



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

**Método do Ponto Proximal para Problemas de  
Equilíbrio e Otimização Multiobjetivo**

**Pedro Rodrigues da Silva Filho**

**Teresina - 2025**

**Pedro Rodrigues da Silva Filho**

**Tese de Doutorado:**

**Método do Ponto Proximal para Problemas de Equilíbrio e  
Otimização Multiobjetivo**

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto

Coorientador:

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

**Teresina - 2025**



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

*Método do Ponto Proximal para Problemas de Equilíbrio e Otimização Multiobjetivo*

Pedro Rodrigues da Silva Filho

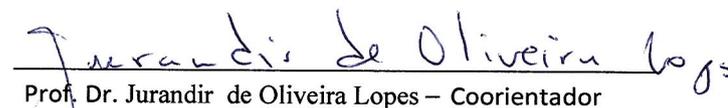
Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

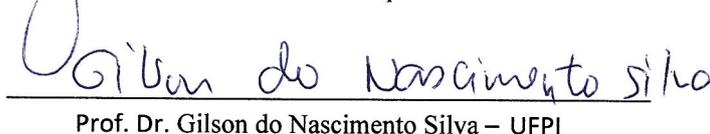
A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

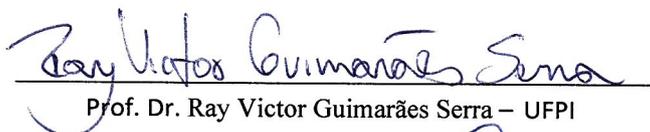
Tese aprovada em 04 de fevereiro de 2025.

**Banca Examinadora:**

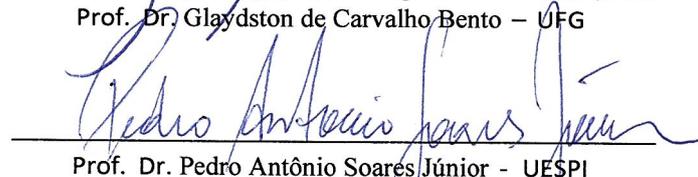
  
Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto – Orientador

  
Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes – Coorientador

  
Prof. Dr. Gilson do Nascimento Silva – UFPI

  
Prof. Dr. Ray Victor Guimarães Serra – UFPI

  
Prof. Dr. Glaydston de Carvalho Bento – UFG

  
Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior – UESPI

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI  
Biblioteca Setorial do CCN

S586m Silva Filho, Pedro Rodrigues.  
Método do ponto proximal para problemas de equilíbrio e  
otimização multiobjetivo / Pedro Rodrigues da Silva Filho. --  
2025.  
62 f.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Piauí.  
Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós-Graduação  
em Matemática, Teresina, 2025.  
“Orientador: Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto.  
Coorientador: Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes .”

1. Otimização matemática. 2. Método do ponto proximal.  
3. Função de Busemann. 4. Função de Lipschitz. I. Cruz  
Neto, João Xavier da. II. Lopes, Jurandir de Oliveira. III.  
Título.

CDD 519.3

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

*Dedico este trabalho à minha mãe, Francinete, ao meu pai, Pedro, à minha esposa, Andressa, e às minhas irmãs, Laiane e Laís. Dedico também à minha avó, Onédia (in memoriam), com carinho e saudade.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, saúde e por ter colocado pessoas tão especiais na minha vida.

Agradeço a todos os meus familiares, especialmente à minha mãe, Francinete, e ao meu pai, Pedro, por todo o esforço e dedicação em minha formação. Às minhas irmãs, Laiane e Laís, pelo constante apoio e incentivo, aos meus cunhados, Anderson, Diego e Luiz, e aos meus sogros, Josafá e Nazaré, pela amizade, solidariedade e companheirismo que sempre demonstraram.

Agradeço à minha esposa, Andressa, por ter acompanhado de perto toda a minha jornada acadêmica, sempre me apoiando e fortalecendo, especialmente nos momentos mais desafiadores, e por me proporcionar tantos instantes de alegria.

Agradeço a todos os meus amigos pelo apoio, força e companheirismo. Em especial, agradeço a Bruno, Christopher, Lazaro, Igor, Alberone, Dieme, Pedro Paulo, Márcio, Tharsio, Erisvaldo, João Vinicius, João Santos, Edimilson, Ruan, Jonatas, Leonardo, José Edilson, Silas, José Arimateia e a todos os amigos que conquistei na UFPI ao longo dos últimos anos.

Agradeço ao meu orientador, João Xavier da Cruz Neto, e meu co-orientador Jurandir de Oliveira Lopes, pela amizade, pelos valiosos ensinamentos e pela paciência ao longo dessa jornada.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFPI, em especial a Italo Dowell, Isaias Pereira, Mykael de Araujo, Vitaliano Amaral, Sandoel Vieira, João Carlos, Rondinelle Marcolino, Halyson Baltazar, Paulo Alexandre, Barnabé Pessoa Lima, Marcos Travaglia e José Francisco, pelo apoio, amizade, valiosos ensinamentos e por me acolherem tão bem nesta instituição.

Agradeço aos membros da banca, Glaydston de Carvalho Bento, Pedro Antônio Soares

Júnior, Ray Victor Guimarães Serra e Gilson do Nascimento Silva, por seus comentários e sugestões que ajudaram a melhorar a redação do texto final.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI) pelo apoio.

*“Todas as vitórias ocultam uma abdicação”.*

Simone de Beauvoir.

# Resumo

É conhecido que o método do ponto proximal se destaca como uma ferramenta central em problemas de otimização e equilíbrio. Neste trabalho, foram realizados avanços significativos no desenvolvimento desse método, particularmente em dois contextos distintos: a otimização multiobjetivo em espaços de Hilbert e os problemas de equilíbrio em variedades de Hadamard. Nossa abordagem foi estruturada em três partes:

Na primeira, analisamos o resolvente baseado em funções de Busemann, conforme introduzido por Bento et al. [*J. Optim. Theory Appl.*, 200:428–436, 2024], além de propomos o método do ponto proximal para problemas de equilíbrio em variedades de Hadamard e estabelecemos a convergência do método.

Na segunda, utilizando subgradientes de Mordukhovich, introduzimos uma nova definição de pontos Pareto críticos, estabelecemos uma condição necessária de otimalidade e desenvolvemos uma versão refinada do algoritmo do ponto proximal vetorial, com uma análise detalhada de sua convergência em espaço de Hilbert.

Por fim, também fundamentados nos subgradientes de Mordukhovich, estabelecemos uma condição necessária de otimalidade para funções direcionalmente Lipschitz e contínuas em espaços de dimensão finita.

**Palavras-Chaves:** Problema de equilíbrio, função de Busemann, otimização multiobjetivo, método do ponto proximal, funções localmente Lipschitz, funções direcionalmente Lipschitz.

# Abstract

It is well known that the proximal point method stands out as a central tool in optimization and equilibrium problems. In this work, significant advances have been made in the development of this method, particularly in two distinct contexts: multi-objective optimization in Hilbert spaces and equilibrium problems in Hadamard manifolds. Our approach is structured into three parts:

In the first part, we analyze the resolvent based on Busemann functions, as introduced by Bento et al. [*J. Optim. Theory Appl.*, 200:428–436, 2024], and propose the proximal point method for equilibrium problems in Hadamard manifolds, establishing its convergence.

In the second part, using Mordukhovich subgradients, we introduce a new definition of Pareto critical points, establish a necessary optimality condition, and develop a refined version of the vectorial proximal point algorithm, along with a detailed convergence analysis in Hilbert spaces.

Finally, also relying on Mordukhovich subgradients, we establish a necessary optimality condition for directionally Lipschitz and continuous functions in finite-dimensional spaces.

**Keywords:** Equilibrium problem, Busemann function, multi-objective optimization, proximal point algorithm, locally Lipschitz functions, directionally Lipschitz functions

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Variedade de Hadamard . . . . .	5
1.2 Otimização Multiobjetivo . . . . .	11
1.3 Direcionalmente Lipschitz . . . . .	22
<b>2 Ponto Proximal para Problema de Equilíbrio</b>	<b>25</b>
<b>3 O Algoritmo Ponto Proximal Multiobjetivo</b>	<b>29</b>
3.1 O Algoritmo . . . . .	29
3.2 Análise de Convergência . . . . .	33
3.2.1 Caso Localmente Lipschitz . . . . .	33
3.2.2 Caso Pseudoconvexo . . . . .	35
<b>4 Condições Necessárias para Soluções Pareto Fraco</b>	<b>38</b>
<b>5 Considerações Finais e Trabalhos Futuros</b>	<b>45</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>47</b>

# Introdução

Neste trabalho, abordamos o problema de equilíbrio e o problema multiobjetivo. Na primeira parte da tese, focamos no problema de equilíbrio (EP), que pode ser formulado como

$$\text{Encontrar } x^* \in \Omega : f(x^*, y) \geq 0, \quad \text{para todo } y \in \Omega, \quad (1)$$

onde  $M$  é uma variedade de Hadamard,  $\Omega \subset M$  é um conjunto convexo, fechado e não vazio, e  $f : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma bifunção satisfazendo  $f(x, x) = 0$  para todo  $x \in \Omega$ .

Os primeiros estudos sobre problemas de equilíbrio são atribuídos a Fan [30] e a Nikaidô e Isoda [41]. Esses problemas abrangem e generalizam diversas classes de problemas matemáticos, incluindo problemas de otimização, problemas de equilíbrio de Nash, problemas de complementaridade, problemas de ponto fixo e desigualdades variacionais, pois todos podem ser formulados como problemas de equilíbrio; para mais detalhes, consulte Bianchi e Schaible [13] e Blum [14].

No contexto Riemanniano, Colao et al. [23] propuseram uma definição de resolvente associada a problemas de equilíbrio. Embora essa definição represente uma extensão natural da abordagem introduzida no contexto linear por Combettes e Hirstoaga [24], sua validade depende da convexidade da função envolvida, uma propriedade que, em geral, não é garantida [25]. Para contornar essa limitação, Bento et al. [10] introduziram um resolvente baseado em funções de Busemann para tratar problemas de equilíbrio, definido como

$$J_\lambda^f(z) := \{x \in \Omega : \lambda f(x, y) + d(x, z)b_{\gamma_{x,z}}(y) \geq 0, \quad y \in \Omega\}, \quad (2)$$

onde  $\gamma_{x,z} : [0, +\infty[ \rightarrow M$  é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco que parte de  $x$  e passa por  $z$ , e  $b_{\gamma_{x,z}}(y) := \lim_{t \rightarrow +\infty} [d(y, \gamma_{x,z}(t)) - t]$  corresponde à função de Busemann em variedades de Hadamard.

A principal vantagem dessa abordagem é que, além de representar uma extensão natural do resolvente proposto em [24], o novo termo de regularização define uma função

convexa em variedades de Hadamard gerais. Esse resultado constitui um passo inicial na direção de uma solução completa para o problema levantado em [25, Seção 5]. Além disso, qualquer função afim linear no Plano de Poincaré é constante, conforme demonstrado em [46, Teorema 2.2, p. 299]. Esse resultado foi posteriormente generalizado para variedades de Hadamard com curvatura seccional negativa em [11, Teorema 1]. Assim, as funções de Busemann surgem como candidatas naturais para desempenhar o papel usualmente atribuído às funções afins em espaços lineares.

No Capítulo 2, apresentamos os principais resultados obtidos em [26], onde nossas principais contribuições consiste na formulação de um método de ponto proximal baseado no resolvente definido em (2) e na análise de seu comportamento ao longo das iterações, demonstrando a convergência da sequência gerada pelo método para uma solução do problema de equilíbrio definido em (1).

Nos Capítulos 3 e 4, trabalhamos com problemas de otimização multiobjetivo que envolve a minimização simultânea de duas ou mais funções objetivos com valores reais. Dado um conjunto fechado não vazio  $\Omega \subseteq \mathcal{H}$ , onde  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert real e uma função vetorial  $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , um dos problemas de otimização multiobjetivo consiste em encontrar um *ponto Pareto fraco* de  $F$  em  $\Omega$ , ou seja, determinar um ponto  $x^* \in \Omega$  tal que não exista nenhum vetor  $x \in \Omega$  com  $F(x) \prec F(x^*)$ . Denotamos este problema por

$$\min_w \{F(x) : x \in \Omega\}. \quad (3)$$

Muitos trabalhos sobre este tópico investigaram condições de otimalidade, teorias de dualidade e as propriedades topológicas das soluções em problemas de otimização multiobjetivo, veja, por exemplo, Chen et al. [20], Jahn [36], Bot et al. [16], Dinh [27] e Minami [39].

Restringimos nossa discussão ao *algoritmo de ponto proximal* (APP), que foi introduzido e analisado por Bonnel et al. [15]. No referido artigo, os autores abordam o método para encontrar um minimizador Pareto fraco de uma função vetorial convexa  $F : X \rightarrow Y$ , onde  $X$  é um espaço de Hilbert real e  $Y$  é um espaço de Banach real contendo um cone  $\mathcal{C}$  fechado, convexo e pontiagudo com interior não vazio, que define a ordem parcial  $\preceq_{\mathcal{C}}$  em  $Y$ . O método constrói, na  $(k + 1)$ -ésima iteração, uma solução Pareto fraca de

$$F_k(x) := F(x) + \lambda_k \|x - x^k\|^2 \varepsilon^k$$

restrita ao conjunto  $\Omega_k := \{x \in X : F(x) \preceq_{\mathcal{C}} F(x^k)\}$ . Aqui,  $\{\lambda_k\}$  representa uma

sequência limitada de escalares positivos, e  $\varepsilon^k$  denota um vetor do interior de  $\mathcal{C}$  com  $\|\varepsilon^k\| = 1$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . A estratégia usada nos resultados de convergência é baseada na condição de otimalidade de primeira ordem para o seguinte problema escalar:

$$\min_{x \in \Omega_k} \eta_k(x) := \langle F(x), z^k \rangle + \frac{\lambda_k}{2} \langle \varepsilon^k, z^k \rangle \|x - x^k\|^2, \quad (4)$$

onde  $\{z^k\} \subseteq \mathcal{C}^+ \subseteq Y^*$  com  $\|z^k\| = 1$ ,  $\mathcal{C}^+$  é o cone polar positivo e  $Y^* = \{\phi : Y \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi \text{ é linear e contínua}\}$  é o espaço dual topológico de  $Y$ , com  $\langle \cdot, \cdot \rangle : Y \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$  sendo o produto dual. Portanto, resolver (4) implica que

$$0 \in \partial\psi_k(x^{k+1}) + \lambda_k \langle \varepsilon^k, z^k \rangle (x^{k+1} - x^k), \quad (5)$$

onde  $\psi_k(x) := \langle F(x), z^k \rangle + \delta_{\Omega_k}(x)$ ,  $\partial\psi_k$  denota o subdiferencial clássico de  $\psi_k(\cdot)$ , e  $\delta_{\Omega_k}(\cdot)$  é a função indicadora de  $\Omega_k$ . Em [15] provam que qualquer sequência gerada pelo (APP) converge na topologia fraca de  $X$  para um um ponto Pareto fraco de  $F$ , sob certas hipóteses padrões de completude de  $Y$  sejam satisfeitas. Note que (5) pode ser vista como

$$\alpha_k(x^k - x^{k+1}) \in \partial(\langle F(\cdot), z^k \rangle)(x^{k+1}) + N(x^{k+1}; \Omega_k),$$

onde  $\alpha_k = \lambda_k \langle \varepsilon^k, z^k \rangle$  e  $N(x^{k+1}; \Omega_k)$  representa o cone normal a  $\Omega_k$  em  $x^{k+1}$ . Nesta abordagem, o conjunto  $\Omega_k$  garante que o algoritmo funcione como um método de descida.

Variações do algoritmo original proposto em [15] aplicado a problemas vetoriais convexos, podem ser encontrado nos trabalhos de Ceng e Yao [19], Chen e Zhao [21], Choung et al. [22], Durea e Strugariu [29], Gregório e Oliveira [33] e Villacorta e Oliveira [47]. Discussões sobre o caso  $\mathbb{R}_+^m$ -quasiconvexo foram exploradas nos trabalhos de Bento et al. [8] e Apolinario et al. [1]. Nesses estudos, seus respectivos algoritmos computam um ponto  $x^{k+1}$  na  $(k + 1)$ -ésima iteração que satisfaz a expressão:

$$0 \in \partial g(F(x^{k+1})) + \alpha_k(x^{k+1} - x^k) + N(x^{k+1}; \Omega_k),$$

onde  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é uma espécie de função de “escalarização” e  $\{\alpha_k\}$  é uma sequência de números positivos. Para uma revisão sobre este tópico, veja Grad [32, pages 269–308]. Vale notar que as abordagens adotadas em ambos os trabalhos mencionados anteriormente dependem da convexidade de  $\Omega_k$ . Em Bento et al. [6], introduziram uma nova abordagem, livre de escalarização, para analisar a convergência do método de ponto proximal exato discutido em [15]. Mais precisamente, a condição de otimalidade de primeira ordem do subproblema escalarizado é substituída por condições do tipo Fritz-John, dadas pelos

gradientes generalizados de Clarke. Essas condições de otimalidade, que são diretamente aplicadas ao subproblema vetorial restrito a  $\Omega_k$ , foram introduzidas por Minami [39] e constituem um componente chave dessa abordagem alternativa, que evita a exigência de convexidade dos conjuntos de restrições que regem os passos de melhoria vetorial. Para uma abordagem semelhante à introduzida em [6], mas no contexto não linear, recomendamos aos leitores as referências [9, 7]. Nestas referências, os autores estendem as condições do tipo Fritz-John para o contexto Riemanniano, mas usando os gradientes generalizados de Mordukhovich.

