



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Controle Stackelberg Robusto para a Equação do Calor Linear e Semilinear

Thiago Cavalcante Araújo de Carvalho

Teresina - 2025

Thiago Cavalcante Araújo de Carvalho

Dissertação de Mestrado:

**Controle Stackelberg Robusto para a Equação do Calor Linear e
Semilinear**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto

Teresina - 2025



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Controle Stackelberg Robusto para a equação do calor linear e semilinear

Thiago Cavalcante Araujo de Carvalho

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 24 de julho de 2025.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **GILCENIO RODRIGUES DE SOUSA NETO**
Data: 29/07/2025 23:32:44-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto – Orientador

Documento assinado digitalmente
 **ISAIAS PEREIRA DE JESUS**
Data: 28/07/2025 14:05:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus - UFPI

Documento assinado digitalmente
 **MAURICIO CARDOSO SANTOS**
Data: 28/07/2025 12:25:23-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Mauricio Cardoso Santos - UFPB

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

C331c Carvalho, Thiago Cavalcante Araújo de.
 Controle Stackelberg para a equação do calor linear e
 semilinear /Thiago Cavalcante Araújo de Carvalho. -- 2025.
 100 f.

 Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí,
 Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação
 em Matemática, Teresina, 2025.
 “Orientador: Prof. Dr. Gilcenio Rodrigues de Sousa
 Neto”.

 1. Equação Diferencial Parcial. 2. Equação do Calor
 Linear. 3. Método da Unicidade Hilbertiana. I. Sousa Neto,
 Gilcenio Rodrigues de. II. Título.

CDD 515.3

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

À minha família, especialmente à minha amada esposa Milena, aos meus pais Josivan e Raimunda, e à minha irmã Clara e ao meu filho Miguel.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, dono de toda honra e glória, o qual, na pessoa bendita de Jesus Cristo, me deu vida, e vida com abundância (João 10. 9 - 11).

Agradeço à minha amada esposa Milena Meneses de Carvalho, a mulher da minha vida e mãe do meu filho, por ter me dado o incentivo e a coragem de ter feito este mestrado. E ao meu amado filho Miguel, um presente de Deus em nossas vidas.

Agradeço aos meus pais, Josivan Vale e Raimunda Cavalcante, que me instruíram no caminho que deveria andar, e fizeram de tudo para que eu pudesse ter educação, agradeço também a minha querida irmã Clara Jamile. Agradeço ao meu sogro e à minha sogra também pelo apoio, que me acolheram como filho, agradeço às minhas cunhadas Michele Meneses e Mikaelly Meneses, que me receberam como irmão.

Agradeço a todos os meus familiares, em particular ao meu primo Gabriel Vale e sua esposa Ana Karoline e seus filhos: Bernardo, Arthur e José, pelo incentivo e apoio. Também um agradecimento especial à minha tia Jucilene Vale e ao seu marido tio José Vale.

Ao meu orientador Gilcenio Rodrigues pelo apoio, incentivo, imensa disponibilidade e inspiração, por todas as tardes e manhãs onde passamos calculando, aprendendo e conversando, mesmo à distância em muitas vezes, foi um prazer trabalhar e aprender mais. Muito obrigado.

A cada professor meu no Mestrado, que contribuíram imensamente para a realização deste trabalho repassando seus conhecimentos durante as disciplinas ministradas no curso: Barnabé, Gilcenio, Sandoel, Gleison, José Francisco e Isaías.

Agradeço ao Professor Halyson pela excelente coordenação do programa PPGMAT. Agradeço também à secretária Larisse por sua competência e solicitude, e puxões de orelha.

Aos meus amigos que fiz durante o mestrado e até mesmo antes dele: Danilo (o qual dividiu esse sonho comigo ainda na graduação e por ter me motivado a cursar o mestrado, e por todas as dicas e conselhos), Suerlan (que me apresentou ao meu orientador e sempre solícito a tirar dúvidas). Aos meus colegas de salinha: Elliel, Francisco Júnior, Francisco Deyvid, Maria Cheila, Gustavo, Sayd, Honório, Andreina, Angélica, Bruno, Gean, Anderson, Ismael, Natália, Pedro, Vinícius Melo, Rafael, Antônio, Otávio.

Em especial, quero agradecer aos meus queridos *quasi-amigos* (amigos a menos de um conjunto de medida nula) por tornar os dias mais leves, pela companhia, pelas resenhas: Ana Júlia, Danilo, Eduardo, Emanuelly, José Alencar e Vinícius Santos.

À todos aqueles que contribuíram de alguma forma para a realização deste estudo, meu muito obrigado.

Agradeço imensamente à CAPES pelo apoio financeiro.

“Nós precisamos saber. Nós vamos saber”.

David Hilbert.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo aprofundado sobre controlabilidade exata às trajetórias e controle robusto para a equação do calor linear e semi-linear, via estratégia hierárquica de Stackelberg, em domínios limitados do $\mathbb{R}^N$ e condições de fronteira de Dirichlet.

Na demonstração dos teoremas principais foi utilizado o Método da Unicidade Hilbertiana (HUM) para o controle ótimo combinado com a otimização de um funcional de custo para o controle robusto. Para isso, foi preciso construir uma desigualdade de Observabilidade para a equação adjunta, via desigualdade de Carleman. Na demonstração do caso semi-linear, fizemos uso do Teorema do ponto fixo de Schauder.

Palavras-chave: Controle Exato à Trajetórias; Equação do Calor Semilinear; Controle Hierárquico; Controle Robusto; Desigualdade de Observabilidade; Ponto Fixo de Schauder.

Abstract

The objective of this work is to present an in-depth study on exact controllability to trajectories and robust control for the linear and semilinear heat equation via the hierarchical Stackelberg strategy, in bounded domains under Dirichlet boundary conditions.

For the proof of the theorems, the Hilbert Uniqueness Method (HUM) was employed for optimal control, combined with the optimization of a functional for robust control. To achieve this, it was necessary to establish an observability inequality for the adjoint equation via a Carleman inequality. To establish the result in the semi-linear case, we made use of Schauder's fixed-point theorem.

Keywords: Exact Controllability to Trajectories; Semilinear Heat Equation; Hierarchical Control; Robust Control; Observability Inequality; Schauder Fixed-Point Theorem.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
1 Noções Preliminares	3
1.1 Noções de Análise Funcional	3
1.2 Mais Resultados Importantes	15
1.3 Formulação do Problema	17
2 Controle Robusto	21
2.1 Existência do Ponto de Sela	21
2.2 Caracterização do ponto de sela	44
3 Desigualdade de Observabilidade	48
3.1 Uma Desigualdade de Carleman	50
3.2 A Desigualdade de Observabilidade	54
4 Controlabilidade	69
4.1 Caso Semilinear	69
4.1.1 Demonstração do Teorema 20	73
4.2 Caso linear	76
4.2.1 Resultados preliminares	76
4.2.2 Demonstração do Teorema 21	79

Introdução

Neste trabalho estudaremos a controlabilidade de sistemas de uma equação parabólica, com termo linear e não-linear. O estudo da teoria do controle é motivado pela intenção de se alcançar um estado final desejado de um sistema que evolui com o tempo. A equação em questão é a conhecida equação do calor, formulada por J. Fourier em 1822 na sua famosa obra *Théorie analytique de la chaleur*. Tal equação é amplamente usada e estudada em áreas como engenharia, biologia e física, e é descrita como sendo:

$$y_t(x, t) - \Delta y(x, t) = 0,$$

onde $y(x, t)$ mede a temperatura no ponto x no tempo t , y_t denota a derivada parcial de y com relação à t e Δy denota o operador laplaciano. Estudaremos uma equação semelhante a esta, adicionando um termo não-linear a princípio. As aplicações dessa equação são diversas. Em dimensão 1, tal equação pode descrever um modelo de transferência de calor em uma barra, por exemplo. Em dimensão 2, podemos modelar a poluição de um lago, onde $y(x, t)$ descreve a concentração de uma substância química, por exemplo.

Introduziremos o estudo da teoria do controle para um sistema semelhante a este. Existem várias noções de controle, como controle exato, controle aproximado, controle nulo, controle robusto e controle exato às trajetórias. Controlar um sistema significa mostrar que é possível obter-se um controle (uma função) o qual, inserido no sistema, leva a solução do sistema para um estado final desejado.

Um resultado muito importante para a teoria do controle foi obtido por J. Lions em Lions (1988), o qual formulou o Método da Unicidade Hilbertiana (HUM) que reduziu o problema de controlabilidade de sistemas lineares a obtenção de uma desigualdade de observabilidade para um sistema adjunto. Podemos citar outros trabalhos relevantes como Lions (1994), também obtido por J. Lions, que introduziu o método de Stackelberg para controle hierárquico. Tal método teve origem na economia (ver Von Stackelberg (1934)), e, aplicado à teoria do controle hierárquico, estabelece uma estratégia entre dois

controles com objetivos distintos; o primeiro é chamado de seguidor e toma a sua “decisão” baseada na escolha do outro controle, chamado de líder. Nesse trabalho, vamos estudar uma combinação de controle hierárquico com controle robusto para a equação do calor semi-linear. Os resultados principais desse trabalho foram obtidos por V. Hernández-Santamaría e Luz de Teresa em 2018 (ver Hernández-Santamaría e Teresa (2018)). O controle robusto será o seguidor, escolhido a partir de um controle líder, o qual terá o objetivo de levar a solução a uma trajetória conhecida, isto é, controlabilidade exata às trajetórias.

Em resumo, este trabalho está dividido da seguinte forma:

No Capítulo 1, iremos apresentar definições e resultados úteis para o desenvolvimento do trabalho, além de apresentar a formulação do problema de maneira mais detalhada.

No Capítulo 2, mostraremos a existência do controle robusto. Primeiro, iremos fixar um líder qualquer, e, para cada um desses fixados, iremos encontrar um ponto de sela para um funcional custo. Este ponto de sela será o controle robusto desejado. Para encontrá-lo, usaremos uma proposição da Análise convexa para pontos de sela em funcionais definidos em espaços de Banach.

No Capítulo 3, após mostrarmos a existência, unicidade e caracterização do ponto de sela, isto é, do controle seguidor, iremos mostrar uma propriedade para o sistema adjunto do sistema linearizado, chamada de desigualdade de observabilidade. Para isso, usaremos uma outra desigualdade bem comum na teoria do controle, chamada de desigualdade de Carleman (ver Yamamoto e Imanouilov (2003)).

No Capítulo 4, iremos de fato demonstrar os dois resultados principais desse estudo. Com a desigualdade de observabilidade, poderemos mostrar o controle aproximado para o sistema linearizado. Usaremos um método de ponto fixo para passar do sistema linearizado para o não-linear, e, em seguida, utilizando algumas estimativas, ganharemos convergências do controle líder e da solução do sistema que nos dará o resultado final para o caso semi-linear. Outro resultado importante será encontrado, dessa vez para o caso linear, onde investigaremos a existência dos controles com algumas restrições sobre os mesmos. Nessa situação, o interesse é mostrar um resultado similar ao anterior restringindo o controle robusto a atingir valores apenas em um intervalo fechado e limitado da reta.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os resultados necessários que fundamentarão o nosso estudo. Para efeito de simplificação, não apresentaremos as demonstrações para tais resultados, mas deixaremos uma referência para cada um.

1.1 Noções de Análise Funcional

A Análise Funcional é um ramo da matemática que estuda espaços de funções e as transformações entre eles, utilizando ferramentas de álgebra linear, topologia e análise. A Análise Funcional permite a compreensão profunda de fenômenos matemáticos e a modelagem de sistemas complexos.

Espaços de Banach

Definição 1 (Espaços de Banach). *Um espaço normado E é dito ser um espaço de Banach, com a norma $\|\cdot\|_E$, quando for completo com a métrica induzida pela norma, isto é, sequências de Cauchy são convergentes em E na norma $\|\cdot\|_E$.*

Definição 2 (Dual). *O dual de um espaço topológico E , ou simplesmente dual de E , é o espaço $E' := \{\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}; \varphi \text{ é um funcional linear e contínuo}\}$, ou seja, E' é o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos de E em $\mathbb{K}$.*

Observação 1. *Aqui denotamos $\mathbb{K}$ como sendo os corpos dos $\mathbb{R}$ ou dos $\mathbb{C}$.*

Definição 3 (Bidual). *O bidual de E , denotado por E'' , é o dual de E' , ou seja, é o espaço de todos os funcionais lineares e contínuos de E' em $\mathbb{K}$.*

Definição 4 (Topologia fraca e convergência fraca). Denotamos por $\sigma(E, E')$ a topologia fraca de E , que é a topologia gerada pelos funcionais lineares e contínuos em E' . Quando uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ converge na topologia fraca de E para x , dizemos que x_n converge fracamente para x em E e escrevemos,

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{em } E.$$

Para entender melhor a definição de topologia fraca veja Botelho, Pellegrino e Teixeira (2025) e Brezis (2011).

Proposição 1. Seja E um espaço normado e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E . Então:

- i) $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$, para todo $\varphi \in E'$.
- ii) Se $x_n \rightarrow x$, então $x_n \rightharpoonup x$.
- iii) Se $x_n \rightharpoonup x$, então $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ e $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em E' , então $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$.

Demonstração. Ver Brezis (2011) (Proposição 3.5, p. 58).

□

Definição 5. Sejam X e Y espaços normados (ou mais geralmente espaços de Banach), com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está **imerso continuamente** em Y , e escrevemos $X \hookrightarrow Y$, se:

- X está contido em Y , isto é, cada elemento de X também pertence a Y ;
- A inclusão $i : X \rightarrow Y$, definida por $i(x) = x$, é **contínua**, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Nas mesmas condições acima, dizemos que X está **imerso compactamente** em Y , e escrevemos $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$, se:

- $X \hookrightarrow Y$ (isto é, X está imerso continuamente em Y).
- A inclusão $i : X \rightarrow Y$ é **compacta**, isto é, para qualquer sequência limitada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge em Y .

Teorema 1. *Sejam E, F espaços de Banach tais que E está compactamente imerso em F . Se uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x com respeito à topologia fraca em E , então $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x com respeito à topologia forte em F .*

Demonstração. Ver Brezis (2011) (Exercício 3.5, p. 80). □

Proposição 2. *Para todo espaço normado E , o operador linear*

$$J_E : E \rightarrow E''$$

$$x \mapsto J_E(x)(f) = f(x), \quad \forall x \in E \text{ e } f \in E'$$

é uma isometria linear, chamado mergulho canônico de E em E'' .

Demonstração. Ver Botelho, Pellegrino e Teixeira (2025) (Proposição 4.3.1, p. 67). □

Definição 6. *(Espaço Reflexivo) Um espaço normado E é dito reflexivo quando o mergulho canônico J_E for sobrejetivo, isto é, $J_E(E) = E''$.*

Teorema 2. *Para todo espaço reflexivo E , a bola B_E é compacta na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

Demonstração. Ver Botelho, Pellegrino e Teixeira (2025) (Teorema 6.4.2, p. 116). □

Teorema 3. *Assuma que E é um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E . Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge fracamente na topologia $\sigma(E, E^*)$.*

Demonstração. Ver Brezis (2011) (Teorema 3.18, pág. 69). □

Teorema 4. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semi-continua inferiormente e convexa. Suponha que φ seja coerciva, isto é, $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(x) = +\infty$. Então, para todo subconjunto convexo e fechado C de E , existe $x_0 \in C$ tal que*

$$\varphi(x_0) = \min_{y \in C} \varphi(y).$$

Demonstração. Ver Botelho, Pellegrino e Teixeira (2025), (Teorema 9.3.2, p. 192).

□

Espaços de Hilbert

Definição 7. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um **produto interno** em E é uma aplicação

$$(\cdot, \cdot)_E : E \times E \longrightarrow \mathbb{K},$$

tal que para quaisquer x, x_1, x_2 e $y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $(x_1 + x_2, y)_E = (x_1, y)_E + (x_2, y)_E$,
2. $(\lambda x, y)_E = \lambda(x, y)_E$,
3. $(x, y)_E = \overline{(y, x)}_E$,
4. Para todo $x \neq 0$, $(x, x)_E$ é um número real estritamente positivo.

O par $(E, (\cdot, \cdot)_E)$ é denominado de **espaço com produto interno** e neste caso dizemos que a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_E : E &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \|x\|_E &= \sqrt{(x, x)_E}, \end{aligned}$$

é a **norma induzida pelo produto interno** $(\cdot, \cdot)_E$.

Definição 8. Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de **espaço de Hilbert**.

Teorema 5 (Projeção ortogonal). Seja $E \subset H$ um conjunto não-vazio, fechado convexo com H Hilbert. Então, para todo $x \in H$ existe um único elemento $u \in E$ tal que

$$\|x - u\|_H = \min_{v \in E} \|x - v\|_H = \text{dist}(x, E).$$

Mais ainda, u é caracterizado pela propriedade

$$u \in E \text{ e } (x - u, v - u)_H \leq 0, \quad \forall v \in E.$$

Demonstração. Ver Brezis (2011) (Teorema 5.2, p. 132).

□

Diz-se acima que u é a **projeção de x em E** e é denotado por

$$u = \Pi_E(x).$$

Teorema 6 (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet). *Seja H um espaço de Hilbert.*

Dada uma $\phi \in H^$ existe uma única $f \in H$ tal que*

$$\langle \phi, u \rangle = (f, u) \quad \forall u \in H.$$

Além disso,

$$\|f\| = \|\phi\|_{H^*}.$$

Demonstração. Ver Brezis (2011) (Teorema 5.5, pág. 135).

□

Espaços L^p

A seguir apresentaremos os espaços L^p e alguns resultados importantes referentes à teoria da medida.

Definição 9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Denotamos por $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável a Lebesgue em Ω .*

Com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p},$$

$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach. No caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções f essencialmente limitadas, ou seja, que podem ser limitadas por constante positiva C em quase todo ponto em Ω .

Munido da norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |f(x)|,$$

o espaço $L^\infty(\Omega)$ também é um espaço de Banach.

