentemente segue de (3.26) que

$$\begin{aligned} 2\pi + \int_{\Sigma} \left[ 4k|\nabla u|(1 - \frac{1}{k}) + H \right] k|\nabla u| d\sigma &\geq 3 \int_{\Sigma} k^2 |\nabla u|^2 d\sigma \\ 2\pi + \int_{\Sigma} [4k^2 |\nabla u|^2 - 4k|\nabla u|^2 + Hk|\nabla u|] d\sigma &\geq 3 \int_{\Sigma} k^2 |\nabla u|^2 d\sigma, \end{aligned}$$

ou seja

$$2\pi + k \int_{\Sigma} H|\nabla u| d\sigma \geq k(4 - k) \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma.$$

A igualdade acima é válida se, e só se, a igualdade em (3.25) for válida para  $(M^3, \bar{g}, \bar{u})$ .

Pelo Teorema 3.3, isto acontece se, e apenas se,  $(M^3, \bar{g})$  é isométrica a  $(\mathbb{R}_+^3 \setminus B_r, \delta)$ , onde  $B_r = \{x \in \mathbb{R}_+^3 \mid |x| < r\}$  para alguma constante  $r > 0$ . Diante disto,

$$\bar{u} = 1 - \frac{r}{|x|}. \quad (3.28)$$

Combinando (3.27) com o fato de que  $\bar{u} = \phi^{-1}u$ , temos que

$$\phi \left( 1 - \frac{r}{|x|} \right) = u = \frac{\phi - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{k\phi - 1}{k - 1},$$

donde

$$\phi^{-1} = 1 + \frac{r(k - 1)}{|x|}. \quad (3.29)$$

Portanto

$$g = \phi^{-4} \delta = \left( 1 + \frac{r(k - 1)}{|x|} \right)^4 \delta,$$

que é uma métrica semi-Schwarzschild com massa  $m_{\text{ABL}} = 4r(k - 1)$ .  $\square$

Como consequência, obtemos a primeira desigualdade, que é uma ferramenta importante para a prova do teorema principal deste capítulo.

**Corolário 3.1.** *Seja  $(M^3, g)$  sob as hipóteses do Teorema 3.5. Então*

$$\left( \frac{2}{\pi} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + 1. \quad (3.30)$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $(M^3, g)$  for isométrica a uma variedade semi-Schwarzschild, cuja parte compacta do bordo é um hemisfério rotacionalmente simétrico com curvatura média constante não negativa.

*Demonstração.* Definiremos a seguinte forma quadrática

$$\mathcal{J}(k) := \alpha(\mathbf{u})k^2 + \beta(\mathbf{u})k + 2\pi, \quad (3.31)$$

onde

$$\alpha(\mathbf{u}) = \int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma, \quad \beta(\mathbf{u}) = \int_{\Sigma} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma - 4 \int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma.$$

Segue do Teorema 3.5 que

$$\mathcal{J}(k) \geq 0, \forall k > 0.$$

Conseqüentemente, ou

$$\beta(\mathbf{u})^2 - 8\pi\alpha(\mathbf{u}) \leq 0 \quad (3.32)$$

ou

$$\beta(\mathbf{u})^2 - 8\pi\alpha(\mathbf{u}) > 0 \quad \text{e} \quad -\beta(\mathbf{u}) + \sqrt{\beta(\mathbf{u})^2 - 8\pi\alpha(\mathbf{u})} < 0, \quad (3.33)$$

já que estamos interessados na menor raiz não positiva.

Note que, (3.33) equivale a

$$\beta(\mathbf{u}) > \sqrt{8\pi\alpha(\mathbf{u})},$$

ou seja,

$$\frac{\int_{\Sigma} H|\nabla \mathbf{u}|}{\left(\int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}|^2\right)^{\frac{1}{2}}} - 4 \left(\int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}|^2\right)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{8\pi}. \quad (3.34)$$

Assim, ocorrendo (3.34), segue da desigualdade de Hölder, que

$$\left(\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}|^2\right)^{\frac{1}{2}} > 1,$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} > 1 + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.35)$$