No Capítulo 4, apresentamos os principais resultados obtidos em [5], onde nossas principais contribuições incluem a investigação da condição generalizada do tipo Fritz-John em um cenário *não convexo*, descrito pelos *subgradientes de Mordukhovich*. Além disso, buscamos ampliar a aplicabilidade do método do ponto proximal em *espaços de Hilbert* para funções vetoriais localmente Lipschitz. É importante destacar que o uso do subdiferencial de Clarke conduz a resultados mais restritivos devido à convexificação descrita em (1.6), Seção 1.2. Essa limitação reforça a vantagem de adotar a abordagem proposta com base nos subgradientes de Mordukhovich.

Como resultado principal, provamos que cada ponto de acumulação fraco representa um *ponto Pareto crítico* do problema definido via subgradientes de Mordukhovich. Adicionalmente, sob as suposições complementares de *pseudoconvexidade* da função vetorial e completude do seu contradomínio, demonstramos que toda a sequência gerada pelo (APP) converge (na topologia fraca do espaço) para um ponto Pareto crítico do problema.

Por fim, além de trabalharmos com otimização multiobjetiva, também realizamos um breve estudo sobre funções direcionalmente Lipschitz, que são uma generalização das funções localmente Lipschitz. Essa generalização é relevante, pois funções direcionalmente Lipschitz podem não ser contínuas, ampliando, assim, o escopo de aplicações e análises matemáticas [43, 18]. Como principal contribuição, apresentamos uma condição do tipo Fritz-John no contexto não convexo, caracterizado pelos subgradientes de Mordukhovich em espaço de dimensão finita. Essa condição, originalmente proposta por Minami em [39], utilizava o subdiferencial de Clarke como base para estabelecer condições necessárias para soluções Pareto fraco.

# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Neste capítulo, serão apresentadas definições e resultados básicos essenciais para o desenvolvimento posterior, incluindo propriedades de variedades de Hadamard, um pouco sobre otimização Multiobjetivo e funções direcionalmente Lipschitz.

### 1.1 Variedade de Hadamard

Nesta seção, apresentamos as definições e alguns resultados preliminares de variedade de Hadamard. Para mais detalhes, consultar [4, 28, 17].

Uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional não positiva é chamada de variedade de Hadamard. Ao longo deste trabalho, cada variedade  $M$  denota uma variedade de Hadamard de dimensão finita.

Um triângulo geodésico  $(x_1, x_2, x_3)$  em uma variedade Riemanniana é o conjunto formado por três pontos distintos  $x_1, x_2, x_3$ , chamados de vértices, e três segmentos geodésicos minimizantes  $\gamma_{i+1}$  que conectam  $x_{i+1}$  a  $x_{i+2}$ , denominados lados, onde  $i = 0, 1, 2$ .

**Teorema 1.1.** *Seja  $M$  uma variedade de Hadamard e  $(x_1, x_2, x_3)$  um triângulo geodésico. Denote por  $\gamma_{i+1} : [0, \ell_{i+1}] \rightarrow M$  os segmentos geodésicos que ligam  $x_{i+1}$  a  $x_{i+2}$  e considere*

$$\ell_i = L(\gamma_i), \quad \theta_i = \angle(\gamma'_{i+1}(0), -\gamma'_i(\ell_i))$$

onde  $i \equiv 1, 2, 3 \pmod{3}$ . Então, vale a desigualdade:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leq \pi.$$

Além disso,

$$\ell_{i+1}^2 + \ell_{i+2}^2 - 2\ell_{i+1}\ell_{i+2} \cos \theta_i \leq \ell_i^2. \quad (1.1)$$

Como  $\ell_i = d(x_{i+1}, x_{i+2})$ , podemos reescrever (1.1) da seguinte forma:

$$d^2(x_i, x_{i+2}) + d^2(x_i, x_{i+1}) - 2d(x_i, x_{i+2})d(x_i, x_{i+1}) \cos \theta_i \leq d^2(x_{i+1}, x_{i+2}),$$

onde  $\theta_i = \angle(\exp_{x_i}^{-1} x_{i+1}, \exp_{x_i}^{-1} x_{i+2})$ .

Como

$$d(x_i, x_{i+2})d(x_i, x_{i+1}) \cos \theta_i = \langle \exp_{x_i}^{-1} x_{i+1}, \exp_{x_i}^{-1} x_{i+2} \rangle,$$

segue que

$$d^2(x_i, x_{i+2}) + d^2(x_i, x_{i+1}) - 2\langle \exp_{x_i}^{-1} x_{i+1}, \exp_{x_i}^{-1} x_{i+2} \rangle \leq d^2(x_{i+1}, x_{i+2}).$$

*Demonstração.* Ver [45, Proposition 4.5, p. 223]. □

Um conjunto  $\Omega \subset M$  é dito *convexo* se, e somente se, qualquer segmento geodésico com extremidades em  $\Omega$  estiver contido em  $\Omega$ , ou seja, se, e somente se, uma geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  tal que  $x = \gamma(a) \in \Omega$  e  $y = \gamma(b) \in \Omega$ , então  $\gamma((1-t)a + tb) \in \Omega$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Uma função  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *convexa* se, e somente se, para qualquer segmento geodésico  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ , a composição  $\Phi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa. Dado  $p \in \Omega$ , um vetor  $s \in T_p M$  é dito ser um *subgradiente* de  $\Phi$  em  $p$  se, e somente se,

$$\Phi(q) \geq \Phi(p) + \langle s, \exp_p^{-1} q \rangle, \quad \forall q \in \Omega.$$

O conjunto de todos os subgradientes de  $\Phi$  em  $p$ , denotado por  $\partial\Phi(p)$ , é chamado de *subdiferencial* de  $\Phi$  em  $p$ . Em [46, Teorema 4.5, página 74], é provado que se  $\Phi$  é convexa, então  $\partial\Phi(p)$  é um conjunto não vazio, compacto e convexo, para cada  $p \in \Omega$ .

O cone normal a um conjunto não vazio  $\Omega$  em  $p \in \Omega$  é dado por

$$N(p; \Omega) := \{s \in T_p M : \langle s, \exp_p^{-1} q \rangle \leq 0, \quad \forall q \in \Omega\}.$$

Seja  $\Omega \subset M$  um conjunto não vazio, convexo e fechado. A função distância associada a  $\Omega$  é dada por

$$M \ni x \longmapsto d_\Omega(x) := \inf\{d(y, x) : y \in \Omega\} \in \mathbb{R}_+.$$

É conhecido (veja [31, Corolário 3.1]) que, para cada  $x \in M$ , existe um único elemento  $\tilde{x} \in \Omega$  tal que

$$\langle \exp_{\tilde{x}}^{-1} x, \exp_{\tilde{x}}^{-1} y \rangle \leq 0, \quad y \in \Omega.$$

Neste caso,  $\tilde{x}$  é a projeção de  $x$  no conjunto  $\Omega$ , que denotaremos por  $P_\Omega(x)$ .

Notemos que, para todo  $y \in M$ ,  $x \mapsto d(x, y)$  é uma função contínua e convexa, veja [45, Proposição 4.3, página 222].

As funções de Busemann mencionadas na introdução constituem uma classe importante de funções convexas definidas sobre variedades não compactas, que são definidas a partir da função distância  $e$ , de forma geral, medem a distância relativa de pontos no infinito. Elas são construídas da seguinte maneira: Dada uma semi-geodésica que parte de um ponto dado  $x$ , a função de Busemann é definida por  $b_{\gamma_{x,z}}(y) := \lim_{t \rightarrow \infty} (d(y, \gamma(t)) - t)$ ,  $y \in M$ . Utilizamos a notação  $b_{\gamma_{x,z}}(\cdot)$  para indicar que a semi-geodésica  $\gamma(\cdot)$  de  $x$  passa por  $z$ . Pela definição, também não é difícil notar que, para cada  $x \in M$  fixo,  $[0, +\infty[\ni t \mapsto \psi_y(t) = d(y, \gamma(t)) - t$  é não crescente. De fato, se  $\tilde{t} \leq t$  então,

$$d(\gamma(t), y) \leq d(\gamma(t), \gamma(\tilde{t})) + d(\gamma(\tilde{t}), y) = t - \tilde{t} + d(\gamma(\tilde{t}), y),$$

ou seja,

$$d(\gamma(t), y) - t \leq d(\gamma(\tilde{t}), y) - \tilde{t}.$$

Além disso,  $\psi_y(\cdot)$  é limitada inferiormente por  $-d(y, x)$ . De fato,

$$\begin{aligned} t - \tilde{t} &= d(\gamma(t), \gamma(\tilde{t})) \\ &\leq d(\gamma(t), y) + d(y, \gamma(\tilde{t})). \end{aligned}$$

Escolhendo  $\tilde{t} = 0$ , segue que

$$t \leq d(\gamma(t), y) + d(y, x),$$

ou seja,  $-d(y, x) \leq d(\gamma(t), y) - t$ . Em particular, temos

$$b_{\gamma_{x,z}}(y) \leq d(y, z) - d(z, x), \quad \forall x, y, z \in M. \quad (1.2)$$

Para uma boa discussão e exemplos de funções de Busemann em algumas variedades de Hadamard específicas, veja, por exemplo, [17, página 273 e Proposição 10.69]. Em seguida vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 1.1.** *Considere o espaço  $\mathbb{R}^n$  dotado da métrica Euclidiana: Seja  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  um raio geodésico da forma  $\gamma(t) = a + tu$  onde  $u$  é um vetor unitário e  $a \in \mathbb{R}^n$  fixo. A função de Busemann  $b_\gamma$  é definida por*

$$b_\gamma(y) = \langle a - y, u \rangle. \quad (1.3)$$

De fato, da definição de função de Busemann segue que

$$\begin{aligned}
 b_\gamma(y) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (d(y, \gamma(t)) - t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\|\gamma(t) - y\| - t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\|a + tu - y\| - t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\|a - y\|^2 + 2t\langle a - y, u \rangle + t^2} - \sqrt{t^2} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|a - y\|^2 + 2t\langle a - y, u \rangle}{t \left( \sqrt{\frac{\|a - y\|^2}{t^2} + \frac{2}{t}\langle a - y, u \rangle + 1} + 1 \right)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|a - y\|^2}{t \left( \sqrt{\frac{\|a - y\|^2}{t^2} + \frac{2}{t}\langle a - y, u \rangle + 1} + 1 \right)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t\langle a - y, u \rangle}{t \left( \sqrt{\frac{\|a - y\|^2}{t^2} + \frac{2}{t}\langle a - y, u \rangle + 1} + 1 \right)} \\
 &= \frac{2\langle a - y, u \rangle}{2} = \langle a - y, u \rangle.
 \end{aligned}$$

Observe que de (1.3), escolhendo  $a = x$  e  $u = \frac{z-x}{\|z-x\|}$ , obtemos que

$$d(x, z)b_{\gamma_{x,z}}(y) = \langle x - z, y - x \rangle.$$

Isso mostra que o novo termo que realiza a regularização do resolvente é uma função afim, sendo uma extensão natural da versão introduzida em [24].

**Exemplo 1.2.** Adotando a bola unitária de Poincaré, denotada por  $\mathbb{H}_B^2$ : A variedade de Hadamard  $\mathbb{H}_B^2$  é a bola unitária com respeito à distância Euclidiana (denotada por  $B^2$ ) dotada da métrica Riemanniana  $\langle u, v \rangle_p := 4 \frac{\langle u, v \rangle}{(1 - \|p\|^2)^2}$ ,  $u, v \in T_p B^2$ , em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno usual em  $\mathbb{R}^2$ . Neste caso, a função distância é

$$d(x, y) = 2 \ln \frac{\|x - y\| + \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle + 1}}{\sqrt{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}}.$$

Como a semi-geodésica a partir da origem em uma direção unitária  $\eta$  é dada por  $\gamma(t, 0, \eta) := \eta \tanh(t/2)$ , a função de Busemann associada é dada por:  $b_{\gamma_{0,z}}(x) = \ln \left( \frac{\|x - \eta\|^2}{1 - \|x\|^2} \right)$ , onde  $z = \gamma(1, x, \eta)$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 b_{\gamma_{0,z}}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \ln \frac{\|x - \gamma(t)\| + \sqrt{\|x\|^2 \|\gamma(t)\|^2 - 2\langle x, \gamma(t) \rangle + 1}}{\sqrt{(1 - \|x\|^2)(1 - \|\gamma(t)\|^2)}} - t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \ln \frac{\|x - \eta \tanh(\frac{t}{2})\| + \sqrt{\|x\|^2 \|\eta \tanh(\frac{t}{2})\|^2 - 2\langle x, \eta \tanh(\frac{t}{2}) \rangle + 1}}{\sqrt{(1 - \|x\|^2)(1 - \|\eta \tanh(\frac{t}{2})\|^2)}} - \ln e^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{\left( \|x - \eta \tanh(\frac{t}{2})\| + \sqrt{\|x\|^2 \|\tanh(\frac{t}{2})\|^2 - 2 \tanh(\frac{t}{2}) \langle x, \eta \rangle + 1} \right)^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|\tanh(\frac{t}{2})\|^2) e^t}. \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 1 - \left( \left\| \tanh \left( \frac{t}{2} \right) \right\|^2 \right) \right] e^t &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 1 - \left( \frac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}} \right)^2 \right] e^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})^2 - (e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}})^2}{(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})^2} \right] e^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}})(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} - (e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}))}{(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})^2} \right] e^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{2e^{\frac{t}{2}} \cdot 2e^{-\frac{t}{2}}}{(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})^2} \right] e^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4e^t}{(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})^2} = 4.
 \end{aligned}$$

Assim, de (1.4)

$$\begin{aligned}
 b_{\gamma_{0,z}}(x) &= \ln \frac{(\|x - \eta\| + \sqrt{\|x\|^2 - 2\langle x, \eta \rangle + 1})^2}{4(1 - \|x\|^2)} \\
 &= \ln \frac{(\|x - \eta\| + \sqrt{\|x - \eta\|^2})^2}{4(1 - \|x\|^2)} \\
 &= \ln \frac{4\|x - \eta\|^2}{4(1 - \|x\|^2)} = \ln \frac{\|x - \eta\|^2}{1 - \|x\|^2}.
 \end{aligned}$$

Em [11, Lema 1, Proposição 8], os autores apresentaram uma forma de obter funções de Busemann. Dado  $k$  é um número positivo,  $M$  uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante  $sec_M = -k^2$  e  $[0, +\infty[\ni t \mapsto \gamma(t, x, u)$  uma semi-geodésica parametrizada pelo comprimento de arco partindo de  $x \in M$  em uma direção unitária  $u \in T_x M$  passando por  $z \in M$ , a função de Busemann é dada por:

$$b_{\gamma_{x,z}}(y) = \frac{1}{k} \ln \left( \cosh(kt) - \sinh(kt) \cos \theta \right),$$

onde  $y = \exp_x(-tv)$ ,  $t = d(y, x)$  e  $\theta$  é o ângulo entre  $-v$  e  $u$ .

A seguir listamos algumas propriedades da função de Busemann, (veja [3, Lema 3.4]):

$\mathcal{P}1.$   $b_{\gamma_{x,z}}(\cdot)$  é localmente Lipschitz com constante de Lipschitz 1;

$\mathcal{P}2.$   $b_{\gamma_{x,z}}(\cdot)$  é uma função convexa  $C^1$  com  $\|\nabla b_{\gamma_{x,z}}(\cdot)\| = 1$ ,

onde  $\mathcal{P}2$  é, na verdade, uma caracterização das funções de Busemann em variedades de Hadamard.