Observação 2. *O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno será denotado por*

$$(u(x), v(x))_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx$$

Teorema 7 (Desigualdade de Hölder). *Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1(\Omega)$. Mais ainda*

$$\int_{\Omega} |fg| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver Brezis (2011) (Teorema 4.6 p. 92) □

Agora, considere $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ onde α_i é um inteiro não negativo. Denominamos α como multi-índice e sua ordem $|\alpha|$ é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$. Considere o operador D^α , operador derivação, isto é

$$D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Definimos o suporte de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por $\text{supp}(f)$, como

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Denotamos $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω .

Definição 10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Dizemos que uma sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $f \in C_0^\infty(\Omega)$ quando existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que*

- i) $\text{supp}(f_n) \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$;*
- ii) $D^\alpha f_n \rightarrow D^\alpha f$ para todo multi-índice α .*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido com a noção de convergência em ii) (Definição 10) é denominado *espaço das funções testes* e é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Espaços de Sobolev

A seguir, vamos definir os espaços de Sobolev, que serão os espaços que iremos utilizar no desenvolvimento deste trabalho. Começaremos pela noção de derivada fraca.

Denotamos por $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ o conjunto das funções f mensuráveis tais que $|f|^p$ é integrável em K , para todo $K \subset \Omega$ compacto.

Definição 11. *Suponha que $u, v \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ e seja α um multi-índice. Dizemos que v é a α -ésima derivada fraca de u e denotamos por*

$$D^\alpha u = v,$$

quando

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Agora, fixado um $1 \leq p \leq \infty$, queremos falar de espaços de funções onde as tais funções pertencem à $L^p(\Omega)$ e que possuem derivadas fracas até certa ordem também em $L^p(\Omega)$, estes são os espaços de Sobolev.

Definição 12. *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e k um inteiro não-negativo, definimos o **Espaço de Sobolev** $W^{k,p}(\Omega)$ como*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Munido com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)},$$

o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Observação 3. $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e, se $|\alpha| = 0$, então $D^{\alpha}u = u$.

Se $p = 2$, denotamos $W^{k,2}(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$. Tal espaço é um espaço de Hilbert quando munido com o produto interno

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)}.$$

Definição 13. *Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$ denota $W_0^{k,2}(\Omega)$.*

Definição 14. *Denotamos por $H^{-1}(\Omega)$ o dual do espaço $H_0^1(\Omega)$ e definimos a norma neste espaço como*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup \{ \langle f, u \rangle \mid u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \}.$$

Proposição 3. *O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Ver Brezis (2011) (Proposição 9.1, p. 264).

□

Lema 1 (Imersão de Sobolev). *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right]$.

ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty)$.

iii) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Demonstração. Ver Brezis (2011) (Corolário 9.13, p. 283).

□

Observação 4. $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ com imersão compacta. Para mais detalhes, ver Brezis (2011) pág. 291.

Teorema 8 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado, $1 \leq p < \infty$. Então, existe $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver Brezis (2011) (Corolário 9.19, p.290).

□

Espaços L^p envolvendo o tempo

Vamos agora definir espaços L^p envolvendo o tempo. Quando buscamos soluções fracas de sistemas parabólicos, elas são encontradas em espaços desse tipo.

Definição 15. *Seja X um espaço normado, $T > 0$ e $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(0, T; X)$ das funções mensuráveis $u(t, x)$ tais que $\|u(t)\|_X^p$ é integrável em $[0, T]$, isto é,*

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow X; \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty \right\}.$$

Se $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(0, T; X) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow X; \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty \right\}$$

e denotamos o espaço das funções contínuas de $[0, T]$ à X por $C([0, T]; X)$, com norma

$$\|u\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X.$$

Teorema 9. *Seja X e Y espaços de Banach. Então*

$$L^{p_0}(0, T; X) \cap L^{p_1}(0, T; Y) \hookrightarrow L^{p_\theta}(0, T; B), \quad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

com $0 < \theta < 1$ e B sendo o espaço intermediário de classe θ (com respeito a X e Y), isto é,

$$\|g\|_B \leq C \|g\|_X^{1-\theta} \cdot \|g\|_Y^\theta, \quad \forall g \in X \cap Y \text{ e } 0 < \theta < 1,$$

para algum $C > 0$.

Demonstração. Lembremos que

$$\|u\|_{L^{p_0}(0, T; X) \cap L^{p_1}(0, T; Y)} = \max \left\{ \|u\|_{L^{p_0}(0, T; X)}, \|u\|_{L^{p_1}(0, T; Y)} \right\}.$$

Dados $r = \frac{p_0}{p_\theta(1-\theta)}$ e $r' = \frac{p_1}{p_\theta\theta}$, temos que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{p_\theta(1-\theta)}{p_0} + \frac{p_\theta\theta}{p_1} = 1.$$

Logo,

$$\|u\|_{L^{p_\theta}(0, T; B)} = \left(\int_0^T \|u\|_B^{p_\theta} dx \right)^{\frac{1}{p_\theta}} \leq \left(\int_0^T C \|u\|_X^{(1-\theta)p_\theta} \cdot \|u\|_Y^{\theta p_\theta} dt \right)^{\frac{1}{p_\theta}}. \quad (1.1)$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, para r e r' , ao lado direito da desigualdade (1.1), segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p_\theta}(0, T; B)} &\leq C \left[\left(\int_0^T \|u\|_X^{(1-\theta)r p_\theta} dt \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_0^T \|u\|_Y^{\theta r' p_\theta} dt \right)^{\frac{1}{r'}} \right]^{\frac{1}{p_\theta}} \\ &= C \left(\int_0^T \|u\|_X^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{r p_\theta}} \cdot \left(\int_0^T \|u\|_Y^{p_1} dt \right)^{\frac{1}{r' p_\theta}} \\ &= C \left(\int_0^T \|u\|_X^{p_0} dt \right)^{\frac{1-\theta}{p_0}} \cdot \left(\int_0^T \|u\|_Y^{p_1} dt \right)^{\frac{\theta}{p_1}} \\ &= C \left(\|u\|_{L^{p_0}(0, T; X)} \right)^{1-\theta} \cdot \left(\|u\|_{L^{p_1}(0, T; Y)} \right)^\theta \\ &\leq C \|u\|_{L^{p_0}(0, T; X) \cap L^{p_1}(0, T; Y)}. \end{aligned}$$

Dessa ultima desigualdade acima, segue o resultado. □

Teorema 10 (Aubin-Lions). *Sejam $1 < p, q < \infty$ e $X \subset E \subset Y$ espaços de Banach reflexivos, sendo as inclusões contínuas e $X \subset E$ compacta. Para $0 < T < \infty$, seja*

$$W = \{u \mid u \in L^p(0, T; X), u_t \in L^q(0, T; Y)\}$$

munido da norma

$$\|\mathbf{u}\|_W = \|\mathbf{u}\|_{L^p(0,T;X)} + \|\mathbf{u}_t\|_{L^q(0,T;Y)}.$$

Então W é um espaço de Banach compactamente imerso em $L^p(0, T; E)$. Se $p = \infty$ então W é um espaço de Banach compactamente imerso em $C([0, T]; E)$.

Demonstração. Ver Serrano (2013). □

Diferenciabilidade em Espaços de Banach

Apresentamos a seguir um breve panorama sobre a noção de diferenciabilidade em espaços de Banach. Nosso objetivo é generalizar o conceito de derivada, originalmente definido para funções entre abertos de $\mathbb{R}^N$, para o contexto mais amplo de funções definidas em abertos de espaços normados sobre $\mathbb{R}$. Trata-se de um tema de natureza bastante geral, embora muitos dos conceitos envolvidos guardem forte semelhança com aqueles desenvolvidos em cursos de Cálculo Avançado. Para mais detalhes sobre esse tópico veja Ambrosetti e Prodi (2021) Cap. 1, Botelho, Pellegrino e Teixeira (2025) Cap. 9 e Kesavan (2021) Cap.1.

Inspirados na definição do Cálculo, vamos definir a derivada de Fréchet de uma função definida em um espaço de Banach

Definição 16. *Sejam X e Y espaços de Banach e U um aberto em X . Dizemos que a função $f : U \rightarrow Y$ é **Fréchet-diferenciável** no ponto $x_0 \in U$ se existe um operador linear contínuo $A : X \rightarrow Y$ tal que*

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + A(v) + r(v),$$

para todo v tal que $x_0 + v$ pertence a uma bola aberta centrada em x_0 e contida em U , onde $r(v) = o(\|v\|_X)$, isto é:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|r(v)\|_Y}{\|v\|_X} = 0.$$

Neste caso, dizemos que A é a **derivada de Fréchet de f em x_0** e denotamos $A = f'(x_0)$ ou $A = Df(x_0)$.

Como de costume, dizemos que f é Fréchet-diferenciável se f for Fréchet-diferenciável em todos os pontos de U .

Proposição 4. *Sejam X e Y espaços de Banach e $U \subset X$ aberto. Se a função $f : U \rightarrow Y$ é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$, então a derivada de Fréchet de f em x_0 é única e f é contínua em x_0 .*

Demonstração. Veja Botelho, Pellegrino e Teixeira (2025) (Proposição 9.6.2, p. 203).

□

Podemos definir também a derivada de Gâteaux de uma função f em x_0 na direção de um vetor $v \in X$ dado.

Definição 17. *Sejam X e Y espaços de Banach e U um aberto em X . Dizemos que a função $f : U \rightarrow Y$ é **Gâteaux-diferenciável** no ponto $x_0 \in U$ na direção $v \in X$ se existe a derivada $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ (também denotada por $\partial_v f(x_0)$) definida pelo limite abaixo:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \tau v) - f(x_0)}{\tau},$$

e esse limite existe em Y .

Teorema 11. *Suponha que $f : U \subset X \rightarrow Y$ é Gâteaux diferenciável e com derivada de Gâteaux contínua em x_0 . Então f é Fréchet-diferenciável em x_0 e*

$$f'(x_0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0).$$

Demonstração. Ver Ambrosetti e Prodi (2021) (Theorem 1.9, p. 14).

□

Teorema 12 (Regra de Cadeia). *Sejam X, Y, Z espaços de Banach, $f : U \subset X \rightarrow Y$, $g : V \subset Y \rightarrow Z$, com U e V abertos e $f(U) \subset V$. Se f é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$ e g é Fréchet-diferenciável em $f(x_0)$, a aplicação $g \circ f : U \rightarrow Z$ é Fréchet-diferenciável em x_0 e*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0).$$

Demonstração. Ver Botelho, Pellegrino e Teixeira (2025) (Teorema 9.6.5, p.204) ou Kesavan (2021) (Proposition 1.1.1, p. 7).

□

Agora vamos definir uma derivada semelhante ao que temos no cálculo como derivada parcial. Suponha que $E = E_1 \times \dots \times E_n$, o produto de espaços de Banach e $U \subset E$ um aberto e $f : U \rightarrow Y$ uma função. Dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$, definimos $\lambda_j : E_j \rightarrow E$ por

$$\lambda_j(x) = (a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Nota-se que se f é Fréchet-diferenciável em $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$, então para cada j , $f \circ \lambda_j$ é Fréchet-diferenciável em $\mathbf{a}_j$ e

$$f'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \sum_{j=1}^n (f \circ \lambda_j)'(\mathbf{a}_j) \cdot \mathbf{v}_j,$$

para todo $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in E$.

Definição 18. A deriva de $f \circ \lambda_j$ em $\mathbf{a}_j$ é chamada de a *j-ésima derivada parcial* de f em $\mathbf{a}$ e é denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$ ou $\partial_{x_j} f(\mathbf{a})$.

Analogamente ao caso de derivadas direcionais, se as derivadas parciais existem em um ponto e são contínuas, então a função é Fréchet-diferenciável neste ponto (veja Kesavan (2021) Proposition 1.1.4 p. 14). A seguir uma definição sobre derivadas de ordem superior:

Definição 19. A função $f : \mathcal{U} \subset X \longrightarrow Y$, com $\mathcal{U}$ aberto e X, Y espaços de Banach, é dita duas vezes Fréchet-diferenciável em $\mathcal{U}$ se o mapa $f'' : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$, tal que $\mathbf{x} \mapsto f'(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe e é Fréchet-diferenciável. Se f'' é contínuo em $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$, então dizemos que f é de classe C^2 .

Analogamente se define uma função de classe C^K . Enunciaremos agora o importante Teorema da função implícita:

Teorema 13 (Teorema da Função Implícita para espaços de Banach). *Sejam E_1, E_2 e F espaços normados, e suponha que E_2 seja completo. Seja $\mathcal{U} \subset E_1 \times E_2$ um aberto e seja $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ uma função tal que:*

- (i) f é contínua;
- (ii) para todo $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{U}$, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ existe e é contínua em $\mathcal{U}$;
- (iii) $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ e $A = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é inversível com inversa contínua.

Então, existem vizinhanças V de $\mathbf{a}$ e W de $\mathbf{b}$, e uma função contínua $\varphi : V \rightarrow W$ tal que $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ e

$$f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = 0$$

e estas são as únicas soluções da equação $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ em $V \times W$. Além disso, se f é de classe C^k em $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, então φ é de classe C^k em $\mathbf{a}$ e

$$\varphi'(\mathbf{a}) = - \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right]^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right].$$

Demonstração. Veja Kesavan (2021) (Theorem 1.3.1, p.22) ou Ambrosetti e Prodi (2021) (Theorem 2.3, p. 38).

□

Outro resultado interessante é o famoso Teorema da função inversa que pode ser encontrado nas referências citadas acima.

1.2 Mais Resultados Importantes

Nesta seção apresentaremos mais resultados que estão além da Análise Funcional.

Teorema 14 (Desigualdade de Young). *Seja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b \geq 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver Cipolatti (2018) (Lema 2.9, p. 15).

□

Definição 20 (Função Convexa). *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é **convexa** se, para quaisquer $x, y \in I$ e qualquer $\lambda \in [0, 1]$, vale*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Definição 21 (Função Côncava). *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é **côncava** se, para quaisquer $x, y \in I$ e qualquer $\lambda \in [0, 1]$, vale*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Teorema 15. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em I . Então f é convexa se, e somente se, $f'' \geq 0$. Observe que analogamente, f é côncava se, e somente se, $f'' \leq 0$.*

Demonstração. Ver Van Tiel (1984) (Teorema 1.1, p. 8)

□

Lema 2 (Gronwall). *Seja $\eta(\cdot)$ uma função não-negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$ e que satisfaz a desigualdade*

$$\eta'(t) \leq \phi(t) \cdot \eta(t) + \psi(t), \quad q.s. \text{ em } [0, T],$$

onde ϕ e ψ são não-negativas e integráveis em $[0, T]$. Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \cdot \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right],$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Ver Evans (2010) (Gronwall's inequality (differential form), p. 708).

□

Teorema 16 (Fórmulas de Green). *Sejam u e $v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então*

$$i) \int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \, dS,$$

$$ii) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} \, dS,$$

$$iii) \int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \, dS.$$

onde η é o vetor normal à $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver Evans (2010) (Teorema 3, p. 712).

□

Teorema 17. *Seja L o operador*

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u.$$

Assuma que

$$u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad g \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Suponha também que $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, com $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, é a solução fraca de

$$\begin{cases} u_t + Lu = g & \text{em } Q \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Então,

- $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega));$
- $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$

Também temos a estimativa:

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ & \leq C(\|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}), \end{aligned}$$

onde C é uma constante dependendo apenas de Ω , T e dos coeficientes de L .

Demonstração. Ver Evans (2010) (Teorema 5, p. 382). □

Teorema 18 (Estimativa Clássica de Energia). *Considere u solução de (1.2), com $g \in L^2(Q)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Então existe uma constante C , dependendo apenas de Ω e T , e dos coeficientes de L , tal que*

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\ & \leq C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Demonstração. Ver Evans (2010) (Teorema 2, p. 376). □

Teorema 19 (Ponto Fixo de Schauder). *Sejam E um espaço de Banach, $C \subset E$ um conjunto fechado, convexo e limitado e $f : C \rightarrow C$ uma aplicação compacta. Então f tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Ver Botelho, Pellegrino e Teixeira (2025) (Teorema 9.5.8, p. 200). □

1.3 Formulação do Problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Para $T > 0$, denotaremos o cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$ e sua fronteira lateral $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Seja ω e $\mathcal{O}$ subconjuntos não-vazios de Ω . Consideremos a equação do calor semilinear

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = h\mathbb{1}_\omega + v\mathbb{1}_{\mathcal{O}} + \psi & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde f é uma função globalmente Lipschitz-contínua, $y_0 \in L^2(\Omega)$ é um dado inicial, $\psi \in L^2(Q)$ uma perturbação desconhecida e $\mathbb{1}_A$ denota a função característica do conjunto A .

Seja $\mathcal{O}_d \subset \Omega$ um aberto representando um domínio de observação. Vamos introduzir o funcional custo definido por:

$$J_r(v, \psi) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |y - y_d|^2 dx dt + \frac{\ell^2}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |v|^2 dx dt - \frac{\gamma^2}{2} \iint_Q |\psi|^2 dx dt. \quad (1.4)$$

onde $\ell, \gamma > 0$ são constantes e $y_d \in L^2(\mathcal{O}_d \times (0, T))$ é dado.

O problema (1.3) de controle robusto é considerado resolvido quando um ponto de sela $(\bar{v}, \bar{\psi})$ para J_r é encontrado (para mais sobre controle robusto, ver Belmiloudi (2004) e Bewley, Temam e Ziane (1997)).

