



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Classificação e Trivializações para alguns Sólitons Geométricos

Antonio Nilson Alves Silva Júnior

Teresina - 2024

Antonio Nilson Alves Silva Júnior

Tese de Doutorado:

**Classificação e Trivializações para alguns Sólitons
Geométricos**

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha

Teresina - 2024



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Classificação e Trivializações para alguns Sólitos Geométricos

Antonio Nilson Alves Silva Júnior

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 19 de dezembro de 2024.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente



ANTONIO WILSON RODRIGUES DA CUNHA

Data: 20/12/2024 17:03:02-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha – Orientador

Documento assinado digitalmente



HALYSON IRENE BALTAZAR

Data: 20/12/2024 08:34:16-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar – UFPI

Documento assinado digitalmente



PAULO ALEXANDRE ARAUJO SOUSA

Data: 20/12/2024 14:28:40-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araujo Sousa – UFPI



Documento assinado digitalmente

ALLAN GEORGE DE CARVALHO FREITAS

Data: 19/12/2024 20:01:55-0300

Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB



Documento assinado digitalmente

ERALDO ALMEIDA LIMA JÚNIOR

Data: 19/12/2024 21:17:56-0300

Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior - UFPB

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S586c	Silva Júnior, Antonio Nilson Alves. Classificação e trivializações para alguns sólitons geométricos / Antonio Nilson Alves Silva Júnior. -- 2025. 83 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Piauí. Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós- Graduação em Matemática, Teresina, 2025. “Orientador: Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha”. 1. q-sóliton. 2. Sóliton de Ricci-Bourguignon. 3. Sóliton de Cotton. 4. Sóliton de Bach. I. Cunha, Antonio Wilson Rodrigues da. II. Título. CDD 516.362
-------	--

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Agradecimentos

Primeiro agradeço a Deus por todos os dons e talentos que me deu. Pela vida, por todas as oportunidades, pela lutas e conquistas. Agradeço a minha família pelo apoio e incentivo, aos por meus pais Nilson e Graça e meu irmão Caio. Nilson é um exemplo de trabalhador e Graça é um exemplo de ser Mãe. Tenhos por esses dois, muito amor, carinho e respeito. Me deram tudo aquilo que era necessário para me formar e educar.

No início não tínhamos tanto, mas nunca faltou nada. Desde cedo trabalhei, isso é algo que faz parte da minha essência. Com capina de mato para os vizinhos, ajudante de pedreiro ao lado do meu pai, juntava alumínio e cobre pra vender, já catei plástico e ferro pelos terrenos da vizinhança quando criança, não por que necessitava, mas por um pouco de danação, esperteza e vontade de ganhar e conquistar o meu dinheiro.

Tenho muita influência da minha mãe nos estudos. Lembro que desde que eramos crianças ela sempre falava sobre estudo e dava exemplos. Acredito que isso me fez almejar ir muito mais longe nos estudos. Desde o ensino médio espertou uma vontade pelo mestrado, e desde então, essa vontade nunca passou, até o momento da conquista. Pensava ainda aos poucos no Doutorado, que parecia algo tão difícil, mal sabia eu, que ainda tinha muito caminho para trilhar até esse momento.

Chegando ao Doutorado, que não há igual dinâmica, dificuldade, cobrança e intensidade, passei a ser orientado no início do segundo ano pelo Professor Antonio Wilson. Foi então, quem em poucas reuniões, mudei totalmente minha motivação e gosto pela Matemática, através da sua dedicação, motivação e cobrança. À ele agradeço por sua orientação, com muita cobrança, que fez muita diferença e pelo incentivo para eu fazer o concurso da UESPI, que tive a alegria de ser aprovado.

Agradeço aos meus amigos e colegas da pós-graduação: João, Ruan, Erisvaldo, Christopher, Pedro, Raimundo Bruno, Igor, Edimilson, Gustavo, Dieme, Jonatas, Sillas, Leonardo, Emanuely, Ana Julia, José Alencar.

Agradeço aos meus familiares também por todo apoio e ajuda em diversos momentos. Aos meus amigos, Valdinar, Lucas, Eduardo que são de longa data. Também Matheus Galvão, Maria Clara e Amanda Braz por terem feito parte desse momento. Agradeço os meus Tios Liar e Gorete e meus padrinhos Islânia e Pedro por quem tenho muito respeito.

Também aos professores que fizeram parte da banca, por todos os aconselhamentos e contribuições, Halyson Irene, Paulo Alexandre, Eraldo Almeida e Allan George, e também na suplência Leandro de Freitas.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro.

“Nunca desista dos teus sonhos, por mais que sejam difíceis de conseguir. Quando Deus te promete algo, ele nunca deixa de cumprir”.

Antonio Nilson Júnior.

Resumo

Neste trabalho investigamos alguns sólitons geométricos no sentido de obter classificações, trivialidades e isometrias. Inicialmente apresentamos alguns tensores e fluxos geométricos já conhecidos na literatura e dedicamos uma seção ao tensor de Cotton-York e suas propriedades. Nas demais seções do capítulo definimos alguns sólitons geométricos que serão objetos do nosso estudo tais como: os sólitons de Ricci Bourguignon (sólitos ρ -Einstein), sólitos de Cotton e q -sólitos. Baseado nos q -sólitos, ainda abordamos casos particulares como: sólitos de Bach e sólito de obstrução ambiente.

Em seguida apresentamos os resultados de trivialidade para os sólitos de Ricci-Bourguignon com condições convenientes na curvatura de Ricci, na função potencial e com valores de ρ em intervalos adequados. No capítulo seguinte também obtivemos resultados de trivialidade para os sólitos de Cotton completos e não compactos, que são definidos exclusivamente em dimensão 3, e o tensor associado é uma versão do tensor de Cotton conhecido como tensor de Cotton-York, o qual verifica-se ter uma relação de equivalência entre a sua nulidade e a planitude local conforme da variedade em dimensão 3. Então, para conseguir tais resultados, aplicamos técnicas similares às utilizadas para os sólitos ρ -Einstein, tais como: princípios do máximo no infinito e com crescimento de volume polinomial.

Finalmente, num contexto mais geral, estudamos um sólito generalizado chamado q -sólito, que é uma solução auto-similar do q -fluxo, onde q é um $(0, 2)$ -tensor simétrico. Dentre as condições impostas, supomos uma identidade tipo Bianchi para obter resultados de classificação, trivialidade e isometrias e os quais aplicamos aos sólitos que vem a ser casos particulares.

Palavras-chave: q -sólito. q -fluxo. Sólito de Cotton. Sólito de Ricci-Bourguignon. Sólito de Ricci. Sólito de obstrução ambiente. Sólito de Bach.

Abstract

In this work we investigate some geometric solitons in order to obtain classifications, trivialities and isometries. We present some tensors and geometric flows already known in the literature and initially dedicate a section to the Cotton-York tensor and its properties. In the remaining statements of the chapter we define some geometric solitons that will be the object of our study, such as: Ricci Bourguignon solitons (ρ -Einstein solitons), Cotton solitons and $\mathbf{q}$ -solitons. Based on the $\mathbf{q}$ -solitons, we also address particular cases such as: Bach solitons and environmental interference soliton.

Then we presented the triviality results for Ricci-Bourguignon solitons with convenient conditions on the Ricci curvature, on the potential function and with values of ρ in suitable functions. In the next chapter we also obtained triviality results for the complete and non-compact Cotton solitons, which are defined exclusively in dimension 3, and the associated tensor is a version of the Cotton tensor known as the Cotton-York tensor, which turns out to have an equivalence relation between its nullity and the conformal local flatness of the manifold in dimension 3. Then, to obtain such results, we apply techniques similar to those used for the ρ -Einstein solitons, such as: principles of maximum at infinity and with polynomial volume growth.

Finally, in a more general context, we study a generalized soliton called $\mathbf{q}$ -soliton, which is a self-similar solution of the $\mathbf{q}$ -flux, where $\mathbf{q}$ is a symmetric $(0, 2)$ -tensor. Among the conditions imposed, we assume a Bianchi-type identity to obtain classification, triviality and isometric results, which apply to solitons that turn out to be particular cases.

Key-words: $\mathbf{q}$ -soliton. $\mathbf{q}$ -flow. Cotton soliton. Ricci-Bourguignon soliton. Ricci soliton. Ambient Obstruction soliton. Bach soliton.

Sumário

Resumo	7
Abstract	8
Introdução	11
1 Alguns tensores básicos e fluxos relacionados	20
1.1 Fatos preliminares	20
1.2 O $(0, 2)$ - Tensor de Cotton ou Tensor de Cotton-York	24
1.3 Fluxo generalizado e suas soluções sólitons	30
1.4 Fluxo de Cotton	31
1.5 Fluxo de Ricci	33
1.6 Fluxo de Ricci-Bourguignon	34
1.7 Fluxo de Bach	36
1.8 Fluxo de Obstrução Ambiente	38
2 Sólitons ρ-Einstein	41
2.1 Sólitons ρ -Einstein via Convergência para zero no infinito	41
2.2 Sólitons ρ -Einstein via Crescimento de Volume Polinomial	43
2.3 Sólitons ρ -Einstein via Completude Estocástica	45
2.4 Um resultado para sólitons de Ricci sem traço	48
3 Alguns resultados em Sólitons de Cotton	50
3.1 Sólitons de Cotton via curvatura de Ricci	50
3.2 Sólitons de Cotton via princípios do máximo	57
3.3 Sólitons de Cotton via Completude Estocástica	60

Sumário	10
4 Sólitons generalizados ou q-sólitons	62
4.1 q -sólitons com traço não positivo e ou não negativo	62
4.2 Algumas aplicações à tensores especiais	66
4.3 q -sólitons via campo conforme	69
Referências Bibliográficas	76

Introdução

Os fluxos geométricos têm sido objeto de pesquisa de muitos matemáticos da área, desde que se popularizou com o fluxo de Ricci, apresentado por Hamilton, por suas aplicações matemáticas e em áreas da Física. Isto motivou também vários pesquisadores, à construção de diversos fluxos geométricos, que estão associados a outros tensores, como o fluxo de Ricci-Bourguignon, fluxo de Cotton, fluxo de Bach e o fluxo geométrico generalizado. Os sólitons, como são chamadas as soluções destes fluxos, vem a ser objetos de pesquisa muito interessantes e que também nos motivou a desenvolver este trabalho. A seguir apresentamos alguns dos resultados obtidos sobre estes sólitons geométricos

Iniciamos definindo o fluxo de Ricci-Bourguignon, que será o primeiro tema abordado. Este fluxo foi introduzido por Bourguignon [6], quando deixou em questão a validade do teorema do fluxo local sobre o espaço das métricas, para a aplicação $g \mapsto \text{Ric} - \rho Rg$, onde ρ é uma constante real e R é a curvatura escalar. Tal fluxo é dado pela equação de evolução

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2(\text{Ric} - \rho Rg).$$

Este fluxo generaliza o fluxo de Ricci quando $\rho \neq 0$, embora tenha sido apresentado um anos antes do trabalho de Hamilton [38].

Na aplicação acima, note que alguns tensores especiais aparecem na equação do fluxo, para determinados valores de ρ . Por exemplo, para $\rho = \frac{1}{2}$, temos o tensor de Einstein $\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg$, para $\rho = \frac{1}{n}$, temos o tensor de Ricci sem traço $\text{Ric} - \frac{1}{n}Rg$, para $\rho = \frac{1}{2(n-1)}$, temos o tensor de Schouten $\text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)}g$ e para $\rho = 0$, temos o tensor de Ric. Os sólitons levam o nome destes tensores em particular, como será definido no Capítulo 1.

As soluções auto-similares deste fluxo são chamados *sólitons de Ricci-Bourguignon* ou *sólitons ρ -Einstein* que definiremos a seguir.

Definição 0.0.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é chamada um sóliton ρ -Einstein,*

se existe um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M^n)$ tal que

$$\text{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g + \rho Rg, \quad (1)$$

onde Ric é o tensor curvatura de Ricci, $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g na direção de X , R é a curvatura escalar e λ é uma constante real e denotamos por (M^n, g, f, ρ) .

Os sólitons de Ricci-Bourguignon têm sido objeto de estudo recente, de pesquisadores da área e alguns resultados já foram obtidos no sentido de trivialidade, isometrias e rigidez. No caso em que a variedade é compacta, Catino e Mazzieri [13], mostraram que os sólitons gradiente de Einstein, Ricci sem traço e Schouten são triviais, isto é, ∇f é paralelo. No caso completo, mostraram que o sólito de Schouten estático ($\lambda = 0$) também é trivial. Mostraram também, que todo sólito de Schouten gradiente completo, contrátil, de dimensão três, é isométrico a um quociente finito de S^3 , ou $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R} \times S^2$. Gosh [32], estendeu o resultado de Catino para o caso geral, mostrando que os sólitons de Einstein e Ricci sem traço são triviais. Dwivedi [29], provou que não existe sólito de Ricci-Bourguignon completo e não compacto não trivial com campo conforme e, no caso compacto, um sólito de Ricci-Bourguignon com campo conforme é trivial.

Os resultados apresentados neste trabalho, sobre os sólitons ρ -Einstein, foram estudados no caso dos sólitons gradiente completos. Todos os resultados encontram-se publicados no trabalho Cunha et al. [24].

Supondo a variedade completa e não compacta, considerando ρ em intervalos adequados e sinal na curvatura de Ricci, podemos aplicar um princípio do máximo no infinito de Alías et al. [1], para obter o seguinte resultado.

Teorema 0.0.1. *Seja (M^n, g, f, ρ) um sólito ρ -Einstein gradiente, completo e não compacto, tal que $|\nabla f|$ converge para zero no infinito. Se vale um dos seguintes itens*

(i) *ou a curvatura de Ricci é não positiva e $\rho > \frac{1}{2}$ ou $\rho < \frac{1}{2(n-1)}$; ou*

(ii) *a curvatura de Ricci é não negativa e $\frac{1}{2(n-1)} < \rho < \frac{1}{2}$,*

então (M^n, g, f, ρ) é trivial e a curvatura escalar R é constante.

Usando uma técnica similar, agora supondo o crescimento de volume polinomial da variedade e adicionando condições de regularidade na função potencial, aplicamos um princípio do máximo com crescimento de volume polinomial de Alías et al. [2], e obtivemos o seguinte:

Teorema 0.0.2. *Seja (M^n, g, f, ρ) um sóliton ρ -Einstein gradiente, completo e não compacto tal que (M^n, g) tem crescimento de volume polinomial e $|\nabla f|, |\text{Hess}(f)| \in L^\infty(M)$. Se vale um dos seguintes itens*

- (i) *ou $\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leq -\alpha|\nabla f|^2$ e $\rho > \frac{1}{2}$ ou $\rho < \frac{1}{2(n-1)}$; ou*
- (ii) *$\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq \alpha|\nabla f|^2$ e $\frac{1}{2(n-1)} < \rho < \frac{1}{2}$,*

para alguma constante positiva $\alpha \in \mathbb{R}$, então o sóliton é trivial e a curvatura escalar R é constante.

Com as mesmas condições de curvatura e valores de ρ , supomos a completude estocástica da variedade, a qual, tal condição usamos ser equivalente ao princípio do máximo fraco de Omori-Yau para obter o resultado a seguir.

Teorema 0.0.3. *Seja (M^n, g, f, ρ) um sóliton ρ -Einstein gradiente, estocasticamente completo e tal que $|\nabla f| \in L^\infty(M)$. Se vale um dos seguintes itens*

- (i) *ou $\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leq -\alpha|\nabla f|^2$ e $\rho > \frac{1}{2}$ ou $\rho < \frac{1}{2(n-1)}$; ou*
- (ii) *$\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq \alpha|\nabla f|^2$ e $\frac{1}{2(n-1)} < \rho < \frac{1}{2}$,*

para alguma constante positiva $\alpha \in \mathbb{R}$, então (M^n, g, f, ρ) é trivial e a curvatura escalar R é constante.

Por fim, provamos um resultado para o caso particular dos sólitons de Ricci sem traço gradiente, com curvatura seccional não negativa e aqui aplicaremos um resultado de Karp [43], para funções subharmônicas.

Teorema 0.0.4. *Seja $(M^n, g, f, \frac{1}{n})$ um sóliton de Ricci sem traço gradiente, completo e não compacto, com curvatura seccional não negativa e tal que o gradiente de f satisfaz*

$$\int_M |\nabla f|^{\frac{n}{n-1}} < +\infty.$$

Então $(M^n, g, f, \frac{1}{n})$ é trivial e estático ($\lambda = 0$).

No Capítulo 3 abordamos os sólitons de Cotton, que são soluções auto-similares do fluxo de Cotton, introduzido por Kisisel et al. [44]. Os autores consideraram a equação de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \kappa C_g, \tag{2}$$

onde k é uma constante positiva e C_g é o $(0, 2)$ tensor de Cotton-York de (M, g) , definido por

$$C_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{g}} C_{lmi} \epsilon^{lmn} g_{nj},$$

onde ϵ^{lmn} é o tensor densidade totalmente antisimétrico tal que $\epsilon^{123} = 1$. O fluxo é definido em dimensão 3, e a generalização do fluxo para dimensão $n > 3$ e o problema de existência de curto tempo para o fluxo, ainda estão em aberto. Uma das motivações para o estudo deste fluxo é encontrar métricas conformemente planas. Será mostrado no Capítulo 1, que o tensor de Cotton-York ser nulo é equivalente a variedade ser localmente conformemente plana.

As soluções auto-similares deste fluxo, ou pontos fixos do fluxo são chamados *sólitons de Cotton* e serão definidos como segue.

Definição 0.0.2. *Uma variedade Riemanniana (M^3, g) é chamada um sóliton de Cotton, se existe um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M^3)$ tal que*

$$C + \mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{3}$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g na direção de X e λ é uma constante real e denotaremos por (M, g, X) .

Um sóliton de Cotton é *trivial* quando X é um campo vetorial de Killing, ou seja, $\mathcal{L}_X g = 0$. No caso de um sóliton gradiente, quando $X = \nabla f$ para alguma função suave sobre M , o sóliton é *trivial* se f é constante.

Calviño-Louzao, García-Río e Vázquez-Lorenzo [14], mostraram que todo sóliton de Cotton compacto é trivial. Além disso, eles conseguiram mostrar a existência de sólitons de Cotton (completos) não triviais contráteis ($\lambda > 0$). Este exemplo será apresentado na seção sobre fluxo de Cotton, no Capítulo 1.

Desde que todo sóliton de Cotton compacto é trivial, investigamos classificações e a trivialidade de tais sólitons, no caso em que a variedade é completa e não compacta. Utilizando técnicas similares as aplicadas para os sólitons de Ricci-Bourguignon, obtivemos alguns resultados de trivialidade para os sólitons de Cotton, em particular em todos os resultados obtemos que a variedade é localmente conformemente plana. Todos os resultados sobre os sólitons de Cotton, apresentados neste trabalho, encontram-se publicados no trabalho de Cunha e Silva Júnior [22].

O primeiro resultado obtido, adicionando uma condição na curvatura de Ricci que implica a existência de funções *cut-off* e integral de Dirichlet finita, obtemos no caso gradiente o primeiro resultado.

Teorema 0.0.5. *Seja (M^3, g, f) um sólito de Cotton gradiente, completo e não compacto e tal que o tensor de Ricci satisfaz*

$$\text{Ric} \geq -\frac{2k^2}{1+r^2}g, \quad (4)$$

no sentido de formas quadráticas, onde r é a função distância de um ponto fixado x_0 . Se f tem uma integral de Dirichlet com peso finita, isto é, se para alguma bola $B_{r_0}(x_0)$,

$$\int_{M-B_{r_0}} r(x, x_0)^{-2} |\nabla f|^2 < +\infty, \quad (5)$$

então (M^3, g) é localmente conformemente plana.

Supondo a variedade ser parabólica, obtivemos o seguinte resultado no caso gradiente.

Teorema 0.0.6. *Seja (M^3, g, f) um sólito de Cotton gradiente, completo e não compacto. Se, ou M^3 é parabólica e $|\nabla f| \in L^\infty(M^3)$ ou $\nabla f \in L^p(M^3)$ para $p > 1$, então (M^3, g) é localmente conformemente plana.*

Análogo ao resultado obtido para o sólitos de Ricci-Bourguignon, um sólito de Cotton genérico com $|X|$ convergindo para zero no infinito e curvatura de Ricci não positiva deve ser trivial.

Teorema 0.0.7. *Seja (M^3, g, X) um sólito de Cotton, completo e não compacto com curvatura de Ricci não positiva. Se $|X|$ converge para zero no infinito, então o sólito é trivial e (M^3, g) é localmente conformemente plana.*

Também obtemos um resultado similar, de trivialidade, aplicando um princípio do máximo com crescimento de volume polinomial.

Teorema 0.0.8. *Seja (M^3, g, X) um sólito de Cotton, completo e não compacto, cuja curvatura de Ricci satisfaz $\text{Ric} \leq -\alpha g$ para alguma constante positiva α . Se (M^3, g) tem crescimento de volume polinomial e $|X|, |\nabla X| \in L^\infty(M^3)$, então o sólito é trivial e localmente conformemente plano.*

Mais resultados foram obtidos, tanto no caso gradiente quanto no caso genérico, para os sólitons de Cotton, que apresentamos no Capítulo 3.