Faremos as seguintes hipóteses sobre a bfunção  $f$ :

(H1) Para todo  $x \in \Omega$ ,  $y \mapsto f(x, y)$  é convexa e semicontínua inferior;

(H2) Para todo  $y \in \Omega$ ,  $x \mapsto f(x, y)$  é semicontínua superior;

(H3) Dado  $z_0 \in M$  fixo, considere uma sequência  $\{z^n\} \subset \Omega$  tal que  $\{d(z^n, z_0)\}$  converge para infinito. Então, existe  $x^* \in \Omega$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$f(z^n, x^*) \leq 0, \quad n \geq n_0.$$

Notemos que as hipóteses (H1), (H2) e (H3) estão bem estabelecidas na literatura, tanto no ambiente linear quanto no Riemanniano. No que diz respeito à hipótese (H3), ao que sabemos, ela foi inicialmente introduzida por Iusem et al. [35] em um espaço linearmente estruturado e, posteriormente, estendida ao contexto Riemanniano em [12]. Para mais detalhes e uma discussão abrangente, veja [10, 12]. Entre outras contribuições, os autores nesses trabalhos estabelecem que a hipótese (H3) é uma condição suficiente mais fraca em comparação com a suposição de coercividade utilizada por Colao et al. [23] para garantir a existência de soluções para o (EP). Além disso, os autores fornecem um exemplo ilustrativo demonstrando a utilidade do resultado de existência no contexto Riemanniano, destacando sua aplicabilidade a problemas não abordados na configuração linear.

Os próximos resultados serão usado para os propósitos deste trabalho relacionados à definição do operador resolvente introduzida em (2). Antes de discutirmos, vamos denotar por  $EP(f, \Omega)$  o conjunto solução do problema de equilíbrio em (1).

**Teorema 1.2.** *Seja  $\lambda > 0$  e  $f : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma bifunção monótona, ou seja,  $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$ , para todo  $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ . Então, tem-se que a aplicação  $\Omega \times \Omega \ni (z, y) \mapsto f_{\lambda, x}(z, y) = \lambda f(z, y) + d(z, x)b_{\gamma_{z, x}}(y)$  é monótona. Além disso, se (H1), (H2) e (H3) forem válidas, então  $EP(f, \Omega) \neq \emptyset$ ,  $J_\lambda^f(x) \neq \emptyset$  para todo  $x \in M$  e  $J_\lambda^f(\cdot)$  é um operador ponto-ponto.*

*Demonstração.* Veja [10]. □

**Proposição 1.1.** *Seja  $\Delta := \{(x, x) : x \in M\}$ . Então,  $b : M \times (M \setminus \Delta) \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por  $b(x, z, y) = b_{\gamma_{x, z}}(y)$ , é uma função semicontínua superior.*

*Demonstração.* Veja [10]. □

## 1.2 Otimização Multiobjetivo

Nesta seção, revisaremos definições fundamentais e propriedades em otimização multiobjetivo, conforme descrito, por exemplo, no livro de Luc [27]. Além disso, algumas noções e resultados de análise variacional e diferenciação generalizada, retirados principalmente dos livros de Mordukhovich [40] e Rockafellar-Wets [43], que desempenham um papel crucial nos principais resultados desta seção.

Consideramos o espaço Euclidiano  $m$ -dimensional  $\mathbb{R}^m$  com a ordem parcial denotada por  $\preceq$ , induzida pelo cone Pareto  $\mathbb{R}_+^m$ , definida como segue:  $y \preceq z$  (ou  $z \succeq y$ ) se, e somente se,  $z - y \in \mathbb{R}_+^m$ . A noção associada  $y \prec z$  significa que  $z - y \in \mathbb{R}_{++}^m$ , onde  $\mathbb{R}_+^m$  e  $\mathbb{R}_{++}^m$  são definidos por

$$\mathbb{R}_+^m := \{x \in \mathbb{R}^m : x_j \geq 0, j \in \mathcal{I}\}, \quad \mathbb{R}_{++}^m := \{x \in \mathbb{R}^m : x_j > 0, j \in \mathcal{I}\},$$

e  $\mathcal{I} := \{1, \dots, m\}$ .

O cone  $\mathbb{R}_+^m$  é de Daniell, ou seja, qualquer sequência decrescente que tenha uma cota inferior converge para seu ínfimo, e é correto no sentido de que

$$(\text{cl } \mathbb{R}_+^m) + \mathbb{R}_+^m \setminus l(\mathbb{R}_+^m) \subseteq \mathbb{R}_+^m,$$

onde  $\text{cl}$  denota o fecho e  $l(\mathbb{R}_+^m)$  representa o conjunto  $\mathbb{R}_+^m \cap -\mathbb{R}_+^m$ ; veja [27, pages 46-47].

Denotamos por  $\arg \min_w \{F(x) : x \in \Omega\}$  o conjunto de todos os pontos Pareto fraco da função vetorial  $F$  no conjunto  $\Omega$ .

**Observação 1.** *Como mencionado em Huang e Yang [34], as funções vetoriais*

$$F(\cdot) \quad \text{e} \quad e^{F(\cdot)} := (e^{f_1(\cdot)}, \dots, e^{f_m(\cdot)})$$

*têm os mesmos conjuntos de pontos Pareto fraco, onde  $e^\alpha$  denota a função exponencial avaliada em  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Esse resultado pode ser estendido para o contexto de pontos Pareto críticos em (1.9). Portanto, no que diz respeito aos pontos Pareto críticos, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $F \succ 0$ , pois caso contrário, podemos substituir a função objetivo  $F(x)$  por  $(e^{f_1(x)}, \dots, e^{f_m(x)})$ .*

Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função semicontínua inferior. Para uma sequência dada  $\{u_k\} \subset \mathcal{H}$ , usamos a notação  $u^k \xrightarrow{f} \bar{u}$  para significar que  $u^k \rightarrow \bar{u}$  e  $f(u^k) \rightarrow f(\bar{u})$ . Em nossos

estudos, a função objetivo pode não ser diferenciável. Para lidar com tais situações, introduzimos os seguintes conceitos.

O *subdiferencial Fréchet* de  $f$  em  $\bar{a} \in \mathcal{H}$  é definido por

$$\partial^F f(\bar{a}) = \left\{ v \in \mathcal{H} : \liminf_{a \rightarrow \bar{a}} \frac{f(a) - f(\bar{a}) - \langle v, a - \bar{a} \rangle}{\|a - \bar{a}\|} \geq 0 \right\}.$$

Pode ser descrito de forma equivalente como o conjunto de vetores  $v \in \mathcal{H}$  tais que

$$f(a) \geq f(\bar{a}) + \langle v, a - \bar{a} \rangle + o(\|a - \bar{a}\|),$$

onde  $\lim_{a \rightarrow \bar{a}} \frac{o(\|a - \bar{a}\|)}{\|a - \bar{a}\|} = 0$ .

O *subdiferencial Mordukhovich* de  $f$  em  $\bar{a} \in \mathcal{H}$  é definido por

$$\partial^M f(\bar{a}) = \text{Lim sup}_{a \xrightarrow{f} \bar{a}} \partial^F f(a) = \left\{ v \in \mathcal{H} : \exists a^k \xrightarrow{f} \bar{a}, v^k \in \partial^F f(a^k), v^k \rightharpoonup v \right\}, \quad (1.5)$$

onde “Limsup” denota o limite externo de mapeamentos de conjuntos na topologia norma-fracca de  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  e  $v^k \rightharpoonup v$  significa que  $v^k$  converge fracamente para  $v$ .

Se  $f$  é diferenciável em  $\bar{a} \in \mathcal{H}$ , então  $\partial^F f(\bar{a}) = \{\nabla f(\bar{a})\}$ . Além disso, se  $f$  é continuamente diferenciável em torno de  $\bar{a} \in \mathcal{H}$  (ou meramente estritamente diferenciável neste ponto), então  $\partial^M f(\bar{a}) = \{\nabla f(\bar{a})\}$ .

O *subdiferencial horizonte* de  $f$  em  $\bar{a}$  é dado por

$$\partial^\infty f(\bar{a}) = \left\{ v \in \mathcal{H} : \exists a^k \xrightarrow{f} \bar{a}, t_k \downarrow 0, v^k \in \partial^F f(a^k), t_k v^k \rightharpoonup v \right\}.$$

**Observação 2.** *Em espaços de dimensão finita, a convergência fracca é equivalente à convergência forte.*

Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função localmente Lipschitz em uma vizinhança de  $x \in \mathcal{H}$ , e seja  $d \in \mathcal{H}$ . A *derivada direcional generalizada* de  $f$  em  $x$  na direção de  $d$ , denotada por  $f^\circ(x, d)$ , é definida por

$$f^\circ(x, d) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + td) - f(y)}{t}.$$

O *subdiferencial de Clarke* de  $f$  em  $x$ , denotado por  $\partial^C f(x)$ , é definido pela derivada direcional generalizada por

$$\partial^C f(x) = \{b \in \mathcal{H} : \langle b, d \rangle \leq f^\circ(x, d) \text{ para todo } d \in \mathcal{H}\}.$$

Note que, no contexto do espaço de Hilbert, temos a seguinte relação entre os subdiferenciais de Clarke e Mordukhovich (ver [40, Teorema 3.57])

$$\partial^C f(x) = \overline{\text{co}} \partial^M f(x), \quad (1.6)$$

onde “ $\overline{\text{co}}$ ” denota o fecho fraco do envoltório convexo do conjunto.

Dizemos que uma função vetorial  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é dita semicontínua inferior, se cada componente  $f_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  é semicontínua inferior.

Em nosso estudo, utilizaremos principalmente o subdiferencial de Mordukhovich  $\partial^M$ , cujo gráfico é fechado em configurações bastante gerais, como veremos a seguir. Por outro lado, o subdiferencial de Fréchet pode não possuir um gráfico fechado, mesmo para funções localmente Lipschitz. Além disso, o uso do subdiferencial de Clarke impõe restrições adicionais devido à convexificação na equação (1.6). Para ilustrar essa diferença, consideremos o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.3.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = -|x|$ . Note que*

$$\frac{f(a) - f(0) - v(a - 0)}{|a - 0|} = \frac{-|a| - va}{|a|}.$$

*Se  $a < 0$ , então*

$$\frac{f(a) - f(0) - v(a - 0)}{|a - 0|} = v - 1. \quad (1.7)$$

*Já para  $a > 0$ , obtemos*

$$\frac{f(a) - f(0) - v(a - 0)}{|a - 0|} = -v - 1. \quad (1.8)$$

*Assim, se  $v \in \partial^F f(0)$ , segue de (1.7) que  $v \geq 1$  e de (1.8) que  $v \leq -1$ , o que implica  $\partial^F f(0) = \emptyset$ .*

*Além disso, se  $x < 0$ , temos  $\partial^F f(x) = \{-1\}$  e, se  $x > 0$ , segue que  $\partial^F f(x) = \{1\}$ . Consequentemente,*

$$\partial^M f(0) = \{-1, 1\}.$$

*Por outro lado, de (1.6), obtemos que  $\partial^C f(0) = [-1, 1]$ . Logo, as inclusões*

$$\partial^F f(0) \subseteq \partial^M f(0) \subseteq \partial^C f(0)$$

*são verificadas.*

Apresentamos a seguir algumas propriedades desses subdiferenciais.

**Proposição 1.2.** *Seja  $f : X \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $\bar{x}$  é mínimo local de  $f$ , então*

$$0 \in \partial^F f(\bar{x}) \subseteq \partial^M f(\bar{x})$$

.

*Demonstração.* Veja [40, Proposição 1.114] □

**Teorema 1.3.** *Suponha que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seja localmente semicontínua inferiormente em  $\bar{x}$ . Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(a)  *$f$  é localmente Lipschitz em  $\bar{x}$ ;*

(b)  $\partial^\infty f(\bar{x}) = \{0\}$ ;

(c) *A aplicação  $\partial^F f : x \mapsto \partial^F f(x)$  é localmente limitada em  $\bar{x}$ ;*

(d) *A aplicação  $\partial^M f : x \mapsto \partial^M f(x)$  é localmente limitada em  $\bar{x}$ .*

*Demonstração.* Veja [43, Teorema 9.13]. □

**Proposição 1.3.** *Seja  $f$  uma função localmente Lipschitz em torno de  $\bar{x}$  com constante Lipschitz  $L \geq 0$ . Então,*

$$\|x^*\| \leq L, \quad \text{para todo } x^* \in \partial^M f(\bar{x}).$$

*Demonstração.* Veja [40, Corolário 1.81]. □

Para começar, apresentamos uma nova definição de pontos Pareto críticos para problemas não convexos, que é a extensão do subdiferencial de Mordukhovich da noção clássica para problemas convexos de otimização multiobjetivo.

Dizemos que um ponto  $\bar{x} \in \Omega \subseteq \mathcal{H}$  é chamado de Pareto crítico de  $F$  em  $\Omega$  para o problema de otimização (3) se, e somente se, para qualquer  $y \in \Omega$ , existem um índice  $i \in \mathcal{I}$  e  $\omega_i \in \partial^M f_i(\bar{x})$  tais que

$$\langle \omega_i, y - \bar{x} \rangle \geq 0. \tag{1.9}$$

Para prosseguir com as construções geométricas correspondentes, o *cone normal Fréchet* a um conjunto não vazio  $\Omega$  em  $x \in \Omega$  é dado por

$$N^F(x; \Omega) := \left\{ \omega \in \mathcal{H} : \limsup_{y \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle \omega, y - x \rangle}{\|y - x\|} \leq 0 \right\},$$

onde a notação  $y \xrightarrow{\Omega} x$  significa  $y \rightarrow x$  com  $y \in \Omega$ . O *cone normal Mordukhovich* a  $\Omega$  em  $x \in \Omega$  é definido por

$$\begin{aligned} N^M(x; \Omega) &:= \text{Lim sup}_{y \rightarrow x} N^F(y; \Omega) \\ &= \{ \omega \in \mathcal{H} : \exists x^k \xrightarrow{\Omega} x, \exists \omega_k \in N^F(x_k; \Omega); \omega_k \rightharpoonup \omega \}. \end{aligned}$$

É fácil ver que  $N^F(x; \Omega) \subset N^M(x; \Omega)$ .

O próximo resultado estabelece uma relação fundamental entre a função indicadora e o cone normal de Mordukhovich.

**Proposição 1.4.** *Seja  $\Omega \subset \mathcal{H}$  um conjunto fechado não vazio, e seja  $\delta_\Omega$  a função indicadora sobre  $\Omega$ . Então temos*

$$\partial^M \delta_\Omega(x) = N^M(x; \Omega).$$

*Demonstração.* Veja [40, Proposição 1.79]. □

O Lema a seguir nos ajudará a demonstrar a condição necessária para a otimalidade Pareto fraco.

**Lema 1.1.** *Seja  $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $i = 1, \dots, n$  com  $n \geq 2$ , uma função semicontínua inferior em torno de  $\bar{x}$ , e suponha que todas, exceto no máximo uma dessas funções, sejam sequencialmente normais epi-compactas (SNEC) em  $\bar{x}$ . Suponha que:*

$$[x_1^* + \dots + x_n^* = 0, \quad x_i^* \in \partial^\infty \varphi_i(\bar{x})] \implies x_i^* = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

*Então, valem as seguintes inclusões:*

$$\partial^M(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)(\bar{x}) \subset \partial^M \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \partial^M \varphi_n(\bar{x}),$$

$$\partial^\infty(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)(\bar{x}) \subset \partial^\infty \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \partial^\infty \varphi_n(\bar{x}).$$

*Demonstração.* Veja [40, Teorema 3.36].  $\square$

Antes de prosseguirmos com a demonstração da propriedade de gráfico fechado do subdiferencial de Mordukhovich ( $\partial^M$ ), introduzimos algumas definições fundamentais para seu entendimento.

Um espaço de Banach  $X$  é Asplund, ou possui a propriedade de Asplund, se toda função convexa contínua  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um subconjunto convexo aberto  $U$  de  $X$  for Fréchet diferenciável em um subconjunto denso de  $U$ .

Dizemos que um espaço de Banach  $X$  que é gerado de forma fracamente compacta (WCG), se existir  $K \subseteq X$  um subconjunto relativamente fraco compacto tal que o fecho linear da envoltória convexa de  $K$  é denso em  $X$ .

Um conjunto  $\Omega \subset X$  é *normalmente compacto sequencialmente* (SNC) em  $\bar{x} \in \Omega$  se, para qualquer sequência  $(\varepsilon_k, x_k, x_k^*) \in [0, \infty) \times \Omega \times X^*$  satisfazendo

$$\varepsilon_k \downarrow 0, \quad x_k \rightarrow \bar{x}, \quad x_k^* \in \widehat{N}_{\varepsilon_k}(x_k; \Omega), \quad \text{e} \quad x_k^* \rightharpoonup^* 0$$

temos que  $\|x_k^*\| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Qualquer conjunto não vazio em um espaço de dimensão finita é SNC em cada um de seus pontos, para mais detalhes veja [40, Página 27].

Seja  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  finita em  $\bar{x}$ . Dizemos que  $\varphi$  é *epi-compacta normalmente sequencialmente* (SNEC) em  $\bar{x}$  se seu epígrafo for SNC em  $(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$ .

Os próximos resultados serão cruciais para demonstrarmos a propriedade de gráfico fechado do  $\partial^M$ .