O segundo problema tem por objetivo encontrar o controle de norma mínima satisfazendo uma controlabilidade às trajetórias. Mais precisamente, vamos fixar uma trajetória y^* não controlada do sistema (1.3), ou seja, uma solução suficientemente regular de

$$\begin{cases} y_t^* - \Delta y^* + f(y^*) = 0 & \text{em } Q, \\ y^* = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y^*(x, 0) = y_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Buscamos por um controle $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ minimizando o funcional

$$J(h) = \frac{1}{2} \iint_{\omega \times (0, T)} |h|^2 dx dt \quad \text{sujeito a } y(\cdot, T) = 0. \quad (1.5)$$

Estamos interessados em provar um resultado de controle hierárquico (ver Teorema 21) quando o controle seguidor v e a perturbação ψ pertencem a alguns conjuntos limitados que definiremos a seguir:

Definição 22. *Sejam E_1 e E_2 dois intervalos não-vazios, fechados tais que $0 \in E_i$. Definimos o conjunto dos controles admissíveis como*

$$\mathcal{V}_{ad} = \{v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) : v(x, t) \in E_1 \text{ para quase todo } (x, t) \in \mathcal{O} \times (0, T)\}, \quad (1.6)$$

e o conjunto das perturbações admissíveis como

$$\Psi_{ad} = \{\psi \in L^2(Q) : \psi(x, t) \in E_2 \text{ para quase todo } (x, t) \in Q\}. \quad (1.7)$$

Definição 23. *Seja $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ fixo. Dizemos que a tripla $(\bar{v}, \bar{\psi}, \bar{y})$, composta pelo controle $\bar{v} \in \mathcal{V}_{ad}$, pela perturbação $\bar{\psi} \in \Psi_{ad}$ e pelo estado associado $\bar{y} = \bar{y}(h, \bar{v}, \bar{\psi})$ solução de (1.3), resolve o problema (1.3) de controle robusto quando $(\bar{v}, \bar{\psi})$ é um ponto de sela do funcional custo (1.4), isto é,*

$$J_r(\bar{v}, \psi; h) \leq J_r(\bar{v}, \bar{\psi}; h) \leq J_r(v, \bar{\psi}; h), \quad \forall (v, \psi) \in \mathcal{V}_{ad} \times \Psi_{ad}. \quad (1.8)$$

Uma vez encontrado o ponto de sela, e caracterizado para cada controle líder $\mathbf{h}$, buscamos por um controle ótimo $\hat{\mathbf{h}}$ tal que

$$J(\hat{\mathbf{h}}) = \min_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h}), \quad (1.9)$$

sujeito a

$$\bar{\mathbf{y}}(\cdot, T; \mathbf{h}, \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{h}), \bar{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{h})) = \mathbf{y}^*(\cdot, T). \quad (1.10)$$

A seguir, enunciaremos os dois teoremas principais de nosso estudo. Tais teoremas são creditados a Hernández-Santamária e Luz de Teresa, que os formularam e demonstraram em 2018 (ver Hernández-Santamaría e Teresa (2018)).

Teorema 20. *Assuma que $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$ e $N \leq 6$. Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ uma função globalmente Lipschitz verificando $f(0) = 0$ e $f'' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então, existe γ_0, ℓ_0 e uma função positiva $\rho = \rho(t)$ explodindo em $t = T$ tal que para quaisquer $\gamma > \gamma_0, \ell > \ell_0, \mathbf{y}_0 \in L^2(\Omega)$, e $\mathbf{y}_d$ verificando*

$$\iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} \rho^2 |\mathbf{y}_d - \mathbf{y}^*|^2 < +\infty, \quad (1.11)$$

existe um controle líder $\mathbf{h}$ e um único ponto de sela $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\psi}})$ associado tal que a solução correspondente de (1.3) satisfaz (1.10).

O próximo teorema garante a existência de um controle robusto em $\mathcal{V}_{ad} \times \Psi_{ad}$, para o caso linear.

Teorema 21. *Vamos assumir que $f(\mathbf{y}) = \mathbf{a}\mathbf{y}$ para alguma $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \in L^\infty(Q)$ e $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$. Então, existe γ_0, ℓ_0 e uma função positiva $\rho = \rho(t)$ explodindo em $t = T$ tal que para quaisquer $\gamma > \gamma_0, \ell > \ell_0, \mathbf{y}_0 \in L^2(\Omega)$, e $\mathbf{y}_d \in L^2(\mathcal{O}_d \times (0, T))$ verificando (1.11), existe um controle líder $\mathbf{h}$ e um único ponto de sela associado $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}) \in \mathcal{V}_{ad} \times \Psi_{ad}$ tal que a solução correspondente de (1.3) satisfaz (1.10).*

Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

É natural nos perguntarmos se o sistema (1.3) possui solução, e qual a regularidade de tal solução.

Definição 24. *Dizemos que $\mathbf{y}$ é solução fraca de (1.3) se:*

i) para todo $\phi \in L(0, T; H_0^1(\Omega))$, y satisfaz

$$\begin{aligned} & \int_0^T (y_t, \phi)_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \int_0^T (\nabla y, \nabla \phi)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T (f(y), \phi)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_0^T (h \mathbf{1}_\omega, \phi)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T (v \mathbf{1}_\mathcal{O}, \phi)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T (\psi, \phi)_{L^2(\Omega)}; \end{aligned} \quad (1.12)$$

ii) $y(x, 0) = y_0(x)$, para todo $x \in \Omega$.

Sabemos que para toda f globalmente Lipschitz, $y_0 \in L^2(\Omega)$ e todo $(h, v, \psi) \in L^2(\omega \times (0, T)) \times L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q)$ o sistema (1.3) possui uma única solução fraca $y \in W(0, T)$ (ver Ladyzhenskaya, Solonnikov e Ural'ceva (2011), por exemplo), onde

$$W(0, T) = \{y \mid y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ e } y_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}.$$

Mais ainda, temos a seguinte estimativa de energia,

$$\|y\|_{W(0, T)} \leq C(\|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\omega \times (0, T))} + \|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} + \|\psi\|_{L^2(Q)}), \quad (1.13)$$

onde $C > 0$ não depende de ψ , h , v e nem de y_0 . Se $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ então y solução de (1.3) pertence ao espaço $W_2^{2,1}(Q) \subset W(0, T)$ onde

$$W_2^{2,1}(Q) = \{y \mid y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \text{ e } y_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\}. \quad (1.14)$$

Capítulo 2

Controle Robusto

2.1 Existência do Ponto de Sela

O objetivo desta seção é mostrar a existência do ponto de sela para o funcional $J_r(v, \psi)$ dado em (1.4). Para isso, faremos uso de três resultados auxiliares que demonstraremos mais adiante. A primeira proposição afirma que, dadas certas condições, existe um ponto de sela para um funcional J qualquer. Usaremos outros dois Lemas para mostrar que o funcional $J_r(v, \psi)$ está nas hipóteses da Proposição 1. Em todo o do Capítulo 2 deixaremos $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ fixo.

Proposição 5. *Seja J um funcional definido em $X \times Y$ onde X e Y são convexos, fechados, não-vazios, ilimitados e Banach reflexivos. Se*

a) $\forall v \in X$, a função $\psi \mapsto J(v, \psi)$ é côncava e semi-continua superior (s.c.s);

b) $\forall \psi \in Y$, a função $v \mapsto J(v, \psi)$ é convexa e semi-continua inferior (s.c.i.);

c) $\exists v_0 \in X$ tal que $\lim_{\|\psi\|_Y \rightarrow \infty} J(v_0, \psi) = -\infty$;

d) $\exists \psi_0 \in Y$ tal que $\lim_{\|v\|_X \rightarrow \infty} J(v, \psi_0) = +\infty$;

Então J possui pelo menos um ponto de sela $(\bar{v}, \bar{\psi})$ e

$$J(\bar{v}, \bar{\psi}) = \min_{v \in X} \sup_{\psi \in Y} J(v, \psi) = \max_{\psi \in Y} \inf_{v \in X} J(v, \psi).$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que o resultado vale para certos conjuntos X_δ e Y_δ limitados satisfazendo as demais hipóteses. Após isso, estenderemos o resultado para conjuntos ilimitados.

Dado $\delta > 0$ fixado, sejam

$$X_\delta = \{v \in X; \|v\|_X \leq \delta\},$$

$$Y_\delta = \{\psi \in Y; \|\psi\|_Y \leq \delta\}.$$

Vejamos que X_δ e Y_δ são convexos, fechados e limitados. Mostraremos que J possui um ponto de sela $(\bar{v}, \bar{\psi})$ em $X_\delta \times Y_\delta$.

Primeiro consideremos o caso onde

$$\forall \psi \in Y_\delta \text{ a função } v \in X_\delta \mapsto J(v, \psi) \text{ é estritamente convexa.} \quad (2.1)$$

Notemos que a função $v \mapsto J(v, \psi)$, sendo fracamente s.c.i., é limitada por baixo em X_δ e possui um mínimo único por (2.1). Denotaremos esse mínimo por $m(\psi)$ e o ponto onde o mínimo é atingido denotaremos por $e(\psi) \in X_\delta$:

$$m(\psi) = \min_{v \in X_\delta} J(v, \psi) = J(e(\psi), \psi).$$

A função $\psi \mapsto m(\psi)$ é côncava e fracamente s.c.s., assim, analogamente à anterior, é limitada por cima em um ponto $\bar{\psi}$, isto é,

$$m(\bar{\psi}) = \max_{\psi \in Y_\delta} m(\psi) = \max_{\psi \in Y_\delta} \min_{v \in X_\delta} J(v, \psi), \quad (2.2)$$

e

$$m(\bar{\psi}) \leq J(v, \bar{\psi}), \quad \forall v \in X_\delta. \quad (2.3)$$

Agora, para $\lambda \in (0, 1)$, e em virtude de a), temos

$$J(v, (1 - \lambda)\bar{\psi} + \lambda\psi) \geq (1 - \lambda)J(v, \bar{\psi}) + \lambda J(v, \psi).$$

Em particular, tomando $v = e_\lambda = e((1 - \lambda)\bar{\psi} + \lambda\psi)$ obtemos, por (2.2), que

$$m(\bar{\psi}) \geq m((1 - \lambda)\bar{\psi} + \lambda\psi) = J(e_\lambda, (1 - \lambda)\bar{\psi} + \lambda\psi) \geq (1 - \lambda)J(e_\lambda, \bar{\psi}) + \lambda J(e_\lambda, \psi).$$

Por (2.3), temos

$$m(\bar{\psi}) \geq (1 - \lambda)m(\bar{\psi}) + \lambda J(e_\lambda, \psi).$$

Portanto, subtraindo $(1 - \lambda)m(\bar{\psi})$ em ambos os lados, segue que

$$m(\bar{\psi}) \geq J(e_\lambda, \psi). \quad (2.4)$$

Seja $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\lambda_n \rightarrow 0$. Como X é reflexivo, temos que X_δ é compacto na topologia fraca de X (ver Teorema 2). Assim, e_{λ_n} converge fracamente para algum $\bar{v}$, ou seja,

$$\varphi(e_{\lambda_n}) \rightarrow \varphi(\bar{v}), \quad \forall \varphi \in X'.$$

Em particular, por b) temos que

$$\liminf J(e_{\lambda_n}, \psi) = J(\bar{v}, \psi), \quad \forall \psi \in Y_\delta. \quad (2.5)$$

Veja que

- i) $J(e_\lambda, (1-\lambda)\bar{\psi} + \lambda\psi) \leq J(v, (1-\lambda)\bar{\psi} + \lambda\psi)$, pois $J(v, (1-\lambda)\bar{\psi} + \lambda\psi)$ atinge o mínimo quando $v = e_\lambda$;
- ii) $(1-\lambda)J(e_\lambda, \bar{\psi}) + \lambda J(e_\lambda, \psi) \leq J(v, (1-\lambda)\bar{\psi} + \lambda\psi)$, pois $\psi \mapsto J(v, \psi)$ é côncava.

Como $m(\psi) \leq J(e_\lambda, \psi)$, passando o limite inferior do lado esquerdo e o limite superior do lado direito quando $\lambda_n \rightarrow 0$ na desigualdade ii), temos, por b) e (2.5), que

$$\begin{aligned} J(\bar{v}, \bar{\psi}) &= \liminf J(e_{\lambda_n}, \bar{\psi}) \\ &= \liminf [(1-\lambda_n)J(e_{\lambda_n}, \bar{\psi}) + \lambda_n J(e_{\lambda_n}, \psi)] \\ &\leq \limsup J(v, (1-\lambda_n)\bar{\psi} + \lambda_n \psi) \\ &= J(v, \bar{\psi}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

e, assim, $\bar{v} = e(\bar{\psi})$. Na passagem do limite em (2.4) temos

$$m(\bar{\psi}) \geq J(\bar{v}, \psi), \quad \forall \psi \in Y_\delta,$$

ou seja, pela definição de $m(\psi)$,

$$J(\bar{v}, \bar{\psi}) \leq J(\bar{v}, \psi). \quad (2.7)$$

Assim, por (2.6) e (2.7), segue que

$$J(\bar{v}, \psi) \leq J(\bar{v}, \bar{\psi}) \leq J(v, \bar{\psi}). \quad (2.8)$$

Logo, $(\bar{v}, \bar{\psi})$ é o ponto de sela de J , e, portanto, para o caso (2.1) está mostrado que J possui pelo menos um ponto de sela.

Agora consideremos o caso onde $v \in X_\delta \mapsto J(v, \psi)$ não é estritamente convexo. Defina

$$J_\epsilon(v, \psi) := J(v, \psi) + \epsilon \|v\|_X, \quad \epsilon > 0,$$

definido em $X_\delta \times Y_\delta$, o qual satisfaz as mesmas hipóteses que J salvo que J_ϵ é estritamente convexo. Assim, obtemos pelo caso (2.1) a existência de um ponto de sela $(\bar{v}_\epsilon, \bar{\psi}_\epsilon)$ em $X_\delta \times Y_\delta$. Logo,

$$J(\bar{v}_\epsilon, \psi) + \epsilon \|\bar{v}_\epsilon\|_X \leq J(\bar{v}_\epsilon, \bar{\psi}_\epsilon) + \epsilon \|\bar{v}_\epsilon\|_X \leq J(v, \bar{\psi}_\epsilon) + \epsilon \|\bar{v}_\epsilon\|_X, \quad (2.9)$$

para todo $v \in X_\delta$ e $\forall \psi \in Y_\delta$. Pela compacidade fraca de X_δ e Y_δ , existe $\bar{v} \in X$ e $\bar{\psi} \in Y$ tal que, quando $\epsilon_n \rightarrow 0$,

$$\bar{v}_{\epsilon_n} \rightharpoonup \bar{v} \text{ em } X,$$

$$\bar{\psi}_{\epsilon_n} \rightharpoonup \bar{\psi} \text{ em } Y.$$

Passando o limite em (2.9), usando a) e b), temos

$$J(\bar{v}, \psi) \leq J(v, \bar{\psi}), \quad \forall v \in X_\delta \text{ e } \forall \psi \in Y_\delta,$$

o que mostra que $(\bar{v}, \bar{\psi})$ é ponto de sela de J .

Portanto, em todo caso, J possui um ponto de sela em $X_\delta \times Y_\delta$ para todo $\mu > 0$. Em seguida, vamos mostrar que J possui um ponto de sela em $X \times Y$.

Observemos que, assumindo que μ é suficientemente grande tal que $v_0 \in X_\mu$ e $\psi_0 \in Y_\mu$, onde v_0 e ψ_0 são fornecidos pelas hipóteses c) e d), temos

$$J(\bar{v}_\mu, \psi_0) \leq J(\bar{v}_\mu, \bar{\psi}_\mu) \leq J(v_0, \bar{\psi}_\mu). \quad (2.10)$$

A função $v \mapsto J(v, \psi_0)$ é convexa, s.c.i. e coerciva e, portanto, é limitada por baixo, isto é, existe α tal que

$$-\infty < \alpha \leq J(v, \psi_0), \quad \forall v \in X.$$

Em particular,

$$-\infty < \alpha \leq J(\bar{v}_\mu, \psi_0), \quad \forall \mu > 0. \quad (2.11)$$

Similarmente, $\psi \mapsto J(v_0, \psi)$ é limitado por cima, e, portanto, existe β tal que

$$J(v_0, \psi) \leq \beta < +\infty, \quad \forall \psi \in Y,$$

donde

$$J(v_0, \bar{\psi}_\mu) \leq \beta < +\infty, \quad \forall \mu > 0. \quad (2.12)$$

Por (2.10) e (2.11), segue que

$$J(v_0, \bar{\psi}_\mu) \geq \alpha > -\infty, \quad \forall \mu > 0. \quad (2.13)$$

e, por (2.10) e (2.12), segue que

$$J(\bar{v}_\mu, \psi_0) \leq b < +\infty, \quad \forall \mu > 0. \quad (2.14)$$

Logo, em virtude de c) e (2.13) (respectivamente de d) e (2.14), a sequência $\bar{v}_\mu$ (respectivamente $\bar{\psi}_\mu$) é limitada independentemente de μ . Assim, a sequência $J(\bar{v}_\mu, \bar{\psi}_\mu)$ também é limitada e, portanto, existe uma subsequência $\mu_j \rightarrow \infty$ tal que

$$\begin{aligned} J(\bar{v}_{\mu_j}, \bar{\psi}_{\mu_j}) &\rightarrow \alpha, \\ v_{\mu_j} &\rightharpoonup \bar{v} \quad \text{fraco em } X, \\ \psi_{\mu_j} &\rightharpoonup \bar{\psi} \quad \text{fraco em } Y. \end{aligned}$$

Portanto, tomando o limite em (2.10), quando $\mu_j \rightarrow \infty$, chegamos a

$$J(\bar{v}, \bar{\psi}) \leq \alpha \leq J(v, \bar{\psi}), \quad \forall v \in X, \forall \bar{\psi} \in Y,$$

o que mostra que $(\bar{v}, \bar{\psi})$ é ponto de sela de J em $X \times Y$.

□

A fim de mostrarmos uma propriedade de convexidade e concavidade para o funcional J_r e usarmos a proposição anterior, vamos investigar a diferenciabilidade de J_r com os lemas a seguir.

Lema 3. *Seja f como no Teorema 20 e $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ dado. Definamos o operador $G : L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(\Omega) \rightarrow W(0, T)$ que associa $(v, \psi) \mapsto y$ solução de (1.3) associado a v, ψ e h . Então G é continuamente Fréchet diferenciável, a derivada direcional*

$$G'(v, \psi)(\tilde{v}, \tilde{\psi}) = w$$

satisfaz o sistema linear

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + f'(y)w = \tilde{v}1_{\mathcal{O}} + \tilde{\psi} & \text{em } Q, \\ w = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.15)$$

com $y = G(v, \psi)$ solução de (1.3), e ainda $w \in W_2^{2,1}(Q)$.