Aplicando um resultado de Cheng, Kiohama e Ishikawa [18] a vários resultados dos sólitons de Cotton, temos a seguinte consequência, que é um resultado de isometria enunciada aqui de forma resumida de acordo com os resultados apresentados nesta introdução.

Corolário 0.0.1. *Em todos os resultados anteriores para os sólitons de Cotton, suponha em adição que o sólito de Cotton tem curvatura escalar constante R e norma ao quadrado do tensor curvatura de Ricci constante. Nos Teoremas 0.0.7 e 0.0.8 concluímos que ou M^3 é isométrica a um espaço forma ou a norma ao quadrado da curvatura de Ricci de M^3 está em $\left(\frac{R^3}{2}, \frac{R^2}{2}\right]$.*

Num sentido mais geral no capítulo 4, estudamos os q -sólitos, que são soluções do fluxo geométrico generalizado, chamado q -fluxo. Obtemos vários resultados de classificação e trivialidades, e aplicamos à alguns sólitons geométricos que vem a ser casos particulares deste sólito generalizado, tais como sólitons de Ricci, ρ -Einstein, Cotton, Bach e Obstrução Ambiente. Estes resultados podem ser encontrados no trabalho feito em parceria de Cunha, Silva Júnior e Poddar [25].

O fluxo geométrico generalizado para um tensor geral $q(g)$ simétrico chamado q -fluxo, é uma família a um parâmetro de métricas suaves tais que

$$\begin{cases} \partial_t g = q(g), \\ g(0) = h, \end{cases} \quad (6)$$

onde h é uma métrica inicial. Um trabalho inicial sobre este fluxo e seus sólitons foi iniciado por Lauret [46], onde ele prova existência e unicidade de soluções para este fluxo, sobre variedades homogêneas. Griffin [34], apresentou uma prova explícita da existência de curto tempo para o q -fluxo no caso de um sólito gradiente.

As soluções auto-similares do q -fluxo são chamados q -sólitos e Griffin [34], fazendo uma reescalagem da métrica, definiu da seguinte forma:

Definição 0.0.3. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é um q -sólito, se existe um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M^n)$ tal que*

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g + \frac{1}{2}q, \quad (7)$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g na direção de X , λ é uma constante real e denotaremos por (M^n, g, X) .

Em relação a trivialidade do sólito, chamaremos de *estacionário* se X for um campo vetorial de Killing ou no caso gradiente, se a função potencial for constante. O sólito é chamado *q-plano* se $q = 0$. Por fim, diremos que um *q-sólito* é *trivial* se for ambos estacionário e *q-plano*.

Note que, definindo $q = 2(\rho Rg - \text{Ric})$, um *q-sólito* é um sólito de Ricci-Bourguignon, e para $q = -2C$, onde C é o tensor de Cotton-York, então será um sólito de Cotton. Na sequência, definiremos brevemente os sólitons de Bach e sólitons de obstrução ambiente.

Os sólitons de Bach são soluções auto-similares do fluxo de Bach, introduzido por Das e Kar [26], quando consideraram o fluxo dado pela equação de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -B, \quad (8)$$

onde B é o tensor de Bach.

Definição 0.0.4. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é um sólito Bach, se existe um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M^n)$ tal que*

$$B + \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g = \lambda g, \quad (9)$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g na direção de X e uma constante real λ e denotaremos por (M^n, g, X) .

Veja que o sólito de Bach é um *q-sólito*, com $q = -2B$.

O *fluxo de obstrução ambiente* foi introduzido por Bahuaud e Helliwell [7], onde mostraram a existência de curto tempo deste fluxo, dado pela equação de evolução

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \mathcal{O}_n + c_n (-1)^{\frac{n}{2}} (\Delta^{\frac{n}{2}-1} R) g, \\ g(0) = h, \end{cases} \quad (10)$$

onde c_n é uma constante e $\mathcal{O}_n$ é o tensor de obstrução ambiente. O *tensor de obstrução ambiente* foi introduzido por Graham e Fefferman [30], e possui as propriedades de ser simétrico, traço nulo e livre de divergência. Mais detalhes sobre este tensor será apresentado no Capítulo 1.

As soluções auto-similares do fluxo de obstrução ambiente, são chamados *sólitons de obstrução ambiente*.

Definição 0.0.5. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é um sólito de obstrução ambiente, se existe um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M^n)$ tal que*

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_X g = \lambda g + \frac{1}{2} (\mathcal{O}_n + c_n (-1)^{\frac{n}{2}} (\Delta^{\frac{n}{2}-1} R) g), \quad (11)$$

onde $\mathcal{L}_X \mathbf{g}$ é a derivada de Lie de $\mathbf{g}$ na direção de X e uma constante real λ e denotaremos por $(M^n, \mathbf{g}, X)$.

Um sóliton de obstrução ambiente é um $\mathbf{q}$ -sóliton, com $\mathbf{q} = \mathcal{O}_n + \mathbf{c}_n(-1)^{\frac{n}{2}}(\Delta^{\frac{n}{2}-1}\mathbf{R})\mathbf{g}$.

Pesquisas recentes sobre os $\mathbf{q}$ -sólitons têm tido alguns avanços. Griffin [34], provou no caso em que a variedade é compacta que todo $\mathbf{q}$ -sóliton compacto onde $\mathbf{q}$ é livre de traço e de divergente, é $\mathbf{q}$ -plano. Este resultado generaliza o caso em que todo sóliton de Ricci compacto com curvatura escalar constante é Einstein e, além disso, provou que todo $\mathbf{q}$ -sóliton gradiente compacto com traço de $\mathbf{q}$ nulo, é $\mathbf{q}$ -plano. Como aplicações, ela obteve alguns outros resultados, no caso dos sólitons de obstrução ambiente e sólitons de Bach. Seguindo para o caso completo e não compacto, recentemente, Cunha e Griffin [23], obtiveram alguns resultados de classificação e trivialidade para $\mathbf{q}$ -sólitons impondo certas obstruções de regularidade da função potencial e curvatura de Ricci.

No Capítulo 4, apresentamos os resultados de classificação e trivialidade para os $\mathbf{q}$ -sólitons e consequências aplicadas aos sólitons que vem a ser casos particulares. No primeiro resultado, supomos um sóliton em que o tensor $\mathbf{q}$ tem traço não positivo e certas condições adicionais, para concluir ser trivial.

Teorema 0.0.9. *Seja $(M^n, \mathbf{g}, f)$ um $\mathbf{q}$ -sóliton gradiente completo não contrátil ($\lambda \leq 0$) para o $\mathbf{q}$ -fluxo, tal que $\mathbf{q}$ tem traço não positivo. Se $|\nabla f| \in L^1(M^n)$ então M^n é estática e traço de $\mathbf{q}$ é nulo. Se ao invés da regularidade $L^1(M^n)$, supormos $f \geq k$ para alguma constante real $k > 0$ e vale qualquer um dos itens*

- (i) M^n é parabólica,
- (ii) $\frac{1}{f} \in L^p(M^n)$ para algum $p > 1$,
- (iii) M^n tem crescimento de volume linear,

então o sóliton é trivial.

Em contrapartida, supomos um sóliton com tensor de traço não negativo e concluiremos que o traço deve ser nulo. A técnica é similar a utilizada para os sólitons de Cotton.

Teorema 0.0.10. *Seja $(M^n, \mathbf{g}, f)$ um $\mathbf{q}$ -sóliton gradiente não expansivo ($\lambda \geq 0$) para o $\mathbf{q}$ -fluxo, tal que o tensor $\mathbf{q}$ tem traço não negativo. Além disso suponha que a curvatura de Ricci de $(M^n, \mathbf{g})$ satisfaz*

$$\text{Ric} \geq -(n-1) \frac{k^2}{1+r^2} \mathbf{g},$$

no sentido de formas quadráticas. Se a função potencial f é positiva e tem integral de Dirichlet finita

$$\int_{M-B_r} d(x, x_0)^{-2} f < \infty,$$

então o traço de q é nulo.

Obtivemos também resultados para q -sólitos com campo potencial conforme e satisfazendo uma relação entre o traço e o divergente

$$\operatorname{div}(q) = \frac{1}{2} \nabla \operatorname{tr}(q). \quad (12)$$

A primeira análise, foi sobre um q -sóliton com curvatura escalar constante, satisfazendo a condição acima, então vale o seguinte:

Teorema 0.0.11. *Seja (M^n, g, X) , $n > 2$, um q -sóliton conexo satisfazendo (12) e com curvatura escalar constante não nula. Se X é campo vetorial conforme, então X é um campo vetorial de Killing.*

Também conseguimos um resultado de isometria o qual aplicamos um resultado devido a Yano e Nagano [56], para mostrar que um q -sóliton com campo conforme não isométrico (não Killing), deve ser isométrico ao espaço Euclidiano.

Teorema 0.0.12. *Seja (M^n, g, X) , $n > 2$, um q -sóliton completo e não compacto, simplesmente conexo, satisfazendo (12) e X é um campo vetorial conforme não isométrico (isto é, não Killing). Então (M^n, g) é isométrico ao espaço Euclidiano.*

Aplicamos este resultado aos sólitos de Ricci, sólitos de Cotton, sóliton de Bach e sólitos de obstrução ambiente.

Por fim, obtivemos um outro resultado de classificação no qual um q -sóliton compacto com campo conforme e satisfazendo (12), implica que deve ser q -plano, ou seja, $q = 0$.

Teorema 0.0.13. *Seja (M^n, g, X) um q -sóliton compacto satisfazendo (12). Se X é um campo vetorial conforme, então X é um campo vetorial de Killing. Em adição se q tem traço nulo, então (M^n, g) deve ser q -plano.*

Capítulo 1

Alguns tensores básicos e fluxos relacionados

Neste capítulo apresentamos alguns tensores básicos e fatos já conhecidos na literatura, alguns fluxos geométricos e suas soluções sólitons que serão nosso objeto de estudo. Em especial, definimos o $(0, 2)$ -tensor de Cotton, conhecido como tensor de Cotton-York, que é uma versão do $(0, 3)$ -tensor de Cotton e, possui as propriedades de ser simétrico, traço nulo, divergente nulo e uma relação de equivalência com a planitude local conforme da variedade Riemanniana.

1.1 Fatos preliminares

Seja M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n , com métrica g e conexão Riemanniana ∇ . Assumiremos que o leitor tenha uma boa noção de propriedades básicas sobre conexão Riemanniana. As definições de curvatura a seguir, foram enunciadas de acordo com [47].

A seguir definiremos o tensor *endormorfismo curvatura* sobre uma variedade Riemanniana (M^n, g) .

Definição 1.1.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. A aplicação $R : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)$ definida por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

é uma aplicação multilinear sobre $\mathcal{C}^\infty(M^n)$ e portanto é um campo $(1, 3)$ tensorial sobre

M^n . Em coordenadas, o tensor endomorfismo curvatura pode ser escrito como

$$R = R_{ijk}^l dx^i \otimes dx_j \otimes dx_k \otimes \partial_l,$$

e os coeficientes definidos por $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l$.

O tensor endomorfismo curvatura pode ser escrito na versão $(0, 4)$ -tensor covariante, baixando o índice contravariante.

Definição 1.1.2. *O tensor curvatura de Riemann é definido por*

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Em coordenadas locais pode ser escrito como

$$Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx_j \otimes dx_k \otimes dx_l,$$

onde a relação $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^m$ é satisfeita.

Vamos definir o tensor curvatura de Ricci, que é obtido calculando o traço do tensor endomorfismo curvatura e denotaremos por Ric .

Definição 1.1.3. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Definimos o tensor curvatura de Ricci por*

$$Ric(X, Y) = \text{tr}((Z) \mapsto R(Z, X)Y).$$

Em coordenadas tem-se que $(Ric)_{ij} = g^{km} R_{kijm}$. Também denotaremos a curvatura de Ricci em coordenadas por R_{ij} .

A seguinte identidade conhecida como Identidade de Ricci também será útil neste trabalho.

Proposição 1.1.1 (Identidade de Ricci, [42]). *Vale a seguinte identidade para o tensor curvatura de Ricci*

$$\nabla_l \nabla_k R_{ij} - \nabla_k \nabla_l R_{ij} = \Sigma_\alpha R_{i\alpha} R_{jkl}^\alpha + \Sigma_\alpha R_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha.$$

A curvatura escalar de uma variedade Riemanniana é definida como o traço da curvatura de Ricci.

Definição 1.1.4. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. A função curvatura escalar $R : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por*

$$R = \text{tr}_g(\text{Ric}) = R_i^i = g^{ij}R_{ij}.$$

Agora passaremos a algumas definições de tensores que serão utilizados nos resultados dos próximos capítulos, que são o tensor de Schouten e o tensor de Weyl, que aparecem na decomposição ortogonal do tensor curvatura de Riemann.

Definição 1.1.5. *O tensor de Schouten com relação a métrica g , é um $(0, 2)$ -tensor simétrico definido por*

$$A = \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)}g \right).$$

Definição 1.1.6. *O tensor de Weyl com relação a métrica g , é um $(0, 4)$ -tensor covariante definido por*

$$\begin{aligned} W &= Rm - A \otimes g \\ &= Rm - \frac{1}{n-2} \text{Ric} \otimes g + \frac{R}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g, \end{aligned}$$

onde $\otimes$ denota o produto de Kulkarni-Nomizu. Em coordenadas, o tensor de Weyl pode ser escrito como

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2} (R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}).$$

Em dimensão três, o tensor de Weyl é nulo, logo pela decomposição ortogonal da curvatura de Riemann podemos expressar a curvatura de Riemann em termos da curvatura de Ricci e curvatura escalar.

Lema 1.1.1. *Em dimensão 3, a curvatura de Riemann pode ser expressa em termos da curvatura de Ricci e curvatura escalar, pela expressão*

$$R_{jkl}^i = R_k^i g_{jl} + R_{jl} \delta_k^i - R_{jk} \delta_l^i - R_l^i g_{jk} + \frac{R}{2} (g_{jl} \delta_k^i - g_{jk} \delta_l^i).$$

Um outro tensor que usamos para a obtenção dos resultados é o tensor de Cotton, que é definido em termos do tensor de Schouten.

Definição 1.1.7. *O $(0, 3)$ -tensor de Cotton, é definido em coordenadas por*

$$C_{ijk} = \nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik},$$

onde A é o tensor de Schouten.

O tensor de Cotton satisfaz algumas propriedades que nos serão úteis.

Proposição 1.1.2 ([3]). *O $(0, 3)$ -tensor de Cotton satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) $C_{ijk} = -C_{jik}$
- ii) $g^{ij}C_{ijk} = g^{ik}C_{ijk} = g^{jk}C_{ijk} = 0$
- iii) $C_{ijk} + C_{jki} + C_{kij} = 0$.

Proposição 1.1.3 ([47]). *O tensor de Cotton é invariante conforme em dimensão três, isto é, se $\tilde{g} = e^{f^2}g$ então $C(\tilde{g}) = C(g)$.*

Para trabalhar em nossos resultados, precisamos conhecer a definição de campo conforme e em particular o campo de Killing e campo homotético. Esses conceitos aparecem nas definições de trivialidade dos sólitons que estudaremos e em mais resultados que a condição de campo conforme é suposta.

Definição 1.1.8. *Um campo vetorial suave X sobre M é dito ser conforme se satisfaz*

$$\mathcal{L}_X g = 2\psi g, \tag{1.1}$$

para alguma função suave ψ sobre M . Além disso, X é dito ser homotético se ψ é constante e Killing se $\psi = 0$.

Os tensores de Weyl e Cotton são importantes na análise da planitude conforme local de uma variedade Riemanniana. Antes, vamos definir uma variedade localmente conformemente plana, baseado em [19].

Definição 1.1.9 ([19]). *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) de dimensão $n \geq 2$, é dita ser localmente conformemente plana se, para cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de p e uma função conforme ψ tal que $g_{ij} = \psi \delta_{ij}$ na vizinhança V , onde δ_{ij} é a métrica canônica do espaço Euclidiano*

A planitude local conforme, pode ser analisada de acordo com a nulidade do tensor de Cotton ou tensor de Weyl, como garante o seguinte Teorema.

Teorema 1.1.1 (Weyl-Schouten, [47]). *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é localmente conformemente plana se, e somente se,*

- i) *o tensor de Weyl é nulo em dimensão $n \geq 4$,*
- ii) *o tensor de Cotton é nulo em dimensão $n = 3$.*

1.2 O $(0, 2)$ - Tensor de Cotton ou Tensor de Cotton-York

O tensor de Cotton-York foi introduzido a primeira vez por York [57] onde estudou problemas relacionados à Física. Ele definiu o $(2, 0)$ -tensor em dimensão 3, da seguinte forma

$$C^{ij} = \frac{\epsilon^{lmj}}{\sqrt{g}} \nabla_l \left(R_m^i - \frac{R}{4} \delta_m^i \right), \quad (1.2)$$

onde ϵ^{ijk} é o tensor densidade totalmente anti-simétrico tal que $\epsilon^{123} = 1$ e $g = |\det g_{ij}|$. C^{ij} é simétrico, tem traço nulo e divergente nulo. Também podemos definir este tensor pela seguinte expressão

$$C_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{g}} C_{lmi} \epsilon^{lmn} g_{nj}, \quad (1.3)$$

onde C_{lmi} é o $(0, 3)$ -tensor de Cotton, subindo os índices covariantes em (1.2). Este tensor também pode ser encontrados em trabalhos da Física, como por exemplo [28].

Umehara [53], apresentou as seguintes propriedades do tensor densidade ϵ^{ijk} em dimensão 3, e que serão úteis para o cálculo da simetria e do divergente do tensor de Cotton-York.

Proposição 1.2.1 (Umehara, [53]). *O tensor densidade totalmente anti-simétrico ϵ^{ijk} , satisfaz as propriedades em dimensão 3:*

- i) $\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon^{ilm} = \delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l,$
- ii) $\sum_{ij} \epsilon_{ijk} \epsilon^{ijl} = 2\delta_k^l,$
- iii) $\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \epsilon^{ijk} = 6.$

Observação 1.2.1. *Note na proposição acima, os índices inferiores de ϵ_{ijk} , estão relacionados ao tensor densidade covariante, e os índices superiores de ϵ^{ijk} , estão relacionados ao tensor densidade contravariante.*

A seguinte relação entre os tensores de Cotton e Cotton-York pode ser verificada no trabalho de Umehara [53].

Proposição 1.2.2. *Os tensores de Cotton e Cotton-York satisfazem a seguinte relação:*

$$\frac{1}{\sqrt{g}}C_{ijm} = \Sigma_{l,k}\epsilon_{ijl}g^{lk}C_{mk}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\Sigma_{l,k}\epsilon_{ijl}g^{lk}C_{mk} &= \Sigma_{l,k}\frac{1}{2\sqrt{g}}\epsilon_{ijl}g^{lk}(C_{pqm}\epsilon^{pqn}g_{nk}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g}}\Sigma_l[C_{pqm}\epsilon_{ijl}\epsilon^{pqn}\Sigma_k(g^{lk}g_{nk})] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g}}\Sigma_l[C_{pqm}\epsilon_{ijl}\epsilon^{pqn}\delta_n^l] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g}}\Sigma_l[C_{pqm}\epsilon_{ijl}\epsilon^{pq l}] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g}}C_{pqm}(\delta_i^p\delta_j^q - \delta_i^q\delta_j^p) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g}}\{C_{pqm}\delta_i^p\delta_j^q - C_{pqm}\delta_i^q\delta_j^p\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g}}\{C_{ijm} - C_{jim}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}C_{ijm}.\end{aligned}$$

□

Como consequência direta desta relação, se o tensor de Cotton-York for nulo, então a variedade será localmente conformemente plana. Assim, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.3. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana. Então (M^3, g) é localmente conformemente plana se, e somente se, o tensor de Cotton-York é nulo.*

Demonstração. De fato, se uma variedade (M^3, g) é localmente conformemente plana, pelo Teorema 1.1.1 o $(0, 3)$ -tensor de Cotton C é nulo. Pela definição do tensor de Cotton-York, temos $C_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{g}}C_{lmi}\epsilon^{lmn}g_{nj}$, logo ele será nulo. Se o tensor de Cotton-York é nulo, $C = 0$, pelo Lema 1.2.2 tem-se $\frac{1}{\sqrt{g}}C_{ijm} = \Sigma_{l,k}\epsilon_{ijl}g^{lk}C_{mk}$, logo o $(0, 3)$ -tensor de Cotton será nulo, donde a variedade será localmente conformemente plana. □

Precisamos do próximo fato, adaptado de [31], para mostrar a simetria do tensor de Cotton-York.

Lema 1.2.1. *Seja ϵ_{ijk} o tensor densidade totalmente anti-simétrico e E^{ij} um $(2,0)$ -tensor contravariante geral. Então $\epsilon_{ijk}E^{ij} = 0, \forall k$ se, e somente se, E^{ij} é simétrico.*

Demonstração. Suponha que $\Sigma_{ij}\epsilon_{ijk}E^{ij} = 0$. Podemos usar a antisimetria de ϵ para reescrever a identidade da seguinte forma $\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\epsilon_{ijk}E^{ij} - \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\epsilon_{jik}E^{ij} = 0$. Renomeando os índices no segundo termo, temos que $\Sigma_{ij}\epsilon_{ijk}(E^{ij} - E^{ji}) = 0, \forall k$. Desde que $\epsilon_{ijk} = 1, -1$ ou 0 , segue daí que E é simétrico. Suponha que E^{ij} é simétrico. Temos que

$$\Sigma_{ij}\epsilon_{ijk}E^{ij} = \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\epsilon_{ijk}E^{ij} - \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\epsilon_{jik}E^{ji} = \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\epsilon_{ijk}E^{ij} - \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\epsilon_{ijk}E^{ij} = 0,$$

$\forall k$, onde reescrevemos os índices i, j no segundo termo. □

A próxima proposição foi feita baseado em [31].