**Teorema 1.4.** *Seja  $X$  um espaço de Asplund WCG, e seja  $\Omega \subset X$  seu subconjunto fechado que é SNC em  $\bar{x}$ . Então, o gráfico de  $N(\cdot; \Omega)$  é fechado próximo a  $\bar{x}$ , ou seja, existe  $\gamma > 0$  tal que o conjunto*

$$\left( \text{gph } N(\cdot; \Omega) \right) \cap \left( (\bar{x} + \gamma B) \times X^* \right)$$

*é fechado na topologia norma  $\times$  fraca\* de  $X \times X^*$ .*

*Demonstração.* Veja [40, Teorema 3.60].  $\square$

**Lema 1.2.** *Se  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente Lipschitz em torno de  $\bar{x}$  com constante Lipschitz  $L \geq 0$ , então  $f$  é SNEC em  $\bar{x}$ .*

*Demonstração.* Veja [40, Teorema 3.52].  $\square$

O teorema a seguir contém resultados para o cálculo de subdiferenciais de Mordukhovich e horizonte de funções máximo. Dado  $\bar{x} \in X$ , definimos os conjuntos

$$I(\bar{x}) := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \varphi_i(\bar{x}) = \max \varphi_i(\bar{x})\}$$

$$\Lambda(\bar{x}) := \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i (\varphi_i(\bar{x}) - \max \varphi_i(\bar{x})) = 0 \right\}. \quad (1.10)$$

**Teorema 1.5.** *Sejam  $\varphi_i$  semicontínuas inferiores ao redor de  $\bar{x}$  para  $i \in I(\bar{x})$  e semicontínuas superiores em  $\bar{x}$  para  $i \notin I(\bar{x})$ . Se as funções  $\varphi_i$  sejam SNEC em  $\bar{x}$  para todos, exceto um  $i \in I(\bar{x})$ , e que*

$$\text{se } [u_1^* + \dots + u_n^* = 0, u_i^* \in \partial^\infty f_i(x)] \Rightarrow u_i^* = 0,$$

*considerada para  $i \in I(\bar{x})$ , seja satisfeita. Então, tem-se:*

$$\partial^M (\max \varphi_i)(\bar{x}) \subset \bigcup \left\{ \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \circ \partial \varphi_i(\bar{x}) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda(\bar{x}) \right\},$$

$$\partial^\infty (\max \varphi_i)(\bar{x}) \subset \sum_{i \in I(\bar{x})} \partial^\infty \varphi_i(\bar{x}).$$

*onde  $\lambda \circ \partial \varphi(\bar{x})$  é definido como  $\lambda \partial^M \varphi(\bar{x})$  quando  $\lambda > 0$  e como  $\partial^\infty \varphi(\bar{x})$  quando  $\lambda = 0$ .*

*Demonstração.* Veja [40, Teorema 3.46]  $\square$

Um conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  com ponto de fronteira  $\bar{x}$  é *epi-Lipschitziano* em  $\bar{x}$  se, e somente se,  $C$  for localmente fechado em  $\bar{x}$  e o cone normal  $N(\bar{x}; C)$  for pontudo.

O resultado seguinte garante que o gráfico do subdiferencial de Mordukhovich é um conjunto fechado na topologia norma-fracca de  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  quando  $f$  é localmente Lipschitz em torno do ponto em questão. Este fato é essencial na análise de convergência do método do ponto proximal para encontrar pontos Pareto críticos.

**Teorema 1.6.** *Sejam  $\{x^k\}, \{\omega^k\} \subset \mathcal{H}$  sequências tais que  $\omega^k \in \partial^M f(x^k)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x^k \rightharpoonup x$ , e  $\omega^k \rightharpoonup \omega$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Se  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente Lipschitz em torno de  $x$ , então temos  $\omega \in \partial^M f(x)$ .*

*Demonstração.* Na teoria geométrica dos espaços de Banach temos que qualquer espaço de Hilbert é Asplund e gerado compactamente na topologia fraca (WCG); veja, por exemplo, [40, Capítulo 2] com as referências e comentários adicionais ali. Assim, estamos no contexto do Teorema 1.4. Este teorema nos diz que temos a propriedade de fechamento do gráfico do subdiferencial reivindicado se o gráfico do mapeamento subdiferencial  $\partial^M f$  em  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  possui a propriedade de *compactação normal sequencial* (SNC). Esta propriedade é bastante geral e se aplica, em particular, quando o conjunto em questão é *epi-Lipschitziano*. Como mostrado em [42], este é certamente o caso para os gráficos de funções localmente Lipschitz. Assim, concluímos a prova do teorema do gráfico fechado.  $\square$

Para prosseguir com o estudo dos pontos de Pareto fraco, apresentamos os seguintes lemas úteis na derivação de condições necessárias para a otimalidade Pareto fraco.

**Lema 1.3.** *Seja  $\mathcal{D} := \{x \in \mathcal{C} : g_j(x) \leq 0, j \in \mathcal{J}\}$ , onde  $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$  um conjunto não vazio, fechado e convexo e  $g_j : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathcal{J} = \{1, \dots, p\}$ . Se  $x^*$  é um ponto de Pareto fraco de  $F$  em  $\mathcal{D}$ , então para todo  $\varepsilon > 0$  e  $x \in \mathcal{C}$  temos a seguinte condição*

$$F_\varepsilon(x) := \max\{f_i(x) - f_i(x^*) + \varepsilon, g_j(x) : i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}\} > 0.$$

*Demonstração.* Suponha o contrário, isto é, existem  $\varepsilon_0 > 0$  e  $x_1 \in \mathcal{C}$  tais que

$$F_{\varepsilon_0}(x_1) \leq 0.$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} f_i(x_1) &< f_i(x_1) + \varepsilon_0 \leq f_i(x^*), \quad i \in \mathcal{I}, \\ g_j(x_1) &\leq 0, \quad j \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

e assim  $x_1 \in \mathcal{D}$ . Isso contradiz a otimalidade de Pareto fraco de  $x^*$  e, portanto, segue o resultado.  $\square$

**Lema 1.4.** *Seja  $C$  um subconjunto fechado não vazio de  $X$ , e seja  $F : C \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e limitada inferiormente. Se  $x_0 \in C$  satisfaz*

$$F(x_0) \leq \inf_{x \in C} F(x) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

*então existe algum  $z \in C$  tal que*

$$\|x_0 - z\| \leq \sqrt{\varepsilon},$$

e

$$F(x) + \sqrt{\varepsilon}\|x - z\| > F(z), \quad \text{para todo } x \neq z \text{ em } C.$$

*Demonstração.* Veja [39, Lema 2.2]. □

**Lema 1.5.** *Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função localmente Lipschitz, e  $x$  é um ponto que minimiza  $f$  em  $C$ , com  $C$  convexo e fechado, então existe uma vizinhança  $V$  de  $x$ , tal que  $x$  é um minimizador de  $f + Ld_C$ , onde  $L$  é a constante de Lipschitz de  $f$ .*

*Demonstração.* Veja [39, Lema 2.1]. □

O próximo resultado estabelece novas *condições de otimalidade* do tipo Fritz-John, fornecidas pelo subdiferencial de Mordukhovich, que são necessárias para soluções de Pareto fraco usadas no (APP) e, ao mesmo tempo, de interesse próprio.

**Teorema 1.7.** *Sejam  $C \subset \mathcal{H}$  um conjunto não vazio, fechado e convexo e  $f_i, g_j : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  funções localmente Lipschitz para todo  $i \in \mathcal{I}$  e  $j \in \mathcal{J}$ . Suponha que o conjunto  $\mathcal{D}$  é representado na forma*

$$\mathcal{D} = \{x \in C : g_j(x) \leq 0, j \in \mathcal{J}\},$$

*Se  $x^* \in \mathcal{D}$  é uma solução de Pareto fraco de (3), então existem números reais  $\tau > 0$  e  $\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$  com  $i \in \mathcal{I}$  e  $j \in \mathcal{J}$  de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

$$0 \in \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \partial^M f_i(x^*) + \sum_{j \in \mathcal{J}} \beta_j \partial^M g_j(x^*) + \tau \partial^M d_C(x^*),$$

$$\text{com } \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \beta_j = 1 \quad \text{e} \quad \beta_j g_j(x^*) = 0, \quad j \in \mathcal{J}.$$

*Demonstração.* Seja  $x^*$  um ponto de Pareto fraco de  $F$  em  $\mathcal{D}$ , e seja  $\{\varepsilon_l\} \subset \mathbb{R}_{++}$  uma sequência convergindo a 0 quando  $l \rightarrow \infty$ . Segue do Lema 1.3 que

$$F_{\varepsilon_l}(x) > 0 \quad \text{para todo } l \in \mathbb{N}, \quad x \in C.$$

Portanto, a função  $F_{\varepsilon_l} : C \rightarrow \mathbb{R}_+$  é limitada inferiormente, em particular para,  $0 < \varepsilon_l \leq 1$ . Como  $f_i, g_j$  são localmente Lipschitz em torno de  $x^*$  para todo  $i \in \mathcal{I}$  e  $j \in \mathcal{J}$  segue que

$F_{\varepsilon_l}$  também é localmente Lipschitz em torno deste ponto. Além disso, como  $x^* \in \mathcal{D}$  e  $F_{\varepsilon_l}(x) > 0$  para todo  $x \in \mathcal{C}$ , obtemos que  $\inf_{x \in \mathcal{C}} F_{\varepsilon_l}(x) \geq 0$ . Assim,

$$\varepsilon_l = F_{\varepsilon_l}(x^*) \leq \inf_{x \in \mathcal{C}} F_{\varepsilon_l}(x) + \varepsilon_l.$$

Veja que  $F_{\varepsilon_l}$  satisfaz todas as hipóteses do Lema 1.4. Assim, existe  $z^l \in \mathcal{C}$  tal que

$$\|x^* - z^l\| \leq \sqrt{\varepsilon_l} \quad \text{e} \quad (1.11)$$

$$F_{\varepsilon_l}(x) + \sqrt{\varepsilon_l}\|x - z^l\| \geq F_{\varepsilon_l}(z^l) \quad \text{para todo } x \in \mathcal{C},$$

ou seja,  $z^l$  é um mínimo global de  $F_{\varepsilon_l}(\cdot) + \sqrt{\varepsilon_l}\|\cdot - z^l\|$  em  $\mathcal{C}$ . Denotando por  $L$  uma constante de Lipschitz de  $F_{\varepsilon_l}(\cdot)$ , obtemos que  $L + 1$  é uma constante de Lipschitz de  $F_{\varepsilon_l}(\cdot) + \sqrt{\varepsilon_l}\|\cdot - z^l\|$ . Assim, pelo Lema 1.5,  $z^l$  é mínimo local para

$$G_{\varepsilon_l}(x) = F_{\varepsilon_l}(x) + \sqrt{\varepsilon_l}\|x - z^l\| + (L + 1)d_{\mathcal{C}}(x).$$

Aplicando a este problema o Proposição 1.2 e usando o Lema 1.1, chegamos a

$$0 \in \partial^M G_{\varepsilon_l}(z^l) \subseteq \partial^M F_{\varepsilon_l}(z^l) + \sqrt{\varepsilon_l} \partial^M (\|\cdot - z^l\|)(z^l) + (L + 1) \partial^M d_{\mathcal{C}}(z^l).$$

Portanto, para cada  $l$  existe  $\omega^l \in \partial^M F_{\varepsilon_l}(z^l)$  satisfazendo

$$0 \in \omega^l + \sqrt{\varepsilon_l} \partial^M (\|\cdot - z^l\|)(z^l) + (L + 1) \partial^M d_{\mathcal{C}}(z^l). \quad (1.12)$$

Usando Teorema 1.5 e depois Teorema 1.3 obtemos números não negativos  $\alpha_i^l$  e  $\beta_j^l$  tais que

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i^l + \sum_{j \in \mathcal{J}} \beta_j^l = 1, \quad (1.13)$$

$$\omega^l \in \sum_{\{i | \alpha_i^l \neq 0\}} \alpha_i^l \partial^M f_i(z^l) + \sum_{\{j | \beta_j^l \neq 0\}} \beta_j^l \partial^M g_j(z^l). \quad (1.14)$$

Combinando (1.12) e (1.14) obtemos que

$$\begin{aligned} 0 \in & \sum_{\{i | \alpha_i^l \neq 0\}} \alpha_i^l \partial^M f_i(z^l) + \sum_{\{j | \beta_j^l \neq 0\}} \beta_j^l \partial^M g_j(z^l) \\ & + \sqrt{\varepsilon_l} \partial^M (\|\cdot - z^l\|) + (L + 1) \partial^M d_{\mathcal{C}}(z^l). \end{aligned}$$

Dessa forma, encontramos seqüências  $\{u_i^l\}$ ,  $\{v_j^l\}$ ,  $\{\tilde{u}^l\}$  e  $\{\tilde{v}^l\}$  com

$$u_i^l \in \partial^M f_i(z^l), \quad v_j^l \in \partial^M g_j(z^l), \quad \tilde{u}^l \in \sqrt{\varepsilon_l} \partial^M (\|\cdot - z^l\|),$$

e  $\tilde{v}^l \in (L+1)\partial^M d_C(z^l)$  tais que

$$0 = \sum_{\{i|\alpha_i^l \neq 0\}} \alpha_i^l u_i^l + \sum_{\{j|\beta_j^l \neq 0\}} \beta_j^l v_j^l + \tilde{u}^l + \tilde{v}^l. \quad (1.15)$$

Segue de (1.13) e (1.11) que as sequências  $\{\alpha_i^l\}_l$ ,  $\{\beta_j^l\}$  e  $\{z^l\}$  são limitadas. Além disso, como  $f_i$ ,  $g_j$  e  $\|\cdot - z^l\|$  são funções localmente Lipschitz, então pelo Teorema 1.3 temos que as sequências  $\{u_i^l\}$ ,  $\{v_j^l\}$  e  $\{\tilde{u}^l\}$  são limitadas. A limitação de  $\{\tilde{v}^l\}$  segue de (1.15). Passando para subsequências se necessário, obtemos que as sequências  $\{\alpha_i^l\}$ ,  $\{\beta_j^l\}$ ,  $\{u_i^l\}$ ,  $\{v_j^l\}$ ,  $\{\tilde{u}^l\}$  e  $\{\tilde{v}^l\}$  convergem fracamente, respectivamente, para  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$ ,  $u_i$ ,  $v_j$ ,  $\tilde{u}$  e  $\tilde{v}$ . Assim,  $\alpha_i, \beta_j \geq 0$  e  $\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \beta_j = 1$ . Por (1.11), temos que  $z^l \rightarrow x^*$ . Então (1.15) quando  $l \rightarrow \infty$  nos dá

$$0 = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i u_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \beta_j v_j + \tilde{u} + \tilde{v}.$$

A propriedade do gráfico fechado do Teorema 1.6 garante que

$$u_i \in \partial^M f_i(x^*), \quad v_j \in \partial^M g_j(x^*), \quad \text{e} \quad \tilde{v} \in \partial^M d_C(x^*),$$

e, portanto

$$0 \in \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \partial^M f_i(x^*) + \sum_{j \in \mathcal{J}} \beta_j \partial^M g_j(x^*) + \tau \partial^M d_C(x^*) \quad \text{com algum } \tau > 0.$$

Por fim, a partir de (1.10), obtemos que para todo  $i \in \mathcal{I}$ :

$$(\alpha_i + \beta_i)(\max\{0, g_j(x^*)\}) = 0$$

e

$$(\alpha_i + \beta_i)(g_j(x^*) - \max\{0, g_j(x^*)\}) = 0.$$

Assim,

$$\beta_i g_j(x^*) = 0.$$

□

Para prosseguir, recorde o seguinte resultado de [40, Teorema 1.97].

**Lema 1.6.** *Seja  $\Omega \subset \mathcal{H}$  não vazio e fechado. Então*

$$N^M(x; \Omega) = \cup_{\lambda > 0} \lambda \partial^M d_\Omega(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Aqui está a estimativa do subdiferencial para a função de distância, que desempenha um papel importante na análise de convergência subsequente.

**Teorema 1.8.** *Seja  $\Omega$  um subconjunto não vazio, fechado e convexo de  $\mathcal{H}$ . Então, para qualquer  $x \in \Omega$ , temos a estimativa superior*

$$\partial^M d_\Omega(x) \subset B[0, 1] \cap N^M(x; \Omega),$$

onde  $B[0, 1]$  denota a bola fechada unitária em  $\mathcal{H}$ .

*Demonstração.* É conhecido que a função de distância  $d_\Omega(x)$  é globalmente Lipschitz com uma constante  $L = 1$ . Segue da Proposição 1.3 que  $\partial^M d_\Omega(x) \subset B[0, 1]$ . Aplicando agora o Lema 1.6, sabemos que  $N^M(x; \Omega) = \cup_{\lambda > 0} \lambda \partial^M d_\Omega(x)$ , e assim chegamos a  $\partial^M d_\Omega(x) \subset N^M(x; \Omega)$ .  $\square$

### 1.3 Direcionalmente Lipschitz

Nesta seção, apresentaremos definições fundamentais e propriedades sobre funções direcionalmente Lipschitz.