Demonstração. Vamos provar que G possui derivada de Gâteaux $\partial_{(\tilde{v}, \tilde{\psi})} G(v, \psi)$ em toda direção $(\tilde{v}, \tilde{\psi}) \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q)$ e que $\partial_{(\tilde{v}, \tilde{\psi})} G(v, \psi)$ é contínua. Isto implicará, pelo Teorema 11, que G é Fréchet diferenciável com derivada contínua.

O passo a passo da demonstração já é conhecido (ver por exemplo Fernández e Zuazua (1999) (Teorema 2.3 pág. 313) e Seidman e Zhou (1982) (Teorema 2.4 pág. 751)). Vamos tomar uma sequência em $W_2^{2,1}(Q) \subset W(0, T)$ cujo limite será a derivada direcional (Gâteaux); depois, vamos verificar que o limite satisfaz o sistema (2.15).

Fixemos $(\tilde{v}, \tilde{\psi})$ uma direção em $L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q)$. Sejam $w^\tau := \frac{y^\tau - y}{\tau}$ para $\tau \in (0, 1)$, com $y = y(h; v, \psi)$ e $y^\tau = y^\tau(h; v + \tau\tilde{v}, \psi + \tau\tilde{\psi})$ soluções de (1.3) com seus respectivos dados iniciais. Vamos começar caracterizando os termos da sequência $\{w^\tau\}_{\tau>0}$ como soluções de um sistema semelhante a (2.15). Veja que

$$\begin{aligned} w_t^\tau - \Delta w^\tau &= \left(\frac{y^\tau - y}{\tau} \right)_t - \Delta \left(\frac{y^\tau - y}{\tau} \right) \\ &= \frac{y_t^\tau - y_t}{\tau} - \frac{(\Delta y^\tau - \Delta y)}{\tau} \\ &= \frac{1}{\tau} (y_t^\tau - \Delta y^\tau - y_t + \Delta y). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como y^τ e y são soluções para (1.3), com seus respectivos dados iniciais, segue que

$$\begin{aligned} y_t^\tau - \Delta y^\tau - y_t + \Delta y &= -f(y^\tau) + h\mathbb{1}_\omega + (v + \tau\tilde{v})\mathbb{1}_\mathcal{O} + \psi + \tau\tilde{\psi} \\ &\quad - (-f(y) + h\mathbb{1}_\omega + v\mathbb{1}_\mathcal{O} + \psi) \\ &= \frac{f(y) - f(y^\tau)}{\tau} + \tilde{v}\mathbb{1}_\mathcal{O} + \tilde{\psi}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Em outras palavras, substituindo (2.17) em (2.16), obtemos

$$w_t^\tau - \Delta w^\tau + \frac{1}{\tau} (f(y^\tau) - f(y)) = \tilde{v}\mathbb{1}_\mathcal{O} + \tilde{\psi} \quad \text{em } Q. \quad (2.18)$$

Veja também que

$$w^\tau|_\Sigma = \frac{1}{\tau} (y^\tau|_\Sigma - y|_\Sigma) = 0, \quad (2.19)$$

e, por fim,

$$w^\tau(x, 0) = \frac{1}{\tau} (y^\tau(x, 0) - y(x, 0)) = \frac{1}{\tau} (y_0 - y_0) = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.20)$$

Assim, combinando (2.18)(2.19) e (2.20), temos que w^τ é solução do sistema

$$\begin{cases} w_t^\tau - \Delta w^\tau + \frac{1}{\tau} (f(y^\tau) - f(y)) = \tilde{v}\mathbb{1}_\mathcal{O} + \tilde{\psi} & \text{em } Q, \\ w^\tau = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w^\tau(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.21)$$

Agora, como $f \in C^2(\mathbb{R})$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta_\tau \in (0, 1)$ tal que

$$f(y^\tau) - f(y) = f'(\tilde{y}^\tau)(y^\tau - y), \quad (2.22)$$

onde $\tilde{\mathbf{y}}^\tau = \mathbf{y} - \theta_\tau(\mathbf{y}^\tau - \mathbf{y})$. Logo, dividindo a expressão (2.22) por τ , segue que

$$\frac{1}{\tau} \left(f(\mathbf{y}^\tau) - f(\mathbf{y}) \right) = f'(\tilde{\mathbf{y}}^\tau) \mathbf{w}^\tau. \quad (2.23)$$

Substituindo (2.23) em (2.21), temos que $\mathbf{w}^\tau$ é solução de

$$\begin{cases} \mathbf{w}_t^\tau - \Delta \mathbf{w}^\tau + f'(\tilde{\mathbf{y}}^\tau) \mathbf{w}^\tau = \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{1}_\Omega + \tilde{\boldsymbol{\psi}} & \text{em } Q, \\ \mathbf{w}^\tau = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \mathbf{w}^\tau(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.24)$$

Vamos agora mostrar que $\{\mathbf{w}^\tau\}_{\tau>0}$ é limitada em $W_2^{2,1}(Q) \subset W(0, T)$, com o intuito de tomar uma subsequência que converge neste espaço. Primeiro, vamos buscar por uma estimativa para a norma de $\mathbf{w}^\tau$ em $W_2^{2,1}(Q)$.

Multiplicando a primeira linha de (2.24) por $\mathbf{w}^\tau$ e integrando sobre Ω , temos

$$\int_\Omega \mathbf{w}_t^\tau \cdot \mathbf{w}^\tau \, d\mathbf{x} - \int_\Omega \Delta \mathbf{w}^\tau \cdot \mathbf{w}^\tau \, d\mathbf{x} + \int_\Omega f'(\tilde{\mathbf{y}}^\tau) |\mathbf{w}^\tau|^2 \, d\mathbf{x} = \int_\Omega (\tilde{\mathbf{v}} \mathbf{1}_\Omega + \tilde{\boldsymbol{\psi}}) \mathbf{w}^\tau \, d\mathbf{x}. \quad (2.25)$$

Vejamos que $\frac{1}{2} \frac{d(|\mathbf{w}^\tau|^2)}{dt} = \mathbf{w}_t^\tau \mathbf{w}^\tau$. Além disso, pela Segunda Fórmula de Green (Teorema 16),

$$- \int_\Omega \Delta \mathbf{w}^\tau \cdot \mathbf{w}^\tau \, d\mathbf{x} = \int_\Omega |\nabla \mathbf{w}^\tau|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w}^\tau \frac{\partial \mathbf{w}^\tau}{\partial \boldsymbol{\eta}} \, dS, \quad (2.26)$$

onde $\boldsymbol{\eta}$ é o vetor normal à $\partial\Omega$. Mas, pelas condições de fronteira do sistema (2.24), vale

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{w}^\tau \frac{\partial \mathbf{w}^\tau}{\partial \boldsymbol{\eta}} \, dS = 0.$$

Assim, substituindo (2.26) em (2.25), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{d(|\mathbf{w}^\tau|^2)}{dt} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega |\nabla \mathbf{w}^\tau|^2 \, d\mathbf{x} &= \int_\Omega (\tilde{\mathbf{v}} \mathbf{1}_\Omega + \tilde{\boldsymbol{\psi}}) \mathbf{w}^\tau \, d\mathbf{x} - \int_\Omega |f'(\tilde{\mathbf{y}}^\tau)| \cdot |\mathbf{w}^\tau|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\leq \int_\Omega (\tilde{\mathbf{v}} \mathbf{1}_\Omega + \tilde{\boldsymbol{\psi}}) \mathbf{w}^\tau \, d\mathbf{x} + \int_\Omega |f'(\tilde{\mathbf{y}}^\tau)| \cdot |\mathbf{w}^\tau|^2 \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Observe que, como f é Lipschitz, temos

$$|f'(\tilde{\mathbf{y}}^\tau) \mathbf{w}^\tau| = \frac{1}{\tau} |f(\mathbf{y}^\tau) - f(\mathbf{y})| \leq \frac{L}{\tau} |\mathbf{y}^\tau - \mathbf{y}| = L |\mathbf{w}^\tau|$$

para alguma constante de Lipschitz $L > 0$ de f . Assim,

$$|f'(\tilde{\mathbf{y}}^\tau)(\mathbf{w}^\tau)^2| \leq L |\mathbf{w}^\tau|^2 \quad \forall \tau \in (0, 1).$$

Logo,

$$|f'(\tilde{\mathbf{y}}^\tau)| \leq L. \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) em (2.27), temos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d(|\mathbf{w}^\tau|^2)}{dt} dx + \|\nabla \mathbf{w}^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{1}_\Theta + \tilde{\Psi}) \mathbf{w}^\tau dx + L \|\mathbf{w}^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.29)$$

Usando a desigualdade de Young no integrando do lado direito da desigualdade (2.29), segue que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d(|\mathbf{w}^\tau|^2)}{dt} dx + \|\nabla \mathbf{w}^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{1}_\Theta + \tilde{\Psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \|\mathbf{w}^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.30)$$

onde $C_2 > 0$. Integrando (2.30) em $[0, t]$, com $t \leq T$, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^t \frac{d(|\mathbf{w}^\tau|^2)}{dt} dt dx + \int_0^t \|\nabla \mathbf{w}^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq \int_0^t \|\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{1}_\Theta + \tilde{\Psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^t C_2 \|\mathbf{w}^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq \int_0^T \|\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{1}_\Theta + \tilde{\Psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + C_2 \int_0^t \|\mathbf{w}^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & = \|\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{1}_\Theta + \tilde{\Psi}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + C_2 \int_0^t \|\mathbf{w}^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Logo, tomando a primeira e a última expressão da desigualdade (2.31), obtemos que

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{w}^\tau(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \mathbf{w}^\tau\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 \leq \|\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{1}_\Theta + \tilde{\Psi}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + C_2 \int_0^t \|\mathbf{w}^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (2.32)$$

Em particular, eliminando o termo positivo com o gradiente na desigualdade (2.32), segue que

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{w}^\tau(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{1}_\Theta + \tilde{\Psi}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + C_2 \int_0^t \|\mathbf{w}^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (2.33)$$

Usando a desigualdade de Gronwall (Lema 2) em (2.33), chegamos a

$$\|\mathbf{w}^\tau(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_3 \|\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{1}_\Theta + \tilde{\Psi}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2, \quad (2.34)$$

para alguma constante $C_3 > 0$.

Integrando a expressão (2.34) em $[0, T]$ e elevando à 1/2 em ambos os lados, obtemos uma estimativa para a norma de $\mathbf{w}^\tau$ em $L^2(Q)$, isto é

$$\|\mathbf{w}^\tau\|_{L^2(Q)} \leq C_4 \|\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{1}_\Theta + \tilde{\Psi}\|_{L^2(Q)}, \quad (2.35)$$

com $C_4 = T\sqrt{C_3} > 0$.

Por outro lado, w^τ pode ser visto como solução de

$$\begin{cases} w_t^\tau - \Delta w^\tau = \tilde{v}1_\mathcal{O} + \tilde{\psi} - g^\tau & \text{em } Q, \\ w^\tau = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w^\tau(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

com $g^\tau(x, t) = f'(\tilde{y}^\tau)w^\tau$. Portanto, da estimativa clássica de energia (1.13) combinada com (2.35), temos que existe $C \geq C_4 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|w^\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C\|\tilde{v}1_\mathcal{O} + \tilde{\psi} - g\|_{L^2(Q)} \\ &\leq C\left(\|\tilde{v}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} + \|\tilde{\psi}\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(Q)}\right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Além disso, usando (2.28) combinado com (2.35), conseguimos obter a seguinte estimativa para $\|g\|_{L^2(Q)}$:

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2(Q)} &= \left(\int_0^T \int_\Omega |f'(\tilde{y}^\tau)w^\tau|^2 dx dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^T \int_\Omega L^2 |w^\tau|^2 dx dt \right)^{1/2} \\ &\leq L\|w^\tau\|_{L^2(Q)} \\ &\leq LC_4\left(\|\tilde{v}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} + \|\tilde{\psi}\|_{L^2(Q)}\right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Assim, substituindo (2.37) em (2.36), deduzimos que existe uma constante, ainda denotada por $C > 0$, tal que

$$\|w^\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|\tilde{v}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} + \|\tilde{\psi}\|_{L^2(Q)}\right),$$

e, portanto, $\{w^\tau\}_{\tau>0}$ é limitada em $W_2^{2,1}(Q)$. Pelo Teorema 3, e usando o fato de que $W_2^{2,1}(Q)$ é reflexivo (ver Brezis (2011) pág. 137), temos que existe uma subsequência, ainda denotada por $\{w^\tau\}_{\tau>0}$ tal que

$$w^\tau \rightharpoonup \hat{w} \quad \text{fraco em } W_2^{2,1}(Q),$$

para algum $\hat{w} \in W_2^{2,1}(Q)$, quando $\tau \rightarrow 0$.

Pela Proposição 1, $w^\tau \rightharpoonup \hat{w}$ se, e somente se, $\phi(w^\tau) \rightarrow \phi(\hat{w})$ para todo $\phi \in (W_2^{2,1}(Q))'$. Para mostrar que $\hat{w}$ é solução de um sistema, fixe $z \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ arbitrário e considere os funcionais lineares e contínuos $\phi_j : W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, e o

funcional $\phi_3 : W_2^{2,1}(Q) \times L^2(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{u}; z) &= \int_0^T (\mathbf{u}_t, z)_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} dt; \\ \phi_2(\mathbf{u}; z) &= \int_0^T (\nabla \mathbf{u}, \nabla z)_{L^2(\Omega)^N} dt; \\ \phi_3(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{y}}^\tau; z) &= \int_0^T (f(\tilde{\mathbf{y}}^\tau) \mathbf{u}, z)_{L^2(\Omega)} dt.\end{aligned}$$

Observemos que se

$$\phi_1(\hat{\mathbf{w}}; z) + \phi_2(\hat{\mathbf{w}}; z) + \phi_3(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{y}; z) = \int_0^T (\tilde{\mathbf{v}} \mathbf{1}_\mathcal{O} + \tilde{\Psi}, z)_{L^2(\Omega)} dt \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, 0) = 0,$$

então $\hat{\mathbf{w}}$ é solução de (2.15). Pelo Teorema 10, conseguimos que $W_2^{2,1}(Q) \subset L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ com imersão compacta. Logo, segue do Teorema 1 que $\mathbf{w}^\tau \rightarrow \hat{\mathbf{w}}$ em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e, portanto,

$$\phi_j(\mathbf{w}^\tau) \rightarrow \phi_j(\hat{\mathbf{w}}), \quad j = 1, 2. \quad (2.38)$$

Para o caso $j = 3$ vamos primeiro mostrar que

$$f'(\tilde{\mathbf{y}}^\tau) \mathbf{w}^\tau \rightarrow f'(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{w}} \quad \text{em } L^2(Q).$$

De fato, como $W_2^{2,1}(Q) \subset L^2(Q)$ com imersão compacta, invocando o Teorema 1 mais uma vez, temos que $\mathbf{w}^\tau \rightarrow \hat{\mathbf{w}}$ em $L^2(Q)$. Além disso, lembremos que $\tilde{\mathbf{y}}^\tau - \mathbf{y} = -\theta_\tau(\mathbf{y}^\tau - \mathbf{y})$, com $0 \leq \theta_\tau \leq 1$, para todo $\tau \in (0, 1)$. Logo,

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathbf{y}}^\tau - \mathbf{y}\|_{W_2^{2,1}(Q)} &= \|-\theta_\tau(\mathbf{y}^\tau - \mathbf{y})\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ &\leq \|\mathbf{y}^\tau - \mathbf{y}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ &= \|\tau \mathbf{w}^\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ &\leq \tau C(\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} + \|\tilde{\Psi}\|_{L^2(Q)}).\end{aligned} \quad (2.39)$$

Assim, fazendo $\tau \rightarrow 0$ na desigualdade (2.39), obtemos que $\tilde{\mathbf{y}}^\tau \rightarrow \mathbf{y}$ em $W_2^{2,1}(Q)$ e, portanto, como $f \in C^2(\mathbb{R})$, segue que $f'(\tilde{\mathbf{y}}^\tau) \mathbf{w}^\tau \rightarrow f'(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{w}}$ em $L^2(Q)$. Observando a definição de ϕ_3 , concluímos que

$$\phi_3(\mathbf{w}^\tau) \rightarrow \phi_3(\hat{\mathbf{w}}). \quad (2.40)$$

Logo, como

$$\sum_{j=1}^3 \phi_j(\mathbf{w}^\tau) = (\tilde{\mathbf{v}} \mathbf{1}_\mathcal{O} + \tilde{\Psi}, z)_{L^2(Q)}, \quad \forall \tau > 0,$$

por (2.38), (2.40) e pela unicidade de limite em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, temos que

$$\sum_{j=1}^3 \phi_j(\widehat{w}) = \int_0^T (\tilde{v}\mathbf{1}_O + \tilde{\psi}, z)_{L^2(\Omega)} dt,$$

isto é,

$$\int_0^T (\widehat{w}_t, z)_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \int_0^T (\nabla \widehat{w}, \nabla z)_{L^2(\Omega)^N} + \int_0^T (f'(y)\widehat{w} - \tilde{v}\mathbf{1}_O - \tilde{\psi}, z)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Portanto, como z foi tomado arbitrário em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e, além disso,

$$\widehat{w}(x, 0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{y^\tau(x, 0) - y(x, 0)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{y_0 - y_0}{\tau} = 0,$$

segue que $\widehat{w}$ é solução de (2.15).

Nos resta agora mostrar que $\partial_{(\tilde{v}, \tilde{\psi})} G(v, \psi)$ é contínua, pois com a derivada de Gâteaux contínua teremos que G é continuamente Fréchet Diferenciável (Teorema 11).