Proposição 1.2.4. *O tensor de Cotton-York é simétrico.*

Demonstração. Vamos aplicar o Lema 1.2.1, considerando o tensor densidade totalmente anti-simétrico ϵ_{ijk} e o $(2,0)$ -tensor $C^{ij} = \frac{\epsilon^{lmj}}{\sqrt{g}}\nabla_l(R_m^i - \frac{R}{4}\delta_m^i)$. Temos que

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}\epsilon^{ijk}C^{ij} &= \Sigma_{ij}\epsilon_{ijk}\frac{\epsilon^{lmj}}{\sqrt{g}}\nabla_l\left(R_m^i - \frac{R}{4}\delta_m^i\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Sigma_i\left\{(\Sigma_j\epsilon_{ijk}\epsilon^{lmj})\nabla_l\left(R_m^i - \frac{R}{4}\delta_m^i\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Sigma_i\left\{(\delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l)\nabla_l\left(R_m^i - \frac{R}{4}\delta_m^i\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Sigma_i\left\{(\delta_i^l\delta_j^m)\nabla_l\left(R_m^i - \frac{R}{4}\delta_m^i\right) - (\delta_i^m\delta_j^l)\nabla_l\left(R_m^i - \frac{R}{4}\delta_m^i\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Sigma_i\left\{(\delta_i^l\delta_j^m)\nabla_i\left(R_j^i - \frac{R}{4}\delta_j^i\right) - (\delta_i^l\delta_j^m)\nabla_j\left(R_i^i - \frac{R}{4}\delta_i^i\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\Sigma_{i,j}\nabla_i\left(R_j^i - \frac{R}{4}\delta_j^i\right) - \Sigma_{i,j}\nabla_j\left(R_i^i - \frac{R}{4}\delta_i^i\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\Sigma_j\frac{1}{2}\nabla_j R - \frac{1}{4}\Sigma_j\nabla_j R - \Sigma_j\nabla_j R + \frac{3}{4}\Sigma_j\nabla_j R\right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 1.2.1, C^{ij} é simétrico. □

Proposição 1.2.5. *O tensor de Cotton-York tem traço nulo.*

Demonstração. Tomando o traço do tensor de Cotton-York, temos que

$$\begin{aligned}
 \text{tr}_g C &= \Sigma_{i,j} g^{ij} C_{ij} \\
 &= \Sigma_{i,j} \frac{1}{2\sqrt{g}} C_{lmi} \epsilon^{lmn} g^{ij} g_{nj} \\
 &= \Sigma_i \frac{1}{2\sqrt{g}} C_{lmi} \epsilon^{lmn} \delta_n^i \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{g}} C_{lmn} \epsilon^{lmn} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{g}} \{C_{1mn} \epsilon^{1mn} + C_{2mn} \epsilon^{2mn} + C_{3mn} \epsilon^{3mn}\} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{g}} \{ [C_{12n} \epsilon^{12n} + C_{13n} \epsilon^{13n}] + [C_{21n} \epsilon^{21n} + C_{23n} \epsilon^{23n}] + [C_{31n} \epsilon^{31n} + C_{32n} \epsilon^{32n}] \} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{g}} \{ [C_{123} \epsilon^{123} + C_{132} \epsilon^{132}] + [C_{213} \epsilon^{213} + C_{231} \epsilon^{231}] + [C_{312} \epsilon^{312} + C_{321} \epsilon^{321}] \} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{g}} \{ [C_{123} - C_{132}] + [-C_{213} + C_{231}] + [C_{312} - C_{321}] \} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \{ C_{123} + C_{231} + C_{312} \} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

O cálculo a seguir é baseado em [31].

Proposição 1.2.6. *O tensor de Cotton-York tem divergente nulo.*

Demonstração. Desde que C^{ij} é simétrico vamos considerar

$$C^{ij} = \frac{\epsilon^{lmj}}{\sqrt{g}} \nabla_l \left(R_m^i - \frac{R}{4} \delta_m^i \right).$$

Usando a antisimetria de ϵ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \sqrt{g} \nabla_i C^{ij} &= \epsilon^{lmj} \nabla_i \nabla_l \left(R_m^i - \frac{1}{4} R \delta_m^i \right) \\
 &= \epsilon^{lmj} \nabla_i \nabla_l (R_m^i) - \frac{\epsilon^{lmj}}{4} \nabla_i \nabla_l (R) \delta_m^i \\
 &= \epsilon^{lmj} \nabla_i \nabla_l (R_m^i) - \frac{\epsilon^{lij}}{4} \nabla_i \nabla_l (R).
 \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon^{lij}}{4} \nabla_i \nabla_l (R) &= \frac{1}{8} [\epsilon^{lij} \nabla_i \nabla_l (R) - \epsilon^{lij} \nabla_l \nabla_i (R)] \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon^{lij} \nabla_i \nabla_l (R) - \epsilon^{lij} \nabla_l \nabla_i (R)] \\
&= \frac{1}{8} \epsilon^{lij} [\nabla_i \nabla_l (R) - \nabla_l \nabla_i (R)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Usando a identidade de Ricci 1.1.1, temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{g} \nabla_i C^{ij} &= \epsilon^{lmj} \nabla_i \nabla_l (R_m^i) \\
&= \epsilon^{lmj} g^{\beta i} \nabla_i \nabla_l (R_{\beta m}) \\
&= \epsilon^{lmj} g^{\beta i} (\nabla_l \nabla_i R_{\beta m} + R_{\beta \alpha} R_{ml}^\alpha + R_{\alpha m} R_{\beta l}^\alpha) \\
&= \epsilon^{lmj} (g^{\beta i} \nabla_l \nabla_i R_{\beta m}) + \epsilon^{lmj} g^{\beta i} (R_{\beta \alpha} R_{ml}^\alpha + R_{\alpha m} R_{\beta l}^\alpha) \\
&= \frac{\epsilon^{lmj}}{2} \nabla_l \nabla_m (R) + \epsilon^{lmj} g^{\beta i} (R_{\beta \alpha} R_{ml}^\alpha + R_{\alpha m} R_{\beta l}^\alpha),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a identidade de Bianchi contraída duas vezes. Analogamente verificamos que $\frac{\epsilon^{lmj}}{2} \nabla_l \nabla_m (R) = 0$.

Prosseguindo o cálculo, usamos o Lema 1.1.1 para obter o seguinte:

$$\begin{aligned}
\sqrt{g} \nabla_i C^{ij} &= \epsilon^{lmj} g^{\beta i} \left\{ R_{\beta \alpha} \left[R_{mi} \delta_l^\alpha - R_{ml} \delta_i^\alpha + g_{mi} R_l^\alpha - g_{ml} R_i^\alpha + \frac{R}{2} (g_{mi} \delta_l^\alpha - g_{ml} \delta_i^\alpha) \right] \right. \\
&\quad \left. + R_{\alpha m} \left[R_{\beta i} \delta_l^\alpha - R_{\beta l} \delta_i^\alpha + g_{\beta i} R_l^\alpha - g_{\beta l} R_i^\alpha + \frac{R}{2} (g_{\beta i} \delta_l^\alpha - g_{\beta l} \delta_i^\alpha) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.2.1, os termos simétricos em (l, m) se anulam quando multiplicados pelo tensor totalmente anti-simétrico ϵ^{lmj} . Assim, seguindo e expandindo os termos obtemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{g} \nabla_i C^{ij} &= \epsilon^{lmj} \left\{ g^{\beta i} R_{\beta \alpha} R_{mi} \delta_l^\alpha + g^{\beta i} R_{\beta \alpha} g_{mi} R_l^\alpha + \frac{R}{2} g^{\beta i} R_{\beta \alpha} g_{mi} \delta_l^\alpha + g^{\beta i} R_{\alpha m} R_{\beta i} \delta_l^\alpha \right. \\
&\quad - g^{\beta i} R_{\alpha m} R_{\beta i} \delta_l^\alpha + g^{\beta i} R_{\alpha m} g_{\beta i} R_l^\alpha - g^{\beta i} R_{\alpha m} g_{\beta l} R_i^\alpha + g^{\beta i} R_{\alpha m} \frac{R}{2} g_{\beta i} \delta_l^\alpha \\
&\quad \left. - g^{\beta i} R_{\alpha m} \frac{R}{2} g_{\beta l} \delta_i^\alpha \right\} \\
&= \epsilon^{lmj} \left\{ R_\alpha^i R_{mi} \delta_l^\alpha + R_{\beta \alpha} \delta_m^\beta R_l^\alpha + \frac{R}{2} R_{\beta \alpha} \delta_m^\beta \delta_l^\alpha + R_{\alpha m} R_i^i \delta_l^\alpha - R_{\alpha m} R_l^i \delta_i^\alpha \right. \\
&\quad \left. + R_{\alpha m} \delta_i^i R_l^\alpha - R_{\alpha m} R_i^\alpha \delta_l^i + \frac{R}{2} R_{\alpha m} \delta_i^i \delta_l^\alpha - \frac{R}{2} R_{\alpha m} \delta_l^i \delta_i^\alpha \right\}.
\end{aligned}$$

Analisando os índices em cada delta de kronecker temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{g}\nabla_i C^{ij} &= \epsilon^{lmj} \left\{ R_l^i R_{mi} + R_{m\alpha} R_l^\alpha + \frac{R}{2} R_{ml} + R R_{ml} - R_{im} R_l^i + \right. \\ &\quad \left. + 3R_{\alpha m} R_l^\alpha - R_{\alpha m} R_l^\alpha + \frac{3R}{2} R_{lm} - \frac{R}{2} R_{lm} \right\}.\end{aligned}$$

Novamente usamos o Lema 1.2.1 para anular os termos simétricos em (k, l) . Assim, somando os termos restantes temos

$$\begin{aligned}\sqrt{g}\nabla_j C^{ij} &= 3\epsilon^{lmj} R_{\alpha m} R_l^\alpha \\ &= 3\epsilon^{lmj} \{R_{\alpha m} g^{\gamma\alpha} R_{\gamma l}\} \\ &= \frac{3}{2} g^{\gamma\alpha} \{ \epsilon^{lmj} R_{\alpha l} R_{\gamma k} - \epsilon^{mlj} R_{\alpha m} R_{\gamma l} \} \\ &= \frac{3}{2} g^{\gamma\alpha} \{ \epsilon^{lmj} R_{\alpha m} R_{\gamma l} - \epsilon^{lmj} R_{\alpha l} R_{\gamma m} \} \\ &= \frac{3}{2} g^{\gamma\alpha} \epsilon^{lmj} \{ R_{\alpha m} R_{\gamma l} - R_{\alpha l} R_{\gamma m} \},\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade renomeamos os índices l por m . Agora subindo o índice contravariante de $R_{\alpha l}$ no segundo termo, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{g}\nabla_i C^{ij} &= \frac{3}{2} (\epsilon^{lmj} g^{\gamma\alpha} R_{\alpha m} R_{\gamma l}) - \frac{3}{2} (\epsilon^{lmj} g^{\gamma\alpha} R_{\alpha l} R_{\gamma m}) \\ &= \frac{3}{2} (\epsilon^{lmj} R_{\alpha m} R_l^\alpha) - \frac{3}{2} (\epsilon^{lmj} R_l^\gamma R_{\gamma m}) \\ &= \frac{3}{2} (\epsilon^{lmj} R_{\alpha m} R_l^\alpha) - \frac{3}{2} (\epsilon^{lmj} R_l^\alpha R_{\alpha m}) = 0,\end{aligned}$$

e, por fim, renomeamos o índice γ por α no último termo. $\square$

É importante observar que este tensor é invariante conforme de peso $-\frac{1}{2}$ em dimensão três, ou seja, por uma mudança conforme $\tilde{g} = \phi g$, onde ϕ é uma função suave positiva temos que $C_{\tilde{g}} = \phi^{-\frac{1}{2}} C_g$. Usando o fato que o $(0, 3)$ -tensor de Cotton é invariante conforme em dimensão 3, temos

$$\begin{aligned}C_{\tilde{g}} &= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{g}}} \tilde{C}_{lmn} \epsilon^{lmn} \tilde{g}_{nj} = \frac{1}{2\sqrt{\phi^3 g}} C_{lmn} \epsilon^{lmn} \phi g_{nj} \\ &= \frac{\phi^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{g}} C_{lmn} \epsilon^{lmn} g_{nj} = \phi^{-\frac{1}{2}} C_g.\end{aligned}$$

1.3 Fluxo generalizado e suas soluções sólitons

O **fluxo geométrico generalizado**, chamado *q-fluxo*, é uma família a um parâmetro de métricas suaves tais que

$$\begin{cases} \partial_t g = q(g), \\ g(0) = h, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde h é uma métrica inicial e $q(g)$ é um $(0, 2)$ -tensor geral simétrico.

Um primeiro trabalho sobre este fluxo e seus sólitons foi iniciado por Jorge Lauret [46] onde ele prova existência e unicidade de soluções para este fluxo sobre variedades homogêneas. Griffin [34] apresentou uma prova explícita para a existência de curto tempo para o q -fluxo, no caso dos sólitons gradiente.

Sobre as soluções auto-similares deste fluxo, ou seja, os sólitons, Lauret [46] também apresentou uma equação que chamou de estrutura geométrica de sólito, quando considerou sólitons homogêneos com a equação $q(\gamma) = c\gamma + \mathcal{L}_X\gamma$ onde γ é uma métrica, $q(\gamma)$ é um $(0, 2)$ -tensor e c é uma constante real, no sentido de classificar sólitons algébricos e semi-algébricos.

As soluções auto-similares do q -fluxo são chamadas *q-sólitons*, e Griffin [34], fazendo uma reescalagem da métrica define-os como segue.

Definição 1.3.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é um q -sólito se existe um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M^n)$ tal que*

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g + \frac{1}{2}q, \quad (1.5)$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g na direção de X , λ é uma constante real e denotaremos por (M^n, g, X) .

Quando $X = \nabla f$ para alguma função suave $f \in \mathcal{C}^\infty(M^n)$ o q -sólito é chamado *q-sólito gradiente* e a equação (1.5) se torna

$$\text{Hess} f = \lambda g + \frac{1}{2}q, \quad (1.6)$$

onde $\text{Hess} f$ é o Hessiano da função f , e f é chamada a *função potencial* do sólito.

Em geral, um q -sólito é chamado *estático* se $\lambda = 0$, *contrátil* se $\lambda > 0$ e *expansivo* se $\lambda < 0$. Também, chamaremos M^n *estacionário* se X for um campo vetorial de Killing ou, no caso gradiente, se a função potencial for constante. O sólito é chamado *q-plano* se $q = 0$. Por fim, diremos que um q -sólito é *trivial* se for ambos estacionário e q -plano.

Para exemplos ou classificações de $\mathbf{q}$ -sóliton, Petersen e Wylie [50] obtiveram vários resultados de rigidez e de isometrias. Mais especificamente num de seus resultados eles mostraram que, para um $\hat{\mathbf{q}}$ -sóliton gradiente sobre uma variedade homogênea onde $\hat{\mathbf{q}}$ é invariante isométrico e com divergente nulo, se existe uma função f tal que $\text{Hess } f = \hat{\mathbf{q}}$, então M^n será uma variedade produto da forma $\mathbb{R}^k \times N^{n-k}$.

Alguns sólitos geométricos já conhecidos na literatura são casos particulares de $\mathbf{q}$ -sólitos e podem ser vistos como exemplos, fazendo a escolha adequada do tensor $\mathbf{q}$, tais como o sólito de Ricci, sólito ρ -Einstein, sólito de Bach, sólito de Cotton e sólito de obstrução ambiente, que definiremos nas seções seguintes.

1.4 Fluxo de Cotton

O **fluxo de Cotton** foi introduzido em 2008 por Kisisel et al. [44] no qual consideraram a equação de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = \kappa C_{g(t)}, \quad (1.7)$$

onde $C_{g(t)}$ é o $(0, 2)$ tensor de Cotton-York de $(M, g(t))$ e κ é uma constante positiva. O fluxo é definido somente em dimensão 3 com a motivação dos autores de encontrar pontos fixos para o fluxo que fossem métricas conformemente planas. Generalizar o fluxo para dimensão $n > 3$, ainda está em aberto. No trabalho introdutório, o comportamento desse fluxo foi estudado sobre variedades homogêneas, mais especificamente, $SU(2)$, $SL(2, \mathbb{R})$, $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, Solv , Nil , $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. O problema do tempo de existência do fluxo de Cotton para uma métrica inicial ainda está em aberto.

A evolução de algumas quantidades geométricas foram calculadas no trabalho de Kisisel et al. [44]. Mais precisamente, eles calcularam a evolução do tensor de Cotton York, curvatura de Ricci e curvatura escalar, norma ao quadrado do tensor de Ricci e dos símbolos de Christoffel. O cálculo dessas evoluções é importante no cálculo da evolução do funcional entropia para o fluxo de Cotton, chamado de *entropia de Cotton*. Chakraborty et al. [27] calcularam a evolução de outras quantidades geométricas, como a massa ADM e a constante de Yamabe.

Para dar continuidade no estudo do fluxo de Cotton e suas soluções, faremos uma reescalagem de tal forma que $\kappa = 1$ no fluxo. Tomando a constante $\alpha = \frac{1}{3\sqrt{\kappa^2}}$, podemos

definir a métrica $\tilde{g} = \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}g$, e considerar o fluxo de Cotton da seguinte maneira

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = C_{\tilde{g}(t)}. \quad (1.8)$$

De fato, desde que uma mudança conforme na métrica nos fornece $C_{\tilde{g}} = \phi^{-\frac{1}{2}}C_g$, tem-se $C_{\tilde{g}} = \sqrt[3]{k}C_g$. Então temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}g\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\frac{\partial}{\partial t}g = \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}kC_g = C_{\tilde{g}}.$$

As soluções auto-similares desse fluxo, ou pontos fixos do fluxo, são chamadas *sólitons de Cotton* e serão definidas como segue.

Definição 1.4.1. *Uma variedade Riemannian (M^3, g) é chamada um sóliton de Cotton, se existe um campo vetorial suave $X \in \mathcal{X}(M^3)$ tal que*

$$C + \mathcal{L}_X g = \lambda g, \quad (1.9)$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g na direção de X e λ é uma constante real. Denotaremos por (M, g, X) .

Quando o campo vetorial X é o gradiente de alguma função suave, isto é, se $X = \nabla f$, para $f \in \mathcal{C}^\infty(M^n)$, o sóliton é chamado *sóliton de Cotton gradiente* e a equação acima se torna

$$C + 2\text{Hess}f = \lambda g, \quad (1.10)$$

onde a função f é chamada *função potencial* do sóliton.

Seguindo a terminologia de outros sólitons estudados, o sóliton de Cotton é chamado *estático* se $\lambda = 0$, *contrátil* se $\lambda > 0$ e *expansivo* se $\lambda < 0$. Um sóliton de Cotton é *trivial* se X é um campo vetorial de Killing. Note que, no caso em que o sóliton é trivial, desde que C tem traço nulo, pela equação estrutural do sóliton concluímos que $C = 0$, donde a variedade torna-se localmente conformemente plana. No caso gradiente, o sóliton é dito *trivial* quando a função potencial f é constante. Note que um sóliton de Cotton é um q -sóliton com $q = -2C$ e será modificado pela constante $\frac{1}{2}$ que multiplica a derivada de Lie.

O caso compacto foi tratado recentemente sobre Calviño-Louzao, García-Río e Vázquez-Lorenzo [14], onde eles mostraram que todo sóliton de Cotton compacto é trivial. Além disso, eles conseguiram mostrar a existência de sólitons de Cotton (completos) não triviais contráteis, isto é, $\lambda > 0$, sob um grupo de Heisenberg $\mathcal{H}^3$ com a métrica $g_{\mathcal{H}} =$

$dt^2 + dx^2 + \left(\frac{1}{2}(\chi dt - t dx) + dy\right)^2$. Mais precisamente, eles provaram o seguinte resultado.

Teorema 1.4.1. *O grupo de Heisenberg (H^3, g_H) é um sólito de Cotton contrátil não trivial com $\lambda = 2$, para qualquer campo vetorial da forma*

$$X = \left(\frac{3}{4}t\alpha x + \beta\right) \partial_t + \left(\frac{3}{4}x - \alpha t + \gamma\right) \partial_x + \frac{1}{2}(3y + \beta x - \gamma t\delta) \partial_y,$$

onde α, β, γ e δ são constantes reais.

Neste mesmo trabalho, os autores mostram a existência de sólitos de Cotton em ambiente Lorentziano com métrica de Walker. Calviño [15], classificou sólitos de Cotton sobre variedades homogêneas em ambiente Riemanniano e Lorentziano, determinando todos os sólitos de Cotton com métricas invariantes a esquerda não triviais e obtendo exemplos de sólitos de Cotton não invariantes. Cunha e Griffin [23] em seu trabalho sobre q -sólitos obtiveram aplicações aos sólitos de Cotton obtendo classificação e trivialidades no caso da variedade ser completa e não compacta.