Dizemos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é Lipschitz direcional em  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  se  $f$  é localmente semicontínua inferior em  $\bar{x}$  e existir um vetor unitário  $u$  tal que

$$\limsup_{\substack{x \xrightarrow{f} \bar{x} \\ v \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} < +\infty. \quad (1.16)$$

Dizemos que  $f$  é direcionalmente Lipschitz se é direcionalmente Lipschitz em todos os pontos de  $\mathbb{R}^n$  (veja [18]). Além disso, dizemos que a *função vetorial*  $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é *direcionalmente Lipschitz* se cada função componente  $f_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , é direcionalmente Lipschitz.

**Lema 1.7.** *Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é direcionalmente Lipschitz, então existem  $\delta > 0$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$  unitário, e  $L(\bar{x}, u)$  tais que*

$$f(z + tv) - f(z) \leq t \cdot L(\bar{x}, u), \quad \forall v \in B_\delta(u), \quad z \in B_\delta(\bar{x}), \quad f(z) \in B_\delta(f(\bar{x})), \quad t \in (0, \delta].$$

*Demonstração.* De (1.16), temos que existe  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{f(z + tv) - f(z)}{t} \leq M, \quad \forall v \in B_\delta(u), \quad z \in B_\delta(\bar{x}), \quad f(z) \in B_\delta(f(\bar{x})), \quad t \in (0, \delta].$$

Seja  $M = L(\bar{x}, u)$ , e assim o resultado segue.  $\square$

A seguir, apresentamos um exemplo de uma função que é contínua e direcionalmente Lipschitz, mas não é localmente Lipschitz.

**Exemplo 1.4.** *Seja  $\eta \geq 0$  e defina a função  $f$  por*

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} - \eta, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{3}} + \eta, & x > 0. \end{cases}$$

*Assim,  $f$  é direcionalmente Lipschitz em  $\bar{x} = 0$  e é contínua em  $\bar{x} = 0$  se, e somente se,  $\eta = 0$ . De fato, tomando  $u = -1$  e  $v \rightarrow u$ , temos*

$$\begin{aligned} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} &= \frac{(x+tv)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{t} \cdot \frac{(x+tv)^{\frac{2}{3}} + (x+tv)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{(x+tv)^{\frac{2}{3}} + (x+tv)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{tv}{t} \cdot \frac{1}{(x+tv)^{\frac{2}{3}} + (x+tv)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{v}{(x+tv)^{\frac{2}{3}} + (x+tv)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

*Observe que, ao definir  $y = (x+tv)^{\frac{1}{3}}$ , obtemos a seguinte equação quadrática:*

$$y^2 + x^{\frac{1}{3}}y + x^{\frac{2}{3}} = 0.$$

*Calculando o discriminante, segue que:*

$$\Delta = x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{2}{3}} = -3x^{\frac{2}{3}} \leq 0.$$

*Assim, temos:*

$$(x+tv)^{\frac{2}{3}} + (x+tv)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = y^2 + x^{\frac{1}{3}}y + x^{\frac{2}{3}} \geq 0.$$

*Portanto, para  $v$  suficientemente próximo de  $-1$ , segue que:*

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{v}{(x+tv)^{\frac{2}{3}} + (x+tv)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \leq 0.$$

*Logo,  $f$  é direcionalmente Lipschitz.*

**Teorema 1.9.** *Sejam  $\{x^k\}, \{\omega^k\} \subset \mathbb{R}^n$  sequências tais que  $\omega^k \in \partial^M f(x^k)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x^k \rightarrow x$ ,  $\omega^k \rightarrow \omega$  e  $f(x^k) \rightarrow f(x)$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é direcionalmente Lipschitz em torno de  $x$ , então temos  $\omega \in \partial^M f(x)$ .*

*Demonstração.* Na teoria geométrica dos espaços de Banach temos que o espaço  $\mathbb{R}^n$  é Asplund e gerado compactamente na topologia fraca (WCG); veja, por exemplo, [40,

Capítulo 2] para referências adicionais e comentários suplementares. Assim, estamos no contexto do Teorema 1.4. Este teorema nos diz que temos o fechamento do gráfico do subdiferencial conforme reivindicado se o gráfico da aplicação de subdiferencial  $\partial^M f$  em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  possui a propriedade de *compacidade normal sequencial* (SNC). Esta propriedade é bastante geral e se aplica, em particular, quando o conjunto em questão é *epi-Lipschitziano* no sentido de Rockafellar [42]. Como mostrado em [42], isso certamente ocorre para os gráficos de funções direcionalmente Lipschitz. Portanto, concluímos a demonstração do teorema do gráfico fechado.  $\square$

O próximo resultado fornece uma condição para verificar se um ponto é mínimo da soma função direcionalmente Lipschitz e a função distância a um conjunto convexo.

**Proposição 1.5.** *Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função direcionalmente Lipschitz e contínua, e  $x$  é um ponto que minimiza  $f$  em  $\mathcal{C}$ , com  $\mathcal{C}$  convexo e fechado, então existe uma vizinhança  $V$  de  $x$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$  unitário, e  $L(x, u)$  tais que  $x$  é um minimizador de  $f + \tau d_{\mathcal{C}}$ , com  $\tau \geq L(x, u)$ .*

*Demonstração.* Suponha que o resultado seja falso. Então, existe uma sequência  $\{x_n\}$  convergindo para  $x$  tal que

$$f(x_n) + \tau d_{\mathcal{C}}(x_n) < f(x). \quad (1.17)$$

Note que  $d_{\mathcal{C}}(x_n) > 0$ , pois, caso contrário,  $x_n \in \mathcal{C}$ , o que contradiz a hipótese de que  $x$  é um minimizador de  $f$  em  $\mathcal{C}$ . Além disso, observe que, a partir de (1.17),  $f(x_n)$  converge para  $f(x)$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Escolha  $n$  suficientemente grande para que a constante de Lipschitz direcional seja aplicável em uma vizinhança de  $x_n$  com raio  $2d_{\mathcal{C}}(x_n)$ ; isso é possível porque  $d_{\mathcal{C}}(x_n)$  converge para 0. Assim, escolhendo  $\varepsilon \in (0, 1)$  tal que

$$f(x_n) + (1 + \varepsilon)\tau d_{\mathcal{C}}(x_n) < f(x)$$

e escolha  $t \leq (1 + \varepsilon)d_{\mathcal{C}}(x_n)$ . Assim, escolhendo  $v \in B_{\delta}(u)$  tal que  $(x_n + tv) \in \mathcal{C}$ , segue que

$$\begin{aligned} f(x_n + tv) &\leq f(x_n) + t \cdot L(x, u)d_{\mathcal{C}}(x_n) \\ &\leq f(x_n) + t \cdot \tau d_{\mathcal{C}}(x_n) \\ &\leq f(x_n) + (1 + \varepsilon)\tau d_{\mathcal{C}}(x_n) \\ &< f(x), \end{aligned}$$

o que é uma contradição.  $\square$

## Capítulo 2

# Ponto Proximal para Problema de Equilíbrio

Neste capítulo, introduzimos e estudamos a convergência do algoritmo ponto proximal via funções de Busemann para resolver problemas de equilíbrio em variedades de Hadamard, como em (1). Também iremos considerar  $M$  uma variedade de Hadamard,  $\Omega \subset M$  é um conjunto convexo fechado e não vazio, e  $f : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma bifunção monótona tal que  $f(x, x) = 0$ , para todo  $x \in \Omega$ , satisfazendo as hipóteses  $(\mathcal{H}1)$ ,  $(\mathcal{H}2)$ ,  $(\mathcal{H}3)$ .

Considere  $\{\lambda_k\}$  uma sequência limitada de números reais positivos. Descrevemos um algoritmo proximal para resolver o Problema de Equilíbrio (1), como segue:

### Algoritmo 2.0.1.

INICIALIZAÇÃO. Escolha um ponto inicial  $x^0 \in \Omega$ ;

PASSO ITERATIVO. Dado  $x^k \in \Omega$ , escolha como próxima iteração qualquer  $x^{k+1} \in \Omega$  tal que:

$$x^{k+1} := J_{\lambda_k}^f(x^k); \quad (2.1)$$

CRITÉRIO DE PARADA. Se  $x^{k+1} = x^k$ , PARE. Caso contrário, faça  $k := k + 1$  e retorne ao Passo Iterativo.

Em seguida iremos ver que o Algoritmo 2.0.1 está bem definido.

**Proposição 2.1.** *O Algoritmo 2.0.1 está bem definido.*

*Demonstração.* A boa definição do Algoritmo é garantida pelo Teorema 1.2. □

Agora vejamos que se o Algoritmo 2.0.1 termina após um número finito de iterações, ele termina em um ponto de equilíbrio de  $f$ .

**Proposição 2.2.** *Se  $x^{k+1} = x^k$  então  $x^k \in EP(f, \Omega)$ .*

*Demonstração.* Se  $x^{k+1} = x^k$ , então de (2.1) segue que  $x^k := J_{\lambda_k}^f(x^k)$ . Assim,

$$\lambda_k f(x^k, y) + d(x^k, x^k) b_{\gamma_{x^k, x^k}}(y) \geq 0 \Rightarrow f(x^k, y) \geq 0 \quad \forall y \in \Omega,$$

pois  $\lambda > 0$ . □

No restante desta seção, devido a Proposição anterior, assumimos que  $x^{k+1} \neq x^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Antes de apresentarmos nosso resultado de convergência, recordemos que uma sequência  $\{y_k\}$  em um espaço métrico completo  $(M, d)$  é dita Fejér convergente para um conjunto não vazio  $S \subset M$  se, para todo  $\bar{y} \in S$ , tivermos

$$d(y_{k+1}, \bar{y}) \leq d(y_k, \bar{y}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Também utilizaremos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [31].

**Proposição 2.3.** *Seja  $\{y_k\}$  uma sequência em um espaço métrico completo  $(M, d)$ . Se  $\{y_k\}$  é Fejér convergente para um conjunto não vazio  $S \subset M$ , então  $\{y_k\}$  é limitada. Além disso, se um ponto de acumulação  $\bar{y}$  de  $\{y_k\}$  pertence a  $S$ , então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \bar{y}. \quad (2.3)$$

O próximo resultado é útil para estabelecer que  $\{x^k\}$  é Fejér convergente ao conjunto solução do problema de equilíbrio  $EP(f, \Omega)$  em (1).

**Proposição 2.4.** *Para cada  $x^* \in EP(f, \Omega)$ , vale*

$$\langle \exp_{x^{k+1}}^{-1} x^k, \exp_{x^{k+1}}^{-1} x^* \rangle \leq 0. \quad (2.4)$$

*Demonstração.* A partir da definição de  $x^{k+1}$  em (2.1) e  $J_{\lambda_k}^f(x^k)$  em (2), temos

$$0 \leq \lambda_k f(x^{k+1}, y) + d(x^{k+1}, x^k) b_{\gamma_{x^{k+1}, x^k}}(y), \quad y \in \Omega. \quad (2.5)$$

De (1.2) temos  $b_{\gamma_{x^{k+1}, x^k}}(y) \leq d(y, x^k) - d(x^k, x^{k+1})$ , para todo  $y \in \Omega$ . Assim, da equação (2.5) segue que

$$0 \leq \lambda_k f(x^{k+1}, y) + d(x^{k+1}, x^k) [d(y, x^k) - d(x^{k+1}, x^k)].$$

Defina  $G_k(x^{k+1}, y) := \lambda_k f(x^{k+1}, y) + d(x^{k+1}, x^k) [d(y, x^k) - d(x^{k+1}, x^k)]$  para todo  $y \in \Omega$ , assim  $G_k(x^{k+1}, y) \geq 0$  para todo  $y \in \Omega$  e  $G_k(x^{k+1}, x^{k+1}) = 0$ . Portanto,

$$x^{k+1} \in \arg \min_{y \in \Omega} G_k(x^{k+1}, y),$$

Assim, por (H1),

$$0 \in \partial G_k(x^{k+1}, x^{k+1}) + N_\Omega(x^{k+1}). \quad (2.6)$$

Do fato que  $M \setminus \{x^k\} \ni y \mapsto \text{grad } d(y, x^k) = -d^{-1}(y, x^k) \exp_y^{-1} x^k$  e de (2.6) existem  $u^{k+1} \in \partial f(x^{k+1}, x^{k+1})$  e  $w^{k+1} \in N_\Omega(x^{k+1})$  tais que  $0 = \lambda_k u^{k+1} - \exp_{x^{k+1}}^{-1} x^k + w^{k+1}$ . Então,

$$\lambda_k \langle u^{k+1}, \exp_{x^{k+1}}^{-1} y \rangle - \langle \exp_{x^{k+1}}^{-1} x^k, \exp_{x^{k+1}}^{-1} y \rangle \geq 0, \quad y \in \Omega. \quad (2.7)$$

Por outro lado, a convexidade de  $f(x^{k+1}, \cdot)$ , dada por (H1), implica que

$$f(x^{k+1}, y) \geq f(x^{k+1}, x^{k+1}) + \langle u^{k+1}, \exp_{x^{k+1}}^{-1} y \rangle = \langle u^{k+1}, \exp_{x^{k+1}}^{-1} y \rangle, \quad y \in \Omega. \quad (2.8)$$

Dado que  $x^* \in \text{EP}(f, \Omega) \subset \Omega$ , tem-se que  $f(x^*, x^{k+1}) \geq 0$ . Portanto, usando (2.8) com  $y = x^*$ , a monotonicidade de  $f$  implica

$$\langle u^{k+1}, \exp_{x^{k+1}}^{-1} x^* \rangle \leq f(x^{k+1}, x^*) \leq 0. \quad (2.9)$$

Portanto, considerando que  $\lambda_k > 0$  para todo  $k$ , o resultado desejado segue da combinação das desigualdades (2.7) e (2.9).  $\square$

A seguir, apresentamos o principal resultado de convergência deste capítulo.

**Teorema 2.1.** *A sequência  $\{x^k\}$  gerada pelo Algoritmo 2.0.1 converge para um ponto em  $\text{EP}(f, \Omega)$ .*

*Demonstração.* Seja  $x^* \in \text{EP}(f, \Omega)$ . Usando o Teorema 1.1 com  $x_i = x^*$ ,  $x_{i+1} = x^k$  e  $x_{i+2} = x^{k+1}$ , obtemos

$$d^2(x^{k+1}, x^*) + d^2(x^{k+1}, x^k) - 2\langle \exp_{x^{k+1}}^{-1} x^k, \exp_{x^{k+1}}^{-1} x^* \rangle \leq d^2(x^k, x^*), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Como  $x^* \in \text{EP}(f, \Omega)$  pela Proposição 2.4 segue que

$$d^2(x^{k+1}, x^*) + d^2(x^{k+1}, x^k) \leq d^2(x^k, x^*), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Então, da última desigualdade e levando em conta que  $d^2(x^{k+1}, x^k) > 0$ , segue que  $\{x^k\}$  é Fejér convergente para o conjunto  $\text{EP}(f, \Omega)$ . Além disso, da equação (2.11), temos que

$\{d(x^{k+1}, x^k)\}$  converge para zero à medida que  $k$  tende a infinito. Aplicando a Proposição 2.3 com  $y^k = x^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , e  $U = \text{EP}(f, \Omega)$ , temos que  $\{x^k\}$  é uma sequência limitada. Em particular, pelo Teorema de Hopf-Rinow, existe uma subsequência  $\{x^{k_j}\}$  de  $\{x^k\}$  que converge para algum ponto  $\hat{x} \in \Omega$ . Note que  $\{d(x^{k_j+1}, x^{k_j})\}$  e  $\{d(x^{k_j+1}, \hat{x})\}$  convergem para zero, e, em particular,  $\{x^{k_j+1}\}$  converge para  $\hat{x}$  quando  $j$  tende ao infinito. Portanto, usando o Proposição 1.1 e  $(\mathcal{H}2)$  temos que  $f(x^{k_j+1}, y) + \lambda_{k_j} d(x^{k_j+1}, x^{k_j}) b_{\gamma_{x^{k_j+1}, x^{k_j}}}(y)$  é semicontínua superior, agora usando as propriedades de limite superior e que  $\{\lambda_{k_j+1}\}$  é limitada, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{j \rightarrow +\infty} [f(x^{k_j+1}, y) + \lambda_{k_j} d(x^{k_j+1}, x^{k_j}) b_{\gamma_{x^{k_j+1}, x^{k_j}}}(y)] \\ &\leq \limsup_{j \rightarrow +\infty} f(x^{k_j+1}, y) \leq f(\hat{x}, y), \quad y \in \Omega, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos  $(\mathcal{H}2)$  novamente. Portanto, o resultado desejado está provado. □

# Capítulo 3

## O Algoritmo Ponto Proximal Multiobjetivo

Neste capítulo, introduzimos e analisamos nossa nova abordagem para a convergência do Algoritmo do Ponto Proximal (APP) aplicado a funções com valores vetoriais.