Por outro lado, se (3.32) for válida, então

$$\left(\int_{\Sigma} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma - 4 \int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma\right)^2 - 8\pi \int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma \leq 0,$$

ou melhor,

$$\left|\int_{\Sigma} H|\nabla \mathbf{u}| d\sigma - 4 \int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma\right| \leq \left(8\pi \int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

implicando

$$4 \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \leq \left( 8\pi \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + \int_{\Sigma} H |\nabla u| d\sigma. \quad (3.36)$$

Aplicando novamente a desigualdade de Hölder em (3.36), obtemos

$$4 \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \leq \left( 8\pi \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Sigma} H^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.37)$$

e assim,

$$\sqrt{2} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \left( \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.38)$$

Portanto, concluímos que (3.30) é satisfeita. Se a igualdade em (3.30) for válida, então (3.33) não ocorre, daí (3.37) implica  $H = c|\nabla u|$  para alguma constante  $c \geq 0$ . Em particular, isto dá

$$-\beta(u) = 4 \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma - \int_{\Sigma} H |\nabla u| d\sigma = \sqrt{8\pi\alpha(u)} > 0.$$

Consequentemente,  $\mathcal{J}(k_0) = 0$  em

$$k_0 = \frac{-\beta(u)}{2\alpha(u)} = \left( \frac{2}{\pi} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{1 + \left( \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Pelo Teorema 3.5,  $(M^3, g)$  é isométrica a variedade semi-Schwarzschild

$$(M^3, g) = \left( \mathbb{R}_+^3 \setminus \{|x| < r\}, \left( 1 + \frac{m_{ABL}}{4|x|} \right)^4 \delta \right), \quad (3.39)$$

onde  $r > 0$  e  $m_{ABL} = 4r(k_0 - 1)$ . Pelo Teorema da Massa Positiva devido a Almaraz, Barbosa e Lima [[2], Teorema 1.3]  $m_{ABL} \geq 0$ , daí  $k_0 \leq 2$  e o bordo  $\{|x| = r\}$  tem curvatura média não-negativa em  $(M^3, g)$ .

Reciprocamente, em (3.39) temos que

$$k = \frac{2}{1 + \left( \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}},$$

o que implica

$$\left( \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{2}{k} - 1 \right|$$

e

$$\frac{2}{\sqrt{2} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}} = k \implies \left( \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2k}}.$$

Como  $k \leq 2$ , a igualdade em (3.30) é satisfeita.  $\square$

Uma aplicação imediata do corolário é a seguinte.

**Teorema 3.6.** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana e conformemente plana no infinito com  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta que encontra ortogonalmente  $\Gamma$  superfície não compacta, e  $\partial \Sigma = \partial \Gamma$ . Suponha que  $\Sigma$  seja conexa e  $H_2(M, \Sigma) = 0$ . Se  $R \geq 0$ ,  $H^{\partial M} \geq 0$ , então*

$$\frac{4c_\Sigma}{r_\Sigma} \leq \left( \frac{1}{8\pi} \int_\Sigma H^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + 1. \quad (3.40)$$

Aqui  $c_\Sigma$  é a capacidade de  $\Sigma$  em  $(M^3, g)$  e  $r_\Sigma = \left( \frac{|\Sigma|}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$  é o raio da área de  $\Sigma$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $(M^3, g)$  for isométrica a uma variedade semi-Schwarzschild, cuja parte compacta do bordo é um hemisfério rotacionalmente simétrico com curvatura média constante não negativa.

*Demonstração.* Da desigualdade de Hölder e de (3.2), temos que

$$\left( \int_\Sigma |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\int_\Sigma |\nabla u| d\sigma}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{4\pi c_\Sigma}{r_\Sigma \sqrt{2}\sqrt{\pi}} = \frac{4\sqrt{\pi}c_\Sigma}{\sqrt{2}r_\Sigma},$$

do Corolário 3.1, segue imediatamente

$$\frac{4c_\Sigma}{r_\Sigma} \leq \left( \frac{1}{8\pi} \int_\Sigma H^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + 1.$$

□

Nosso próximo resultado consiste em outra desigualdade fundamental para demonstrarmos o Teorema principal deste capítulo.