Nos Capítulos 3 e 4 apresentamos resultados de classificação e trivialidade para os sólitos de Cotton no caso completo e não compacto.

1.5 Fluxo de Ricci

O **fluxo de Ricci** foi introduzido por Hamilton [38] em 1982 quando considerou o fluxo dado pela equação de evolução

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \text{Ric}.$$

Ao longo dos últimos anos o fluxo de Ricci tem sido tópico de pesquisa de muitos matemáticos, tendo sido obtido inúmeros resultados e aplicações e também foi fundamental na prova da Conjectura de Poincaré dada por Perelman [49]. As soluções auto-similares deste fluxo são chamadas sólitos de Ricci e definidos da seguinte maneira.

Definição 1.5.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é chamada um sólito de Ricci, se existe um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M^3)$ tal que*

$$\text{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{1.11}$$

onde Ric é o tensor curvatura de Ricci, $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g na direção do campo X e λ é uma constante real. Denotaremos tal estrutura por (M^n, g, X) .

Quando o campo X é o gradiente de alguma função suave, isto é, se $X = \nabla f$, para $f \in C^\infty(M)^n$, o sóliton é chamado *sóliton de Ricci gradiente* e a equação do sóliton toma a forma

$$\text{Ric} + \text{Hess}f = \lambda g. \quad (1.12)$$

A função f é chamada *função potencial*. Denotaremos um sóliton gradiente por (M^n, g, f) .

Um sóliton de Ricci é chamado *estático* se $\lambda = 0$, *contrátil* de $\lambda > 0$ e *expansivo* se $\lambda < 0$. O sóliton é dito ser *trivial* se X é um campo vetorial de Killing, ou se a função potencial for constante no caso gradiente. Note que um sóliton de Ricci é um q -sóliton com $q = -2 \text{Ric}$.

O sólito Rígido é um exemplo clássico da literatura, de sóliton de Ricci.

Exemplo 1.5.1 (Sóliton Rígido). *Considere o produto $N^n \times \mathbb{R}^k$ onde (N^n, g) é uma variedade Einstein com constante real λ . Defina a função $f : N^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$f(p, x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2.$$

Então (M^n, g, f) é um sóliton de Ricci gradiente. Se $n = 0$, $(\mathbb{R}^k, g, f)$ é o sóliton Gaussiano.

1.6 Fluxo de Ricci-Bourguignon

O **fluxo de Ricci-Bourguignon** foi introduzido por Jean Pierre Bourguignon [6] em 1981, quando deixou em questão a validade do teorema do fluxo local sobre o espaço das métricas para a aplicação $g \mapsto \text{Ric} - \rho Rg$, onde ρ é uma constante real e R é a curvatura escalar. O fluxo é dado pela equação de evolução

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2(\text{Ric} - \rho Rg).$$

Este fluxo generaliza o fluxo de Ricci quando $\rho \neq 0$, mas é importante observar que o trabalho de Bourguignon surgiu primeiro que o fluxo de Ricci introduzido por Hamilton [38]. Note na aplicação acima que alguns tensores especiais aparecem para determinados valores de ρ . Para $\rho = \frac{1}{2}$, temos o tensor de Einstein $\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg$, para $\rho = \frac{1}{n}$, temos o tensor de Ricci sem traço $\text{Ric} - \frac{1}{n}Rg$, para $\rho = \frac{1}{2(n-1)}$, temos o tensor de Schouten $\text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)}g$ e para $\rho = 0$, temos o tensor de Ricci.

Sobre o estudo de existência de curto tempo de uma métrica inicial para o fluxo de Ricci-Bourguignon, Catino et al. [12] provaram a existência do fluxo no caso em que a variedade é compacta e $\rho < 0$. Um ponto importante é que a existência de curto tempo do fluxo é incerta para $\rho = \frac{1}{2(n-1)}$. Ho [40], estudou o fluxo de Ricci-Bourguignon sobre todas as variedades homogêneas em variedades fechadas de dimensão três e calculou a evolução da constante de Yamabe sobre o fluxo de Ricci-Bourguignon.

As soluções auto-similares deste fluxo são chamados *sólitos de Ricci-Bourguignon* ou *sólitos ρ -Einstein* que definiremos a seguir. Chamaremos daqui em diante de sólitos ρ -Einstein.

Definição 1.6.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é chamada um sólito ρ -Einstein se existe um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M^n)$ tal que*

$$\text{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g + \rho Rg, \quad (1.13)$$

onde Ric é o tensor curvatura de Ricci, $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g na direção de X , R é a curvatura escalar e λ é uma constante real. Denotaremos por (M^n, g, X, ρ) .

Quando o campo X é o gradiente de alguma função $f \in C^\infty(M^n)$, isto é, se $X = \nabla f$, o sólito é chamado *sólito ρ -Einstein gradiente* e a equação do sólito se torna

$$\text{Ric} + \text{Hess}f = \lambda g + \rho Rg, \quad (1.14)$$

e denotaremos por (M^n, g, f, ρ) .

Um sólito ρ -Einstein também recebe uma nomenclatura para valores particulares de ρ , de acordo com o tensor que aparece no fluxo. Para $\rho = \frac{1}{n}$, o sólito é chamado *sólito de Ricci sem traço*, para $\rho = \frac{1}{2}$, o sólito é chamado *sólito de Einstein* e para $\rho = \frac{1}{2(n-1)}$, é chamado *sólito de Schouten*. Além disso, se $\lambda = 0$ o sólito é chamado *estático*, se $\lambda > 0$ é chamado *contrátil* e se $\lambda < 0$ é chamado *expansivo*. Note que um sólito ρ -Einstein é um q -sólito com $q = 2(\rho Rg - \text{Ric})$.

Temos a seguir um exemplo de sólito ρ -Einstein com curvatura escalar constante, mais especificamente, um sólito de Schouten, que pode encontrado em Borges [10].

Exemplo 1.6.1. *Seja $(\mathbb{R}^{n-k} \times N^k, g)$ uma variedade produto tal que, $k \leq n$, $n \geq 3$ e N^k é uma variedade Einstein de curvatura escalar constante igual a*

$$R = \frac{2(n-1)k\lambda}{2(n-1)-k},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Para $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{N}^k$ defina a função

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left(\frac{R_N}{2(n-1)} + \lambda \right) \|\mathbf{x}\|^2,$$

onde $\|\mathbf{x}\|$ denota a norma Euclidiana. Então $(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{N}^k, \mathbf{g}, f, \rho)$ é um sóliton de Schouten de dimensão n . Se $k = 0$, então $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}, f, \rho)$ é chamado sóliton Gaussiano.

No Capítulo 2 apresentamos os resultados de trivialidade obtidos para os sóliton ρ -Einstein, no caso completo e não compacto, para valores de ρ em intervalos adequados. Para isso, também aplicamos princípios do máximo no infinito e com crescimento de volume polinomial para a obtenção dos resultados. Conseguimos um resultado particular para os sólitons de Ricci sem traço gradiente, com curvatura seccional constante e função potencial satisfazendo a regularidade $|\nabla f| \in L^{\frac{n}{n-1}}$, que concluímos com estas condições ser trivial e estático.

1.7 Fluxo de Bach

O tensor de Bach foi definido por Bach [5] em 1920, quando estudou problemas relacionados a gravidade conforme. O tensor é definido em dimensão $n \geq 4$ e é dado pela expressão em coordenadas

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3} \nabla^k \nabla^l W_{ijkl} + \frac{1}{n-2} R^{kl} W_{ijkl}, \quad (1.15)$$

onde W_{ijkl} é o tensor de Weyl.

O tensor de Bach é um $(0, 2)$ -tensor simétrico, tem traço nulo em dimensão $n \geq 4$, ou seja, $\Sigma_{ij} g^{ij} B_{ij} = 0$. A expressão para o divergente do tensor de Bach é

$$\text{div}(B)_i = \frac{n-4}{(n-2)^2} C_{ijk} R_{jk},$$

onde C_{ijk} é o tensor de Cotton e R_{jk} é o tensor de Ricci. Logo, pela expressão acima, o tensor de Bach tem divergente nulo em dimensão $n = 4$. Além disso, é invariante conforme de peso -2 , isto é, se $\tilde{g} = \rho^2 g$ é uma métrica conforme, então $\tilde{B} = \rho^{-2} B$.

O **fluxo de Bach** foi introduzido por Das e Kar [26] quando consideraram o fluxo dado pela equação de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -B, \quad (1.16)$$

onde B é o tensor de Bach. O fluxo acima pode ser mostrado como um fluxo gradiente do funcional energia de Weyl, $\int_M \|W\|_g^2 dV_g$. Sobre o estudo do fluxo de Bach, Das e Kar

estudaram o fluxo sobre as variedades produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ e determinaram os pontos fixos do fluxo sobre variedades $M^2 \times M^2$. Ho [40] mostrou que o volume da variedade é preservado sob o fluxo e calculou a evolução da curvatura de Ricci e curvatura escalar sob este fluxo. As soluções auto-similares do fluxo de Bach são chamados *sólitos de Bach* e definidos da seguinte forma.

Definição 1.7.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é um sólito de Bach se existe um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M^n)$ tal que*

$$B + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \quad (1.17)$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g na direção de X , λ é uma constante real e denotaremos por (M^n, g, X) .

Quando o campo X é o gradiente de alguma função suave, isto é, se $X = \nabla f$, onde $f \in C^\infty(M^n)$, então é chamado *sólito de Bach gradiente* e a equação se torna

$$B + \text{Hess} f = \lambda g, \quad (1.18)$$

e denotaremos por (M^n, g, f) .

A função f é chamada *função potencial* do sólito. O sólito recebe uma nomenclatura de acordo com o sinal da constante λ . O sólito é chamado *estático* se $\lambda = 0$, *contrátil* se $\lambda > 0$ e *expansivo* se $\lambda < 0$. Um sólito de Bach é *trivial* se X é um campo vetorial de Killing, e no caso gradiente, se a função potencial f é constante. Diremos ainda que um sólito é *Bach-plano* se $B = 0$.

Como exemplo de um sólito de Bach temos o sólito Gaussiano em dimensão 4, que pode ser encontrado em [34].

Exemplo 1.7.1. $(\mathbb{R}^4, g, f)$ com a métrica canônica e função potencial

$$f(x, y, z, w) = \frac{1}{2}c(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) + ax + by + dz + hw + k,$$

é um sólito de Bach.

Demonstração. Note que em $\mathbb{R}^4$ o tensor de Bach é nulo, isto é, $B_{ij} = 0$. Facilmente verifica-se que $\text{Hess } f = cg$. □

Ho [40] obteve resultados importantes de classificação dos sólitos de Bach. Ele mostrou que todo sólito de Bach gradiente compacto é Bach-plano. Em dimensão $n = 4$, ele

mostrou que todo sóliton de Bach deve ser Bach-plano e X um campo de Killing. No caso dos sólitons de Bach com curvatura de Ricci positiva ou negativa, deve ser Bach-plano. Também mostrou no caso não compacto, a existência de sólitons de Bach não triviais.

Griffin [34] estudou os sólitons de Bach em dimensão 4 sobre variedades homogêneas, mais precisamente sobre $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{N}^3$ ou $\mathbb{N}^4$, onde $\mathbb{N}^k$ é necessariamente uma variedade homogênea. Também construiu sólitons não Bach-plano expansíveis sobre variedades homogêneas e mostrou que os únicos sólitons não Bach-plano gradiente homogêneos contráteis, são as variedades produto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ e $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}^2$.

No Capítulo 4 apresentamos resultados obtidos de classificação e trivialidades para os sólitons de Bach como aplicação dos resultados obtidos para os q -sólitons. Dentre eles, mostramos que um sóliton de Bach simplesmente conexo, completo e não compacto com campo potencial conforme não Killing, deve ser isométrico ao espaço Euclidiano.

1.8 Fluxo de Obstrução Ambiente

Nesta seção apresentamos os sólitons de obstrução ambiente. Por envolver conceitos não triviais como o funcional Q -curvatura, faremos apenas uma breve introdução sobre o tensor de obstrução ambiente, do fluxo relacionado e algumas referências em que é estudado de forma mais aprofundada. O tensor de obstrução ambiente possui propriedades úteis que são traço nulo e divergente nulo. Focamos na estrutura do sóliton e nos resultados a que iremos aplicar.

O tensor de obstrução ambiente $\mathcal{O}_n$ foi introduzido por Graham e Fefferman [30] quando estudaram o funcional

$$\mathcal{F}^n(g) = \int_M Q(g) dV_g, \quad (1.19)$$

chamado Q -curvatura, onde $Q(g)$ é uma quantidade escalar. Graham e Hirachi [33] encontraram uma relação entre o gradiente de $\mathcal{F}^n(g)$ e o tensor $\mathcal{O}_n$. Este funcional foi generalizado por Branson [11], no qual $\mathcal{F}^n(g)$ é um funcional invariante conforme e definido em dimensão par. Por uma questão de esclarecimento, a quantidade escalar $Q(g)$ pode ser definida da seguinte forma: em dimensão $n = 2$, definimos $Q = -\frac{1}{2}R = K$, onde K é a curvatura Gaussiana de M . Mais detalhes sobre as expressões para Q -curvatura em dimensão 4 e dimensão $2m$, podem ser encontrado no trabalho de Chang [16]. O tensor de obstrução ambiente $\mathcal{O}_n$, obtido no cálculo do gradiente da Q -curvatura, é um $(0, 2)$ -tensor

simétrico com traço nulo, divergente nulo e invariante conforme de peso $2 - n$, isto é, se $\tilde{g} = c^2 g$ então $\tilde{\mathcal{O}}_n = c^{2-n} \mathcal{O}_n$. Tal tensor é definido da seguinte forma: para dimensão par $n \geq 4$,

$$\mathcal{O}_n = \frac{1}{(-2)^{\frac{n}{2}-2} \left(\frac{n}{2} - 2\right)!} \left(\Delta^{\frac{n}{2}-1} P - \frac{1}{2(n-1)} \Delta^{\frac{n}{2}-2} \nabla^2 S_g \right) + T_{n-1} \quad (1.20)$$

$$P = \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{1}{2(n-1)} S_g \right), \quad (1.21)$$

onde P é o tensor de Schouten e T_{n-1} é um tensor polinomial de ordem $n-1$. O polinômio T_{n-1} pode ser definido da seguinte forma

$$T_{n-1} = \sum_{j=2}^{n/2} P_j^{n-2j} (Rm),$$

onde Rm é a curvatura de Riemann e $P_k^m(A) = \sum_{i_1+\dots+i_k=m} \nabla^{i_1} A \cdots \nabla^{i_k} A$, para um tensor geral A .

Como foi observado em [30], para $n = 4$ o tensor de obstrução ambiente é o tensor de Bach, ou seja, $\mathcal{O}_4 = B$.

O **fluxo ambiente de obstrução** foi introduzido por Bahuaud e Helliwell [7], onde eles mostraram a existência de curto tempo do fluxo dado pela equação de evolução

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) &= \mathcal{O}_n + c_n (-1)^{\frac{n}{2}} (\Delta^{\frac{n}{2}-1} R) g, \\ g(0) &= h, \end{cases} \quad (1.22)$$

onde a constante c_n é dado pela expressão

$$c_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-2} \left(\frac{n}{2} - 2\right)! (n-2)(n-1)}. \quad (1.23)$$

Em [8] os autores mostraram que as soluções para este fluxo sobre uma variedade compacta são únicas.

Iremos definir agora as soluções auto-similares do fluxo de obstrução ambiente chamadas *sólitos de obstrução ambiente*.

Definição 1.8.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é um sólito de obstrução ambiente se existe um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M^n)$ tal que*

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_X g = \lambda g + \frac{1}{2} \left(\mathcal{O}_n + c_n (-1)^{\frac{n}{2}} (\Delta^{\frac{n}{2}-1} R) g \right), \quad (1.24)$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g na direção de X e λ é uma constante real. Denotaremos esse sólito por (M^n, g, X) .

Quando o campo X é o gradiente de alguma função suave f , ou seja, $X = \nabla f$, onde $f \in C^\infty(M^n)$, chamaremos tal sóliton de *sóliton de obstrução gradiente*. Assim, a equação acima se torna

$$\text{Hess}f = \lambda g + \frac{1}{2} (\mathcal{O}_n + c_n(-1)^{\frac{n}{2}} (\Delta^{\frac{n}{2}-1} R)g). \quad (1.25)$$

Quando $n = 4$, o tensor de obstrução é o tensor de Bach e a equação se torna a equação do sóliton de Bach modificado, encontrado no trabalho de Helliehell [39],

$$\text{Hess}f = \lambda g + \frac{1}{2} \left(B + \frac{1}{12} (\Delta R)g \right).$$

Para variedades de curvatura escalar constante, como é o caso das variedades homogêneas, a equação do sóliton se torna mais simples

$$\text{Hess}f = \lambda g + \frac{1}{2} \mathcal{O}_n \quad \text{e} \quad \text{Hess}f = \lambda g + \frac{1}{2} B.$$

É verificado por Griffin [35], que as equações do sóliton de Bach e sóliton de Bach modificado com curvatura escalar constante, são equivalentes.

Exemplos de sólitons de obstrução podem ser difíceis de encontrar, mas em dimensão $n = 4$, existem alguns exemplos que são, na verdade, os sólitons de Bach e podem ser encontrados no trabalho de Griffin [34]. No mesmo trabalho, Griffin mostrou que todo sóliton de obstrução ambiente compacto, com curvatura escalar constante é $\mathcal{O}_n$ -plano. Ela ainda obteve exemplos e resultados de classificação para sólitons de Bach, que são sólitons de obstrução ambiente em dimensão $n = 4$. Mais recentemente, Cunha e Griffin [23] obtiveram resultados de classificação e trivialidades para sólitons de obstrução ambiente completos e não compactos.

No Capítulo 4 apresentamos mais resultados de trivialidade para os sólitons de obstrução ambiente, como aplicações dos resultados obtidos para os q -sólitons.

Capítulo 2

Sólitos ρ -Einstein

Neste capítulo apresentamos os resultados de trivialidade para os sólitos gradiente do fluxo de Ricci-Bourguignon, os sólitos ρ -Einstein, no caso em que a variedade é completa e não compacta. Primeiramente, aplicamos princípios do máximo no infinito e com crescimento de volume polinomial, impondo condições na curvatura de Ricci e ρ pertencente a intervalos convenientes. Também conseguimos um resultado de trivialidade supondo a variedade estocasticamente completa. Um último resultado foi obtido para os sólitos de Ricci sem traço gradiente, com curvatura seccional não negativa, aplicando um resultado de Karp [43].

2.1 Sólitos ρ -Einstein via Convergência para zero no infinito

Antes de apresentar o primeiro resultado enunciamos um resultado auxiliar, que é uma fórmula tipo Bochner obtida utilizando propriedades dos sólitos gradiente, que pode ser encontrado em [20, Lema 1.6].

Lema 2.1.1. *Seja (M^n, g, f, ρ) um sólito ρ -Einstein gradiente completo com $\rho \neq \frac{1}{2(n-1)}$. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho}\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + |\text{Hess}f|^2. \quad (2.1)$$

Para enunciar e demonstrar o primeiro resultado, iremos aplicar um princípio do máximo no infinito, devido a Alías et al. [1]. Para isso, antes vamos definir a convergência para zero no infinito de acordo com estes autores.

Definição 2.1.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, não compacta e conexa. Seja $d(x, x_0) : M^n \rightarrow [0, +\infty)$ a distância Riemanniana de um ponto fixado $x_0 \in M^n$. Então, se $f \in C^0(M^n)$ satisfaz*

$$\lim_{d(x, x_0) \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

dizemos que f converge para zero no infinito.

Para provar o Teorema 2.1.1 a seguir, vamos aplicar o princípio do máximo no infinito que corresponde ao item (a) de [1, Teorema 2.2], que enunciaremos abaixo.

Lema 2.1.2 (Alías et al., [1]). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa e não compacta, orientada e conexa e $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ um campo vetorial suave sobre M^n . Suponha que existe uma função não identicamente nula e não negativa $v \in C^\infty(M)$ que converge para zero no infinito e tal que $g(\nabla v, X) \geq 0$. Se $\operatorname{div} X \geq 0$ sobre M^n , então $g(\nabla v, X) \equiv 0$ sobre M^n .*

Com isto, estamos prontos para enunciar e provar nosso primeiro resultado.

Teorema 2.1.1. *Seja (M^n, g, f, ρ) um sólito ρ -Einstein gradiente completo e não compacto, tal que $|\nabla f|$ converge para zero no infinito. Se um dos seguintes itens vale*

(i) *ou a curvatura de Ricci é não positiva e $\rho > \frac{1}{2}$ ou $\rho < \frac{1}{2(n-1)}$; ou*

(ii) *a curvatura de Ricci é não negativa e $\frac{1}{2(n-1)} < \rho < \frac{1}{2}$,*

então (M^n, g, f, ρ) é trivial e a curvatura escalar R é constante.