Seja $\{(v^n, \psi^n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(O \times (0, T)) \times L^2(Q)$ com $(v^n, \psi^n) \rightarrow (v, \psi)$ quando $n \rightarrow +\infty$. Iremos denotar $y^n = y^n(h; v^n, \psi^n)$ solução de (1.3) associado à (v^n, ψ^n) , isto é, y^n é solução de

$$\begin{cases} y_t^n - \Delta y^n + f(y^n) = h\mathbf{1}_\omega + v^n\mathbf{1}_O + \psi^n & \text{em } Q, \\ y^n = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y^n(x, 0) = y_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Dada uma direção $(\tilde{v}, \tilde{\psi}) \in L^2(O \times (0, T)) \times L^2(Q)$, vamos mostrar que

$$\partial_{(\tilde{v}, \tilde{\psi})} G(v^n, \psi^n) \rightarrow \partial_{(\tilde{v}, \tilde{\psi})} G(v, \psi).$$

Sejam $w^n = \partial_{(\tilde{v}, \tilde{\psi})} G(v^n, \psi^n)$ e $w = \partial_{(\tilde{v}, \tilde{\psi})} G(v, \psi)$. Pelo que já mostramos, $w^n, w \in W_2^{2,1}(Q)$ e, portanto, usando que w^n e w satisfazem o sistema (2.15), temos que

$$\begin{aligned} (w^n - w)_t &= w_t^n - w_t \\ &= \Delta w^n - f'(y^n)w^n + \tilde{v}\mathbf{1}_O + \tilde{\psi} \\ &\quad - \Delta w + f'(y)w - \tilde{v}\mathbf{1}_O - \tilde{\psi} \\ &= \Delta(w^n - w) + f'(y)w - f'(y^n)w^n. \end{aligned}$$

Assim, podemos ver $z^n = w^n - w$ como solução de

$$\begin{cases} z_t^n - \Delta z^n = f'(y)w - f'(y^n)w^n & \text{em } Q, \\ z^n = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z^n(x, 0) = w^n(x, 0) - w(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.41)$$

Pela desigualdade clássica de energia para o sistema (2.41), e pelo fato de que $f'(\mathbf{y}^n)\mathbf{w}^n \rightarrow f'(\mathbf{y})\mathbf{w}$, obtemos que

$$\|\mathbf{w}^n - \mathbf{w}\|_{W_2^{2,1}(Q)} = \|\mathbf{z}^n\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C(\|f'(\mathbf{y}^n)\mathbf{w}^n - f'(\mathbf{y})\mathbf{w}\|_{L^2(Q)}) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Logo,

$$\partial_{(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\psi})} G(\mathbf{v}^n, \psi^n) \rightarrow \partial_{(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\psi})} G(\mathbf{v}, \psi), \quad \forall (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\psi}) \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q).$$

Assim, $\partial_{(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\psi})} G$ é contínua e, portanto, $G'(\mathbf{v}, \psi)$ existe e é contínua.

□

No próximo lema iremos discutir sobre a segunda derivada do operador G definido anteriormente:

Lema 4. *Sobre as hipóteses do Lema 3, o operador $G : (\mathbf{v}, \psi) \rightarrow \mathbf{y}$ solução de (1.3) é duas vezes continuamente Fréchet diferenciável de $L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q) \mapsto W(0, T)$. Mais ainda, a segunda derivada de G em $(\mathbf{v}, \psi)$ é dada pela expressão*

$$G''(\mathbf{v}, \psi) [(\mathbf{v}_1, \psi_1), (\mathbf{v}_2, \psi_2)] = \mathbf{z}$$

onde $\mathbf{z}$ é a única solução fraca para o problema

$$\begin{cases} \mathbf{z}_t - \Delta \mathbf{z} + f'(\mathbf{y})\mathbf{z} = -f''(\mathbf{y})\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 & \text{em } Q, \\ \mathbf{z} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \mathbf{z}(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.42)$$

com $\mathbf{y} = G(\mathbf{v}, \psi)$ solução de (1.3), e $\mathbf{w}_i$ é solução de (2.15) na direção $(\mathbf{v}_i, \psi_i)$.

Demonstração. A ideia da prova é obter a regularidade desejada através do Teorema da Função Implícita. Para isso definamos uma aplicação $G_Q : L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q) \rightarrow W(0, T)$, tal que $G_Q(\mathbf{v}, \psi) = \mathbf{y}_1$, onde $\mathbf{y}_1$ é solução do sistema

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{1,t} - \Delta \mathbf{y}_1 = \mathbf{v}\mathbb{1}_{\mathcal{O}} + \psi & \text{em } Q, \\ \mathbf{y}_1 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \mathbf{y}_1(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.43)$$

Definamos também a aplicação $G_0 : L^2(\omega \times (0, T)) \times L^2(\Omega) \rightarrow W(0, T)$, tal que $G_0(h, y_0) = y_2$ onde y_2 é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_{2,t} - \Delta y_2 = h \mathbb{1}_\omega & \text{em } Q, \\ y_2 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_2(x, 0) = y_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.44)$$

Notemos que, pela sua própria construção, a aplicação G_Q é linear. Além disso, observe que $y = y(h, v, \psi, y_0) \in W(0, T)$ é solução fraca de (1.3) se, e somente se, tivermos

$$y = G_Q(v, \psi - f(y)) + G_0(h, y_0).$$

Portanto, fixados $(h, y_0) \in L^2(\omega \times (0, T)) \times L^2(\Omega)$, definimos a aplicação $F : L^2(Q) \times L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q) \rightarrow W(0, T)$ tal que

$$F(y, v, \psi) = y - G_Q(v, \psi - f(y)) - G_0(h, y_0).$$

Assim, $y = y(h, v, \psi, y_0)$ é solução de (1.3) se, e somente se, $F(y, v, \psi) = 0$.

Como G_Q é linear e contínua, então $G_Q \in C^\infty(L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q); W(0, T))$. Além disso, $f \in C^2(\mathbb{R})$, por hipótese. Logo, $G_Q(v, \psi - f(y)) \in C^2(L^2(Q) \times L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q); W(0, T))$, donde F é duas vezes Frechét diferenciável.

Agora fixemos $(\bar{y}, \bar{v}, \bar{\psi}) \in L^2(Q) \times L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q)$ e uma direção $y \in L^2(Q)$. Vamos calcular a derivada de F na direção y .

$$\begin{aligned} \partial_y F &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\bar{y} + ty, \bar{v}, \bar{\psi}) - F(\bar{y}, \bar{v}, \bar{\psi})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ty + G_Q(0, -f(\bar{y} + ty) + f(\bar{y}))}{t} \\ &= y + G_Q \left(0, -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(\bar{y} + ty) - f(\bar{y})}{t} \right) \\ &= y + G_Q(0, -f'(\bar{y})y), \end{aligned}$$

isto é,

$$\partial_y F(\bar{y}, \bar{v}, \bar{\psi}) = y + G_Q(0, -f'(\bar{y})y). \quad (2.45)$$

Vê-se pela expressão (2.45) que $\partial_y F(\bar{y}, \bar{v}, \bar{\psi})$ é injetiva. A fim de utilizar o Teorema da Função Implícita (teorema 13), vamos agora verificar a sobrejetividade de $\partial_y F(\bar{y}, \bar{v}, \bar{\psi})$. Notemos que $\partial_y F(\bar{y}, \bar{v}, \bar{\psi})$ é sobrejetiva se, e somente se, $\forall \bar{w} \in W(0, T)$ existe $y \in L^2(Q)$ tal que $\partial_y F(\bar{y}, \bar{v}, \bar{\psi}) = \bar{w}$, isto é,

$$\bar{w} = y + G_Q(0, -f'(\bar{y})y), \quad (2.46)$$

para algum $y \in W(0, T)$.

Consideremos $u \in W(0, T)$ solução do sistema abaixo que, graças às hipóteses sobre f , existe e é único.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - f'(\bar{y})u = f'(\bar{y})\bar{w} & \text{em } Q \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ u(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.47)$$

Dessa forma, temos que $u = G_Q(0, f'(\bar{y})(u + \bar{w}))$. Portanto, definindo $y = u + \bar{w}$, obtemos, por (2.47) e pela definição de G_Q , que

$$y - \bar{w} = G_Q(0, f'(\bar{y})y),$$

isto é,

$$\bar{w} = y + G_Q(0, -f'(\bar{y})y). \quad (2.48)$$

Assim percebemos que $\partial_y F(\bar{y}, \bar{v}, \bar{\psi})$ é sobrejetiva. Logo, estamos nas hipóteses do Teorema da Função Implícita.

Seja $(\tilde{y}, \tilde{v}, \tilde{\psi})$ tal que $F(\tilde{y}, \tilde{v}, \tilde{\psi}) = 0$, pelo Teorema da função implícita (teorema 13), existem:

- uma vizinhança aberta U de $(\tilde{v}, \tilde{\psi})$;
- uma função $G : U \rightarrow L^2(Q)$ tal que

$$G(v, \psi) = y$$

e, ainda mais,

$$F(G(v, \psi), v, \psi) = 0.$$

Isso implica que $y = G(v, \psi)$ é solução de (1.3) com $y \in W(0, T)$. Além disso, G herda a regularidade de F , isto é, $G \in C^2(U; W(0, T))$. Logo, G é duas vezes diferenciável.

Para obter uma caracterização da segunda derivada de G , notemos que

$$y = G(v, \psi) = G_Q(v, \psi - f(G(v, \psi))) + G_0(h, y_0). \quad (2.49)$$

Pela linearidade de G_Q e por (2.49), temos que

$$G(v, \psi) = G_Q(v, \psi) - G_Q(f(G(v, \psi))) + G_0(h, y_0). \quad (2.50)$$

Observemos também que se uma aplicação linear T é diferenciável em x , então $T'(x) \cdot v = Tv$. Assim, tomando a derivada de G em (v, ψ) na direção (v_1, ψ_1) , pela regra da cadeia e por (2.50), temos que

$$G'(v, \psi) \cdot (v_1, \psi_1) = G_Q(v_1, \psi_1) - G_Q\left(0, f'(G(v, \psi)) \cdot (G'(v, \psi) \cdot (v_1, \psi_1))\right).$$

Repetindo o processo para segunda derivada de G na direção (v_2, ψ_2) , temos

$$\begin{aligned} G''(v, \psi) \cdot ((v_1, \psi_1), (v_2, \psi_2)) \\ = -G_Q\left(0, f''(G(v, \psi)) \cdot [G'(v, \psi)(v_2, \psi_2)] \cdot [G'(v, \psi)(v_2, \psi_2)] \right. \\ \left. + f'(G(v, \psi)) \cdot G''(v, \psi) [(v_1, \psi_1), (v_2, \psi_2)]\right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Pondo $y = G(v, \psi)$, $w_i = G'(v, \psi) \cdot (v_i, \psi_i)$ e $z = G''(v, \psi) [(v_1, \psi_1), (v_2, \psi_2)]$, temos, por (2.51), que

$$z = -G_Q\left(0, f''(y)w_1w_2 + f'(y)z\right).$$

Pela expressão de G_Q , vemos que z é solução do sistema

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + f'(y)z = -f''(y)w_1w_2 & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

□

Pela demonstração acima, obtivemos diretamente que G é duas vezes diferenciável sem a necessidade de usar o Lema 3. O leitor pode estar indagando-se sobre a necessidade do Lema 3. Vejamos que, além de garantir a regularidade para G , também caracterizamos a derivada $G'(v, \psi)$ como solução do sistema (2.15), bem como a segunda derivada. Esta caracterização será útil para a Proposição a seguir.

Proposição 6. *Sob as hipóteses do Lema 3, sejam $y_0 \in L^2(\Omega)$ e $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ dados. Então, para γ e ℓ suficientemente grandes, existe um ponto de sela $(\bar{v}, \bar{\psi}) \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q)$ tal que*

$$J_r(\bar{v}, \psi; h) \leq J_r(\bar{v}, \bar{\psi}; h) \leq J_r(v, \bar{\psi}; h), \quad (2.52)$$

para todo $(v, \psi) \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q)$.

Demonstração. Vamos verificar cada uma das condições da Proposição 5 para o funcional J_r .

Condição 1. Devemos verificar que $\forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, a função $\psi \mapsto J_r(v, \psi)$ é côncava e semicontínua superiormente.

Fixemos $h \in L^2(\omega \times (0, T))$. Pela notação do Lema 3, podemos reescrever J_r como

$$J_r(v, \psi) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |G(v, \psi) - y_d|^2 dxdt + \frac{\ell^2}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |v|^2 dxdt - \frac{\gamma^2}{2} \iint_Q |\psi|^2 dxdt. \quad (2.53)$$

Ainda, pelo Lema 3, temos que $G(v, \psi)$ é contínua. Além disso, como a norma é contínua, segue que $J_r(v, \psi)$ é uma composição de funções contínuas. Em particular, para todo $v \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$, a aplicação $\psi \mapsto J_r(v, \psi)$ é contínua e, portanto, semicontínua superiormente.

Para mostrar que a aplicação $\psi \mapsto J_r(v, \psi)$ é côncava, vamos verificar que, fixados v , ψ e $\bar{\psi}$, a função

$$\mathcal{G}(\tau) = J_r(v, \psi + \tau\bar{\psi})$$

é côncava com respeito a τ próximo de $\tau = 0$, ou seja, pelo Teorema 15, vamos verificar que $\mathcal{G}''(0) < 0$.

Por hora, vamos considerar $y := G(v, \psi + \tau\bar{\psi})$. Então, pelos Lemas 3 e 4, temos que $\mathcal{G}(\tau)$ é composição de aplicações duas vezes diferenciáveis, visto que

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |G(v, \psi + \tau\bar{\psi}) - y_d|^2 dxdt + \frac{\ell^2}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |v|^2 dxdt - \frac{\gamma^2}{2} \iint_Q |\psi + \tau\bar{\psi}|^2 dxdt. \quad (2.54)$$

Derivando $\mathcal{G}(\tau)$, pela expressão (2.54) obtemos que

$$\mathcal{G}'(\tau) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} 2 \cdot [G(v, \psi + \tau\bar{\psi}) - y_d] \cdot G'(v, \psi + \tau\bar{\psi})(0, \bar{\psi}) dxdt - \frac{\gamma^2}{2} \iint_Q 2(\psi + \tau\bar{\psi}) \cdot \bar{\psi} dxdt.$$

Derivando mais uma vez, segue que

$$\mathcal{G}''(\tau) = \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} [G(v, \psi + \tau\bar{\psi}) - y_d] \cdot G''(v, \psi + \tau\bar{\psi}) [(0, \bar{\psi}), (0, \bar{\psi})] dxdt + \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |G'(v, \psi + \tau\bar{\psi})(0, \bar{\psi})|^2 dxdt - \gamma^2 \iint_Q (\psi + \tau\bar{\psi}) \cdot \bar{\psi} dxdt. \quad (2.55)$$

Denotemos $y_1 := G'(v, \psi + \tau\bar{\psi})(0, \bar{\psi})$ e $y_2 := G''(v, \psi + \tau\bar{\psi})[(0, \bar{\psi})(0, \bar{\psi})]$. Pelo Lema 3, segue que y_1 é a solução do sistema

$$\begin{cases} (y_1)_t - \Delta y_1 + f'(y)y_1 = \bar{\psi} & \text{em } Q, \\ y_1 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_1(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.56)$$

Analogamente, pelo Lema 4, temos que y_2 é a solução do sistema

$$\begin{cases} (y_2)_t - \Delta y_2 + f'(y)y_2 = -f''(y) \cdot (y')^2 & \text{em } Q, \\ y_2 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_2(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.57)$$

Pela expressão em (2.55), temos que

$$\mathcal{G}''(\tau) = \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (y - y_d)y_2 \, dxdt + \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |y_1|^2 \, dxdt - \gamma^2 \iint_Q |\bar{\psi}|^2 \, dxdt. \quad (2.58)$$

Para mostrarmos que $\mathcal{G}''(0) < 0$, vamos estimar os dois primeiros termos do lado direito da expressão (2.58) em função do terceiro.

Vamos começar pelo termo com y_1 . Como y_1 é solução do sistema (2.56), pela estimativa de energia temos que

$$\|y_1\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))}^2 \leq \|y_1\|_{W(0, T)}^2 \leq C_1 \|\bar{\psi}\|_{L^2(Q)}^2,$$

isto é,

$$\iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |y_1|^2 \, dxdt \leq C_1 \iint_Q |\bar{\psi}|^2 \, dxdt. \quad (2.59)$$

A fim de estimar o primeiro termo, precisamos antes estimar y_2 na norma em $L^2(Q)$ pela norma de $\bar{\psi}$ neste mesmo espaço. Para isso, vamos multiplicar a primeira linha do sistema (2.57) por y_2 e integrar em Q . Antes disso, vejamos que

$$|f'(s)| + |f''(s)| \leq L, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.60)$$

De fato, graças às hipóteses sobre f , temos que existe $L > 0$ tal que $|f'(s)| + |f''(s)| \leq L$, $\forall s \in \mathbb{R}$, pois sendo L_1 a constante de Lipschitz da função f , vale

$$|f'(s)| = \left| \lim_{x \rightarrow s} \frac{f(x) - f(s)}{x - s} \right| \leq \lim_{x \rightarrow s} \frac{L_1|x - s|}{|x - s|} = L_1. \quad (2.61)$$

Além disso, como, por hipótese, $f'' \in L^\infty(\mathbb{R})$, existe $C > 0$ tal que $|f''(s)| \leq C$ q.t.p. Mas, como f'' é contínua, na verdade

$$|f''(s)| \leq C, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.62)$$

Assim, tomando $L/2 = \max\{L_1, C\}$, obtemos (2.60) a partir de (2.61) e (2.62).