### 3.1 O Algoritmo

Seja,  $\Omega \subset \mathcal{H}$  um conjunto não vazio, fechado e convexo,  $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função vetorial tal que cada uma de suas componentes  $f_i : H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , são localmente Lipschitz. A partir da Observação 1, podemos assumir sem perda de generalidade que  $F \succ 0$ .

Seja  $\{\lambda_k\}$  uma sequência de números positivos, e seja  $\{\varepsilon^k\} \subset \mathbb{R}_{++}^m$  uma sequência com  $\|\varepsilon^k\| = 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . O método introduzido a seguir gera uma sequência iterativa  $\{x^k\} \subset \Omega$  da seguinte forma:

**Algoritmo 3.1.1** ((APP) vetorial refinado).

INICIALIZAÇÃO: Escolha  $x^0 \in \Omega$ .

REGRA DE PARADA: Se para  $x^k \in \Omega$  tivermos que  $x^k$  é um ponto Pareto crítico, então defina  $x^{k+p} := x^k$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ .

PASSO ITERATIVO: Como a próxima iteração, escolha  $x^{k+1} \in \Omega$  tal que

$$x^{k+1} \in \operatorname{argmin}_w \left\{ F(x) + \frac{\lambda_k}{2} \|x - x^k\|^2 \varepsilon^k : x \in \Omega_k \right\},$$

onde  $\Omega_k := \{x \in \Omega : F(x) \preceq F(x^k)\}$ .

Para garantir a boa definição do Algoritmo 3.1.1, precisamos dos seguintes resultados.

**Lema 3.1.** *Um conjunto  $A \subseteq E$  é  $C$ -completo nos seguintes casos:*

- (a)  *$A$  é  $C$ -semicompacto, em particular,  $A$  é  $C$ -compacto ou compacto;*
- (b)  *$A$  é fracamente compacto e  $E$  é um espaço localmente convexo;*
- (c)  *$A$  é fechado e limitado,  $C$  é de Daniell e  $E$  é ordenadamente completo;*
- (d)  *$A$  é fechado e minorado (ou seja, existe  $x \in E$  tal que  $A \subseteq x + C$ ) e  $C$  é de Daniell.*

*Demonstração.* Veja [27, Lema 3.5]. □

**Teorema 3.1.** *Suponha que  $C$  seja um cone convexo correto e que  $A$  seja um conjunto não vazio em  $E$ . Então,  $\text{Min}(A|C)$  é não vazio se, e somente se,  $A$  tem uma seção  $C$ -completa não vazia.*

*Demonstração.* Veja [27, Teorema 3.3]. □

**Proposição 3.1.** *O Algoritmo 3.1.1 está bem definido.*

*Demonstração.* O ponto inicial  $x^0 \in \Omega$  é escolhido na etapa de inicialização. Supondo na iteração  $k$  que  $x^k$  é dado e denotando

$$F_k(x) := F(x) + \frac{\lambda_k}{2} \|x - x^k\|^2 \varepsilon^k \quad x \in \Omega_k.$$

Observe que temos  $x^k \in \Omega_k$ , o que implica que  $F_k(\Omega_k)$  não é vazio. Observe que  $F_k(x) \succ 0$  e  $F_k(\Omega_k)$  é fechado. Como  $\mathbb{R}_+^m$  é cone Daniell, segue do Lema 3.1 que  $F_k(\Omega_k)$  é  $\mathbb{R}_+^m$ -completo. Pelo Teorema 3.1, existe  $x^{k+1} \in \Omega$  tal que

$$x^{k+1} \in \arg \min_w \{F_k(x) : x \in \Omega_k\}.$$

o que completa a prova da proposição. □

A partir de agora, as sequências  $\{x^k\}$ ,  $\{\lambda_k\}$  e  $\{\varepsilon^k\}$  são geradas pelo o Algoritmo 3.1.1. Os resultados seguintes são importantes para a análise de convergência.

**Proposição 3.2.** *Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existem  $\alpha^k, \beta^k \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $\omega^k, u_i^k \in \mathcal{H}$ , e  $\tau_k \in \mathbb{R}_{++}$  que satisfazem as igualdades*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^k + \beta_i^k) u_i^k + \lambda_{k-1} \sum_{i \in \mathcal{I}} \varepsilon_i^{k-1} \alpha_i^k (x^k - x^{k-1}) + \tau_k \omega^k = 0 \quad (3.1)$$

junto com as condições

$$\omega^k \in B[0, 1] \cap N^M(x^k; \Omega), \quad u_i^k \in \partial^M f_i(x^k), \quad e \quad \|\alpha^k + \beta^k\|_1 = 1.$$

*Demonstração.* Segue das construções do Algoritmo que  $x^k$  é uma solução Pareto fraca do problema multiobjetivo

$$\min_w \{F_{k-1}(x) : x \in \Omega_{k-1}\},$$

onde  $F_{k-1}(x) := F(x) + \frac{\lambda_{k-1}}{2} \|x - x^{k-1}\|^2 \varepsilon^{k-1}$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

Definindo  $G_{k-1}(x) := F(x) - F(x^{k-1})$ , é fácil deduzir da continuidade local Lipschitz de  $F$  que todas as funções componentes

$$(g_{k-1})_i(\cdot) = f_i(\cdot) - f_i(x^{k-1}), \quad i \in \mathcal{I}, \quad (3.2)$$

com  $(f_{k-1})_i$  dado por

$$(f_{k-1})_i(\cdot) = f_i(\cdot) + \frac{\lambda_{k-1}}{2} \|\cdot - x^{k-1}\|^2 \varepsilon_i^{k-1}, \quad i \in \mathcal{I}, \quad (3.3)$$

são localmente Lipschitz. Fixe  $k \in \mathbb{N}$  e aplique o Lema 1.1 e o Teorema 1.7 com  $g_j$  e  $f_j$  definidos em (3.2) e (3.3), respectivamente e Levando em conta que  $\partial^M d_\Omega(x^k) \subset B[0, 1] \cap N^M(x^k; \Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , pelo Teorema 1.8, temos que

$$0 = \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^k + \beta_i^k) u_i^k + \lambda_{k-1} \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i^k \varepsilon_i^{k-1} (x^k - x^{k-1}) + \tau_k \omega^k,$$

onde

$$u_i^k \in \partial^M f_i(x^k), \quad \omega^k \in \partial^M d_\Omega(x^k) \subset B[0, 1] \cap N^M(x^k; \Omega), \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^k + \beta_i^k) = 1$$

para todo  $k$ . Isso completa a prova da proposição. □

A seguir apresentaremos dois casos onde ocorrem a Regra de parada.

**Corolário 3.1.** *Se  $x^{k+1} = x^k$ , então  $x^k$  é um ponto Pareto crítico de  $F$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $x^{k+1} = x^k$ . Então a Proposição 3.2 nos diz que existem  $\alpha^{k+1}, \beta^{k+1} \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $u_i^{k+1}, \omega^{k+1} \in \mathcal{H}$ , e  $\tau_{k+1} \in \mathbb{R}_{++}$  que satisfazem

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^{k+1} + \beta_i^{k+1}) u_i^{k+1} + \tau_{k+1} \omega^{k+1} = 0,$$

onde  $-\sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^{k+1} + \beta_i^{k+1}) u_i^{k+1} \in N^M(x^{k+1}; \Omega)$ . Se  $x^k$  não é um ponto Pareto crítico de  $F$  em  $\Omega$ , então existe  $y \in \Omega$  tal que  $\langle u_i^{k+1}, y - x^{k+1} \rangle < 0$ . Portanto, com  $\sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^{k+1} + \beta_i^{k+1}) = 1$  obtemos

$$\left\langle \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^{k+1} + \beta_i^{k+1}) u_i^{k+1}, y - x^{k+1} \right\rangle < 0,$$

o que contradiz  $-\sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^{k+1} + \beta_i^{k+1}) u_i^{k+1} \in N^M(x^{k+1}; \Omega)$  e, portanto, verifica que  $x^k$  é um ponto Pareto crítico de  $F$  em  $\Omega$ .  $\square$

**Corolário 3.2.** *Se existir um número  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha^{k_0} = 0$ , então  $x^{k_0}$  é um ponto Pareto crítico de  $F$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha^{k_0} = 0$ . Então a Proposição 3.2 fornece a igualdade

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \beta_i^{k_0} u_i^{k_0} + \tau^{k_0} \omega^{k_0} = 0$$

com  $\omega^{k_0} \in B[0, 1] \cap N^M(x^{k_0}; \Omega)$ ,  $u_i^{k_0} \in \partial^M f_i(x^{k_0})$ , e  $\sum_{i \in \mathcal{I}} \beta_i^{k_0} = 1$ . Portanto, temos  $\beta^{k_0} \in \mathbb{R}_+^m$ . Supondo agora que  $x^{k_0}$  não seja um ponto Pareto crítico de  $F$  em  $\Omega$ , isso garante a existência de  $y \in \Omega$  tal que, para todo  $i \in \mathcal{I}$  e  $u_i^{k_0} \in \partial^M f_i(x^{k_0})$ , temos a desigualdade estrita

$$\langle u_i^{k_0}, y - x^{k_0} \rangle < 0.$$

Finalmente, segue de  $\beta_i^{k_0} \in \mathbb{R}_+^m$  e  $\sum_{i \in \mathcal{I}} \beta_i^{k_0} = 1$  que

$$\left\langle \sum_{i \in \mathcal{I}} \beta_i^{k_0} u_i^{k_0}, y - x^{k_0} \right\rangle < 0,$$

o que contradiz o fato de que  $-\sum_{i \in \mathcal{I}} \beta_i^{k_0} u_i^{k_0} \in N^M(x^{k_0}; \Omega)$ .  $\square$

**Observação 3.** *Note que, se o Algoritmo terminar após um número finito de iterações, ele termina em um ponto Pareto crítico. Isso nos permite supor que  $\{x^k\}$  é uma sequência infinita e, portanto,  $x^{k+1} \neq x^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  devido ao resultado do Corolário 3.1.*

## 3.2 Análise de Convergência

Nesta seção, empregamos a seguinte suposição de  $\mathbb{R}_+^m$ -completude imposta à função vetorial  $F$  e ao ponto inicial  $x^0$ :

( $\mathcal{A}$ ): Para todas as sequências  $\{a^k\} \subseteq \mathcal{H}$  que satisfazem  $a^0 = x^0$  e  $F(a^{k+1}) \preceq F(a^k)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $a \in \mathcal{H}$  tal que

$$F(a) \preceq F(a^k) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

No caso clássico de otimização convexa irrestrita, esta condição é equivalente à existência de soluções para o problema de otimização multiobjetivo. A suposição de  $\mathbb{R}_+^m$ -completude é padrão para garantir a convergência de sequências geradas por métodos ponto proximal em problemas de otimização multiobjetivo; veja, por exemplo, [32, pp. 269–308] e referências ali citadas.

No que se segue, empregamos esta condição para estabelecer a convergência do nosso algoritmo para encontrar pontos Pareto críticos em problemas de otimização multiobjetivo.

### 3.2.1 Caso Localmente Lipschitz

Inicialmente, estabelecemos nosso resultado de convergência no caso localmente Lipschitz.

**Teorema 3.2.** *Suponha que existam escalares  $a, b, c \in \mathbb{R}_{++}$  tais que  $0 < a \leq \lambda_k \leq b$  e  $0 < c \leq \varepsilon_j^k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $j = 1, \dots, m$ . Então, todo ponto de acumulação fraco de  $\{x^k\}$ , se existir, é um ponto Pareto crítico de  $F$ .*

*Demonstração.* Segue da definição do algoritmo que  $x^k$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$  fixo, é uma solução ótima do problema

$$\min_w \left\{ F(x) + \frac{\lambda_{k-1}}{2} \|x - x^{k-1}\|^2 \varepsilon^{k-1} : x \in \Omega_{k-1} \right\}.$$

Isso implica na condição

$$\max_{1 \leq j \leq m} \left\{ f_j(x^{k-1}) - f_j(x^k) - \frac{\lambda_{k-1}}{2} \|x^k - x^{k-1}\|^2 \varepsilon^{k-1} \right\} \geq 0.$$

Pegue  $j_0(k) = j_0 \in \{1, \dots, m\}$  como o índice onde o máximo na última desigualdade é

atingido. Então, como as sequências  $\{\lambda_k\}$  e  $\{\varepsilon^k\}$  são limitadas inferiormente, temos que

$$\begin{aligned} \frac{aC}{2} \|x^k - x^{k-1}\| &\leq f_{j_0}(x^{k-1}) - f_{j_0}(x^k) \\ &= \sqrt{(f_{j_0}(x^{k-1}) - f_{j_0}(x^k))^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j \in \mathcal{I}} (f_j(x^{k-1}) - f_j(x^k))^2} \\ &= \|F(x^{k-1}) - F(x^k)\|, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Uma vez que  $\{F(x^k)\}$  é não crescente e  $F \succ 0$ , deduzimos que o lado direito de (3.4) converge para 0 à medida que  $k \rightarrow \infty$ . Portanto,

$$\|x^k - x^{k-1}\| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Agora, seja  $\hat{x}$  um ponto de acumulação fraco de  $\{x^k\}$ , e seja  $\{x^{k_l}\}$  uma subsequência de  $\{x^k\}$  convergindo para  $\hat{x}$ . Aplicando a Proposição 2 à sequência  $\{x^{k_l}\}$ , encontramos

$$\begin{cases} \{u_i^{k_l}\} \subseteq \partial^M f_i(x^{k_l}), \\ \{\alpha^{k_l}\}, \{\beta^{k_l}\} \subseteq \mathbb{R}_+^m, \\ \{\omega^{k_l}\} \subseteq \mathcal{H}, \quad \text{e} \quad \{\tau_{k_l}\} \subseteq \mathbb{R}_{++} \end{cases}$$

satisfazendo as igualdades

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^{k_l} u_i^{k_l} + \beta_i^{k_l} u_i^{k_l}) + \lambda_{k_l-1} \sum_{i \in \mathcal{I}} \varepsilon_i^{k_l-1} \alpha_i^{k_l} (x^{k_l} - x^{k_l-1}) + \tau_{k_l} \omega^{k_l} = 0, \quad (3.6)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , onde

$$\omega^{k_l} \in B[0, 1] \cap N^M(x^{k_l}; \Omega) \quad \text{e} \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^{k_l} + \beta_i^{k_l}) = 1. \quad (3.7)$$

Como  $\{x^{k_l}\}$  converge fracamente para  $\hat{x}$ , segue que  $\{x^{k_l}\}$  é limitada. Usando o fato de  $F$  ser localmente Lipschitz e levando em consideração que  $\partial^M f_j$  e (3.7) é limitada em conjuntos compactos pela Proposição 1.3, obtemos que as sequências  $\{\alpha^{k_l}\}$ ,  $\{\beta^{k_l}\}$ ,  $\{\omega^{k_l}\}$  são limitadas. Assim,  $\{\tau_{k_l}\}$  também é limitada. Sem perda de generalidade, suponha que  $\{u_i^{k_l}\}$ ,  $\{\alpha^{k_l}\}$ ,  $\{\beta^{k_l}\}$ ,  $\{\omega^{k_l}\}$  convergem fracamente para  $u_i$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ , respectivamente, e que  $\{\tau_{k_l}\}$  converge para  $\tau$ . Além disso, segue da limitação de  $\lambda_{k_l-1} \sum_{i \in \mathcal{I}} \varepsilon_i^{k_l-1} \alpha_i^{k_l}$  juntamente com (3.5) que

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i + \beta_i) u_i + \tau \omega = 0.$$

Aplicando a Proposição 1.4 e o Teorema 1.6 obtemos  $u_i \in \partial^M f_i(\hat{x})$  e  $\omega \in N^M(\hat{x}; \Omega)$ . Assim, chegamos que

$$-\sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i + \beta_i) u_i \in N^M(\hat{x}; \Omega). \quad (3.8)$$

Finalmente, argumentando por contradição, suponha que  $\hat{x}$  não seja um ponto Pareto crítico de  $F$ . Então, existe  $y \in \Omega$  tal que

$$\langle u_i, y - \hat{x} \rangle < 0 \text{ para todo } i \in \mathcal{I}.$$

Isso implica, que

$$\left\langle \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i + \beta_i) u_i, y - \hat{x} \right\rangle < 0.$$

Lembrando que  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^m$  e  $\sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i + \beta_i) = 1$ , obtemos uma contradição com (3.8) e, portanto, concluímos a demonstração do teorema.  $\square$

### 3.2.2 Caso Pseudoconvexo

Esta subseção apresenta uma condição suficiente construtiva que garante que *toda a sequência* gerada pelo Algoritmo 3.1.1 converge fracamente para um ponto Pareto crítico.