Demonstração. Assuma, por contradição, que o sólito ρ -Einstein não é trivial, logo a função potencial f deve ser não constante. Podemos assim definir a função suave $v := |\nabla f|^2$, que é não negativa, não identicamente nula e converge para zero no infinito por hipótese. Além disso, defina o campo vetorial suave $X := \nabla |\nabla f|^2$ sobre M . Desde que $X = \nabla v$ temos que

$$g(\nabla v, X) = |\nabla |\nabla f|^2|^2 \geq 0.$$

Pode ser verificado com um cálculo simples, que em ambos os itens (i) e (ii) vale

$$\frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq 0.$$

Tomando a divergência do campo X e aplicando o Lema 2.1.1, obtemos

$$\frac{1}{2} \operatorname{div} X = \frac{1}{2} \Delta (|\nabla f|^2) = \frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + |\operatorname{Hess} f|^2 \geq 0.$$

Com estas condições satisfeitas podemos aplicar o Lema 2.1.2 para concluir que

$$|\nabla |\nabla f|^2|^2 = g(\nabla v, X) \equiv 0.$$

Logo $v = |\nabla f|^2$ é uma função constante. Por hipótese de convergência para zero no infinito da norma do gradiente, obtemos que v é identicamente nula sobre M , nos dando uma contradição. Portanto, o sólito deve ser trivial. Voltando à equação estrutural do sólito, resta que $\operatorname{Ric} = (\rho R + \lambda)g$. Tomando a divergência e usando a identidade de Bianchi duas vezes contraída, obtemos que, $\nabla R(2\rho - 1) = 0$. Por hipótese, $\rho \neq \frac{1}{2}$, nos itens i) e ii), donde concluímos que $\nabla R = 0$ sobre M . Portanto R é constante. $\square$

2.2 Sólitons ρ -Einstein via Crescimento de Volume Polinomial

Para os resultados obtidos nesta seção, supomos o sólito com crescimento de volume polinomial, e de maneira análoga ao demonstrado na seção anterior, consideramos o escalar ρ em certos intervalos para obter uma estimativa para o divergente do campo vetorial definido. Além disso, assumimos uma regularidade do tipo L^∞ para o gradiente e o Hessiano da função potencial.

Antes de apresentar o próximo resultado, vamos definir o conceito de crescimento de volume polinomial de bolas geodésicas para variedades Riemannianas completas e não compactas, e enunciar o caso particular de um princípio do máximo mais geral com a suposição de crescimento de volume polinomial obtido por Alías et al. [2, Teorema 2.1]. Vamos primeiro enunciar uma definição mais geral, de crescimento para o volume de bolas geodésicas.

Definição 2.2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa e não compacta, orientada e conexa. Denote por $B_r(p)$ a bola geodésica de raio r centrada no ponto p . Dada uma função contínua $\sigma : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, dizemos que M^n tem crescimento de volume tipo $\sigma(t)$ se existe um ponto $p \in M^n$ tal que*

$$\operatorname{vol}(B_t(p)) = \mathcal{O}(\sigma(t)),$$

se $t \rightarrow +\infty$, onde vol denota o volume Riemanniano.

É importante observar que a escolha do centro da bola geodésica é indiferente no seguinte sentido: se $p, q \in M^n$ estão a uma distância d um do outro, podemos verificar que

$$\frac{\text{vol}(B(p, t))}{\sigma(t)} \geq \frac{\text{vol}(B(q, t-d))}{\sigma(t-d)} \cdot \frac{\sigma(t-d)}{\sigma(t)},$$

logo se $t \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima, temos ainda que $\text{vol}(B_{t-d}(q)) = \mathcal{O}(\sigma(t))$. Em outras palavras, independentemente do ponto escolhido, se existe uma bola com crescimento de volume tipo $\sigma(t)$, então podemos escolher qualquer outro ponto da variedade e um raio, de maneira que ainda tem-se o mesmo tipo de controle sobre o crescimento de volume da bola geodésica com centro e raios diferentes. Então diremos que M^n tem *crescimento de volume polinomial* se $\sigma(t)$ é um polinômio. A seguir enunciamos o princípio do máximo com crescimento de volume polinomial.

Lema 2.2.1 (Alías et al. [2]). *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e não compacta, orientada e conexa e seja $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ um campo vetorial limitado. Seja $v \in C^\infty(M^n)$ uma função suave não negativa tal que $g(\nabla v, X) \geq 0$ e $\text{div} X \geq \alpha v$ sobre M^n , para alguma constante positiva $\alpha \in \mathbb{R}$. Se M^n tem crescimento de volume polinomial, então v é identicamente nula sobre M^n .*

Com isto estamos prontos para enunciar e provar nosso segundo resultado.

Teorema 2.2.1. *Seja (M^n, g, f, ρ) um sólito ρ -Einstein gradiente completo e não compacto tal que (M^n, g) tem crescimento de volume polinomial e $|\nabla f|, |\text{Hess} f| \in L^\infty(M^n)$. Se um dos seguintes itens vale*

- (i) *ou $\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leq -\alpha |\nabla f|^2$ e $\rho > \frac{1}{2}$ ou $\rho < \frac{1}{2(n-1)}$; ou*
- (ii) *$\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq \alpha |\nabla f|^2$ e $\frac{1}{2(n-1)} < \rho < \frac{1}{2}$,*

para alguma constante positiva $\alpha \in \mathbb{R}$, então o sólito é trivial e a curvatura escalar R é constante.

Demonstração. Novamente assumimos que o sólito é não trivial, i.e., a função potencial f deve ser não constante. Então podemos definir a função suave $v := |\nabla f|^2$ e o campo vetorial suave $X := \nabla |\nabla f|^2$ sobre M . Pode ser verificado que em ambos os itens (i) e (ii) vale a seguinte desigualdade

$$\frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq \left| \frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \right| \cdot \alpha |\nabla f|^2.$$

Tomando a divergência no campo $X = \nabla v$ e usando o Lema 2.1.1, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{div} X &= \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 \\ &= \frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + |\operatorname{Hess} f|^2 \\ &\geq \left| \frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \right| \cdot \alpha |\nabla f|^2 + |\operatorname{Hess} f|^2 \\ &\geq \left| \frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \right| \alpha |\nabla f|^2, \end{aligned}$$

isto é, mostramos que $\operatorname{div} X \geq \beta v$, onde $\beta = 2\alpha \left| \frac{2\rho-1}{1-2(n-1)\rho} \right| > 0$. Note também que

$$g(\nabla v, X) = |\nabla |\nabla f|^2|^2 \geq 0.$$

Uma vez que $|\nabla f|, |\operatorname{Hess}(f)| \in L^\infty(M)$ e usando a desigualdade de Kato obtemos

$$|X| = 2|\nabla f| |\nabla |\nabla f|| \leq 2|\nabla f| |\operatorname{Hess} f| \ll +\infty,$$

isto é, o campo X é limitado. Portanto, desde que (M^n, g) tem crescimento de volume polinomial e o campo X e a função v satisfazem as condições do Lema 2.2.1, podemos aplicá-lo para concluir que $v = |\nabla f|^2$ é identicamente nula sobre M , donde obtemos que f é constante, que é uma contradição. Portanto, o sólito é trivial, e na equação estrutural do sólito resta que $\operatorname{Ric} = (\rho R + \lambda)g$. De maneira similar a prova do resultado anterior, tomando a divergência e usando a identidade de Bianchi duas vezes contraída, obtemos que $\nabla R = 0$ sobre M , donde concluimos que a curvatura escalar R , é constante. $\square$

2.3 Sólitons ρ -Einstein via Completude Estocástica

Obtemos uma versão fraca do Teorema 2.2.1, sem as hipóteses $|\operatorname{Hess} f| \in L^\infty(M)$ e crescimento de volume polinomial, e assumindo completude estocástica do sólito ρ -Einstein gradiente. Vamos definir completude estocástica de acordo com [3].

Definição 2.3.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita ser estocasticamente completa se, para algum (e portanto, qualquer) ponto $(x, t) \in M^n \times (0, +\infty)$*

$$\int_M p(x, y, t) dy = 1,$$

onde $p(x, y, t)$ é o núcleo do calor positivo (mínimo) do operador de Laplace-Beltrami Δ , isto é, a menor solução fundamental positiva da equação do calor

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta p \text{ sobre } M^n.$$

Na literatura podemos encontrar várias definições equivalentes ao de completude estocástica da variedade Riemanniana e ainda condições que implicam essa propriedade. Alguns desses resultados podem ser encontrados no trabalho de Grigor'yan [37]. Dentre tantas condições de equivalência da completude estocástica, podemos citar o resultado de Pigola, Rigoli e Setti [51, Teorema 1.1], que garante uma equivalência entre a completude estocástica da variedade e a validade da forma fraca do princípio do Máximo de Omori-Yau, como segue:

Lema 2.3.1 (Pigola, Rigoli, Setti, [51]). *Uma variedade Riemanniana M^n é estocasticamente completa se, e somente se, para toda função $u \in C^2(M^n)$ satisfazendo $\sup_M u < +\infty$, existe uma sequência de pontos $\{x_k\} \subset M^n$ tal que*

$$\lim_k u(x_k) = \sup_M u \quad e \quad \limsup_k \Delta u(x_k) \leq 0.$$

Com isto, podemos enunciar e provar nosso terceiro resultado.

Teorema 2.3.1. *Seja (M^n, g, f, ρ) um sólito ρ -Einstein gradiente estocasticamente completo e tal que $|\nabla f| \in L^\infty(M^n)$. Se um dos seguintes itens vale*

$$(i) \text{ ou } \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leq -\alpha |\nabla f|^2 \text{ e } \rho > \frac{1}{2} \text{ ou } \rho < \frac{1}{2(n-1)}; \text{ ou}$$

$$(ii) \text{ Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq \alpha |\nabla f|^2 \text{ e } \frac{1}{2(n-1)} < \rho < \frac{1}{2},$$

para alguma constante positiva $\alpha \in \mathbb{R}$, então (M^n, g, f, ρ) é trivial e a curvatura escalar R é constante.

Demonstração. Por suposição, em ambos os itens i) ou ii) juntamente com o Lema 2.1.1 e a desigualdade de Kato, obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla f| \Delta |\nabla f| + |\nabla |\nabla f||^2 &= \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 \\ &= \frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + |\text{Hess}f|^2 \\ &\geq \left| \frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \right| \cdot \alpha |\nabla f|^2 + |\text{Hess}f|^2 \\ &\geq \left| \frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \right| \cdot \alpha |\nabla f|^2 + |\nabla |\nabla f||^2. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\Delta|\nabla f| \geq \left| \frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \right| \cdot \alpha|\nabla f|.$$

Agora vamos supor por contradição que $\sup_M |\nabla f| > 0$. Desde que $|\nabla f| \in L^\infty(M)$ e M é estocasticamente completa, o Lema 2.3.1 garante a existência de uma sequência de pontos $(x_k) \subset M$ tal que

$$0 \geq \limsup_k \Delta|\nabla f|(x_k) \geq \left| \frac{2\rho - 1}{1 - 2(n-1)\rho} \right| \cdot \alpha \sup_M |\nabla f| > 0,$$

que é um absurdo. Portanto $\sup |\nabla f| = 0$, logo f é uma função constante sobre M e o sóliton deve ser trivial. Voltando a equação estrutural do sóliton temos que $\text{Ric} = (\rho R + \lambda g)$. Da mesma forma, tomando a divergência nesta equação, concluímos que a curvatura escalar R é constante. $\square$

Uma consequência do Teorema 2.3.1 é dada abaixo, sem pedir completude estocástica e adicionando a estimativa inferior na curvatura de Ricci pela função radial $G(r)$ que satisfaz as condições de ser crescente, positiva e com raiz não integrável. Esta condição sob a curvatura de Ricci, implica a completude estocástica da variedade e pode ser encontrado em [3, Teorema 2.13].

Corolário 2.3.1. *Seja (M^n, g, f, ρ) um sóliton ρ -Einstein gradiente completo e não compacto tal que um dos seguintes itens vale*

$$(i) \text{ ou } \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leq -\alpha|\nabla f|^2 \text{ e } \rho > \frac{1}{2} \text{ ou } \rho < \frac{1}{2(n-1)}; \text{ ou}$$

$$(ii) \text{ Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq \alpha|\nabla f|^2 \text{ e } \frac{1}{2(n-1)} < \rho < \frac{1}{2},$$

para alguma constante positiva $\alpha \in \mathbb{R}$. Assuma em adição que $\text{Ric} \geq -G(r)$, para alguma função $G \in C^1([0, +\infty))$ satisfazendo

$$G(0) > 0, \quad G' \geq 0 \quad \text{e} \quad G^{-1/2} \notin L^1([0, +\infty)),$$

onde r denota a função distância Riemanniana de uma origem fixada em M^n . Se $|\nabla f| \in L^\infty(M)$, então (M^n, g, f, ρ) é trivial e a curvatura escalar R é constante.

Lembremos que uma variedade Riemanniana (não necessariamente completa) (M^n, g) é chamada *parabólica* (com respeito ao operador Laplaciano), se as funções constantes são as únicas funções subharmônicas sobre M^n que são limitadas superiormente. Já é bem conhecido que toda variedade Riemanniana parabólica é estocasticamente completa e pode

ser encontrado no livro de Grigor'yan [37, Corolário 6.4]. Assim, a consequência a seguir é direta.

Corolário 2.3.2. *Seja (M^n, g, f, ρ) um sólito ρ -Einstein gradiente parabólico tal que $|\nabla f| \in L^\infty(M^n)$. Se um dos seguintes itens vale*

$$(i) \text{ ou } \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leq -\alpha |\nabla f|^2 \text{ e } \rho > \frac{1}{2} \text{ ou } \rho < \frac{1}{2(n-1)}; \text{ ou}$$

$$(ii) \text{ Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq \alpha |\nabla f|^2 \text{ e } \frac{1}{2(n-1)} < \rho < \frac{1}{2},$$

para alguma constante positiva $\alpha \in \mathbb{R}$, então (M^n, g, f, ρ) é trivial e a curvatura escalar R é constante.

2.4 Um resultado para sólitos de Ricci sem traço

Finalizamos este capítulo com um resultado particular, para os sólitos de Ricci sem traço gradiente com curvatura seccional não negativa. Para obtê-lo, aplicamos um resultado para funções subharmônicas de Karp [43], onde neste trabalho o autor estuda uma extensão do Teorema de Stokes para variedades não compactas. Esse resultado diz o seguinte:

Lema 2.4.1 (Karp, [43]). *Se M^n é uma variedade Riemanniana completa e não compacta de curvatura seccional não negativa, então nenhuma função $\mathcal{C}^2(M^n)$ subharmônica não constante u satisfaz $|\nabla u| \in L^{\frac{n}{n-1}}(M^n)$.*

Tendo este resultado em mãos, provamos o seguinte:

Teorema 2.4.1. *Seja $(M^n, g, f, \frac{1}{n})$ um sólito de Ricci gradiente sem traço completo e não compacto com curvatura seccional não negativa e tal que o gradiente de f satisfaz*

$$\int_M |\nabla f|^{\frac{n}{n-1}} < +\infty. \quad (2.2)$$

Então $(M^n, g, f, \frac{1}{n})$ é trivial e estático.

Demonstração. Para $\rho = \frac{1}{n}$ a equação estrutural do sólito assume a forma

$$\text{Ric} + \text{Hess}(f) = \lambda g + \frac{1}{n} Rg.$$

Tomando o traço, temos que $\Delta f = \lambda n$, e assim o sinal do Laplaciano de f depende do sinal de λ . Quando $\lambda \geq 0$, f é subharmônica e quando $\lambda < 0$, $-f$ é também subharmônica. Logo,

desde que (M^n, g) é uma variedade completa e não compacta com curvatura seccional não negativa e satisfazendo a regularidade (2.2), podemos aplicar o Lema 2.4.1 para concluir em quaisquer dos casos que f é constante. Portanto, $(M^n, g, f, \frac{1}{n})$ é trivial e da equação estrutural, tomando o traço obtemos que $\lambda = 0$, ou seja, é estático. $\square$

Capítulo 3

Alguns resultados em Sólitons de Cotton

Os resultados deste capítulo, podem ser encontrados no recente trabalho devido a Cunha e Silva Jr. [22], onde obtivemos vários resultados de trivialidade dos sólitos de Cotton, onde em todos os resultados obtemos que a variedade é localmente conformemente plana. Para obter alguns dos resultados, precisamos assumir uma condição na curvatura de Ricci, dada por

$$\text{Ric} \geq -\frac{2k}{1+r^2}g,$$

no sentido de formas quadráticas, necessária para a existência de funções cut-off. Também supondo a parabolicidade da variedade e com condições de norma L^p ou L^∞ para a norma do campo potencial, obtivemos nos casos gradiente e não gradiente, que a variedade é localmente conformemente plana. Na seção 3.3, obtivemos um análogo aos resultados para sólitos ρ -Einstein. Como aplicação, usamos um resultado de Cheng [18] em vários dos resultados obtidos, para garantir a isometria do sólito a um espaço forma.

3.1 Sólitos de Cotton via curvatura de Ricci

Nos Teoremas 3.1.1 e 3.1.3 desta seção, assumimos a hipótese sob a curvatura de Ricci no sentido de formas quadráticas para garantir a existência de funções cut-off, como é feito por Bianchi e Setti [9, corolário 2.3], que enunciaremos abaixo. Estes resultados estão publicados no artigo [22] mas sem esta hipótese sob a curvatura, pois inicialmente não foi observado a necessidade de ter uma hipótese adicional para garantir a existência destas

funções.

Lema 3.1.1 (Bianchi, Setti, [9]). *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e não compacta. Suponha que $\text{Ric} \geq -\frac{2k^2}{1+r^2}g$ no sentido de formas quadráticas, isto é,*

$$\text{Ric}_p(X, X) \geq -\frac{2k^2}{1+r^2}|X|^2, \quad \forall X \in T_p M,$$

onde r é a função distância de um ponto fixado. Então para qualquer raio positivo $\tilde{r}$, e uma constante $\gamma > 1$, existe uma função $\tau : M \rightarrow [0, 1]$, $\tau \in C_0^\infty(M^n)$, tal que

$$i) \quad \tau \equiv 1 \text{ em } B_{\tilde{r}}(x_0)$$

$$ii) \quad \text{supp } \tau \subset B_{\gamma\tilde{r}}(x_0)$$

$$iii) \quad |\nabla \tau| \leq \frac{C_1}{\tilde{r}},$$

$$iv) \quad |\Delta \tau| \leq \frac{C_2}{\tilde{r}^2},$$

onde C_1 e C_2 são constantes que não dependem de $\tilde{r}$.

Observação 3.1.1. *Ainda em [9], os autores notaram que este resultado também é obtido para $\text{Ric} \geq 0$.*

Antes de prosseguir aos resultados, vamos relembrar que a estrutura de um sólito de Cotton (M^3, g, X) , é definida por

$$C + \mathcal{L}_X g = \lambda g. \quad (3.1)$$

Note que, tomando o traço na equação acima do sólito temos que $2 \text{div } X = \lambda n$. No caso gradiente, temos $2\Delta f = \lambda n$. Lembre que C é o $(0, 2)$ -tensor de Cotton-York que tem traço nulo e divergente nulo.

Feito isto, podemos enunciar e provar o seguinte:

Teorema 3.1.1. *Seja (M^3, g, f) um sólito de Cotton gradiente completo e não compacto e tal que o tensor de Ricci satisfaz*

$$\text{Ric} \geq -\frac{2k^2}{1+r^2}g, \quad (3.2)$$

no sentido de formas quadráticas, onde r é a função distância de um ponto fixado x_0 . Se f tem uma integral de Dirichlet com peso finita, isto é, se para alguma bola $B_{r_0}(x_0)$,

$$\int_{M-B_{r_0}} r(x, x_0)^{-2} |\nabla f|^2 < +\infty, \quad (3.3)$$

então M é localmente conformemente plana.