**Teorema 3.7.** *Seja  $(M^3, g)$  sob as hipóteses do Teorema 3.5. Então*

$$\frac{m_{ABL}}{2c_\Sigma} \geq 1 - \left( \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.41)$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $(M^3, g)$  for isométrica a uma variedade semi-Schwarzschild, cuja parte compacta do bordo é um hemisfério rotacionalmente simétrico. Ou seja,

$$(M^3, g) = \left( \mathbb{R}_+^3 \setminus \{|x| < r\}, \left( 1 + \frac{m_{ABL}}{4|x|} \right)^4 \delta \right),$$

onde  $r > 0$  é uma constante e  $\delta$  é a métrica Euclidiana.

*Demonstração.* Seja  $\phi$  uma função harmônica positiva em  $(M^3, g)$ , consideremos  $\bar{g} = \phi^4 g$  e  $\bar{u} = \phi^{-1} u$ . Aplicando o Teorema 3.4 a  $(M^3, \bar{g}, \bar{u})$ , obtemos

$$2\pi - \int_{\Sigma} |\bar{\nabla} \bar{u}|_{\bar{g}}^2 d\bar{\sigma} \leq 2\pi \bar{m}_{ABL} \bar{c}_{\Sigma}^{-1}. \quad (3.42)$$

Com base nas relações (3.11) e (3.12), juntamente com a desigualdade (3.42), temos que

$$2\pi - \int_{\Sigma} \phi^{-2} |\nabla u|^2 d\sigma \leq 2\pi \frac{m_{ABL} - 2c_{\phi}}{c_{\Sigma} - c_{\phi}}. \quad (3.43)$$

Para qualquer constante  $k > 0$ , considere a função harmônica em  $(M^3, g)$

$$\phi = u + \frac{1}{k}(1 - u). \quad (3.44)$$

Assim, temos  $\phi = k^{-1}$  em  $\Sigma$  e  $c_{\phi} = (1 - k^{-1})c_{\Sigma}$ . Além disso, a partir de (3.43), segue que

$$\begin{aligned} 2\pi - \int_{\Sigma} k^2 |\nabla u|^2 d\sigma &\leq 2\pi \frac{m_{ABL} - 2(1 - k^{-1})c_{\Sigma}}{c_{\Sigma} - (1 - k^{-1})c_{\Sigma}} \\ &= 2\pi \left[ \frac{m_{ABL} - 2(1 - k^{-1})c_{\Sigma}}{c_{\Sigma} k^{-1}} \right]. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} k^2 |\nabla u|^2 d\sigma &\leq \frac{m_{ABL} - 2(1 - k^{-1})c_{\Sigma}}{c_{\Sigma} k^{-1}} \\ \frac{1}{k} - \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma &\leq \frac{m_{ABL}}{c_{\Sigma}} - 2(1 - k^{-1}). \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{m_{ABL}}{c_{\Sigma}} \geq 2 - \frac{1}{k} - \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \quad (3.45)$$

Ao maximizar o lado direito de (3.45) para todo  $k > 0$ , obtemos

$$\frac{m_{ABL}}{2c_{\Sigma}} \geq 1 - \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se a igualdade (3.41) ocorre, então a igualdade em (3.42) também é satisfeita para  $\phi = u + k^{-1}(1 - u)$  com constante  $k$  dada por

$$k = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Assim, pelo Teorema 3.4,  $(M^3, \bar{g})$  é isométrica a  $(\mathbb{R}_+^3 \setminus B_r, \delta)$ , onde  $B_r = \{x \in \mathbb{R}_+^3 \mid |x| < r\}$  para algum  $r > 0$ , e

$$\bar{u} = 1 - \frac{r}{|x|}.$$

Esse resultado, juntamente com  $\bar{\mathbf{u}} = \phi^{-1}\mathbf{u}$  e (3.44), implica

$$\phi^{-1} = 1 + \frac{r(k-1)}{|\mathbf{x}|}.$$

Portanto,

$$\mathbf{g} = \phi^{-4}\delta = \left(1 + \frac{r(k-1)}{|\mathbf{x}|}\right)^4 \delta,$$

que é uma métrica semi-Schwarzschild com massa  $m_{\text{ABL}} = 4r(k-1)$ .