Usando o subdiferencial limitante  $\partial^M$  definido em (1.5), dizemos que uma *função escalar*  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ , é *pseudoconvexa* se, para quaisquer  $x, y \in \mathcal{H}$ , temos

$$\exists \omega \in \partial^M f(x) : \langle \omega, y - x \rangle \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Essa definição, originalmente introduzida no caso diferenciável em [38], também pode ser encontrada em [2], onde, de forma análoga ao caso diferenciável, é demonstrado que qualquer função pseudoconvexa  $f$  satisfaz as seguintes propriedades fundamentais:

- (a) todo minimizador local de  $f$  é um minimizador global;
- (b) Se  $0 \in \partial^M f(x)$  então  $f$  possui um mínimo global em  $x$ .

Além disso, dizemos que a *função vetorial*  $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é *pseudoconvexa* se cada função componente  $f_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , é pseudoconvexa.

**Proposição 3.3.** *Seja  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função pseudoconvexa. Se  $x \in \Omega$  é um ponto Pareto crítico de  $F$  em  $\Omega$ ,  $x$  é uma solução de Pareto fraco de  $F$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Assuma que  $x$  é um ponto Pareto crítico de  $F$  em  $\Omega$ . Por contradição, suponha que  $x$  não é uma solução Pareto fraco de  $F$  em  $\Omega$ . Então, existe um ponto  $\tilde{x} \in \Omega$  tal que

$$f_i(\tilde{x}) < f_i(x) \text{ para todo } i \in \mathcal{I}.$$

Como  $f_i$  é pseudoconvexa, segue que para todo  $\omega_i \in \partial^M f_i(x)$  e  $i \in \mathcal{I}$ , temos a seguinte desigualdade

$$\langle \omega_i, \tilde{x} - x \rangle < 0.$$

No entanto, isso contradiz o fato de que  $x$  é um ponto Pareto crítico de  $F$  em  $\Omega$ .  $\square$

O próximo teorema mostra que, no caso pseudoconvexo, temos a convergência fraca de toda a sequência de iterações geradas pelo Algoritmo 3.1.1 para um ponto Pareto crítico.

**Teorema 3.3.** *Suponha que a condição  $(\mathcal{A})$  seja satisfeita. Se  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função pseudoconvexa então  $\{x^k\}$  converge fracamente para uma solução Pareto fraco de  $F$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Dividimos a prova do teorema nos seguintes cinco passos.

*Passo 1 (Convergência de Fejér)* Definimos o conjunto  $E \subseteq \Omega$  como

$$E := \{x \in \Omega : F(x) \preceq F(x^k) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}.$$

Pela hipótese  $(\mathcal{A})$  de para  $F$  em  $a^0 = x^0$ , o conjunto  $E$  não é vazio. Escolha um ponto arbitrário  $x^* \in E$ , o que significa que  $x^* \in \Omega_k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Denote  $\gamma_{k+1} := \lambda_k \langle \varepsilon^k, \alpha^{k+1} \rangle$ , onde  $\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_m^k)$ . Observe que  $\gamma_{k+1} > 0$  para tdo  $k \in \mathbb{N}$  devido a  $\lambda_k > 0$ ,  $\varepsilon^k \in \mathbb{R}_{++}^m$  e  $\alpha^k \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ . Como

$$\|x^k - x^*\|^2 = \|x^k - x^{k+1}\|^2 + \|x^{k+1} - x^*\|^2 + 2\langle x^k - x^{k+1}, x^{k+1} - x^* \rangle,$$

deduzimos de (3.1) que

$$\begin{aligned} \|x^k - x^*\|^2 &= \|x^k - x^{k+1}\|^2 + \|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &+ \frac{2}{\theta_{k+1}} \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^{k+1} + \beta_i^{k+1}) \langle u_i^{k+1}, x^{k+1} - x^* \rangle \\ &+ \frac{2}{\theta_{k+1}} \tau_{k+1} \langle \omega^{k+1}, x^{k+1} - x^* \rangle, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde  $u_i^{k+1} \in \partial^M f_i(x^{k+1})$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $i \in \mathcal{I}$ , com  $\theta_{k+1} := \lambda_k \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i^{k+1} \varepsilon_i^k$ . Por outro lado, segue-se da pseudoconvexidade de  $F$  juntamente com  $x^* \in \Omega_k$  e  $\theta_k > 0$  para todo  $k$  que temos

$$\frac{2}{\theta_{k+1}} \sum_{i=1}^m (\alpha_i^{k+1} + \beta_i^{k+1}) \langle u_i^{k+1}, x^{k+1} - x^* \rangle \geq 0. \quad (3.10)$$

A inclusão  $w^{k+1} \in N^M(x^{k+1}; \Omega)$  combinada com  $\tau_k > 0$  nos leva a

$$\tau_{k+1} \langle w^{k+1}, x^{k+1} - x^* \rangle \geq 0. \quad (3.11)$$

Agora, usando (3.10) e (3.11) em (3.9) obtemos

$$\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

o que implica que  $\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|x^k - x^*\|$  para qualquer  $x^* \in E$ , ou seja,  $\{x^k\}$  é Fejér convergente com relação ao conjunto  $E$  (veja [31]).

*Passo 2 (pontos limites fracos de  $\{x^k\}$  pertencem a  $E$ )* Como  $\{x^k\}$  é Fejér convergente ao conjunto  $E$ , segue-se da Proposição 2.3 que  $\{x^k\}$  é limitada. Seja  $x^*$  um ponto limite fraco de  $\{x^k\}$ . A construção do Algoritmo 3.1.1 nos diz que  $F(x^{k+1}) \preceq F(x^k)$  sempre que  $k \in \mathbb{N}$ . Assim, segue-se da continuidade de  $F$  que  $F(x^*) \preceq F(x^k)$  para todos  $k$ , o que verifica que  $x^* \in E$ .

*Passo 3 (Convergência da sequência iterativa)* Este passo segue diretamente da Proposição 2.3 combinada com os Passos 1 e 2.

*Passo 4 (Proximidade dos iterados consecutivos)* Suponha que  $\{x^k\}$  convirja para  $\hat{x}$ . Segue-se da desigualdade triangular que

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \|x^{k+1} - \hat{x}\| + \|x^k - \hat{x}\|, \quad k \in \mathbb{N},$$

devido a  $x^k \rightarrow \hat{x}$  quando  $k \rightarrow \infty$ , concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0,$$

o que justifica a afirmação deste passo.

*Passo 5 (O ponto limite é uma solução Pareto fraco)* A prova deste passo usa o mesmo argumento da prova do Teorema 3.2 a partir de (3.6) em diante. Isto completa a prova do teorema.  $\square$

# Capítulo 4

## Condições Necessárias para Soluções Pareto Fraco

Nesta capítulo, consideraremos  $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função direcionalmente Lipschitz. Iremos considerar o seguinte problema multiobjetivo

$$\min_w \left\{ F(x) + \frac{\lambda}{2} \|x - a\|^2 \varepsilon : x \in \Omega \right\}, \quad (4.1)$$

onde  $\lambda > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}^m$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}^m$  e  $\|\varepsilon\| = 1$ . Estabelecemos condição necessária para soluções pareto fraco do problema (4.1).

Apresentamos os seguintes lemas, que serão importantes para o desenvolvimento da teoria deste capítulo.

**Lema 4.1.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  direcionalmente Lipschitz em  $\bar{x}$ . Dados  $\delta, \lambda > 0$  e  $a, x^* \in \mathbb{R}^n$ , definimos  $\varphi_\delta(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2} \|x - a\|^2 - f(x^*) - \frac{\lambda}{2} \|x^* - a\|^2 + \delta$  e  $\Phi(x) = f(x) - f(a)$ . Então, existe  $u \in \mathbb{R}^n$ , unitário, tal que*

$$\limsup_{\substack{x \xrightarrow{\delta} \bar{x} \\ v \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{\varphi_\delta(x + tv) - \varphi_\delta(x)}{t} < \infty \quad e \quad \limsup_{\substack{x \xrightarrow{\Phi} \bar{x} \\ v \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{\Phi(x + tv) - \Phi(x)}{t} < \infty.$$

*Demonstração.* Suponha que  $f$  seja direcionalmete Lipschitz. Então, existe um vetor unitário  $u \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\limsup_{\substack{x \xrightarrow{f} \bar{x} \\ v \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} < \infty.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_\delta(x+tv) - \varphi_\delta(x)}{t} &= \frac{f(x+tv) + \frac{\lambda}{2}\|x+tv-a\|^2 - f(x) - \frac{\lambda}{2}\|x-a\|^2}{t} \\ &\leq \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} + \frac{\lambda}{2}t\|v\|^2 + \lambda\|x-a\|\|v\|, \end{aligned} \quad (4.2)$$

e

$$\frac{\Phi(x+tv) - \Phi(x)}{t} = \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}. \quad (4.3)$$

Assim, a partir de (4.2) e (4.3), segue que

$$\limsup_{\substack{x \xrightarrow{\varphi_\delta} \bar{x} \\ v \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{\varphi_\delta(x+tv) - \varphi_\delta(x)}{t} \leq \limsup_{\substack{x \xrightarrow{f} \bar{x} \\ v \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} + \lambda\|\bar{x} - a\| < \infty,$$

e

$$\limsup_{\substack{x \xrightarrow{\Phi} \bar{x} \\ v \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{\Phi(x+tv) - \Phi(x)}{t} = \limsup_{\substack{x \xrightarrow{f} \bar{x} \\ v \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} < \infty.$$

□

**Observação 4.** Note que  $\Psi = \max\{\varphi_\delta, \Phi\}$  é direcionalmente Lipschitz em  $\bar{x}$ . De fato,

$$\frac{\max\{\varphi_\delta, \Phi\}(x+tv) - \max\{\varphi_\delta, \Phi\}(x)}{t} \leq \frac{\max\{|\varphi_\delta(x+tv) - \varphi_\delta(x)|, |\Phi(x+tv) - \Phi(x)|\}}{t}. \quad (4.4)$$

Portanto, por (4.4) e pelo Lema 4.1,

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{x \xrightarrow{\Psi} \bar{x} \\ v \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{\Psi(x+tv) - \Psi(x)}{t} &= \limsup_{\substack{x \xrightarrow{\Psi} \bar{x} \\ v \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{\max\{\varphi_\delta, \Phi\}(x+tv) - \max\{\varphi_\delta, \Phi\}(x)}{t} \\ &\leq \limsup_{\substack{x \xrightarrow{\Psi} \bar{x} \\ v \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{\max\{|\varphi_\delta(x+tv) - \varphi_\delta(x)|, |\Phi(x+tv) - \Phi(x)|\}}{t} < \infty. \end{aligned}$$

Assim, o resultado segue.

**Lema 4.2.** Seja  $\mathcal{D} := \{x \in \mathcal{C} : f_i(x) - f_i(a) \leq 0, i \in \mathcal{I}\}$ , onde  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$ . Se  $x^*$  é um ponto Pareto fraco de  $F(\cdot) + \frac{\lambda}{2}\|\cdot - a\|^2 \varepsilon$  em  $\mathcal{D}$ , então, para todo  $\delta > 0$  e  $x \in \mathcal{C}$ , temos que

$$F_\delta(x) := \max\{f_i(x) + \frac{\lambda\varepsilon_i}{2}\|x-a\|^2 - f_i(x^*) - \frac{\lambda\varepsilon_i}{2}\|x^*-a\|^2 + \delta, f_i(x) - f_i(a) : i \in \mathcal{I}\} > 0,$$

onde  $\lambda > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}^n$  e  $\|\varepsilon\| = 1$ .

*Demonstração.* Suponha o contrário; ou seja, existem  $\delta_0$  e  $x_1 \in \mathcal{C}$  tais que

$$F_{\delta_0}(x_1) \leq 0.$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} f_i(x_1) + \frac{\lambda \varepsilon_i}{2} \|x_1 - a\|^2 &< f_i(x_1) + \frac{\lambda \varepsilon_i}{2} \|x_1 - a\|^2 + \delta_0 \leq f_i(x^*) + \frac{\lambda \varepsilon_i}{2} \|x^* - a\|^2, \quad i \in \mathcal{I}, \\ f_i(x_1) - f_i(a) &\leq 0, \quad i \in \mathcal{I}, \end{aligned}$$

e, portanto,  $x_1 \in \mathcal{D}$ . Isso contradiz o fato de  $x^*$  ser um ponto Pareto fraco.  $\square$

Para os nossos propósitos neste capítulo, assumimos a seguinte hipótese:

( $\mathcal{B}$ ) Sejam  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções direcionalmente Lipschitz e contínuas para todo  $i \in \mathcal{I}$ .

Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , segue que:

$$\text{se } [u_1^* + \dots + u_n^* = 0, u_i^* \in \partial^\infty f_i(x)] \Rightarrow u_i^* = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

É relevante notar que a hipótese ( $\mathcal{B}$ ) está bem estabelecida na literatura [40, 37].

**Exemplo 4.1.** Considere  $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  direcionalmente Lipschitz, onde

$$f_1(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad e \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0, \\ -x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Observe que

(i)  $f_2$  é localmente Lipschitz para todo  $x$  então temos que  $\partial^\infty f_2(x) = \{0\}$  para todo  $x$  (veja [43, Theorem 9.13]).

(ii)  $f_1$  é localmente Lipschitz para todo  $x \neq 0$  então temos que  $\partial^\infty f_2(x) = \{0\}$  para todo  $x \neq 0$  (veja [43, Theorem 9.13]).

(iii) Sendo  $f_1$  direcionalmente Lipschitz em  $x = 0$ , iremos calcular  $\partial^\infty f_1(0)$  via definição.

Temos,  $\partial^F f_1(x) = \left\{ \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \right\}$  sempre que  $x \neq 0$ , agora escolhendo  $\alpha \geq 0$  e escolhendo  $a^k = \frac{1}{k}$  e  $t^k = \frac{3\alpha}{k^{\frac{2}{3}}}$  temos que  $a^k \rightarrow 0$  e  $t^k \partial^F f_1(a^k) = \{\alpha\}$ , logo  $\partial^\infty f_1(0) = [0, +\infty)$

Segue-se que a hipótese ( $\mathcal{B}$ ) é verificada.

Agora, apresentamos um exemplo que evidencia a existência de funções direcionalmente Lipschitz que não são localmente Lipschitz. No entanto, o conjunto de minimizadores Pareto fraco está contido em uma região onde a função é localmente Lipschitz.

**Exemplo 4.2.** Considere a função vetorial  $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que é direcionalmente Lipschitz, definida por

$$f_1(x) = (x + 1)^2, \quad e \quad f_2(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}}, & \text{se } x > 0, \\ x^2 + x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ :

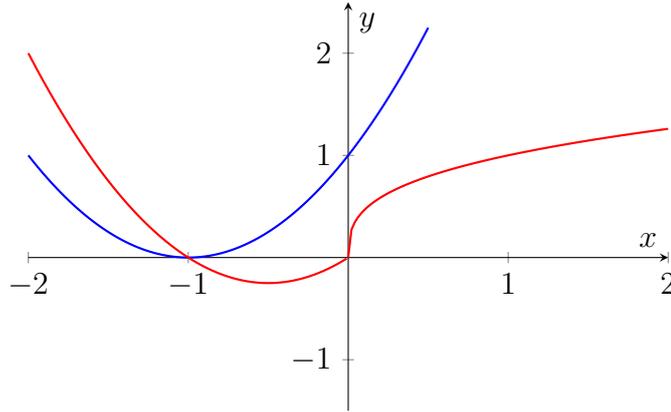


Figura 4.1: Gráfico das funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$

Portanto ao observa a Figura 4.2, podemos observar que o conjunto de minimizadores Pareto fraco é dado por

$$\operatorname{argmin}_w \{F(x) : x \in \mathbb{R}\} = \left[-1, -\frac{1}{2}\right],$$

e a função  $F$  é localmente Lipschitz nesse intervalo.

O próximo resultado estabelece novas condição de *otimalidade* do tipo Fritz-John, fornecidas pelo subdiferencial de Mordukhovich.