Demonstração. Tomando o traço na equação estrutural do sóliton e desde que o tensor de Cotton-York tem traço nulo obtemos que

$$2\Delta f = \lambda n.$$

Substituindo o Laplaciano na já conhecida fórmula de Bochner, obtemos que

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\text{Hess}f|^2 + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f). \quad (3.4)$$

Por outro lado, ainda podemos ver o Ricci na direção do gradiente como sendo

$$\begin{aligned} \text{Ric}(\nabla f, \cdot) &= \text{div}(\text{Hess}f) - \nabla\Delta f \\ &= \text{div}\left(\frac{\lambda}{2}g - \frac{C}{2}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois o divergente da métrica g e do tensor de Cotton-York são nulos, garantindo assim que $\text{Ric}(\nabla f, \cdot) = 0$. Assim, voltando à fórmula (3.4), resulta que

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\text{Hess}f|^2. \quad (3.5)$$

Por hipótese sob a curvatura de Ricci, existem funções cut-off, $\phi \in C_0^\infty(B(x_0, 2r_0))$ para $r_0 > 0$, de modo que satisfazem as seguintes condições

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq \phi \leq 1, & \text{em } B(x_0, 2r_0) \\ \phi = 1, & \text{em } B(x_0, r_0) \\ |\nabla \phi|^2 \leq \frac{K}{r_0^2}, & \text{em } B(x_0, 2r_0) \\ \Delta \phi \leq \frac{K}{r_0^2}, & \text{em } B(x_0, 2r_0), \end{array} \right. \quad (3.6)$$

onde $K > 0$ é uma constante. Observe que estamos tomando a bola com raio r_0 , o mesmo da suposição da integral de Dirichlet finita. Agora, multiplicamos a equação (3.5) pela função ϕ e integrando em ambos os lados da igualdade sob a bola de raio $2r_0$ para obter

$$\int_{B_{2r_0}} |\text{Hess}(f)|^2 \phi^2 = \int_{B_{2r_0}} \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 \phi^2.$$

Usando integração por partes conseguimos

$$\int_{B_{2r_0}} \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 \phi^2 = \int_{B_{2r_0}} \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \Delta \phi^2 + \frac{1}{2} \left(\int_{\partial B_{2r_0}} \phi^2 \frac{\partial |\nabla f|^2}{\partial \nu} - |\nabla f|^2 \frac{\partial \phi^2}{\partial \nu} \right).$$

Note que $\phi \in C_0^\infty(B(q, 2r_0))$, isto é, a função ϕ tem suporte compacto. Logo, o termo integral sob o bordo na equação anterior é nulo. Assim, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_{2r_0}} \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 \phi^2 &= \int_{B_{2r_0}} \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \Delta \phi^2 \\ &= \int_{B_{2r_0}} \frac{1}{2} |\nabla f|^2 (\phi \Delta \phi + |\nabla \phi|^2) \\ &= \int_{B_{2r_0} - B_{r_0}} \frac{1}{2} |\nabla f|^2 (\phi \Delta \phi + |\nabla \phi|^2) \\ &\leq \int_{B_{2r_0} - B_{r_0}} \frac{\alpha}{r_0^2} |\nabla f|^2, \end{aligned}$$

onde α é uma constante positiva e na terceira igualdade usamos que ϕ é constante igual a 1 sobre B_{r_0} , e por fim, na última desigualdade utilizamos as estimativas (3.6) da função cut-off. Juntando os resultados, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \int_{B_{2r_0}} |\text{Hess}(f)|^2 \phi_r^2 &\leq \int_{B_{2r_0} \setminus B_{r_0}} \frac{\alpha}{r^2} |\nabla f|^2 \\ &\leq \int_{M - B_{r_0}} \frac{\alpha}{r^2} |\nabla f|^2. \end{aligned}$$

A última desigualdade pode ser obtida por suposição da integral ser finita. Fazendo $r_0 \rightarrow \infty$ na última desigualdade temos que $\int_{M - B_{r_0}} \frac{\alpha}{r_0^2} |\nabla f|^2 \rightarrow 0$ e ϕ_r converge para a função constante igual a 1, logo obtemos

$$\int_M |\text{Hess} f|^2 = 0.$$

Portanto, concluímos que $\text{Hess} f = 0$. Voltando a equação estrutural do sólito, resta que $C = \lambda g$. Tomando o traço nesta equação e desde que C tem traço nulo, obtemos que $\lambda n = 0$, logo $\lambda = 0$. Portanto, concluímos que $C = 0$ e desde que M tem dimensão três, concluímos que é localmente conformemente plana. $\square$

No próximo resultado, consideramos o sólito gradiente e assumimos condições de regularidade sobre a função $|\nabla f|$, sendo $|\nabla f| \in L^\infty(M^n)$ ou $|\nabla f| \in L^p(M^n)$ para $p > 1$ e ainda a variedade Riemanniana ser parabólica.

Precisamos da seguinte definição.

Definição 3.1.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é chamada parabólica se toda função suave subharmônica $u : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $\sup_M u < +\infty$ é constante.*

Para a suposição de norma L^p , aplicaremos um resultado auxiliar obtido por Yau em [55], enunciado a seguir.

Lema 3.1.2 ([55]). *Seja $u : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave subharmônica e não negativa definida sobre a variedade Riemanniana completa M^n . Se $u \in L^p(M^n)$ para algum $p > 1$, então u é uma função constante.*

Com isto, estamos em posição de enunciar e provar o seguinte:

Teorema 3.1.2. *Seja (M^3, g, f) um sólito de Cotton gradiente completo e não compacto. Se, ou M^3 é parabólica e $|\nabla f| \in L^\infty(M^3)$ ou $|\nabla f| \in L^p(M^3)$ para $p > 1$, então (M^3, g) é localmente conformemente plana.*

Demonstração. Suponha que M é parabólica e $|\nabla f| \in L^\infty(M)$. Como foi obtido na prova do resultado anterior na equação (3.5), no caso do sólito de Cotton gradiente temos $\text{Ric}(\nabla f, \cdot) = 0$ e $2\Delta f = \lambda n$, logo

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\text{Hess}f|^2 \geq 0, \quad (3.7)$$

ou seja, $|\nabla f|^2$ é uma função subharmônica sobre M . Assim, com a suposição de M ser parabólica e $|\nabla f|$ ser limitada, obtemos que $|\nabla f|^2$ é uma função constante sobre M . Então por (3.7) resta que

$$|\text{Hess}f|^2 = 0,$$

isto é, o Hessiano de f é nulo. Voltando para a equação estrutural do sólito, temos $C = \lambda g$. Tomando o traço nesta equação, desde que C tem traço nulo, obtemos que $\lambda n = 0$, logo $\lambda = 0$ e consequentemente $C = 0$. Portanto, M é localmente conformemente plana.

Agora vamos supor que $|\nabla f| \in L^p(M)$ para algum $p > 1$. Podemos voltar para a equação (3.7) para obter $\Delta|\nabla f|^2 \geq 0$, isto é, $|\nabla f|^2$ é uma função subharmônica sobre M . Desde que $|\nabla f| \in L^p(M)$, tem-se que $|\nabla f|^2 \in L^p(M)$. Aplicando o Lema 3.1.2, concluímos que $|\nabla f|^2$ é uma função constante sobre M . Assim, obtemos novamente a equação (3.7), donde concluímos que o Hessiano de f é nulo. Voltando para equação estrutural do sólito temos novamente que $C = \lambda g$. Tomando o traço nesta equação, obtemos que $\lambda = 0$ e consequentemente $C = 0$. Portanto, M é localmente conformemente plana. $\square$

Para prova o Teorema 3.1.3, precisaremos da fórmula tipo Bochner, que é obtida da fórmula de Bochner generalizada.

Lema 3.1.3. *Seja (M^3, g, X) um sólito de Cotton. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X). \quad (3.8)$$

Demonstração. A fórmula de Bochner generalizada que pode ser encontrada em [54], é escrita da seguinte forma

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \operatorname{Ric}(X, X) + \nabla_X \operatorname{div}(X).$$

Tomando a divergência na equação estrutural do sóliton (3.1) e usando o fato que o tensor de Cotton-York tem divergente nulo, temos que

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g) = \lambda \operatorname{div}(g) = 0.$$

Agora tomando o traço na equação do sóliton e usando o fato que o tensor de Cotton-York tem traço nulo, temos que

$$\operatorname{div}(X) = \lambda n,$$

ou seja, $\operatorname{div} X$ é constante, logo $\nabla_X \operatorname{div}(X) = 0$. Com estes dois termos nulos, substituindo na fórmula generalizada e isolando o termo do Laplaciano, obtemos a fórmula (3.8). $\square$

Com isto em mãos, provamos o seguinte:

Teorema 3.1.3. *Seja (M^3, g, X) um sóliton de Cotton completo e não compacto com curvatura de Ricci satisfazendo*

$$0 \geq \operatorname{Ric} \geq -\frac{2k^2}{1+r^2}g, \quad (3.9)$$

no sentido de formas quadráticas, onde r é a função distância de um ponto fixado x_0 . Se

$$\int_{M-B_{r_0}} r(x, x_0)^{-2}|X| < +\infty, \quad (3.10)$$

para alguma bola B_{r_0} , então (M^3, g) é localmente conformemente plana e X é um campo paralelo.

Demonstração. Pelo Lema 3.1.3 temos que

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \operatorname{Ric}(X, X). \quad (3.11)$$

Pela suposição sobre a curvatura de Ricci, existe uma função cut-off ϕ que satisfaz as condições (3.6). Multiplicando a equação (3.11) por ϕ e integrando sobre B_{2r_0} , temos que

$$\int_{B_{2r_0}} |\nabla X|^2 \phi^2 - \int_{B_{2r_0}} \operatorname{Ric}(X, X) \phi^2 = \frac{1}{2} \int_{B_{2r_0}} \Delta|X|^2 \phi^2.$$

Agora integrando por partes e usando as propriedades de ϕ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_{2r_0}} \frac{1}{2} \Delta |X|^2 \phi^2 &= \int_{B_{2r_0}} \frac{1}{2} |X|^2 \Delta \phi^2 \\ &= \int_{B_{2r_0}} \frac{1}{2} |X|^2 (\phi \Delta \phi + |\nabla \phi|^2) \\ &= \int_{B_{2r_0} - B_{r_0}} \frac{1}{2} |X|^2 (\phi \Delta \phi + |\nabla \phi|^2) \\ &\leq \int_{B_{2r_0} - B_{r_0}} \frac{\alpha}{r_0^2} |X|^2, \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos que ϕ é constante igual a 1 sobre B_{r_0} , e na última desigualdade utilizamos as estimativas (3.6) da função cut-off e α é uma constante positiva. Assim,

$$\int_{B_{2r_0}} |\nabla X|^2 \phi^2 - \int_{B_{2r_0}} \text{Ric}(X, X) \phi^2 \leq \int_{B_{2r_0} \setminus B_{r_0}} \frac{\alpha}{r_0^2} |X|^2 \leq \int_{M \setminus B_{r_0}} \frac{\alpha}{r_0^2} |X|^2,$$

onde obtemos a última desigualdade pela suposição da integral ser finita. Fazendo $r_0 \rightarrow \infty$, temos que $\int_{M \setminus B_{r_0}} \frac{\alpha}{r_0^2} |X|^2 \rightarrow 0$ e ϕ converge para a função constante igual a 1. Logo, conseguimos

$$\int_M |\nabla X|^2 - \int_M \text{Ric}(X, X) = 0.$$

Por suposição a curvatura de Ricci é não positiva, logo da igualdade acima concluímos que $|\nabla X|^2 = 0$, ou seja $\nabla X = 0$, i.e., X é um campo paralelo. Tomando o traço na equação estrutural do sóliton e usando fato do tensor de Cotton-York ter traço nulo, obtemos que $\lambda = 0$ e $C = 0$, donde concluímos que (M, g) é localmente conformemente plana. $\square$

Finalmente, assumindo condições de regularidade tipo L^∞ ou L^p , provamos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.4. *Seja (M^3, g, X) um sóliton de Cotton completo e não compacto com curvatura de Ricci não positiva. Se, M^3 é parabólica e $|X| \in L^\infty(M^3)$, ou $|X| \in L^p(M^3)$ para $p > 1$, então (M^3, g) é localmente conformemente plana e X é um campo paralelo.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1.3 e pela suposição da curvatura de Ricci ser não positiva, temos

$$\frac{1}{2} \Delta |X|^2 = |\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X) \geq 0, \quad (3.12)$$

ou seja, $|X|^2$ é uma função subharmônica sobre M . Desde $\sup_M |X| < +\infty$ e M é parabólica obtemos que $|X|^2$ é constante. Assim segue da equação (3.12) que

$$|\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X) = 0.$$

Desde que $\text{Ric} \leq 0$ concluímos que $|\nabla X|^2 = 0$, ou seja, $\nabla X = 0$, e assim X é um campo paralelo. Na equação estrutural do sóliton resta que $C = \lambda g$. Tomando o traço nesta equação e usando o fato que o tensor C tem traço nulo temos que $\lambda n = 0$, donde concluímos que $\lambda = 0$ e consequentemente $C = 0$. Portanto (M, g) , é localmente conformemente plana.

Por outro lado, assuma que $|X| \in L^p(M)$, para algum $p > 1$. Podemos voltar para a equação (3.12), para obter $\Delta|X|^2 \geq 0$, isto é, $|X|^2$ é uma função subharmônica sobre M . Por suposição, temos que $|X|^2 \in L^p(M)$. Aplicando o Lema 3.1.2, concluímos que $|X|^2$ é uma função constante sobre M . Pela equação (3.12), obtemos de maneira análoga, que $|\nabla X| = 0$, isto é, X é paralelo. Voltando para equação estrutural do sóliton temos $C = \lambda g$. Da mesma maneira, tomando o traço nesta equação obtemos que $\lambda = 0$ e $C = 0$. Portanto, M é localmente conformemente plana. $\square$

3.2 Sólitons de Cotton via princípios do máximo

Nesta seção, apresentamos alguns resultados, onde aplicamos dois princípios de máximo com convergência para zero no infinito e outro com a suposição de crescimento de volume polinomial da variedade.

Assumindo a Definição 2.1.1 de convergência para zero no infinito, provamos o seguinte:

Teorema 3.2.1. *Seja (M^3, g, f) um sóliton de Cotton gradiente completo e não compacto. Se $|\nabla f|$ converge para zero no infinito, então (M^3, g, f) é trivial e localmente conformemente plano.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que o sóliton de Cotton é não trivial, i.e., a função potencial f deve ser não constante. Assim, podemos definir a função $v := |\nabla f|^2$, que é não negativa, não identicamente nula e que converge para zero no infinito, por suposição. Defina o campo vetorial suave $X := \nabla|\nabla f|^2$ sobre M e note que $\nabla v = X$. Logo,

$$g(\nabla v, X) = |\nabla|\nabla f|^2|^2 \geq 0.$$

Como foi visto anteriormente, para um sóliton de Cotton gradiente a fórmula de Bochner se reduz a

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\text{Hess}f|^2.$$

Agora, desde que $X = \nabla v$ obtemos

$$\frac{1}{2}\text{div}X = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 \geq 0.$$

Portanto, com a função v e o campo X satisfazendo às hipóteses do Lema 2.1.2, podemos aplicá-lo para obter

$$|\nabla|\nabla f|^2|^2 = g(\nabla v, X) \equiv 0,$$

ou seja, $\nabla|\nabla f|^2 = 0$ e conseqüentemente $v = |\nabla f|^2$ é uma função constante. Desde que v converge para zero no infinito, concluímos que v é identicamente nula, o que é uma contradição. Portanto, o sóliton é trivial, e pela equação estrutural do sóliton obtemos que $C = \lambda g$. Tomando o traço nesta equação e usando o fato que o tensor C tem traço nulo concluímos que $\lambda = 0$ e conseqüentemente $C = 0$, ou seja, M é localmente conformemente plana. $\square$

O próximo resultado é uma versão do teorema anterior para o caso do sóliton não gradiente. Neste caso, adicionamos a hipótese da curvatura de Ricci ser não positiva.

Teorema 3.2.2. *Seja (M^3, g, X) um sóliton de Cotton completo e não compacto com curvatura de Ricci não positiva. Se $|X|$ converge para zero no infinito, então o sóliton é trivial e (M^3, g) é localmente conformemente plana.*

Demonstração. Seguindo a ideia da prova do Teorema 3.2.1, assuma, por contradição, que o sóliton é não trivial. Então o campo potencial X deve ser não nulo. Assim podemos definir a função $v := |X|^2$ e o campo vetorial suave $Y := \nabla|X|^2$. Note que v é não negativa, não identicamente nula e converge para zero no infinito, por hipótese. Desde que $Y = \nabla v$, temos que

$$g(\nabla v, Y) = |\nabla|X|^2|^2 \geq 0.$$

Assim, aplicando o Lema 3.1.3 e usando que a curvatura de Ricci é não positiva, obtemos também que

$$\frac{1}{2}\text{div}Y = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X) \geq 0.$$

Como v e o campo Y satisfazem às hipóteses do Lema 2.1.2, podemos aplicá-lo para concluir que

$$0 \equiv g(\nabla v, Y) = |\nabla|X|^2|^2,$$

isto é, $\nabla v = \nabla|X|^2 = 0$ e conseqüentemente v é uma função constante sobre M . Desde que v converge para zero no infinito, concluímos que $v \equiv 0$ sobre M , o que implica que X é identicamente nulo, nos dando uma contradição com a suposição de não trivialidade do sóliton. Portanto, o sóliton é trivial e pela equação estrutural do sóliton obtemos

que $C = \lambda g$. Tomando o traço nesta equação e usando o fato que o tensor C tem traço nulo obtemos que $\lambda = 0$ e consequentemente $C = 0$, implicando que (M, g) é localmente conformemente plana. $\square$

No próximo resultado, além da suposição do crescimento de volume polinomial, adicionamos condições sobre a curvatura de Ricci e uma limitação sobre o campo potencial X , para poder ser verificada a relação entre o campo vetorial e a função, no princípio do máximo utilizado.

Provamos o seguinte:

Teorema 3.2.3. *Seja (M^3, g, X) um sólito de Cotton completo e não compacto, cuja curvatura de Ricci satisfaz $\text{Ric} \leq -\alpha g$ para alguma constante positiva α . Se (M^3, g) tem crescimento de volume polinomial e $|X|, |\nabla X| \in L^\infty(M^3)$, então o sólito é trivial e localmente conformemente plano.*

Demonstração. Suponha, supor por contradição, que o sólito é não trivial. Então o campo potencial X deve ser não nulo. Assim, novamente defina a função suave não negativa $v := |X|^2$ e o campo vetorial suave $Y := \nabla |X|^2$. Usando a fórmula tipo Bochner obtida no Lema 3.1.3, temos

$$\frac{1}{2} \text{div} Y = \frac{1}{2} \Delta |X|^2 = |\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X) \geq \alpha v.$$

Além disso,

$$g(\nabla v, Y) = |\nabla |X|^2|^2 \geq 0.$$

Por outro lado, pela desigualdade de Kato, temos

$$|Y| = 2|X||\nabla X| \leq 2|X||\nabla X| < +\infty,$$

pois, por hipótese, $|X|, |\nabla X| \in L^\infty(M)$. Assim, desde que a variedade tem crescimento de volume polinomial e v é uma função que satisfaz às hipóteses do Lema 2.2.1, podemos aplicá-lo para concluir que v é identicamente nula sobre M , isto é, $X = 0$, nos dando uma contradição com a suposição de não trivialidade do sólito. Portanto, o sólito é trivial, e pela equação estrutural do sólito temos $C = \lambda g$. Tomando o traço nesta equação obtemos que $\lambda = 0$ e consequentemente $C = 0$, implicando que (M, g) é localmente conformemente plana. $\square$

3.3 Sólitos de Cotton via Completude Estocástica

Nesta seção, finalizamos este capítulo com o último resultado e consequências, onde supomos o sólito de Cotton ser estocasticamente completo. Analogamente ao feito no Capítulo 2, usamos a equivalência entre a completude estocástica e a validade do princípio do máximo fraco de Omori-Yau. Além da completude estocástica, para a obtenção do próximo resultado, adicionamos a condição sob a curvatura de Ricci, $\text{Ric} \leq -\alpha g$ e o campo potencial X ser limitado.

Teorema 3.3.1. *Seja (M^3, g, X) um sólito de Cotton estocasticamente completo, cuja curvatura de Ricci satisfaz $\text{Ric} \leq -\alpha g$ para alguma constante positiva α . Se $|X| \in L^\infty(M^3)$ então, o sólito é trivial e localmente conformemente plano.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1.3, juntamente com a desigualdade de Kato, temos que

$$\begin{aligned} |X|\Delta|X| + |\nabla|X||^2 &= \frac{1}{2}\Delta|X|^2 \\ &= |\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X) \\ &\geq |\nabla|X||^2 + \alpha|X|^2. \end{aligned}$$

Note que, $|X|(\Delta|X| - \alpha|X|) \geq 0$, isto é, $\Delta|X| \geq \alpha|X|$. Agora, suponha, por absurdo, que $\sup_M |X| > 0$. Por suposição, $|X| \in L^\infty(M)$ e M é estocasticamente completa, então pelo Lema 2.3.1, existe uma sequência de pontos $\{x_k\} \subset M$ tal que

$$0 \geq \limsup_k \Delta|X|(x_k) \geq \alpha \sup_M |X| > 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\sup_M |X| = 0$, donde concluímos que X é identicamente nulo. Sendo assim, obtemos que o sólito é trivial. Analogamente, tomando o traço na equação estrutural do sólito, concluímos que $C = 0$, logo (M, g) é localmente conformemente plana. $\square$

Como consequência, obtemos um resultado supondo a parabolicidade da variedade, desde que toda variedade Riemanniana parabólica é estocasticamente completa [37].

Corolário 3.3.1. *Seja (M^3, g, X) um sólito de Cotton parabólico, cuja curvatura de Ricci satisfaz $\text{Ric} \leq -\alpha g$ para alguma constante positiva α . Se $|X| \in L^\infty(M^3)$, então (M^3, g, X) é trivial e localmente conformemente plano.*

Como uma segunda consequência, aplicada à alguns dos resultados obtidos neste capítulo, usamos um resultado obtido por Cheng et al. [18], para variedades Riemannianas localmente conformemente planas em dimensão três para obter um resultado de isometria.

Teorema 3.3.2 (Cheng, Kiohama, Ishikawa, [18]). *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana conformemente plana e completa, com curvatura escalar constante e norma ao quadrado da curvatura de Ricci constante. Então temos*

- i) Se a curvatura escalar R é não negativa, M^3 é ou isométrica a um espaço forma ou a variedade Riemanniana produto $M^2(c) \times N^1(c \geq 0)$.*
- ii) se a curvatura escalar R é negativa, ou M^3 é isométrica a um espaço forma ou a norma ao quadrado da curvatura de Ricci de M^3 está em $\left(\frac{R^3}{2}, \frac{R^2}{2}\right]$*

Notando que em todos os resultados, obtemos que a variedade é localmente conformemente plana e analisando o sinal da curvatura escalar, podemos aplicar o resultado acima. O resultado abaixo está publicado no artigo [22], mas aqui escrevemos o resultado corrigido, especificando como é aplicado em cada resultado anterior.