Multiplicando a primeira linha de (2.57) por y_2 e integrando em Ω , obtemos. utilizando as fórmulas de Green, que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (y_2)_t y_2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla y_2|^2 \, dx &= \int_{\Omega} ((y_2)_t - \Delta y_2) y_2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} -f'(y) \cdot |y_2|^2 \, dx - \int_{\Omega} f''(y) \cdot |y_1|^2 \cdot y_2 \, dx \\ &\leq \left| \int_{\Omega} f'(y) \cdot |y_2|^2 \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} f''(y) \cdot |y_1|^2 \cdot y_2 \, dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f'(y)| \cdot |y_2|^2 \, dx + \int_{\Omega} |f''(y)| \cdot |y_1|^2 \cdot |y_2| \, dx. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Por (2.60) e (2.63), obtemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |y_2|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla y_2|^2 \, dx \leq L \int_{\Omega} |y_2|^2 \, dx + L \int_{\Omega} |y_1|^2 \cdot |y_2| \, dx. \quad (2.64)$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré (Teorema 8) ao termo com gradiente na desigualdade (2.64), conseguimos diminuir o lado esquerdo trocando o termo com gradiente por y_2 . Segue daí que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |y_2|^2 \, dx + C \int_{\Omega} |y_2|^2 \, dx \leq L \int_{\Omega} |y_2|^2 \, dx + L \int_{\Omega} |y_1|^2 \cdot |y_2| \, dx. \quad (2.65)$$

Subtraindo em ambos os lados o segundo termo do lado esquerdo e tomando $C_2 = |L - C| \geq 0$ na desigualdade (2.65), temos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |y_2|^2 \, dx \leq C_2 \int_{\Omega} |y_2|^2 \, dx + L \int_{\Omega} |y_1|^2 \cdot |y_2| \, dx.$$

Aplicando o Lema 2 (Gronwall) na expressão acima, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |y_2|^2 \, dx &\leq e^{\int_0^t C_2 \, ds} \cdot \left(\int_{\Omega} |y_2(0, x)|^2 \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} |y_1|^2 \cdot |y_2| \, dx \, dt \right) \\ &\leq e^{\int_0^T C_2 \, ds} \cdot \left(\int_{\Omega} |y_2(0, x)|^2 \, dx + \int_0^T \int_{\Omega} |y_1|^2 \cdot |y_2| \, dx \, dt \right) \\ &\leq e^{T C_2} \cdot \left(\iint_Q |y_1|^2 \cdot |y_2| \, dx \, dt \right). \end{aligned}$$

Integrando $\|\mathbf{y}_2\|_{L^2(\Omega)}^2$ em $[0, T]$ e tomando $C_3 = TC_2 > 0$, temos, pela expressão acima, que

$$\begin{aligned} \iint_Q |\mathbf{y}_2|^2 \, dx \, dt &\leq \int_0^T \left(C_3 \iint_Q |\mathbf{y}_1|^2 \cdot |\mathbf{y}_2| \, dx \, dt \right) dt \\ &= TC_3 \iint_Q |\mathbf{y}_1|^2 \cdot |\mathbf{y}_2| \, dx \, dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\iint_Q |\mathbf{y}_2|^2 \, dx \, dt \leq C_4 \iint_Q |\mathbf{y}_1|^2 \cdot |\mathbf{y}_2| \, dx \, dt, \quad (2.66)$$

onde $C_4 = TC_3$.

Gostaríamos agora de encontrar uma limitação para o lado direito da desigualdade acima em termos da norma de $\bar{\psi}$ em $L^2(Q)$. Para isso, notemos que

$$\begin{aligned} \iint_Q |\mathbf{y}_1|^2 \cdot |\mathbf{y}_2| \, dx \, dt &= \int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{y}_1|^2 \cdot |\mathbf{y}_2| \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \|(\mathbf{y}_1)^2 \cdot \mathbf{y}_2\|_{L^1(\Omega)} \, dt. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, à expressão acima, temos que

$$\iint_Q |\mathbf{y}_1|^2 \cdot |\mathbf{y}_2| \, dx \, dt \leq \int_0^T \|\mathbf{y}_1\|_{L^{2q'}(\Omega)}^2 \cdot \|\mathbf{y}_2\|_{L^q(\Omega)} \, dt, \quad (2.67)$$

onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Aplicando a desigualdade de Hölder novamente, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\mathbf{y}_1\|_{L^{2q'}(\Omega)}^2 \cdot \|\mathbf{y}_2\|_{L^q(\Omega)} \, dt &\leq \left(\int_0^T \|\mathbf{y}_1\|_{L^{2q'}(\Omega)}^{2p'} \, dt \right)^{\frac{2}{2p'}} \cdot \left(\int_0^T \|\mathbf{y}_2\|_{L^q(\Omega)}^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\mathbf{y}_1\|_{L^{2p'}(0,T;L^{2q'}(\Omega))}^2 \cdot \|\mathbf{y}_2\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Assim, substituindo (2.67) e (2.68) em (2.66), temos que

$$\iint_Q |\mathbf{y}_2|^2 \, dx \, dt \leq \|\mathbf{y}_1\|_{L^{2p'}(0,T;L^{2q'}(\Omega))}^2 \cdot \|\mathbf{y}_2\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))}. \quad (2.69)$$

Agora, vamos limitar o lado direito da desigualdade acima em termos da norma de $\bar{\psi}$ em $L^2(Q)$. A ideia é encontrar p e q tais que

$$\mathbf{y}_2 \in L^p(0, T; L^q(\Omega)), \quad \mathbf{y}_1 \in L^{2p'}(0, T; L^{2q'}(\Omega)).$$

Pelo Teorema 17, temos que $\mathbf{y}_1 \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e satisfaz

$$\|\mathbf{y}_1\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\mathbf{y}_1\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C \|\bar{\psi}\|_{L^2(Q)}. \quad (2.70)$$

Tendo em vista (2.70), é razoável buscar por condições tais que a seguinte imersão é válida:

$$L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^{2p'}(0, T; L^{2q'}(\Omega)). \quad (2.71)$$

Sejam X e Y espaços de Banach. Pelo Teorema (9), temos que

$$L^{p_0}(0, T; X) \cap L^{p_1}(0, T; Y) \hookrightarrow L^{p_\theta}(0, T; B), \quad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad (2.72)$$

com $0 < \theta < 1$ e B sendo um espaço intermediário (com respeito a X e Y) de classe θ , isto é, B é o espaço verificando

$$\|g\|_B \leq C \|g\|_X^{1-\theta} \cdot \|g\|_Y^\theta, \quad \forall g \in X \cap Y,$$

para algum $C > 0$.

De (2.71) e (2.72), deduzimos que

$$\frac{1}{2p'} = \frac{\theta}{2},$$

isto é

$$p' = \frac{1}{\theta}. \quad (2.73)$$

Por outro lado, pelas imersões de Sobolev (Lema 1), temos

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-4}}(\Omega), \quad (2.74)$$

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega), \quad (2.75)$$

para algum N maximal a ser determinado. Note que $L^{2q'}(\Omega)$ é um espaço intermediário com respeito à (2.74) e (2.75) se

$$\frac{1}{2q'} = \frac{(N-4)\theta}{2N} + \frac{(N-2)(1-\theta)}{2N}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (2.76)$$

Aplicando $\theta = \frac{1}{p'}$ (de (2.73)) em (2.76), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{q'} &= \frac{(N-4)}{N} \frac{1}{p'} + \frac{(N-2)(1-\frac{1}{p'})}{N} \\ &= \frac{N-4}{Np'} + \frac{(N-2)(p'-1)}{Np'} \\ &= \frac{p'(N-2)-2}{Np'}, \end{aligned}$$

isto é,

$$q' = \frac{p'N}{p'(N-2)-2}. \quad (2.77)$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, segue que

$$p = \frac{p'}{p' - 1} \quad \text{e} \quad q = \frac{q'}{q' - 1}.$$

Aplicando (2.77) à igualdade da direita acima, temos que

$$\begin{aligned} q &= \frac{p'N}{p'(N-2) - 2} \cdot \frac{1}{\frac{p'N}{p'(N-2) - 2} - 1} \\ &= \frac{p'N}{p'N - p'(N-2) + 2} \\ &= \frac{p'N}{2p' + 2}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$p = \frac{p'}{p' - 1} \quad \text{e} \quad q = \frac{p'N}{2p' + 2}. \quad (2.78)$$

Dessa forma, conseguimos escrever p e q em função de p' , de maneira única. Isto é, determinando p' , por (2.70) e (2.71), podemos reescrever a desigualdade em (2.69) como

$$\iint_Q |y_2|^2 dxdt \leq C \|\bar{\psi}\|_{L^2(Q)} \cdot \|y_2\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))}. \quad (2.79)$$

Nos resta agora encontrar p e q tais que $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^p(0,T;L^q(\Omega))$, pois daí teremos que

$$\|y_2\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))} \leq \bar{C} \|y_2\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \quad (2.80)$$

para algum $\bar{C} > 0$ e, consequentemente, ao substituir (2.80) em (2.79), obteremos que

$$\|y_2\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C \|\bar{\psi}\|_{L^2(Q)} \cdot \|y_2\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

isto é,

$$\|y_2\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \|\bar{\psi}\|_{L^2(Q)}.$$

Feita esta análise, vamos encontrar p e q que tornam a imersão $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^p(0,T;L^q(\Omega))$ válida. Tomando $1 \leq p, q \leq 2$, temos que $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^p(0,T;L^q(\Omega))$.

Por (2.78), segue que

$$\frac{p'}{p' - 1} \leq 2 \quad \text{e} \quad \frac{p'N}{2(p' - 1)} \leq 2,$$

ou seja, $p' \geq 2$ e $N \leq 4(p' + 1)/p'$. Tomando $p' = 2$, temos $N \leq 6$, e, portanto,

$$\|y_2\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_2 \|\bar{\psi}\|_{L^2(Q)}^2. \quad (2.81)$$

Finalmente, por (2.55), (2.59) e (2.81) temos

$$\mathcal{G}''(0) = (C_2 + C_1 - \gamma^2) \|\bar{\psi}\|_{L^2(Q)}^2, \quad \forall \bar{\psi} \in L^2(Q), \bar{\psi} \neq 0.$$

Tomando γ suficientemente grande, temos $\mathcal{G}''(0) < 0$ e, portanto, temos que a aplicação $\psi \mapsto J_r(\mathbf{v}, \psi)$ é estritamente côncava.

Condição 2. Queremos mostrar que a aplicação $\mathbf{v} \mapsto J_r(\mathbf{v}, \psi)$ é convexa e semi-contínua inferiormente. Pelo mesmo motivo da condição 1, podemos concluir a semi-continuidade inferior. Para mostrar a convexidade, é suficiente mostrar que, fixados $\mathbf{v}$, $\bar{\mathbf{v}}$ e ψ , a função abaixo

$$\bar{\mathcal{G}}(\tau) = J_r(\mathbf{v} + \tau\bar{\mathbf{v}}, \psi)$$

é convexa com respeito a τ , próximo de $\tau = 0$. Isto é, vamos mostrar que $\bar{\mathcal{G}}''(0) > 0$.

Derivando $\bar{\mathcal{G}}(\tau) = J_r(\mathbf{v} + \tau\bar{\mathbf{v}}, \psi)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}'(\tau) &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} 2 \left(G'(\mathbf{v} + \tau\bar{\mathbf{v}}, \psi)(\bar{\mathbf{v}}, 0) \right) \cdot \left(G(\mathbf{v} + \tau\bar{\mathbf{v}}, \psi) - \mathbf{y}_d \right) dxdt \\ &\quad + \frac{\ell^2}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} 2\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{v} + \tau\bar{\mathbf{v}}) dxdt, \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde $\mathbf{y} = G(\mathbf{v} + \tau\bar{\mathbf{v}}, \psi)$. Derivado novamente, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}''(\tau) &= \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} \left(G''(\mathbf{v} + \tau\bar{\mathbf{v}}, \psi) [(\bar{\mathbf{v}}, 0)(\bar{\mathbf{v}}, 0)] \right) \cdot \left(G(\mathbf{v} + \tau\bar{\mathbf{v}}, \psi) - \mathbf{y}_d \right) dxdt \\ &\quad + \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} \left| G'(\mathbf{v} + \tau\bar{\mathbf{v}}, \psi)(\bar{\mathbf{v}}, 0) \right|^2 dxdt + \ell^2 \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\bar{\mathbf{v}}|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Denotemos agora

$$\mathbf{y}_1 = G'(\mathbf{v} + \tau\bar{\mathbf{v}}, \psi)(\bar{\mathbf{v}}, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_2 = G''(\mathbf{v} + \tau\bar{\mathbf{v}}, \psi)(\bar{\mathbf{v}}, 0)(\bar{\mathbf{v}}, 0).$$

Procedendo analogamente à condição 1, obtemos que $\|\mathbf{y}_1\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_d))}^2 \leq C_1 \|\bar{\mathbf{v}}\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_d))}^2$ e também que $\|\mathbf{y}_2\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_d))}^2 \leq C \|\mathbf{y}_1\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_d))}^2$. Portanto, temos que

$$\|\mathbf{y}_2\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_d))}^2 \leq \tilde{C}_2 \|\bar{\mathbf{v}}\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_d))}^2. \quad (2.83)$$

Assim, em $\tau = 0$, temos

$$\begin{aligned} -\bar{\mathcal{G}}''(0) &= - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \mathbf{y}_2 dxdt - \|\mathbf{y}_1\|_{L^2(\mathcal{O}_d \times (0, T))}^2 - \ell^2 \|\bar{\mathbf{v}}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}^2 \\ &\leq \left| - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \mathbf{y}_2 dxdt - \|\mathbf{y}_1\|_{L^2(\mathcal{O}_d \times (0, T))}^2 \right| - \ell^2 \|\bar{\mathbf{v}}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}^2 \\ &\leq \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_d| |\mathbf{y}_2| dxdt + \|\mathbf{y}_1\|_{L^2(\mathcal{O}_d \times (0, T))}^2 - \ell^2 \|\bar{\mathbf{v}}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}^2. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e (2.83) à desigualdade acima, obtemos que

$$\begin{aligned} -\bar{\mathcal{G}}''(0) &\leq \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_{L^2(\mathcal{O}_d \times (0, T))} \|\mathbf{y}_2\|_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} + (C_1 - \ell^2) \|\bar{\mathbf{v}}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}^2 \\ &\leq (C_2 + C_1 - \ell^2) \|\bar{\mathbf{v}}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}^2, \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde $C_2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_{L^2(\mathcal{O}_d \times (0, T))} \tilde{C}_2$, pois $\mathbf{v}, \psi$ estão fixos. Assim, por (2.84), temos que

$$\bar{\mathcal{G}}''(0) \geq (\ell^2 - C_2 - C_1) \|\bar{\mathbf{v}}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}^2.$$

Portanto, para ℓ suficientemente grande, segue que $\mathcal{G}''(0) > 0$.

Condição 3. Vamos mostrar agora que existe $\mathbf{v}_0 \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$ tal que

$$J_r(\mathbf{v}_0, \psi) \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad \|\psi\|_{L^2(Q)}^2 \rightarrow +\infty.$$

Tomemos $\mathbf{v}_0 = 0$ e $\mathbf{y} = \mathbf{y}(0, \psi)$ solução de (1.3). Pelo Lema 4, podemos escrever

$$\mathbf{y} = G_Q(0, \psi - f(\mathbf{y})) + G_0(\mathbf{h}, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2.$$

Logo,

$$J_r(0, \psi) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_d|^2 \, d\mathbf{x} dt - \frac{\gamma^2}{2} \iint_Q |\psi|^2 \, d\mathbf{x} dt. \quad (2.85)$$

Notemos que o valor de $\iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_d|^2 \, d\mathbf{x} dt$ depende apenas de $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{h}$ e $\mathbf{y}_d$. Assim, expandindo o termo ao quadrado em (2.85), temos que

$$\begin{aligned} J_r(0, \psi) &\leq \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |\mathbf{y}_1|^2 \, d\mathbf{x} dt + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} 2|\mathbf{y}_1| \cdot |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_d| \, d\mathbf{x} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_d|^2 \, d\mathbf{x} dt - \frac{\gamma}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |\psi|^2 \, d\mathbf{x} dt. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Além disso, pela desigualdade de Young, conseguimos a seguinte limitação para o segundo termo do lado direito:

$$\iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |\mathbf{y}_1| \cdot |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_d| \, d\mathbf{x} dt \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_1\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_d))}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_d\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_d))}^2. \quad (2.87)$$

Pela estimativa clássica de energia, temos que

$$\|\mathbf{y}_1\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}_d))}^2 \leq C \|\psi\|_{L^2(Q)}^2. \quad (2.88)$$

Assim, aplicando (2.88) e (2.87) na desigualdade (2.86), segue que

$$J_r(0, \psi) \leq C \|\psi\|_{L^2(Q)}^2 + C_3 - \frac{\gamma^2}{2} \|\psi\|_{L^2(Q)}^2,$$

onde $C_3 > 0$ depende apenas de $\mathbf{h}$, $\mathbf{y}_0$ e $\mathbf{y}_d$.

Portanto, para γ suficientemente grande, temos que a condição 3 vale. De fato, basta tomar $\gamma > 0$ de modo que γ satisfaça ainda a condição 1 e $\gamma^2 \geq 2C$.

Condição 4. Vamos mostrar agora que existe $\psi_0 \in L^2(Q)$ tal que $J_r(\mathbf{v}, \psi_0) \rightarrow +\infty$ quando $\|\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))} \rightarrow +\infty$.

Tomemos $\psi_0 = 0$ e $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{v}, 0)$ solução de (1.3). Então

$$\begin{aligned} J_r(\mathbf{v}, 0) &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0,T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d)^2 \, dx dt + \frac{\ell^2}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\mathbf{v}|^2 \, dx dt \\ &\geq \frac{\ell^2}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\mathbf{v}|^2 \, dx dt \\ &= \|\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))}^2. \end{aligned}$$

Logo, $J_r(\mathbf{v}, 0) \rightarrow +\infty$ quando $\|\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))} \rightarrow +\infty$.

Concluimos que J_r satisfaz as Hipóteses da Proposição 5. Portanto, J_r possui pelo menos um ponto de sela $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\psi})$.

□

2.2 Caracterização do ponto de sela

Nesta seção, mostraremos uma caracterização e a unicidade para o ponto de sela, considerando que sua existência foi provada na Proposição 6.