**Teorema 4.1.** Seja  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto não vazio, fechado e convexo, e  $\mathcal{D} := \{x \in \mathcal{C} : f_i(x) - f_i(a) \leq 0, \text{ para } i \in \mathcal{I}\}$ , onde as funções  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são direcionalmente Lipschitz e contínuas para todo  $i \in \mathcal{I}$ . Assuma que a hipótese  $(\mathcal{B})$  é satisfeita. Se  $x^*$  um ponto Pareto fraco de  $F(\cdot) + \frac{\lambda}{2} \|\cdot - a\|^2 \varepsilon$  em  $\mathcal{D}$ ,  $F$  é localmente Lipschitz em  $x^*$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}^n$  e  $\|\varepsilon\| = 1$ , então existem números reais  $\tau > 0$  e  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  com  $i \in \mathcal{I}$  tais que temos as seguintes condições:

$$0 \in \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i + \beta_i) \partial^M f_i(x^*) + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \varepsilon_i (x^* - a) + \tau \partial^M d_{\mathcal{C}}(x^*),$$

$$\text{com } \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i + \beta_i = 1 \quad e \quad \beta_i (f_i(x^*) - f_i(a)) = 0, \quad i \in \mathcal{I}.$$

*Demonstração.* Seja  $x^*$  um ponto Pareto fraco de  $F(\cdot) + \frac{\lambda}{2} \|\cdot - a\|^2 \varepsilon$  em  $\mathcal{D}$ , e seja  $\{\delta_l\} \subset \mathbb{R}_{++}$  uma sequência que converge para 0 quando  $l \rightarrow \infty$ . Segue do Lema 4.2 que

$$F_{\delta_l}(x) > 0 \text{ para todo } l \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{C}.$$

Portanto, a função  $F_{\delta_l} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$  é limitada inferiormente, especialmente quando  $0 < \delta_l \leq 1$ . Pelo fato de  $f_i$  ser direcionalmente Lipschitz em uma vizinhança de  $x^*$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ , juntamente com o Lema 4.1 e a Observação 4, concluímos que  $F_{\delta_l}$  também é direcionalmente Lipschitz neste ponto. Além disso, como  $x^* \in \mathcal{D}$  e  $F_{\delta_l}(x) > 0$  para todo  $x \in \mathcal{C}$ , temos que  $\inf_{x \in \mathcal{C}} F_{\delta_l}(x) \geq 0$ , o que implica que

$$\delta_l = F_{\delta_l}(x^*) \leq \inf_{x \in \mathcal{C}} F_{\delta_l}(x) + \delta_l.$$

Isso significa que  $F_{\delta_l}$  satisfaz todas as hipóteses do Lema 1.4. Assim, encontramos  $z^l \in \mathcal{C}$  tal que

$$\|x^* - z^l\| \leq \sqrt{\delta_l} \text{ e} \tag{4.5}$$

$$F_{\delta_l}(x) + \sqrt{\delta_l} \|x - z^l\| \geq F_{\delta_l}(z^l) \text{ para todo } x \in \mathcal{C},$$

ou seja,  $z^l$  é uma solução global de  $F_{\delta_l}(\cdot) + \sqrt{\delta_l} \|\cdot - z^l\|$  em  $\mathcal{C}$ . Note que  $F_{\delta_l}(\cdot) + \sqrt{\delta_l} \|\cdot - z^l\|$  é direcionalmente Lipschitz, uma vez que  $F_{\delta_l}(\cdot)$  é direcionalmente Lipschitz e  $\sqrt{\delta_l} \|\cdot - z^l\|$  é localmente Lipschitz. Denotando por  $L(z^l, u)$  uma constante direcionalmente Lipschitz de  $F_{\delta_l}(\cdot) + \sqrt{\delta_l} \|\cdot - z^l\|$  em  $z^l$ , pela Proposição 1.5,  $z^l$  é uma solução local do problema irrestrito de minimizar a função

$$G_{\delta_l}(x) = F_{\delta_l}(x) + \sqrt{\delta_l} \|x - z^l\| + \tau d_{\mathcal{C}}(x),$$

onde  $\tau \geq L(z^l, u)$ . Aplicando a este problema a Proposição 1.2 e usando o Lema 1.1, obtemos

$$0 \in \partial^M G_{\delta_l}(z^l) \subset \partial^M F_{\delta_l}(z^l) + \sqrt{\delta_l} \partial^M (\|\cdot - z^l\|)(z^l) + \tau \partial^M d_{\mathcal{C}}(z^l).$$

Portanto, para cada  $l$ , existe  $\omega^l \in \partial^M F_{\delta_l}(z^l)$  tal que

$$0 \in \omega^l + \sqrt{\delta_l} \partial^M (\|\cdot - z^l\|)(z^l) + \tau \partial^M d_{\mathcal{C}}(z^l). \tag{4.6}$$

Como a suposição (H) é satisfeita e usando Teorema 1.5, para  $l$  suficientemente grande obtemos números não negativos  $\alpha^l$  e  $\beta^l$  tais que

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i^l + \beta_i^l) = 1, \quad (4.7)$$

$$\omega^l \in \sum_{\{i | \alpha_i^l, \beta_i^l \neq 0\}} (\alpha_i^l + \beta_i^l) \partial^M f_i(z^l) + \sum_{\{i | \alpha_i^l \neq 0\}} \lambda \alpha_i^l \varepsilon_i(z^l - a). \quad (4.8)$$

Combinando (4.6) e (4.8), garante-se que

$$\begin{aligned} 0 \in & \sum_{\{i | \alpha_i^l, \beta_i^l \neq 0\}} (\alpha_i^l + \beta_i^l) \partial^M f_i(z^l) + \sum_{\{i | \alpha_i^l \neq 0\}} \lambda \alpha_i^l \varepsilon_i(z^l - a) \\ & + \sqrt{\delta_l} \partial^M (\|\cdot - z^l\|) + \tau \partial^M d_C(z^l). \end{aligned}$$

Dessa forma, encontramos as sequências  $\{u_i^l\}$ ,  $\{\tilde{u}^l\}$ , e  $\{\tilde{v}^l\}$  com

$$u_i^l \in \partial^M f_i(z^l), \quad \tilde{u}^l \in \sqrt{\delta_l} \partial^M (\|\cdot - z^l\|),$$

e  $\tilde{v}^l \in \tau \partial^M d_C(z^l)$  tais que

$$0 = \sum_{\{i | \alpha_i^l, \beta_i^l \neq 0\}} (\alpha_i^l + \beta_i^l) u_i^l + \sum_{\{i | \alpha_i^l \neq 0\}} \lambda \alpha_i^l \varepsilon_i(z^l - a) + \tilde{u}^l + \tilde{v}^l. \quad (4.9)$$

Segue-se de (4.7) e (4.5) que as sequências  $\{\alpha_i^l\}_l$ ,  $\{\beta_i^l\}$ , e  $\{z^l\}$  são limitadas. Além disso, como  $\|\cdot - z^l\|$  e  $d_C(z^l)$  são localmente Lipschitz segue que as sequências  $\tilde{u}^l$  e  $\tilde{v}^l$  (veja [40, Corolário 1.81]). Consequentemente, a limitação  $\{u_i^l\}$  segue de (4.9). Passando para subsequências, se necessário, obtemos que as sequências  $\{\alpha_i^l\}$ ,  $\{\beta_i^l\}$ ,  $\{u_i^l\}$ ,  $\{\tilde{u}^l\}$  e  $\{\tilde{v}^l\}$  convergem, respectivamente, para  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $u_i$ ,  $\tilde{u}$  e  $\tilde{v}$ . Assim, temos que  $\alpha_i, \beta_i \geq 0$  e  $\sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i + \beta_i) = 1$ . Por (4.5), temos que  $z^l \rightarrow x^*$ . Então, (4.9) quando  $l \rightarrow \infty$  temos que

$$0 = \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i + \beta_i) u_i + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \varepsilon_i(x^* - a) + \tilde{u} + \tilde{v}.$$

A propriedade de gráfico fechado do Teorema 1.9 implica

$$u_i \in \partial^M f_i(x^*) \quad \text{e} \quad \tilde{v} \in \partial^M d_C(x^*),$$

e, portanto, chegamos que

$$0 \in \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_i + \beta_i) \partial^M f_i(x^*) + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \varepsilon_i(x^* - a) + \tau \partial^M d_C(x^*) \text{ com algum } \tau > 0.$$

Por fim, a partir de (1.10), obtemos que para todo  $i \in I$ :

$$(\alpha_i + \beta_i) (\max\{0, f_i(x^*) - f_i(a)\}) = 0$$

e

$$(\alpha_i + \beta_i) ((f_i(x^*) - f_i(a)) - \max\{0, f_i(x^*) - f_i(a)\}) = 0.$$

Assim,

$$\beta_i (f_i(x^*) - f_i(a)) = 0.$$

□

# Capítulo 5

## Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, propusemos um método do ponto proximal para a resolução de problemas de equilíbrio em variedades de Hadamard. Além de apresentar a formulação do método, estabelecendo resultados de convergência para as sequências geradas pelo processo iterativo. Nossos resultados garantem que cada sequência converge para uma solução do problema de equilíbrio descrito em (1), contribuindo para o avanço da teoria e das aplicações de métodos proximais em espaços não lineares.

Além disso, investigamos problemas de otimização multiobjetivo não convexos em espaços de Hilbert, explorando condições generalizadas do tipo Fritz-John baseadas nos subgradientes de Mordukhovich. No contexto não convexo, ampliamos a aplicabilidade do Método do Ponto Proximal para funções vetoriais localmente Lipschitz. Demonstramos que cada ponto de acumulação fraco da sequência gerada pelo algoritmo representa um ponto Pareto crítico identificado por meio dos subdiferenciais de Mordukhovich. Adicionalmente, ao assumir a pseudoconvexidade da função vetorial e a hipótese de completude, provamos que qualquer sequência gerada pelo Método do Ponto Proximal converge, na topologia fraca do espaço, para um ponto de Pareto fraco do problema (3). Também estabelecemos condições de otimalidade do tipo Fritz-John para funções contínuas e direcionalmente Lipschitz em espaços de dimensão finita, utilizando os subgradientes de Mordukhovich.

Como perspectivas futuras, pretendemos analisar a validade da propriedade de gráfico fechado do subdiferencial Mordukhovich para funções direcionalmente Lipschitz. Além

---

disso, buscamos explorar condições necessárias que garantam a convergência do Método do Ponto Proximal para funções contínuas e direcionalmente Lipschitz, ampliando ainda mais o alcance de aplicação do Método do Ponto Proximal.

# Referências Bibliográficas

- [1] Apolinário H. C. F., Papa Quiroz E. A., and Oliveira P. R.. A scalarization proximal point method for quasiconvex multiobjective minimization. *Journal of Global Optimization*, 64(1):79–96, 2016.
- [2] Aussel, D.. Subdifferential properties of quasiconvex and pseudoconvex functions: unified approach. *Journal of optimization theory and applications*, 97:29–45, 1998.
- [3] Ballmann, W., Gromov M., and V.. *Manifolds of Nonpositive Curvature*, volume 61. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] Bačák, M.. *Convex analysis and optimization in Hadamard spaces*, volume 22 of *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*. De Gruyter, Berlin, 2014.
- [5] Bento, G. C., Cruz Neto, J. X. , Lopes J. O., Mordukhovich, B. S, and Silva Filho, P. R.. A refined proximal algorithm for nonconvex multiobjective optimization in Hilbert spaces. *Journal of Global Optimization*, pages 1–17, 2024.
- [6] Bento, G. C., Cruz Neto, J. X., López, G., Soubeyran, A., and Souza, J. C. O.. The proximal point method for locally Lipschitz functions in multiobjective optimization with application to the compromise problem. *SIAM Journal on Optimization*, 28(2):1104–1120, 2018.
- [7] Bento, G. C., Cruz Neto, J. X., Meireles, L. V., and Soubeyran, A.. Pareto solutions as limits of collective traps: an inexact multiobjective proximal point algorithm. *Annals of Operations Research*, 316(2):1425–1443, 2022.
- [8] Bento, G. C., Cruz Neto, J. X., and Soubeyran, A.. A proximal point-type method for multicriteria optimization. *Set-Valued and Variational Analysis*, 22:557–573, 2014.

- 
- [9] Bento, G. C., Cruz Neto, J. X., and Meireles, L. V.. Proximal point method for locally Lipschitz functions in multiobjective optimization of Hadamard manifolds. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 179:37–52, 2018.
- [10] Bento, G. C., Cruz Neto, J. X., and Melo, Í. D. L.. Combinatorial convexity in Hadamard manifolds: Existence for equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 195(3):1087–1105, 2022.
- [11] Bento, G. C., Cruz Neto, J. X., and Melo, Í. D. L.. Fenchel conjugate via Busemann function on Hadamard manifolds. *Applied Mathematics & Optimization*, 88(3):83, 2023.
- [12] Bento, G. C., Cruz Neto, J. X., Soares Jr, P. A. and Soubeyran, A.. A new regularization of equilibrium problems on Hadamard manifolds: applications to theories of desires. *Annals of Operations Research*, 316(2):1301–1318, 2022.
- [13] Bianchi, M. and Schaible, S.. Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 90(1):31–43, 1996.
- [14] Blum, E.. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math. student*, 63:123–145, 1994.
- [15] Bonnel, H., Iusem, A. N., and Svaiter, B. F.. Proximal methods in vector optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 15(4):953–970, 2005.
- [16] Bot, R. I., Grad, S. M. and Wanka, G.. *Duality in vector optimization*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [17] Bridson, M. R. and Haefliger, A.. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer Science & Business Media, 2013.
- [18] Burke, J. V. and Lin, Q.. Convergence of the gradient sampling algorithm on directionally Lipschitz functions. *Set-Valued and Variational Analysis*, pages 1–18, 2021.
- [19] Ceng, L.-C. and Yao, J.-C.. Approximate proximal methods in vector optimization. *European Journal of Operational Research*, 183(1):1–19, 2007.
- [20] Chen, G. y., Huang, X., and Yang, X.. *Vector optimization: set-valued and variational analysis*, volume 541. Springer Science & Business Media, 2005.

- [21] Chen, Z. and Zhao, K.. A proximal-type method for convex vector optimization problem in Banach spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 30(1-2):70–81, 2009.
- [22] Chuong, T. D., Mordukhovich, B. S. and Yao, J.-C.. Hybrid approximate proximal algorithms for efficient solutions in vector optimization. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 12(2):257–286, 2011.
- [23] Colao, V., López, G., Marino, G., and Martin-Marquez V.. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 388(1):61–77, 2012.
- [24] Combettes, P. L. and Hirstoaga, S. A.. Equilibrium programming in Hilbert spaces. *J. Nonlinear Convex Anal*, 6(1):117–136, 2005.
- [25] Cruz Neto, J. X., Melo, I. D., Sousa, P. A., and Silva, J. P.. A note on the paper “proximal point methods for quasiconvex and convex functions with Bregman distances on Hadamard manifolds”. *Journal of Convex Analysis*, 24(2):679–684, 2017.
- [26] Bento, G. C., Cruz Neto, J. X., Lopes, J. O., Melo, Í. D. L., and Silva Filho, P. R. A new approach about equilibrium problems via Busemann functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 200(1):428–436, 2024.
- [27] Dinh, T. L.. *Theory of vector optimization*. Springer, Berlin, 1989.
- [28] Carmo, M. P.. Geometria Riemanniana. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)*, 2008.
- [29] Durea, M. and Strugariu, R.. Some remarks on proximal point algorithm in scalar and vectorial cases. *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, pages 307–319, 2013.
- [30] Fan, K.. A generalization of tychonoff’s fixed point theorem. *Mathematische Annalen*, 142(3):305–310, 1961.
- [31] Ferreira, O. P. and Oliveira, P. R.. Proximal point algorithm on Riemannian manifolds. *Optimization*, 51(2):257–270, 2002.

- [32] Grad, S.-M.. A survey on proximal point type algorithms for solving vector optimization problems. *Splitting Algorithms, Modern Operator Theory, and Applications*, pages 269–308, 2019.
- [33] Gregório, R. and Oliveira, P. R.. A logarithmic-quadratic proximal point scalarization method for multiobjective programming. *Journal of Global Optimization*, 49:281–291, 2011.
- [34] Huang, X. X. and Yang, X. Q.. Duality for multiobjective optimization via nonlinear Lagrangian functions. *Journal of Optimization theory and Applications*, 120:111–127, 2004.
- [35] Iusem, A. N., Kassay, G., and Sosa, W.. On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems. *Mathematical Programming*, 116(1):259–273, 2009.
- [36] Jahn, J. et al. *Vector optimization*. Springer, 2009.
- [37] Ledyaev, Y. and Zhu, Q.. Nonsmooth analysis on smooth manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 359(8):3687–3732, 2007.
- [38] Mangasarian, O.. Pseudo-convex functions. In *Stochastic optimization models in finance*, pages 23–32. Elsevier, 1975.
- [39] Minami, M.. Weak pareto-optimal necessary conditions in a nondifferentiable multi-objective program on a Banach space. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 41:451–461, 1983.
- [40] Mordukhovich, B. S.. *Variational analysis and generalized differentiation II: Applications*, volume 331. Springer, New Yorke, 2006.
- [41] Nikaidô, H. and Isoda, K.. Note on non-cooperative convex games. *Pacific Journal of Mathematics*, 5(5):807–816, 1955.
- [42] Rockafellar, R. T.. Directionally Lipschitzian functions and subdifferential calculus. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(2):331–355, 1979.

- 
- [43] Rockafellar, R. T. and Wets, R. J. B.. Variational analysis. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, 317, 1998.
- [44] Sakai, T.. On Riemannian manifolds admitting a function whose gradient is of constant norm. *Kodai Mathematical Journal*, 19(1):39–51, 1996.
- [45] Sakai, T.. Riemannian geometry, vol. 149 of translations of mathematical monographs. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1996.
- [46] Udriste, C.. *Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds*, volume 297. Springer Science & Business Media, 1994.
- [47] Villacorta, K. D. V. and Oliveira, P. R.. An interior proximal method in vector optimization. *European Journal of Operational Research*, 214(3):485–492, 2011.