Corolário 3.3.2. *Em todos os resultados anteriores para os sólitos de Cotton, suponha em adição que, o sólito tem curvatura escalar constante R e norma ao quadrado do tensor curvatura de Ricci constante. Nos Teoremas 3.1.3, 3.1.4, 3.2.2, 3.2.3, 3.3.1 concluímos que, ou M^3 é isométrica a um espaço forma ou a norma ao quadrado da curvatura de Ricci de M^3 está em $\left(\frac{R^3}{2}, \frac{R^2}{2}\right]$.*

Observação 3.3.1. *Note que nos Teoremas 3.1.1, 3.1.2 e 3.2.1, não é possível concluir um sinal para a curvatura escalar, embora seja constante.*

Capítulo 4

Sólitos generalizados ou q -sólitos

Neste capítulo obtivemos alguns resultados de trivialidade e de isometria ao espaço Euclidiano, para q -sólitos completos, e escolhendo o tensor q de modo apropriado obtemos aplicações para sólitos já conhecidos tais como: o Ricci sem traço, Ricci-Bourguignon, sólito de Bach, sólito de obstrução ambiente e sólito de Cotton.

Primeiramente, supondo um q -sólito em que o tensor q tem traço não negativo e com condição L^1 no gradiente da função potencial f , obtemos que o tensor q tem traço nulo. Também estudamos q -sólitos com campo potencial conforme e satisfazendo uma identidade tipo Bianchi

$$\operatorname{div}(q) = \frac{1}{2} \nabla \operatorname{tr}(q),$$

para obter que o sólito é estacionário (X é um campo de Killing) ou q -plano.

4.1 q -sólitos com traço não positivo e ou não negativo

Lembremos que a equação de um q -sólito é dada pela expressão

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_X g = \lambda g + \frac{1}{2} q, \tag{4.1}$$

onde X é um campo suave e λ uma constante real.

Antes de apresentar os resultados obtidos, enunciaremos Lemas auxiliares que serão utilizados. O primeiro resultado foi obtido por Caminha et al. [21].

Lema 4.1.1. *Seja X um campo vetorial suave sobre uma variedade Riemanniana completa, não compacta e orientada M^n tal que $\operatorname{div}(X)$ não muda de sinal sobre M^n . Se $|X| \in L^1(M)$, então $\operatorname{div}(X) = 0$ sobre M^n .*

Aplicaremos o Lema 3.1.2, já enunciado anteriormente. Além disso, usaremos um outro resultado de Schoen-Yau que pode ser encontrado no Lema 6.3 de [52].

Lema 4.1.2. *Se f é uma função subharmônica não negativa em $B(q, 2r)$, contida em M , então vale a desigualdade*

$$\int_{B(q,r)} |\nabla f|^2 \leq \frac{\delta}{r^2} \int_{B(q,2r)} f^2, \quad (4.2)$$

onde $B(q, r)$ é uma bola com raio $r > 0$, centro em q e $\delta > 0$ é uma constante real.

A seguir temos o primeiro resultado de trivialidade para os sólitons generalizados. O resultado é composto de duas partes, onde na primeira obtemos que o sólito deve ter traço nulo e na segunda parte, substituindo a hipótese de regularidade da função f pela limitação inferior e com condições adicionais, concluímos que o sólito deve ser trivial.

Teorema 4.1.1. *Seja (M^n, g, f) um q-sólito gradiente completo, não contrátil ($\lambda \leq 0$), para o q-fluxo, tal que q tem traço não positivo. Se $|\nabla f| \in L^1(M^n)$ então M^n é estática e q tem traço nulo. Se ao invés da regularidade $L^1(M^n)$, supormos $f \geq k$ para alguma constante real $k > 0$ e vale qualquer um dos itens*

- i) M^n é parabólica,
- ii) $\frac{1}{f} \in L^p(M^n)$ para algum $p > 1$,
- iii) M^n crescimento de volume linear,

então o sólito é trivial.

Demonstração. Tomando o traço na equação estrutural do sólito e por suposição de $\lambda \leq 0$ e $\operatorname{tr}(q) \leq 0$, temos que

$$\Delta f = \lambda n + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(q) \leq 0, \quad (4.3)$$

isto é, f é superharmônica. Portanto, se $|\nabla f| \in L^1(M)$ então podemos usar o Lema 4.1.1 em $X = \nabla f$, para concluir que $\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = 0$, isto é, f é harmônica e consequentemente, pela equação anterior, obtemos que $\lambda = 0$ e $\operatorname{tr}(q) = 0$.

Agora, suponha que $f \geq k$, onde $k > 0$. Temos pela equação (4.3) que f é superharmônica. Se M é parabólica, obtemos que f é constante. Consequentemente, da própria equação (4.3), obtemos que $\text{tr}(q) = 0$ e $\lambda = 0$. Retornando à equação estrutural do sólito, conseguimos que o sólito é q -plano. Portanto o sólito é estacionário e q -plano, isto é, trivial.

Suponha que ii) ocorre. Com um cálculo simples é verificado que

$$\Delta\left(\frac{1}{f}\right) = \left(\frac{2}{f^3}\right)|\nabla f|^2 - \frac{\Delta f}{f^2}. \quad (4.4)$$

Desde que $\Delta f \leq 0$, como foi verificado em (4.3), pela equação (4.4) temos que $\Delta\left(\frac{1}{f}\right) \geq 0$, isto é, $\frac{1}{f}$ é subharmônica. Então pelo Lema 3.1.2 conseguimos que $\frac{1}{f}$ é constante sobre M , portanto f é constante e pela inequação (4.3) e equação estrutural do sólito (4.1), concluímos de maneira análoga que M é estacionário e q -plano.

Finalmente, assumindo a validade de (iii), podemos usar a inequação (4.3) novamente para conseguir $\Delta f \leq 0$, portanto por (4.4) segue que $\Delta\left(\frac{1}{f}\right) \geq 0$. Aplicando o Lema 4.1.2 e o crescimento de volume linear de M , temos que

$$\begin{aligned} \int_{B(q,r)} \left| \nabla \frac{1}{f} \right|^2 &\leq \left(\frac{\delta}{r^2} \right) \int_{B(q,2r)} \left(\frac{1}{f^2} \right) \\ &\leq \left(\frac{\delta}{r^2 k^2} \right) V(B(q,2r)) \\ &\leq \left(\frac{\delta}{r^2 k^2} \right) \beta 2r \\ &= \frac{\alpha}{rk^2} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

se $r \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\int_M \left| \nabla \frac{1}{f} \right|^2 = 0, \quad (4.5)$$

donde concluímos que a função $\frac{1}{f}$ é constante, logo f é constante. De maneira similar, usando a equação (4.3), concluímos que M é estacionário, ou seja, $\lambda = 0$ e q -plano. Isto completa a prova. $\square$

Por outro lado, obtivemos um outro resultado para q -sólitons no caso em que o tensor tem traço não negativo. Os passos da prova serão feitos de forma similar ao Teorema 3.1.1.

Teorema 4.1.2. *Seja (M^n, g, f) um q -sólito gradiente não expansivo ($\lambda \geq 0$), para o q -fluxo, tal que o tensor q tem traço não negativo. Além disso, suponha que a curvatura*

de Ricci de (M^n, g) satisfaz

$$\text{Ric} \geqslant -(n-1) \frac{k^2}{1+r^2} g,$$

no sentido de formas quadráticas. Se a função potencial f é positiva e tem integral de Dirichlet finita

$$\int_{M-B_r} d(x, x_0)^{-2} f < \infty,$$

então o traço de q é nulo.

Demonstração. Por hipótese sob a curvatura de Ricci, o Lema 3.1.1 garante a existência de uma função cut-off, $\phi \in C_0^\infty(B(x_0, 2r_0))$ para $r_0 > 0$, de modo que satisfaz as seguintes condições

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leqslant \phi \leqslant 1 & \text{em } B(x_0, 2r_0) \\ \phi = 1 & \text{em } B(x_0, r_0) \\ |\nabla \phi|^2 \leqslant \frac{K}{r_0^2} & \text{em } B(x_0, 2r_0) \\ \Delta \phi \leqslant \frac{K}{r_0^2} & \text{em } B(x_0, 2r_0), \end{array} \right. \quad (4.6)$$

onde $K > 0$ é uma constante.

Multiplicando a equação estrutural do sólito contraída por ϕ , e integrando sobre a bola de raio $2r_0$, temos

$$0 \leqslant \int_{B(q, 2r_0)} \phi \frac{1}{2} \text{tr}(q) = \int_{B(q, 2r_0)} \phi (\Delta f - \lambda n). \quad (4.7)$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\int_{B_{2r_0}} \Delta f \phi = \int_{B_{2r_0}} f \Delta \phi + \left(\int_{\partial B_{2r_0}} \phi \frac{\partial f}{\partial \nu} - f \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) = \int_{B_{2r_0}} f \Delta \phi,$$

onde utilizamos que a função ϕ tem suporte compacto sobre B_{2r_0} no termo integral sobre o bordo. Seguindo assim, temos

$$\begin{aligned} \int_{B(q, 2r_0)} \phi (\Delta f - \lambda n) &\leqslant \int_{B(q, 2r_0)} \phi \Delta f \\ &\leqslant \int_{B(q, 2r_0) - B(q, r_0)} f \Delta \phi \\ &\leqslant \int_{B(q, 2r_0) - B(q, r_0)} \frac{C}{r_0^2} f \\ &\leqslant \int_{M - B(q, r_0)} \frac{C}{r_0^2} f \rightarrow 0, \end{aligned}$$

se $r_0 \rightarrow \infty$. Usamos na última desigualdade que a integral de Dirichlet é finita. Desde que $\phi = 1$ em $B(q, r_0)$, da desigualdade acima e por (4.7) temos que $\int_M \frac{1}{2} \text{tr}(q) = 0$, logo $\text{tr}(q) = 0$ completando a prova. $\square$

4.2 Algumas aplicações à tensores especiais

Como mencionado na introdução, vamos aplicar os resultados obtidos para tensores com traço nulo, que são um caso particular de tensores com traço não positivo. Também temos alguns exemplos de sólitos com tensor de traço não positivo ou não negativo. Chen [17], mostrou que todo sólito de Ricci gradiente completo contrátil ($\lambda > 0$) tem curvatura escalar não negativa, assim para $\mathbf{q} = -2\text{Ric}$ um sólito de Ricci, com tensor de traço não positivo. Catino et al. [13] mostraram que todo sólito de Schouten completo, contrátil ($\lambda > 0$) ou estático ($\lambda = 0$), tem curvatura escalar não negativa. Neste caso, para um sólito de Schouten, temos $\mathbf{q} = 2\left(\frac{R}{2(n-1)}g - \text{Ric}\right)$, então o traço de $\mathbf{q}$ é não positivo. Além disso, um sólito ρ -Einstein com $\mathbf{q} = 2(\rho Rg - \text{Ric})$ tem traço não negativo se $R \geq 0$ e $\rho \geq \frac{1}{n}$ e não positivo se $R \geq 0$ e $\rho \leq \frac{1}{n}$.

Um outro exemplo de q-sólito com tensor de traço não negativo, são os sólitos Laplaciano. De acordo com [45], dada uma variedade Riemanniana de dimensão 7 e uma G_2 -estrutura fechada sobre M , um sólito Laplaciano (φ, X, λ) , é definido pela equação $\Delta_\varphi \varphi = \lambda\varphi + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X\varphi$, onde φ é uma 3-forma, $d\varphi = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathfrak{X}(M^7)$. Pela proposição 9.4 de [45], a métrica g associada a φ , satisfaz a equação

$$h = \frac{1}{3}\lambda g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g,$$

onde h é um $(0, 2)$ -tensor simétrico, definido em coordenadas por

$$h_{ij} = -R_{ij} - \frac{1}{3}|T|^2 g_{ij} - 2T_i^k T_{kj},$$

onde T é a torção. É verificado em [45] que o traço de h é igual a $\frac{2}{3}|T|^2$, ou seja, $\text{tr } h \geq 0$.

Como primeira consequência, aplicamos o Teorema 4.1.1 para sólitos ρ -Einstein gradiente com $\rho = \frac{1}{n}$, isto é, sólitos de Ricci sem traço, para obter o Teorema 2.4 de [20].

Corolário 4.2.1 ([20], Teorema 2.4). *Seja $(M^n, g, f, \frac{1}{n})$, $n \geq 3$, um sólito de Ricci sem traço gradiente completo não contrátil. Se $|\nabla f| \in L^1(M^n)$, então M^n é estático. Se ao invés da regularidade $L^1(M^n)$, supormos que $f \geq k$ para alguma constante real $k > 0$ e vale qualquer um dos itens*

i) M^n é parabólica,

ii) $\frac{1}{f} \in L^p(M^n)$ para algum $p > 1$,

iii) M^n tem crescimento de volume linear,

então M^n tem curvatura escalar constante.

Demonstração. O tensor $q = 2(\frac{R}{n}g - \text{Ric})$ tem traço nulo e define um sólito de Ricci sem traço gradiente, quando substituído na equação estrutural do q -sólito (1.5). Portanto, pelo Teorema 4.1.1 obtemos que $q = 0$, logo $\text{Ric} = \frac{R}{n}g$. Podemos aplicar o Lema de Schur [47], para concluir que M tem curvatura escalar constante. $\square$

Análogo ao corolário acima, também conseguimos aplicar o resultado para os sólitons ρ -Einstein, para valores de ρ em determinados intervalos e um sinal na curvatura escalar, que garantem que o tensor q tenha traço não positivo.

Corolário 4.2.2. *Seja (M^n, g, f, ρ) , $n \geq 3$, um sólito ρ -Einstein gradiente completo, não contrátil. Suponha que*

i) ou $R \geq 0$ e $\rho \in (-\infty, \frac{1}{n})$, ou

ii) $R \leq 0$ e $\rho \in (\frac{1}{n}, +\infty)$.

Se $|\nabla f| \in L^1(M^n)$, então M^n é sólito de Ricci gradiente estático. Se ao invés da regularidade $L^1(M^n)$, supormos $f \geq k$ para alguma constante real $k > 0$, e vale qualquer um dos itens

(i) M^n é parabólica,

(ii) $\frac{1}{f} \in L^p(M^n)$ para algum $p > 1$,

(iii) M^n tem crescimento de volume linear,

então (M^n, g, f, ρ) deve ser trivial.

Demonstração. Seguindo a prova anterior, o tensor $q = 2(\rho Rg - \text{Ric})$ tem traço igual a

$$\text{tr}(q) = 2(\rho n - 1)R \leq 0,$$

em ambas as condições dos itens (i) ou (ii). Logo, pelo Teorema 4.1.1, obtemos

$$2(\rho n - 1)R = \text{tr}(q) = 0, \text{ e } \lambda = 0,$$

que implica $R = 0$, e estático. Note que, de $R = 0$ a equação do sólito torna-se $\text{Hess } f + \text{Ric} = 0$. Portanto, M é um sólito de Ricci gradiente estático. Para a segunda parte do resultado, obtemos pelo Teorema 4.1.1 que o sólito é estático e q -plano, donde concluimos que o sólito ρ -Einstein é trivial. $\square$

Desde que o tensor de Cotton-York tem traço nulo, podemos aplicar o resultado para obter como consequência um resultado de trivialidade para os sólitos de Cotton.

Corolário 4.2.3. *Seja (M^3, g, f) sólito de Cotton gradiente completo não contrátil. Se $|\nabla f| \in L^1(M)$, então M^3 é estática. Se ao invés da regularidade $L^1(M^3)$, supormos $f \geq k$ para alguma constante real $k > 0$ e vale qualquer um dos itens*

- i) M^3 é parabólica,
- ii) $\frac{1}{f} \in L^p(M^3)$ para algum $p > 1$,
- iii) M^3 tem crescimento de volume linear,

então (M^3, g, f) é estático e localmente conformemente plano.

Note neste resultado acima que há uma diferença para o Teorema 3.1.2. Aqui temos um sólito de Cotton não contrátil e para o item i), precisamos que a função seja limitada inferiormente e que a variedade seja parabólica. Por outro lado, no Teorema 3.1.2, pedimos que M seja parabólica e que o gradiente da função potencial seja limitado.

Uma outra aplicação é para os sólitos de Bach, pois o tensor de Bach tem traço nulo.

Corolário 4.2.4. *Seja (M^n, g, f) um sólito de Bach gradiente completo e não contrátil. Se $|\nabla f| \in L^1(M^n)$, então M é estática. Se ao invés da regularidade $L^1(M^n)$, supormos $f \geq k$ para alguma constante real $k > 0$ e vale qualquer um dos itens*

- i) M^n é parabólica,
- ii) $\frac{1}{f} \in L^p(M^n)$ para algum $p > 1$,
- iii) M^n tem crescimento de volume linear,

vale, então (M^n, g, f) é estático e Bach-plano, ou seja, $B = 0$.

Finalmente, desde que o tensor de obstrução ambiente $\mathcal{O}_n$ tem traço nulo, finalizamos as aplicações do Teorema 4.1.1 com o seguinte resultado:

Corolário 4.2.5. *Seja (M^n, g, f) um sólito de obstrução ambiente completo, não compacto e não contrátil ($\lambda \leq 0$) com curvatura escalar constante. Se $|\nabla f| \in L^1(M^n)$, então (M^n, g, f) é estático. Se ao invés da regularidade $|\nabla f| \in L^1(M^n)$, supormos $f \geq k$ para alguma constnate real $k > 0$ e vale qualquer um dos itens*

i) M^n é parabólica,

ii) $\frac{1}{f} \in L^p(M^n)$ para algum $p > 1$,

iii) M^n tem crescimento de volume linear,

então (M^n, g, f) deve ser estacionário e $\mathcal{O}_n$ -plano, ou seja, $\mathcal{O}_n = 0$.

Conseguimos também uma aplicação para o Teorema 4.1.2 para sólitons ρ -Einstein, com valores de ρ em intervalos convenientes e sinal na curvatura escalar.

Corolário 4.2.6. *Seja (M^n, g, f, ρ) um sólito ρ -Einstein gradiente não expansivo. Suponha que a curvatura de Ricci de M satisfaz*

$$\text{Ric} \geqslant -(n-1) \frac{k^2}{1+r^2} g,$$

no sentido de formas quadráticas. Além disso, suponha que a função potencial f é positiva e satisfaz a integral de Dirichlet finita

$$\int_{M-B_r} d(x, x_0)^{-2} f < \infty,$$

para algum $r > 0$. Se vale qualquer uma das seguintes condições:

i) ou a curvatura escalar é não negativa e $\rho \in [\frac{1}{n}, +\infty)$, ou

ii) a curvatura escalar é não positiva e $\rho \in (-\infty, \frac{1}{n}]$,

então, ou o sólito tem curvatura escalar nula ou é um sólito de Ricci sem traço gradiente.

Demonstração. Definindo $q = 2(\rho Rg - \text{Ric})$, temos que em ambos os itens i) e ii), $\text{tr}(q) \geqslant 0$. Portanto, pelo Teorema 4.1.1 conseguimos que q deve ter traço nulo e obtemos $R(\rho n - 1) = 0$. Portanto, ou $R = 0$ ou $\rho = \frac{1}{n}$. $\square$

4.3 q-sólitons via campo conforme

Nesta seção apresentamos alguns resultados e aplicações para q -sólitons com curvatura escalar constante não nula e campo potencial não Killing ou, para sólitons compactos, admitindo campo conforme com adição do tensor q satisfazer uma identidade tipo Bianchi.

Iniciamos definindo uma transformação isométrica e homotética. Depois enunciaremos alguns resultados auxiliares que serão utilizados.

Definição 4.3.1 ([41]). *Seja $f : (M^n, g) \rightarrow (\tilde{M}^n, \tilde{g})$ um difeomorfismo. Então $g^* = f^{-1}\tilde{g}$ é uma métrica sobre M^n . Dizemos que g^* e g são conformemente relacionadas se existe uma função ψ tal que $g^* = 2\psi g$ e chamamos f de uma transformação conforme. Em particular, se ψ é constante então f é chamada transformação homotética. Se $\psi = 0$, então f é chamada uma transformação isométrica ou isometria. O grupo de todas as transformações conformes (homotéticas ou isométricas) de M^n sobre ela mesma, é chamado um grupo de transformação conforme e denotado por $C(M^n)$.*

No caso de um campo conforme a uma métrica, dizemos que X gera globalmente um grupo a um-parâmetro de transformações conformes homotéticas ou isométricas, se ψ for constante ou nula. Logo, se X é um campo não Killing, dizemos que o campo é *não isométrico*.

Lema 4.3.1 (Yano e Obata, [48]). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e X um campo vetorial conforme sobre M^n . Então*

$$\frac{1}{2}\langle X, \nabla R \rangle = -(n-1)\Delta\psi - R\psi,$$

onde R denota a curvatura escalar e ψ é o fator conforme de X .

Motivado pela segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes, investigamos q-sólitons satisfazendo a seguinte relação entre a divergência e o traço de q :

$$\text{div}(q) = \frac{1}{2}\nabla \text{tr}(q). \quad (4.8)$$

Um sólito de Ricci é um q-sólito, com $q = -2\text{Ric}$. Assim, é imediato que o tensor q , satisfaz (4.8), pela segunda identidade de Biachi.