Para qualquer uma dessas variedades  $(M^3, \mathbf{g})$ , temos que

$$\frac{m_{\text{ABL}}}{2c_\Sigma} = 1 - \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k},$$

o que confirma a igualdade em (3.41), concluindo assim a demonstração.  $\square$

Enunciamos agora o nosso principal resultado de rigidez deste capítulo, relativo ao caso semi-Schwarzschild.

**Teorema 3.8.** *Seja  $(M^3, \mathbf{g})$  uma variedade assintoticamente plana e conformemente plana no infinito com  $\partial M = \Sigma \cup \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta que encontra ortogonalmente  $\Gamma$  superfície não compacta, e  $\partial \Sigma = \partial \Gamma$ . Suponha que  $\Sigma$  seja conexa e  $H_2(M, \Sigma) = 0$ . Se  $R \geq 0$ ,  $H^{\partial M} \geq 0$ , então*

$$\frac{m_{\text{ABL}}}{c_\Sigma} \geq 1 - \left(\frac{1}{8\pi} \int_\Sigma H^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $(M^3, \mathbf{g})$  for isométrica a uma variedade semi-Schwarzschild, cuja parte compacta do bordo é um hemisfério rotacionalmente simétrico com curvatura média constante não negativa.*

*Demonstração.* Como consequência direta do Corolário 3.1 e do Teorema 3.7, temos que

$$\frac{m_{\text{ABL}}}{2c_\Sigma} \geq 1 - \left(\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma |\nabla \mathbf{u}|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \geq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8\pi} \int_\Sigma H^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Ou seja,

$$\frac{m_{\text{ABL}}}{c_\Sigma} \geq 1 - \left(\frac{1}{8\pi} \int_\Sigma H^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se a igualdade acima for satisfeita, então as igualdades no Corolário 3.1 e no Teorema 3.7 também são válidas, o que implica a rigidez.  $\square$

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Alaei, M. Lesourd, and S. Yau. Stable surfaces and free boundary marginally outer trapped surfaces. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 60(5):186, 2021.
- [2] S. Almaraz, E. Barbosa, and L. L. de Lima. A positive mass theorem for asymptotically flat manifolds with a non-compact boundary. *Communications in Analysis and Geometry*, 24(4):673–715, 2016.
- [3] L. C. Ambrozio. Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, 25:1001–1017, 2015.
- [4] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Canonical variables for general relativity. *Physical Review*, 117(6):1595–1602, 1960.
- [5] H. Baltazar, A. Barros, and R. Batista, A local rigidity theorem for minimal two-spheres in charged time-symmetric initial data set, *Letters in Mathematical Physics*, 113(5):92, 2023.
- [6] R. Batista, B. Lima, and J. Silva. Rigidity of free boundary minimal disks in mean convex three-manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, 34(9):279, 2024.
- [7] A. Barros, R. Batista, and T. Cruz, Hawking mass and local rigidity of minimal surfaces in three-manifolds, *Communications in Analysis and Geometry*, 25(1):1–23, 2017.
- [8] F. Bethuel, G. Huisken, S. Müller, K. Steffen, H. Gerhard, and P. Alexander. Geometric evolution equations for hypersurfaces. *Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale*