Notemos que a existência de um ponto de sela $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\psi})$ para o funcional J_r implica que

$$\frac{\partial J_r}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\psi}) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial J_r}{\partial \psi}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\psi}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \text{ e } \psi \in L^2(Q). \quad (2.89)$$

Vejamos ainda que

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_r}{\partial (\mathbf{v}_1, 0)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J_r(\mathbf{v} + h\mathbf{v}_1, \psi) - J_r(\mathbf{v}, \psi)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0,T)} (|G(\mathbf{v} + h\mathbf{v}_1, \psi) - \mathbf{y}_d|^2 - |G(\mathbf{v}, \psi) - \mathbf{y}_d|^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\ell^2}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} (|\mathbf{v} + h\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}|^2) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \iint_{\mathcal{O}_d \times (0,T)} (G(\mathbf{v} + h\mathbf{v}_1, \psi) + G(\mathbf{v}, \psi) - 2\mathbf{y}_d) \frac{G(\mathbf{v} + h\mathbf{v}_1, \psi) - G(\mathbf{v}, \psi)}{h} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\ell^2}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} (\mathbf{v} + h\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 \right\}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{y} = G(\mathbf{v}, \psi)$. Logo,

$$\frac{\partial G}{\partial(\mathbf{v}_1, 0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(\mathbf{v} + h\mathbf{v}_1, \psi) - G(\mathbf{v}, \psi)}{h} =: \mathbf{w}_v. \quad (2.90)$$

Além disso, como $G(\mathbf{v}, \psi)$ é contínua, $G(\mathbf{v} + h\mathbf{v}_1, \psi) \rightarrow G(\mathbf{v}, \psi)$ quando $h \rightarrow 0$. Assim, por (2.90), temos

$$\frac{\partial J_r}{\partial(\mathbf{v}_1, 0)}(\mathbf{v}, \psi) = \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \mathbf{w}_v \, dx dt + \ell^2 \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \mathbf{v}_1 \mathbf{v} \, dx dt. \quad (2.91)$$

Analogamente, conseguimos que

$$\frac{\partial J_r}{\partial(0, \psi_1)}(\mathbf{v}, \psi) = \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \mathbf{w}_\psi \, dx dt - \psi^2 \iint_Q \psi_1 \psi \, dx dt, \quad (2.92)$$

onde $\mathbf{w}_\psi = \frac{\partial G}{\partial(0, \psi_1)}$.

Definamos o sistema adjunto de (2.15)

$$\begin{cases} -\mathbf{q}_t - \Delta \mathbf{q} + \mathbf{f}'(\mathbf{y}) \mathbf{q} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ \mathbf{q} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, T) = 0 & \text{em } \Omega \times \{t = T\}. \end{cases} \quad (2.93)$$

Recordando que no Lema 3, a solução do sistema linear (2.15) é dada por $\mathbf{w} = G'(\mathbf{v}, \psi)(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\psi})$, temos o seguinte resultado.

Lema 5. *Seja $\mathbf{y} = \mathbf{y}(h, \mathbf{v}, \psi) \in W(0, T)$ a solução de (1.3). Seja $\mathbf{w}$ a solução de (2.15) com $(\mathbf{v}_1, \psi_1) \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q)$ e $\mathbf{q}$ a solução de (2.93). Então*

$$\iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \mathbf{w} \, dx dt = \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \mathbf{q} \mathbf{v}_1 \, dx dt + \iint_Q \mathbf{q} \psi_1 \, dx dt. \quad (2.94)$$

Demonstração. Usando a integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \left((\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d}, \mathbf{w} \right)_{L^2(Q)} &= \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \mathbf{w} \, dx dt \\ &= - \iint_Q \mathbf{q}_t \mathbf{w} \, dx dt - \iint_Q \Delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{w} \, dx dt + \iint_Q \mathbf{f}'(\mathbf{y}) \mathbf{q} \mathbf{w} \, dx dt \\ &= - \int_\Omega \mathbf{q} \mathbf{w} \Big|_0^T \, dx + \iint_Q \mathbf{q} \mathbf{w}_t \, dx dt - \iint_Q \mathbf{q} \Delta \mathbf{w} \, dx dt \\ &\quad + \iint_\Sigma \mathbf{q} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta} - \mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \eta} \, dS + \iint_Q \mathbf{f}'(\mathbf{y}) \mathbf{q} \, dx dt. \end{aligned}$$

Como $\int_{\Omega} \mathbf{q} \mathbf{w} \Big|_0^T = 0 = \iint_{\Sigma} \mathbf{q} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta} - \mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \eta}$, devido às condições iniciais do sistema adjunto (2.93), segue que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \mathbf{w} \, dx dt &= \iint_Q \mathbf{q} (\mathbf{w}_t - \Delta \mathbf{w} + \mathbf{f}'(\mathbf{y}) \mathbf{w}) \, dx dt \\ &= \iint_Q \mathbf{q} (\mathbf{v}_1 \mathbf{1}_{\mathcal{O}} + \psi_1) \, dx dt \\ &= \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_1 \, dx dt + \iint_Q \mathbf{q} \psi_1 \, dx dt. \end{aligned}$$

Isso conclui a prova do Lema 5. □

Vejam agora que, substituindo (2.94) em (2.91) com $\psi_1 = 0$, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial J_r}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{v}_1, 0) \right) &= \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \mathbf{q} \mathbf{v}_1 \, dx dt + \ell^2 \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \mathbf{v} \mathbf{v}_1 \, dx dt \\ &= \iint_Q \mathbf{v}_1 (\mathbf{q} + \ell^2 \mathbf{v}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}} \, dx dt. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v}_1 \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ foi tomado arbitrário, segue que

$$\frac{\partial J_r}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{q} + \ell^2 \mathbf{v}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}}. \quad (2.95)$$

Analogamente, tomando $\mathbf{v}_1 = 0$ e substituindo (2.94) em (2.91), podemos concluir que

$$\frac{\partial J_r}{\partial \psi}(\mathbf{v}, \psi) = \mathbf{q} - \gamma^2 \psi. \quad (2.96)$$

Proposição 7. *Sejam $\mathbf{h} \in L^2(\omega \times (0, T))$ e $\mathbf{y}_0 \in L^2(\Omega)$ dados. Seja $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\psi})$ a solução do problema (1.3) de controle robusto. Então*

$$\bar{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\ell^2} \mathbf{q} \mathbf{1}_{\mathcal{O}} \quad e \quad \bar{\psi} = \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{q},$$

onde $\mathbf{q}$ é parte da solução $(\mathbf{y}, \mathbf{q})$ do sistema acoplado

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t - \Delta \mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{h} \mathbf{1}_{\omega} - \frac{1}{\ell^2} \mathbf{q} \mathbf{1}_{\mathcal{O}} + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{q} & \text{em } Q, \\ -\mathbf{q}_t - \Delta \mathbf{q} + \mathbf{f}'(\mathbf{y}) \mathbf{q} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ \mathbf{y} - \mathbf{q} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}), \mathbf{q}(\mathbf{x}, T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.97)$$

o qual admite solução para γ e ℓ suficientemente grandes.

Demonstração. Para ℓ e γ suficientemente grandes, a existência de um par $(\bar{v}, \bar{\psi})$ que é controle robusto para J_r é garantida pela Proposição 6. Seja q a solução de (2.93) com $y = y(\bar{v}, \bar{\psi})$ solução de (1.3). Então, por (2.89), (2.95) e (2.96), segue que

$$\bar{v} = -\frac{1}{\ell^2} q \mathbb{1}_{\mathcal{O}} \quad \text{e} \quad \bar{\psi} = \frac{1}{\gamma^2} q.$$

Assim, podemos reescrever o sistema (1.3) como

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = h \mathbb{1}_{\omega} - \frac{1}{\ell^2} q \mathbb{1}_{\mathcal{O}} + \frac{1}{\gamma^2} q & \text{em } Q, \\ -q_t - \Delta q + f'(y)q = (y - y_d) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ y - q = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad q(x, T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

o qual admite solução para γ e ℓ suficientemente grandes.

Unicidade: Supondo que exista outro ponto de sela (v_2, ψ_2) , para γ e ℓ suficientemente grandes, obtemos que

$$J_r(v, \psi_2) < J_r(v_2, \psi_2) < J_r(v_2, \psi), \quad \forall (v, \psi) \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q).$$

Em particular,

$$J_r(\bar{v}, \psi_2) < J_r(v_2, \psi_2) < J_r(v_2, \bar{\psi}).$$

Mas, como $(\bar{v}, \bar{\psi})$ é ponto de sela, tem-se que

$$J_r(v_2, \bar{\psi}) < J_r(\bar{v}, \bar{\psi}) < J_r(\bar{v}, \psi_2).$$

Assim,

$$J_r(\bar{v}, \psi_2) < J_r(v_2, \bar{\psi}) \quad \text{e} \quad J_r(v_2, \bar{\psi}) < J_r(\bar{v}, \psi_2),$$

o que é uma contradição. Portanto, $(\bar{v}, \bar{\psi})$ é o único ponto de sela.

□

Capítulo 3

Desigualdade de Observabilidade

Neste capítulo vamos estudar a desigualdade de observabilidade que é um conceito fundamental na teoria de controle e está diretamente relacionada à capacidade de inferir o estado de um sistema a partir de medições parciais feitas em uma subregião do domínio ou em parte do tempo.

Ela responde à seguinte pergunta: “É possível estimar a norma do estado de todo o sistema apenas observando uma parte dele por um certo intervalo de tempo?” Se a resposta for sim, dizemos que o sistema é observável e isso é formalizado por meio de uma desigualdade chamada justamente de desigualdade de observabilidade.

A desigualdade de observabilidade será utilizada para mostrar a condição de controlabilidade às trajetórias $\mathbf{y}(\cdot, T) = \mathbf{y}^*(\cdot, T)$, onde $\mathbf{y}$ é parte da solução $(\mathbf{y}, \mathbf{q})$ de (2.97). Vejamos que essa condição de controlabilidade às trajetórias pode ser reinterpretada como uma condição de controlabilidade nula.

Consideremos a seguinte mudança de variável $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ no sistema (2.97). Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_t &= \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_t^* \\ &= \Delta \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{h} \mathbf{1}_\omega - \frac{1}{\ell^2} \mathbf{q} \mathbf{1}_\circ + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{q} - \Delta \mathbf{y}^* + \mathbf{f}(\mathbf{y}^*) \\ &= \Delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*) - \mathbf{f}(\mathbf{z} + \mathbf{y}^*) + \mathbf{f}(\mathbf{y}^*) + \mathbf{h} \mathbf{1}_\omega - \frac{1}{\ell^2} \mathbf{q} \mathbf{1}_\circ + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{q} \\ &= \Delta(\mathbf{z}) - \mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{h} \mathbf{1}_\omega - \frac{1}{\ell^2} \mathbf{q} \mathbf{1}_\circ + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{q}, \quad \text{em } Q, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z} + \mathbf{y}^*) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^*)$, ou seja,

$$\mathbf{z}_t - \Delta(\mathbf{z}) + \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{h} \mathbf{1}_\omega - \frac{1}{\ell^2} \mathbf{q} \mathbf{1}_\circ + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{q} \quad \text{em } Q. \quad (3.1)$$

Também vejamos que

$$-q_t - \Delta q_t + f'(y)q = (y - y_d)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} \quad \text{em } Q,$$

se, e somente se,

$$-q_t - \Delta q_t + f'(z + y^*)q = (y - y_d + y^* - y^*)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} \quad \text{em } Q,$$

se, e somente se,

$$-q_t - \Delta q_t + f'(z + y^*)q = (z - z_d)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} \quad \text{em } Q, \quad (3.2)$$

onde $z_d = y_d - y^*$.

Sobre Σ , temos $y - q = 0$, isto é, $z - y^* - q = 0$. Como $y^* = 0$ sobre Σ , segue que

$$z - q = 0 \quad \text{sobre } \Sigma. \quad (3.3)$$

Por fim, em $\Omega \times \{t = 0\}$, temos que

$$z(x, 0) = y(x, 0) - y^*(x, 0) = y_0(x) - y_0^*(x) =: z_0(x) \quad \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \quad (3.4)$$

Portanto, por (3.1)–(3.4), podemos reescrever o sistema (2.97) como

$$\begin{cases} z_t - \Delta(z) + g(z) = h\mathbb{1}_\omega - \frac{1}{\ell^2}q\mathbb{1}_\mathcal{O} + \frac{1}{\gamma^2}q & \text{em } Q, \\ -q_t - \Delta q + f'(z + y^*)q = (z - z_d)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ z - q = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(x, 0) = z_0(x), \quad q(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.5)$$

Assim, fica claro por (3.5) que para provar controlabilidade para trajetórias para y no sistema (2.97), basta mostrar controle nulo para z no sistema (3.5). Iremos iniciar mostrando uma desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto à versão linearizada de (3.5), dado por

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + a\varphi = \theta\mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ \theta_t - \Delta\theta_t + c\theta = -\frac{1}{\ell^2}\varphi\mathbb{1}_\mathcal{O} + \frac{1}{\gamma^2}\varphi & \text{em } Q, \\ \varphi = \theta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(x, T) = \varphi^T(x), \quad \theta(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

onde $a, c \in L^\infty(Q)$ e $\varphi^T \in L^2(\Omega)$. A fim de mostrar uma desigualdade de observabilidade para o sistema (3.6), mostraremos alguns resultados preliminares.

3.1 Uma Desigualdade de Carleman

O objetivo desta seção é mostrar uma desigualdade de Carleman no Lema (8), que será muito útil para chegarmos no objetivo principal deste capítulo, que é a desigualdade de observabilidade. A desigualdade de Carleman é uma ferramenta fundamental na teoria do controle de EDP's, especialmente no contexto de problemas de observabilidade e controlabilidade. Seu papel central está em fornecer estimativas *a priori* que envolvem termos ponderados exponencialmente, o que permite lidar com a propagação da informação em regiões limitadas do domínio.

Tal desigualdade é extensivamente estudada em dissertações e teses na teoria do controle. A fim de simplificar, vamos recorrer à uma das primeiras versões da desigualdade, provada em Yamamoto e Imanouilov (2003) e Fursikov e Imanuvilov (s.d.), para conseguirmos provar uma versão mais geral de tal desigualdade. Para isso faremos uso de dois lemas auxiliares.

Lema 6. *Seja $\mathcal{B} \subset \subset \Omega$ um aberto não-vazio. Então, existe $\eta^0 \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que*

$$\begin{cases} \eta^0(x) > 0 & \text{para todo } x \in \Omega, & \eta^0|_{\partial\Omega} = 0, \\ |\nabla \eta^0| > 0 & \text{para todo } x \in \overline{\Omega \setminus \mathcal{B}}. \end{cases}$$

Demonstração. Ver Fursikov e Imanuvilov (s.d.), pág. 14. □

Dado um parâmetro $\lambda > 0$, consideremos as funções peso dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha(x, t) &= \frac{e^{4\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)}, & \xi(x, t) &= \frac{e^{\lambda(2\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)}, \\ \tilde{\alpha}(x, t) &= \frac{e^{\lambda\eta^0(x) - 2\lambda\|\eta^0\|_\infty}}{t(T-t)}, & \bar{\varphi}(x, t) &= \frac{e^{\lambda\eta^0(x)}}{t(T-t)}. \end{aligned}$$

e notemos que

$$\xi(x, t) = \mu \bar{\varphi}(x, t), \quad \alpha(x, t) = -\mu \tilde{\alpha}(x, t) \tag{3.7}$$

onde $\mu = e^{2\lambda\|\eta^0\|_\infty}$.

Para $m \in \mathbb{R}$ e um parâmetro $s > 0$, consideremos

$$\begin{aligned} I_m(s, \lambda; z) &:= \iint_Q e^{-2s\alpha} \left[(s\xi)^{m-2} \lambda^{m-1} |\nabla z|^2 + (s\xi)^m \lambda^{m+1} |z|^2 \right], \\ I_{m,\mathcal{B}}(s, \lambda; z) &:= \iint_{\mathcal{B} \times (0,T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^m \lambda^{m+1} |z|^2. \end{aligned}$$

Consideremos também o problema de valor inicial

$$\begin{cases} Lz \equiv \frac{\partial z}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x) \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) = g & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0, \cdot) = z_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.8)$$

assumindo que $a_{ij} \in L^\infty(Q)$.

Lema 7. *Existe um número $\hat{\lambda} > 0$ tal que para qualquer $\lambda \geq \hat{\lambda}$, podemos escolher $s_0(\lambda) > 0$ satisfazendo: existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $s \geq s_0(\lambda)$, a solução $z \in L^2(Q)$ do problema (3.8) satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\begin{aligned} & \iint_Q (s\lambda^2 \bar{\varphi} |\nabla z|^2 + (s\bar{\varphi})^3 \lambda^4 |z|^2) e^{2s\tilde{\alpha}} dx dt \\ & \leq C \left(\|ge^{s\tilde{\alpha}}\|_{L^2(Q)}^2 + \iint_{B \times (0,T)} (s\bar{\varphi})^3 \lambda^4 |z|^2 e^{2s\tilde{\alpha}} dx dt \right), \quad \forall s \geq s_0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

para todo $s \geq s_0(\lambda, d)$, onde a constante $C > 0$ é independente de s e λ .

Demonstração. Ver Yamamoto e Imanouilov (2003) pág. 234. □

Observação 5. *Em Yamamoto e Imanouilov (2003) pág. 234. temos o lema acima apresentado com uma desigualdade mais geral, dada por*

$$\begin{aligned} & \iint_Q ((s\bar{\varphi})^{1+d} |\nabla z|^2 + (s\bar{\varphi})^{3+d}) e^{2s\tilde{\alpha}} dx dt \\ & \leq C(\lambda, d) \left(\|(s\bar{\varphi})^{\frac{d}{2}} ge^{s\tilde{\alpha}}\|_{L^2(Q)}^2 + \iint_{B \times (0,T)} (s\bar{\varphi})^{3+d} |z|^2 e^{2s\tilde{\alpha}} dx dt \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Porém, essa desigualdade faz a constante C depender de λ . Queremos mostrar essa mesma desigualdade sem essa dependência. Para isso, observamos que na demonstração do lema, na página 269, o autor obtém (3.9).

O lema a seguir é um corolário (ou uma releitura) do lema anterior.