Lema 4.3.2 (Cunha e Griffin, [23]). *Seja (M^n, g, X) um q-sólito tal que X é um campo vetorial conforme. Então a divergência e o traço de q satisfaz a identidade*

$$\nabla \text{tr}(q) = n \text{div}(q). \quad (4.9)$$

Feito essas considerações, podemos enunciar o nosso primeiro resultado para q-solitons com curvatura escalar constante não nula e campo vetorial conforme associado. Mais precisamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.1. *Seja (M^n, g, X) , $n > 2$, um q-sólito conexo satisfazendo (4.8) e com curvatura escalar constante não nula. Se X é campo vetorial conforme, então X é um campo vetorial de Killing.*

Demonstração. Desde que X é conforme e $n > 2$, das equações (4.9) e (4.8), conseguimos que $\operatorname{div}(q) = 0$ e consequentemente $\operatorname{tr}(q)$ é constante. Agora, tomando o traço na equação estrutural do q-sóliton e na equação (1.1), temos

$$\operatorname{div}X = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(q) + n\lambda \quad (4.10)$$

e

$$\operatorname{div}X = n\psi, \quad (4.11)$$

respectivamente. Comparando (4.10) e (4.11) observamos que

$$\operatorname{tr}(q) = 2n(\psi - \lambda).$$

Derivando covariantemente a equação anterior, obtemos

$$\nabla\operatorname{tr}(q) = 2n\nabla\psi. \quad (4.12)$$

Como $\operatorname{tr}(q)$ é constante, a equação (4.12) nos permite concluir que ψ é constante, isto é, X é um campo vetorial homotético. Isto, em conjunto com a curvatura escalar constante, reduz a equação no Lema 4.3.1 para $R\psi = 0$. Desde que R é não nula por hipótese, concluímos que $\psi = 0$, isto é, X é um campo de Killing. Isto completa a prova. $\square$

Em seguida temos algumas aplicações.

Corolário 4.3.1. *Seja (M^n, g, X) um sóliton de Ricci conexo, com curvatura escalar constante não nula. Se X é um campo vetorial conforme, então M^n é ou contrátil ou expansivo.*

Demonstração. Desde que um sóliton de Ricci é um q-sóliton, com tensor $q = -2\operatorname{Ric}$, a identidade (4.8) é satisfeita pela identidade de Bianchi contraída duas vezes. o Teorema 4.3.1 nos garante que X é um campo de Killing, logo a equação do sóliton fica $\operatorname{Ric} = \lambda g$. Contraindo esta equação temos $R = n\lambda$, logo o sinal de λ depende do sinal de R . Desde que R é não nula as únicas possibilidades é que $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$. $\square$

Corolário 4.3.2. *Seja (M^3, g, X) sóliton de Cotton conexo, com curvatura escalar constante não nula. Se X é um campo vetorial conforme, então M^3 é localmente conformemente plana.*

Demonstração. Como o tensor de Cotton-York tem traço nulo e divergente nulo a identidade (4.8) é satisfeita. Note que o sólito de Cotton é um q -sólito para $q = -2C$, então segue do Teorema 4.3.1 que X é um campo de Killing e a equação do sólito de Cotton se torna $C = \lambda g$. Tomando o traço nesta equação temos $n\lambda = 0$, logo $\lambda = 0$. Assim, temos que $C = 0$ e podemos concluir que M é localmente conformemente plana. $\square$

Corolário 4.3.3. *Seja (M^n, g, X) um sólito de Bach conexo, com curvatura escalar constante não nula. Se X é um campo vetorial conforme, então M^n Bach-plano.*

Demonstração. Desde que o tensor de Bach tem traço nulo, usando a equação (4.9) obtemos que $\text{div}(B) = 0$, logo vale a identidade (4.8). Assim, concluimos de maneira similar aplicando o Teorema 4.3.1 que $\lambda = 0$. Voltando à equação estrutural do sólito de Bach, temos que $B = 0$. $\square$

Corolário 4.3.4. *Seja (M^n, g, X) um sólito de obstrução ambiente conexo, com curvatura escalar constante não nula. Se X é um campo conforme, então M^n é $\mathcal{O}$ -plano.*

Demonstração. Analogamente ao resultado anterior, podemos verificar a validade da identidade tipo Bianchi (4.8) para o tensor de obstrução ambiente, utilizando que o fato de ter traço nulo e a equação (4.9). Obtendo que X é campo de Killing, temos a equação $0 = \lambda g + \frac{1}{2} (\mathcal{O}_n + c_n(-1)^{\frac{n}{2}} (\Delta^{\frac{n}{2}-1} R)g)$. Então pela suposição de ter curvatura escalar constante e contraindo a equação temos $\lambda = 0$ e consequentemente $\mathcal{O}_n = 0$. $\square$

Obtemos também um resultado de isometria para sólitos não compactos e com campo conforme não Killing, garantindo que é isométrico ao espaço Euclidiano. Obtemos aplicações para os casos particulares sendo os sólitos de Ricci, Bach, Cotton e obstrução ambiente. Aplicamos o seguinte resultado de Yano e Nagano [56], que enunciamos a seguir.

Lema 4.3.3. *Se uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, de classe $\mathcal{C}^\infty(M^n)$, admite um grupo a um parâmetro de transformações homotéticas não isométricas (isto é, admite um campo conforme não Killing), então é o espaço Euclidiano.*

Teorema 4.3.2. *Seja (M^n, g, X) , $n > 2$, um q -sólito completo e não compacto simplesmente conexo, satisfazendo (4.8) e X é um campo vetorial conforme não isométrico (isto é, conforme e não Killing). Então (M^n, g) é isométrico ao espaço Euclidiano.*

Demonstração. Em vista de (4.9) e (4.8), para $n > 2$, conseguimos $\operatorname{div}(q) = 0$ e $\operatorname{tr}(q)$ é constante. Aplicando isto à equação (4.12), a qual vale para um q-sóliton com campo vetorial conforme associado, conseguimos que ψ é constante e não nula, isto é, X é um campo homotético. Agora, aplicando o resultado clássico de Yano e Nagano, o Lema 4.3.3, concluímos que (M^n, g) é isométrico ao espaço Euclidiano. $\square$

Algumas consequências interessantes deste resultados são obtidas.

Corolário 4.3.5. *Seja (M^n, g, X) um sóliton de Ricci simplesmente conexo, completo e não compacto, tal que X é um campo vetorial conforme não Killing. Então (M^n, g) é isométrico ao espaço Euclidiano.*

Demonstração. Tomando $q = -2\operatorname{Ric}$ vemos que q satisfaz (4.8) por virtude da segunda identidade de Bianchi. A isometria segue diretamente do Teorema 4.3.2. $\square$

Corolário 4.3.6. *Seja (M^n, g, X) um sóliton de Bach completo e não compacto simplesmente conexo, tal que X é um campo vetorial conforme não Killing. Então (M^n, g) é isométrico ao espaço Euclidiano.*

Demonstração. Desde que B tem traço nulo e X é conforme, temos da equação (4.9) que $\operatorname{div}(B) = 0$, logo com $q = -2B$ vemos que a equação (4.8) é satisfeita. Com estas condições segue o resultado. $\square$

Corolário 4.3.7. *Seja (M^3, g, X) um sóliton de Cotton completo e não compacto simplesmente conexo, tal que X é um campo vetorial conforme não Killing. Então (M^3, g) é isométrico ao espaço Euclidiano.*

Demonstração. Pelo fato que o tensor de Cotton-York tem traço nulo e divergente nulo, a identidade tipo Bianchi (4.8) é válida. Com isto, obtemos que o sóliton é isométrico ao espaço Euclidiano. $\square$

Corolário 4.3.8. *Seja (M^n, g, X) um sóliton de obstrução ambiente completo e não compacto simplesmente conexo e com curvatura escalar constante, tal que X é um campo vetorial conforme não Killing. Então (M^n, g) é isométrico ao espaço Euclidiano.*

Demonstração. Por hipótese da curvatura escalar constante, o termo Laplaciano da curvatura escalar se anula na equação estrutural do sóliton, assim, resta apenas o tensor de obstrução $\mathcal{O}_n$. De maneira similar, desde que $\mathcal{O}_n$ tem traço nulo e divergente nulo, a equação (4.8) é válida. Com estas condições o resultado segue direto. $\square$

No caso compacto, no trabalho [23, Teorema 2.14], Cunha e Griffin provaram que um q-sóliton compacto, com X sendo um campo vetorial conforme, se $\text{tr}(\mathbf{q})$ é constante então X é Killing. Em adição, se $\mathbf{q}$ tem traço nulo, então M é q-plano. Neste contexto, obtemos uma versão melhorada deste resultado, assumindo a identidade tipo Bianchi para um $(0, 2)$ -tensor simétrico geral $\mathbf{q}$ dada por (4.8). Mais precisamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.3. *Seja (M^n, g, X) um q-sóliton compacto satisfazendo (4.8). Se X é um campo vetorial conforme, então X é um campo vetorial de Killing. Em adição, se $\mathbf{q}$ tem traço nulo, então (M^n, g) deve ser q-plano.*

Demonstração. Desde que X é conforme a equação (4.9) vale. Isto, junto com a equação (4.8) implica que $\text{div}(\mathbf{q}) = 0$, para $n > 2$. Desde que M é compacta, Griffin provou em [34] que um q-sóliton com $\text{div}(\mathbf{q}) = 0$ é estacionário, isto é, X é um campo vetorial de Killing. Finalmente, se $\mathbf{q}$ tem traço nulo, então da equação estrutural do q-sóliton, obtemos que $\lambda = 0$ e consequentemente M é q-plano. $\square$

Como os sóltons de Ricci satisfazem a equação (4.8) com $\mathbf{q} = -2\text{Ric}$, obtemos o seguinte resultado de Ribeiro et al. [4, Teorema 3].

Corolário 4.3.9 (Ribeiro et al., [4]). *Seja (M^n, g, X) um sóliton de Ricci compacto. Se X é um campo vetorial conforme, então X é Killing e M^n é trivial.*

Algumas consequências não seguem do Teorema 4.3.3, como é explicado nas observações a seguir.

Observação 4.3.1. *Em [14, Teorema 1] Garcia-Río et al. mostraram que qualquer sóliton de Cotton compacto (M^3, g, X) , deve ser localmente conformemente plano e X um campo vetorial de Killing. Assim, um corolário do Teorema 4.3.3 não é consequência para os sóltons de Cotton.*

Observação 4.3.2. *Em [36, Teorema 1.3] Griffin et al. mostraram que qualquer sóliton de obstrução ambiente compacto (M^n, g, X) , tem curvatura escalar constante e X é um campo vetorial de Killing. Portanto, um corolário do Teorema 4.3.3 não é consequência para os sóltons de Obstrução Ambiente.*

Para um sólito de Bach, Ho [40, Teorema 3.2] provou que um sólito de Bach compacto (M^n, g, X) de dimensão 4 deve ser Bach-plano e X um campo vetorial de Killing. Portanto em dimensões $n \geq 5$ podemos afirmar o seguinte.

Corolário 4.3.10 (Cunha-Griffin, [23]). *Seja (M^n, g, X) , $n \geq 5$, um sólito de Bach compacto. Se X é um campo vetorial conforme, então X é Killing e (M^n, g) é Bach-plano.*

Demonstração. Como já foi verificado, vale a identidade tipo Bianchi para um sólito de Bach com campo conforme. Segue o resultado. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] ALÍAS, Luis José; CAMINHA, Antonio; DO NASCIMENTO, F. Y. **A maximum principle at infinity with applications to geometric vector fields**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 474, n. 1, p. 242-247, 2019.
- [2] ALÍAS, Luis J.; CAMINHA, Antonio; NASCIMENTO, F. Yure do. **A maximum principle related to volume growth and applications**. Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-), v. 200, p. 1637-1650, 2021.
- [3] ALÍAS, Luis J. et al. **Maximum principles and geometric applications**. Cham: Springer International Publishing, 2016.
- [4] AQUINO, C.; BARROS, A.; RIBEIRO, E. **Some applications of the Hodge-de Rham decomposition to Ricci solitons**. Results in Mathematics, v. 60, p. 245-254, 2011.
- [5] BACH, Rudolf. **Zur weylschen relativitätstheorie und der weylschen erweiterung des krümmungstensorbegriffs**. Mathematische Zeitschrift, v. 9, n. 1, p. 110-135, 1921.
- [6] BOURGUIGNON, Jean Pierre. **Ricci curvature and Einstein metrics**. In: Global Differential Geometry and Global Analysis: Proceedings of the Colloquium Held at the Technical University of Berlin, November 21–24, 1979. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. p. 42-63.
- [7] BAHUAUD, Eric; HELLIWELL, Dylan. **Short-time existence for some higher-order geometric flows**. Communications in partial differential equations, v. 36, n. 12, p. 2189-2207, 2011.

- [8] BAHUAUD, Eric; HELLIWELL, Dylan. **Uniqueness for some higher-order geometric flows**. Bulletin of the London Mathematical Society, v. 47, n. 6, p. 980-995, 2015.
- [9] BIANCHI, Davide; SETTI, Alberto G. **Laplacian cut-offs, porous and fast diffusion on manifolds and other applications**. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, v. 57, n. 1, p. 4, 2018.
- [10] BORGES, Valter. **On complete gradient Schouten solitons**. Nonlinear Analysis, v. 221, p. 112883, 2022.
- [11] BRANSON, T. **The functional determinant** (Lecture notes series; vol. 4). Seoul: Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, 1993.
- [12] CATINO, Giovanni et al. **The Ricci–Bourguignon flow**. Pacific Journal of Mathematics, v. 287, n. 2, p. 337-370, 2017.
- [13] CATINO, Giovanni; MAZZIERI, Lorenzo. **Gradient Einstein solitons**. Nonlinear Analysis, v. 132, p. 66-94, 2016.
- [14] CALVINO-LOUZAO, E.; GARCIA-RIO, E.; VÁZQUEZ-LORENZO, R. **A note on compact Cotton solitons**. Classical and Quantum Gravity, v. 29, n. 20, p. 205014, 2012.
- [15] CALVINO-LOUZAO, E. et al. **Homogeneous Cotton solitons**. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, v. 46, n. 28, p. 285204, 2013.
- [16] CHANG, S.-Y. Alice et al. **What is Q-curvature?** Acta Applicandae Mathematicae, v. 102, n. 2, p. 119-126, 2008.
- [17] CHEN, Bing-Long. **Strong uniqueness of the Ricci flow**. Journal of Differential Geometry, v. 82, n. 2, p. 363-382, 2009.
- [18] CHENG, Qing-Ming; ISHIKAWA, Susumu; SHIOHAMA, Katsuhiro. **Conformally flat 3-manifolds with constant scalar curvature**. Journal of the Mathematical Society of Japan, v. 51, n. 1, p. 209-226, 1999.

- [19] CHOW, Bennett; LU, Peng; NI, Lei. **Hamilton's Ricci flow**. American Mathematical Society, Science Press, 2023.
- [20] CUNHA, Antonio W.; MANDAL, Prosenjit; SHAIKH, Absos Ali. **Some characterizations of ρ -Einstein solitons**. Journal of Geometry and Physics, v. 166, p. 104270, 2021.
- [21] CAMINHA, A.; SOUZA, P.; CAMARGO, F. **Complete foliations of space forms by hypersurfaces**. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, v. 41, p. 339-353, 2010.
- [22] CUNHA, Antonio W.; SILVA JUNIOR, Antonio N. **On non-compact Cotton solitons**. Letters in Mathematical Physics, v. 112, n. 5, p. 87, 2022.
- [23] CUNHA, Antonio W.; GRIFFIN, Erin. **On non-compact gradient solitons**. Annals of Global Analysis and Geometry, v. 63, n. 4, p. 27, 2023.
- [24] CUNHA, Antonio W. et al. **A note on the triviality of gradient solitons of the Ricci-Bourguignon flow**. Archiv der Mathematik, v. 120, n. 1, p. 89-98, 2023.
- [25] CUNHA, Antonio W.; SILVA JÚNIOR, A. N.; PODDAR, R. **Characterization of q-solitons under trace conditions and Conformal vector fields**. *Preprint*. 2024.
- [26] DAS, Sanjit; KAR, Sayan. **Bach flows of product manifolds**. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, v. 9, n. 05, p. 1250039, 2012.
- [27] CHAKRABORTY, Debabrata; MANDAL, Yadab Chandra; HUI, Shyamal Kumar. **Evolution of some geometric quantities along the Cotton flow**. Filomat, v. 33, n. 16, p. 5087-5095, 2019.
- [28] DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. **Topologically massive gauge theories**. Annals of Physics, v. 140, n. 2, p. 372-411, 1982.
- [29] DWIVEDI, Shubham. **Some results on Ricci-Bourguignon solitons and almost solitons**. Canadian Mathematical Bulletin, v. 64, n. 3, p. 591-604, 2021.
- [30] FEFFERMAN, Charles; GRAHAM, C. Robin. **The ambient metric (AM-178)**. Princeton University Press, 2012.

- [31] GARAJ, Filip. **Properties and Applications of Cotton Tensor**. Bachelor thesis, Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, Czech Technical University in Prague, 2016.
- [32] GHOSH, Amalendu. **Certain triviality results for Ricci-Bourguignon almost solitons**. Journal of Geometry and Physics, v. 182, p. 104681, 2022.
- [33] GRAHAM, C. Robin; HIRACHI, Kengo. **The ambient obstruction tensor and Q-curvature**. In: **AdS/CFT correspondence: Einstein metrics and their conformal boundaries**. IRMA Lect. Math. Theor. Phys., v. 8, p. 59-71. Zürich: Eur. Math. Soc., 2005. DOI: 10.4171/013-1/3. MR2160867.
- [34] GRIFFIN, Erin. **Gradient ambient obstruction solitons on homogeneous manifolds**. Annals of Global Analysis and Geometry, v. 60, n. 3, p. 469-499, 2021.
- [35] GRIFFIN, Erin. **Ambient Obstruction Solitons and Homogeneous Gradient Bach Solitons**. 2021. Tese(Doutorado em Matemática). Syracuse University, 2021.
- [36] GRIFFIN, Erin et al. **Extended Solitons of the Ambient Obstruction Flow**. arXiv preprint arXiv:2405.15870, 2024.
- [37] GRIGOR'YAN, Alexander. **Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds**. Bulletin of the American Mathematical Society, v. 36, n. 2, p. 135-249, 1999.
- [38] HAMILTON, Richard S. **Three-manifolds with positive Ricci curvature**. Journal of Differential Geometry, v. 17, n. 2, p. 255-306, 1982.
- [39] HELLIWELL, Dylan et al. **Bach flow on homogeneous products**. SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, v. 16, p. 027, 2020.
- [40] HO, Pak Tung. **On the Ricci-Bourguignon flow**. International Journal of Mathematics, v. 31, n. 06, p. 2050044, 2020.
- [41] HSIUNG, Chuan-Chih; MUGRIDGE, Larry R. **Riemannian manifolds admitting certain conformal changes of metric**. In: **Selected Papers Of Chuan-Chih Hsiung**, p. 412-420, 2001.

- [42] EISENHART, Luther Pfahler. **Riemannian geometry**. Princeton university press, 1997.
- [43] KARP, Leon. **On Stokes' theorem for noncompact manifolds**. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 82, n. 3, p. 487-490, 1981.
- [44] KIŞISEL, Ali Ulaş Özgür; SARIOĞLU, Özgür; TEKIN, Bayram. **Cotton flow**. Classical and Quantum Gravity, v. 25, n. 16, p. 165019, 2008.
- [45] LOTAY, Jason D.; WEI, Yong. **Laplacian flow for closed $G/2$ structures: Shi-type estimates, uniqueness and compactness**. Geometric and Functional Analysis, v. 27, p. 165-233, 2017.
- [46] LAURET, Jorge. **GEOMETRIC FLOWS AND THEIR SOLITONS ON HOMOGENEOUS SPACES**. In: Workshop for Sergio Console. 2016. p. 55-93.
- [47] LEE, John M. **Introduction to Riemannian manifolds**. Cham: Springer, 2018.
- [48] YANO, Kentaro; OBATA, Morio. **Conformal changes of Riemannian metrics**. Journal of Differential Geometry, v. 4, n. 1, p. 53-72, 1970.
- [49] PERELMAN, Grisha. **Ricci flow with surgery on three-manifolds**. arXiv preprint math/0303109, 2003.
- [50] PETERSEN, Peter; WYLIE, William. **Rigidity of homogeneous gradient soliton metrics and related equations**. Differential Geometry and its Applications, v. 84, p. 101929, 2022.
- [51] PIGOLA, Stefano; RIGOLI, Marco; SETTI, Alberto. **A remark on the maximum principle and stochastic completeness**. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 131, n. 4, p. 1283-1288, 2003.
- [52] SCHOEN, Richard M.; YAU, Shing-Tung. **Lectures on Differential Geometry**. Cambridge, MA: International press, 1994.
- [53] UMEHARA, Yoshihiro. **Cotton tensor and conformal deformations of three-dimensional Ricci flow**. Osaka Journal of Mathematics, v. 53, n. 2, p. 515-534, 2016.

-
- [54] YANO, K. BOCHNER, S. **Curvature and Betti Numbers**. Princeton University Press, Princeton (1949).
- [55] YAU, Shing-Tung. **Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry**. Indiana University Mathematics Journal, v. 25, n. 7, p. 659-670, 1976.
- [56] YANO, Kentaro; NAGANO, Tadashi. **Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations**. Annals of Mathematics, v. 69, n. 2, p. 451-461, 1959.
- [57] YORK JR, James W. **Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem**. Physical Review Letters, v. 26, n. 26, p. 1656, 1971.