- Matematico Estivo (CIME) held in Cetraro, Italy, June 15–22, 1996*, pages 45–84, 1999.
- [9] H. Bray, S. Brendle, M. Eichmair, and A. Neves. Area-minimizing projective planes in 3-manifolds. *Communications on pure and applied mathematics*, 63(9):1237–1247, 2010.
- [10] H. Bray, S. Brendle, and A. Neves. Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds. *Communications in Analysis and Geometry*, 18:821–830, 02 2010.
- [11] H. Bray and P. Miao. On the capacity of surfaces in manifolds with nonnegative scalar curvature. *Inventiones mathematicae*, 172(3):459–475, 2008.
- [12] H. Bray. Proof of the riemannian penrose inequality using the positive mass theorem. *Journal of Differential Geometry*, 59(2):177–267, 2001.
- [13] H. Bray, D. P. Kazaras, M. A. Khuri, and D. L. Stern. Harmonic functions and the mass of 3-dimensional asymptotically flat riemannian manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, 32(6):184, 2022.
- [14] M. Cai and G. J. Galloway. Rigidity of area minimizing tori in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Communications in analysis and geometry*, 8(3):565–573, 2000.
- [15] T. Cruz, V. Lima, and A. de Sousa. Min-max minimal surfaces, horizons and electrostatic systems. *Journal of Differential Geometry*, 128(2):583–637, 2024.
- [16] L. L. de Lima. Conserved quantities in general relativity: The case of initial datasets with a non-compact boundary. In *Perspectives in Scalar Curvature*, pages 489–518. World Scientific, 2023.
- [17] A. Freire and F. Schwartz. Mass-capacity inequalities for conformally flat manifolds with boundary. *Communications in Partial Differential Equations*, 39(1):98–119, 2014.
- [18] G. J. Galloway and A. Mendes. Rigidity of marginally outer trapped 2-spheres. *Communications in Analysis and Geometry*, 26(1), 2018.

- [19] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, D. Gilbarg, and N. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224. Springer Science & Classics in Mathematics, 2001.
- [20] G. Huisken and T. Ilmanen. The inverse mean curvature flow and the riemannian penrose inequality. *Journal of Differential Geometry*, 59(3):353–437, 2001.
- [21] D. Impera, S. Pigola, and A. G. Setti. Global maximum principles and divergence theorems on complete manifolds with boundary. *arXiv preprint arXiv:1303.2853*, 2013.
- [22] T. Koerber. The riemannian penrose inequality for asymptotically flat manifolds with non-compact boundary. *Journal of Differential Geometry*, 124(2):317–379, 2023.
- [23] O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Uraltseva. Linear and quasilinear elliptic equations, acad. Press, New York, 20, 1968.
- [24] D. Lee. Geometric relativity. *Graduate Studies in Mathematics*, 201, 2019.
- [25] E. Longa. Low Index Capillary Minimal Surfaces in Riemannian 3-Manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, 32(4):143, 2022.
- [26] T. Marquardt. Weak solutions of inverse mean curvature flow for hypersurfaces with boundary. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2017(728):237–261, 2017.
- [27] D. Máximo and I. Nunes. Hawking mass and local rigidity of minimal two-spheres in three-manifolds. *Communcations in Analysis and Geometry*, 21:409–432, 2013.
- [28] L. Mazurowski and X. Yao. Mass, conformal capacity, and the volumetric penrose inequality. *arXiv preprint arXiv:2410.09626*, 2024.
- [29] A. Mendes. Rigidity of marginally outer trapped (hyper) surfaces with negative  $\sigma$ -constant. *Transactions of the American Mathematical Society*, 372(8):5851–5868, 2019.
- [30] P. Miao. Mass, capacity functions, and the mass-to-capacity ratio. *Peking Mathematical Journal*, pages 1–54, 2023.

- 
- [31] M. Micallef and V. Moraru. Splitting of 3-manifolds and rigidity of area-minimising surfaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 143(7):2865–2872, 2015.
- [32] G. Nardi. Schauder estimate for solutions of poisson’s equation with neumann boundary condition. *L’enseignement Mathématique*, 60(3):421–435, 2015.
- [33] I. Nunes. Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds. *Journal of Geometric Analysis*, 23:1290–1302, 2013.
- [34] I. Nunes. Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds. *Ph.D. Thesis, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA*, 2013.
- [35] R. Schoen. Variational theory for the total scalar curvature functional for riemannian metrics and related topics. *Topics in Calculus of Variations*, (1365):120–154, 1989.
- [36] R. Schoen and S. Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, 65(1):45–76, 1979.
- [37] R. Schoen and S. Yau. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature. *Annals of Mathematics*, 110(1):127–142, 1979.
- [38] Y. Shi, G. Wang, and J. Wu. On the behavior of quasi-local mass at the infinity along nearly round surfaces. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 36:419–441, 2009.
- [39] D. L. Stern. Scalar curvature and harmonic maps to  $\mathbb{S}^1$ . *Journal of Differential Geometry*, 122(2):259–269, 2022.