Lema 8 (Desigualdade de Carleman). *Seja $B \subset\subset \Omega$ um aberto não vazio. Para todo $m \in \mathbb{R}$, existe constantes positivas s_m , λ_0 , e C_m tal que, para qualquer $s \geq s_m$, $\lambda \geq \lambda_0$, $F \in L^2(Q)$ e todo $z_0 \in L^2(\Omega)$, a solução z para*

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = F & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(x, 0) = z_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

satisfaz

$$I_m(s, \lambda; z) \leq C_m \left(I_{m, \mathcal{B}}(s, \lambda; z) + \iint_Q e^{-2s\alpha} (s\lambda\xi)^{m-3} |F|^2 dx dt \right). \quad (3.11)$$

Demonstração. Pelo Lema 7, existem $\hat{\lambda} > 0$ e $s_0(\lambda) > 0$, onde λ é qualquer $\lambda \geq \hat{\lambda}$ e $C > 0$ tal que para todo $s \geq s_0$, vale (3.9). Como $\mu > 1$ (o que implica $s\mu \geq s_0$) segue que

$$\begin{aligned} & \iint_Q (s\mu\lambda^2 \bar{\varphi} |\nabla z|^2 + (s\mu\bar{\varphi})^3 \lambda^4 |z|^2) e^{2s\mu\tilde{\alpha}} dx dt \\ & \leq C \left(\|Fe^{s\mu\tilde{\alpha}}\|_{L^2(Q)}^2 + \iint_{\mathcal{B} \times (0, T)} (s\mu\bar{\varphi})^3 \lambda^4 |z|^2 e^{2s\mu\tilde{\alpha}} dx dt \right), \quad \forall s \geq s_0/\mu = s_1. \end{aligned}$$

Por (3.7), temos a expressão acima em termos de ξ e α dada por

$$\begin{aligned} & \iint_Q (s\lambda^2 \xi |\nabla z|^2 + (s\xi)^3 \lambda^4 |z|^2) e^{-2s\alpha} dx dt \\ & \leq C \left(\|Fe^{-s\alpha}\|_{L^2(Q)}^2 + \iint_{\mathcal{B} \times (0, T)} (s\xi)^3 \lambda^4 |z|^2 e^{-2s\alpha} dx dt \right), \quad \forall s \geq s_1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vemos assim que para o caso $m = 3$ é válida a desigualdade (3.11).

Agora para o caso $m \neq 3$, consideremos a função

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{t(T-t)}.$$

Naturalmente $\hat{\varphi} \leq \xi$. Por outro lado, pela definição de ξ , existe $C_1 > 0$ constante tal que

$$\xi \leq C_1 \hat{\varphi}.$$

Logo,

$$\hat{\varphi} \leq \xi \leq C_1 \hat{\varphi}. \quad (3.13)$$

Seja $d = m + 3$. Consideremos $w = z(\lambda\hat{\varphi})^{\frac{d}{2}}$. Assim

$$\begin{aligned} \partial_t w &= \lambda^{\frac{d}{2}} \hat{\varphi}^{\frac{d}{2}} \cdot \partial_t z + \lambda^{\frac{d}{2}} z \cdot \partial_t \hat{\varphi}^{\frac{d}{2}} \\ &= \lambda^{\frac{d}{2}} \hat{\varphi}^{\frac{d}{2}} \cdot \partial_t z + \frac{d}{2} \lambda^{\frac{d}{2}} z \hat{\varphi}^{\frac{d}{2}+1} (2t - T) \\ &= \lambda^{\frac{d}{2}} \hat{\varphi}^{\frac{d}{2}} \cdot \partial_t z + \frac{d}{2} w \hat{\varphi} (2t - T). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Também temos que

$$\Delta w = \Delta(z(\lambda\hat{\varphi})^{\frac{d}{2}}) = (\lambda\hat{\varphi})^{\frac{d}{2}} \Delta z. \quad (3.15)$$

Portanto, por (3.14) e (3.15), segue que

$$\begin{aligned} \partial_t w - \Delta w &= (\lambda\hat{\varphi})^{\frac{d}{2}} \cdot \partial_t z + \frac{d}{2} w \hat{\varphi} (2t - T) - (\lambda\hat{\varphi})^{\frac{d}{2}} \Delta z \\ &= (\lambda\hat{\varphi})^{\frac{d}{2}} (\partial_t z - \Delta z) + \frac{d}{2} w \hat{\varphi} (2t - T) \\ &= (\lambda\hat{\varphi}^{\frac{d}{2}}) F + \frac{d}{2} w \hat{\varphi} (2t - T). \end{aligned}$$

Além disso, $w|_{\Sigma} = 0$. Assim, aplicando (3.9) para a equação acima, segue que

$$\begin{aligned} & \iint_Q (s\lambda^2 \xi |\nabla w|^2 + (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2) e^{-2s\alpha} dx dt \\ & \leq C \left(\iint_{\mathcal{B} \times (0, T)} (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2 e^{-2s\alpha} dx dt + \|(\lambda^{\frac{d}{2}} \hat{\varphi}^{\frac{d}{2}} F + \frac{d}{2} w \hat{\varphi}(2t - T)) e^{-s\alpha}\|_{L^2(Q)}^2 \right) \\ & \leq C_2 \left(\iint_{\mathcal{B} \times (0, T)} (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2 e^{-2s\alpha} + \iint_Q |F|^2 (\lambda \hat{\varphi})^d e^{-2s\alpha} + \frac{|d|^2}{2} \iint_Q \hat{\varphi}^2 |w|^2 T^2 e^{-2s\alpha} \right) \end{aligned}$$

Tomemos $s \geq s_1 + T$, o que implica $s^2 \geq T^2$, e seja $C_d = C_2 |d|^2 > 0$. Assim, por (3.13) e pela desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} \iint_Q (s\lambda^2 \xi |\nabla w|^2 + (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2) e^{-2s\alpha} & \leq C_d \left(\iint_{\mathcal{B} \times (0, T)} (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2 e^{-2s\alpha} \right. \\ & \quad \left. + \iint_Q |F|^2 (\lambda \hat{\varphi})^d e^{-2s\alpha} + \frac{1}{2} \iint_Q (s\xi)^2 |w|^2 e^{-2s\alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como

$$\xi = \frac{e^{\lambda(2\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)} \geq \frac{1}{t(T-t)} \geq \frac{1}{\frac{T^2}{4}} = \frac{4}{T^2}$$

vemos que, tomando $s \geq s_1 + T + \frac{T^2}{4} = \sigma(T + T^2)$, obtemos

$$s\xi \geq \frac{T^2}{4} \cdot \frac{4}{T^2} = 1.$$

Logo, $(s\xi)^3 \geq (s\xi)^2$. Então, por (3.16), segue que

$$\begin{aligned} \iint_Q (s\lambda^2 \xi |\nabla w|^2 + (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2) e^{-2s\alpha} & \leq C_d \left(\iint_{\mathcal{B} \times (0, T)} (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2 e^{-2s\alpha} \right. \\ & \quad \left. + \iint_Q |F|^2 (\lambda \hat{\varphi})^d e^{-2s\alpha} + \frac{1}{2} \iint_Q (s\xi)^3 |w|^2 e^{-2s\alpha} \right). \end{aligned}$$

Em seguida, considerando $\lambda > 1$, temos

$$\begin{aligned} \iint_Q (s\lambda^2 \xi |\nabla w|^2 + (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2) e^{-2s\alpha} & \leq C_d \left(\iint_{\mathcal{B} \times (0, T)} (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2 e^{-2s\alpha} \right. \\ & \quad \left. + \iint_Q |F|^2 (\lambda \hat{\varphi})^d e^{-2s\alpha} \right) + \frac{1}{2} \iint_Q (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2 e^{-2s\alpha}. \end{aligned}$$

Subtraindo ambos lados da desigualdade acima pelo último termo do lado direito, chegamos em

$$\begin{aligned} \iint_Q (s\lambda^2 \xi |\nabla w|^2 + (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2) e^{-2s\alpha} & \leq 2C_d \left(\iint_{\mathcal{B} \times (0, T)} (s\xi)^3 \lambda^4 |w|^2 e^{-2s\alpha} \right. \\ & \quad \left. + \iint_Q |F|^2 (\lambda \hat{\varphi})^d e^{-2s\alpha} \right). \end{aligned}$$

Agora, substituindo $w = (\lambda \hat{\varphi})^{\frac{d}{2}} z$ na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_Q (s\lambda^{d+2}\xi\hat{\varphi}^d|\nabla z|^2 + (s\xi)^3\lambda^{d+4}\hat{\varphi}^d|z|^2) e^{-2s\alpha} &\leq C_d \left(\iint_{\mathcal{B} \times (0,T)} (s\xi)^3\lambda^{d+4}\hat{\varphi}^d|z|^2 e^{-2s\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \iint_Q |F|^2(\lambda\xi)^d e^{-2s\alpha} \right). \end{aligned}$$

Substituindo (3.13) na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \iint_Q (s\lambda^{d+2}\xi^{d+1}|\nabla z|^2 + s^3\xi^{d+3}\lambda^{d+4}|z|^2) e^{-2s\alpha} &\leq C_d \left(\iint_{\mathcal{B} \times (0,T)} s^3\xi^{d+3}\lambda^{d+4}|z|^2 e^{-2s\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \iint_Q |F|^2(\lambda\xi)^d e^{-2s\alpha} \right). \end{aligned}$$

Por fim, multipliquemos ambos os lados da desigualdade acima por $s^d > 0$. Relembrando que $m = d - 3$, temos que o lema está provado. □

3.2 A Desigualdade de Observabilidade

O objetivo desta seção é provar a desigualdade (3.72) que será vista mais adiante. Antes, apresentaremos duas proposições auxiliares, cuja demonstração será fundamental para alcançarmos esse resultado.

Proposição 8. *Suponha que $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$ e que ℓ e γ são suficientemente grandes. Então existem constantes positivas C e $s_2 \geq 0$ tais que a solução (φ, θ) de (3.6) satisfaz*

$$I_3(s, \lambda; \varphi) + I_3(s, \lambda; \theta) \leq C \iint_{\omega \times (0,T)} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2 \quad (3.17)$$

para todo $s \geq s_2$, todo $\lambda \geq C$ e todo $\varphi^T \in L^2(Q)$.

Demonstração. Na demonstração deste lema, C denotará uma constante que mudará de linha para linha.

Separemos o sistema adjunto (3.6) nos seguintes sistemas

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + a\varphi = \theta \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(x, T) = \varphi^T(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.18)$$

e

$$\begin{cases} \theta_t - \Delta\theta + c\theta = -\frac{1}{\ell^2}\varphi\mathbf{1}_{\mathcal{O}} + \frac{1}{\gamma^2}\varphi & \text{em } Q, \\ \theta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \theta(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.19)$$

Aplicando a desigualdade (3.11) para os sistemas (3.18) e (3.19) com $m = 3$ e $\mathcal{B} = \omega' \subset \subset \omega_0 := \omega \cap \mathcal{O}_d$ obtemos, usando desigualdades triangular e de Young, que

$$\begin{aligned} I_3(s, \lambda; \varphi) &\leq C \left(I_{3, \omega'}(s, \lambda; \varphi) + \iint_Q e^{-2s\alpha} |\theta \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d} - a\varphi|^2 \right) \\ &\leq C \left(I_{3, \omega'}(s, \lambda; \varphi) + \iint_Q e^{-2s\alpha} (|\theta \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}|^2 + 2|\theta \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}| \cdot |a\varphi| + |a\varphi|^2) \right) \\ &\leq C \left(I_{3, \omega'}(s, \lambda; \varphi) + 2 \iint_Q e^{-2s\alpha} |\theta \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}|^2 + 2 \iint_Q e^{-2s\alpha} |a\varphi|^2 \right). \end{aligned}$$

Como $|a(x, t)| \leq \|a\|_\infty = \sup_Q |a(x, t)|$, da desigualdade acima segue que

$$I_3(s, \lambda; \varphi) \leq C \left(I_{3, \omega'}(s, \lambda; \varphi) + \iint_Q e^{-2s\alpha} |\theta \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha} \|a\|_\infty^2 |\varphi|^2 \right). \quad (3.20)$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$I_3(s, \lambda; \theta) \leq C \left(I_{3, \omega'}(s, \lambda; \theta) + \iint_Q e^{-2s\alpha} \left| -\frac{1}{\ell^2}\varphi + \frac{1}{\gamma^2}\varphi \right|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha} \|c\|_\infty^2 |\varphi|^2 \right). \quad (3.21)$$

Assim, por (3.20) e (3.21), temos

$$\begin{aligned} I_3(s, \lambda; \varphi) + I_3(s, \lambda; \theta) &\leq C \left(I_{3, \omega'}(s, \lambda; \varphi) + I_{3, \omega'}(s, \lambda; \theta) + \iint_Q e^{-2s\alpha} |\theta \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \iint_Q e^{-2s\alpha} \left| -\frac{1}{\ell^2}\varphi + \frac{1}{\gamma^2}\varphi \right|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha} \|a\|_\infty^2 |\varphi|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha} \|c\|_\infty^2 |\varphi|^2 \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Veremos que podemos escolher s suficientemente grande tal que os últimos termos do lado direito da desigualdade sejam absorvidos. Como $\xi(t, x) \geq 4/T^2$, temos que, tomando s suficientemente grande tal que

$$s^3 \geq \frac{T^6}{4^3} (\|a\|_\infty^2 + \|c\|_\infty^2),$$

chegamos a

$$(s\xi)^3 \geq \|a\|_\infty^2 + \|c\|_\infty^2. \quad (3.23)$$

Por (3.23), e tomando $\lambda^4 > 2C$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_3(s, \lambda; \varphi) &\geq \frac{1}{2} \iint_Q e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 \lambda^4 |\varphi|^2 dx dt \\ &\geq C \iint_Q e^{-2s\alpha} (s\xi)^3 |\varphi|^2 dx dt \\ &\geq C \iint_Q e^{-2s\alpha} \|a\|_\infty^2 |\varphi|^2 dx dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

Analogamente,

$$\frac{1}{2}I_3(s, \lambda; \theta) \geq C \iint_Q e^{-2s\alpha} \|c\|_\infty^2 |\theta|^2 dx dt. \quad (3.25)$$

Assim, por (3.22)–(3.25), existe $s_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} I_3(s, \lambda; \varphi) + I_3(s, \lambda; \theta) &\leq C \left(I_{3,\omega'}(s, \lambda; \varphi) + I_{3,\omega'}(s, \lambda; \theta) \right. \\ &\quad \left. + \iint_Q e^{-2s\alpha} |\theta \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d}|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha} \left| -\frac{1}{\ell^2} \varphi + \frac{1}{\gamma^2} \varphi \right|^2 \right) \end{aligned}$$

é válido para todo $s \geq s_1$.

Agora, tomemos λ suficientemente grande tal que

$$I_3(s, \lambda; \varphi) + I_3(s, \lambda; \theta) \leq C \left(I_{3,\omega'}(s, \lambda; \varphi) + I_{3,\omega'}(s, \lambda; \theta) \right) \quad (3.26)$$

O próximo passo é eliminar o termo no lado direito correspondente à θ .

Consideremos a função $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ verificando

$$0 \leq \zeta \leq 1 \text{ em } \Omega, \quad \zeta \equiv 1 \text{ em } \omega', \quad \text{supp } \zeta \subset \omega_0, \quad (3.27)$$

$$\frac{\Delta \zeta}{\zeta^{1/2}} \in L^\infty(\Omega), \quad \frac{\nabla \zeta}{\zeta^{1/2}} \in L^\infty(\Omega)^N. \quad (3.28)$$

Para ver que tal função existe, basta tomar $\zeta = \tilde{\zeta}^4$ com $\tilde{\zeta} \in C_0^\infty(\Omega)$ verificando (3.27).

Seja $u = e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3$. Integrando $u \zeta |\theta|^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d}$ sobre Q e levando em consideração o sistema (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} \iint_Q u \zeta |\theta|^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} &= \iint_Q u \zeta \theta \cdot \theta \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} \\ &= \iint_Q u \zeta \theta (-\varphi_t - \Delta \varphi + a \varphi) \\ &= \iint_Q -\varphi_t u \zeta \theta + \iint_Q -u \zeta \theta \Delta \varphi + \iint_Q a \varphi u \zeta \theta. \end{aligned}$$

Integrando por partes, usando as fórmulas de Green e o fato de que u tende a 0 quando

t tende a 0 ou T , segue que

$$\begin{aligned}
 \iint_Q u\zeta|\theta|^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} &= \iint_Q \varphi \partial_t(u\zeta\theta) + \int_{\Omega} \varphi \theta \zeta u \Big|_0^T + \iint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial(u\theta\zeta)}{\partial \nu} - u\theta\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) \\
 &\quad - \iint_Q \varphi \Delta u \zeta \theta + \iint_Q a \varphi u \zeta \theta \\
 &= \iint_Q u \varphi \zeta \theta_t + \iint_Q u_t \varphi \theta \zeta + \iint_Q a \varphi \theta \zeta u \\
 &\quad - \iint_Q \varphi (u\zeta \Delta \theta + 2\nabla(u\zeta) \cdot \nabla \theta + \theta \Delta(u\zeta)) \\
 &= \iint_Q u \varphi \zeta (\theta_t - \Delta \theta) + \iint_Q \varphi \theta \zeta u_t - 2 \iint_Q \varphi \nabla(u\zeta) \cdot \nabla \theta \\
 &\quad - \iint_Q \varphi \theta \Delta(u\zeta) + \iint_Q a \varphi \theta \zeta u.
 \end{aligned}$$

Pelo sistema (3.6), temos que $\theta_t - \Delta \theta = \frac{1}{\gamma^2} \varphi - \frac{1}{\ell^2} \varphi \mathbb{1}_{\mathcal{O}} - c\theta$, assim

$$\begin{aligned}
 \iint_Q u\zeta|\theta|^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} &= \iint_Q (a - c) \varphi \theta \zeta u + \iint_Q \varphi \theta \zeta u_t - 2 \iint_Q \varphi \nabla(u\zeta) \cdot \nabla \theta \\
 &\quad - \iint_Q \varphi \theta \Delta(u\zeta) + \frac{1}{\gamma^2} \iint_Q |\varphi|^2 u \zeta - \frac{1}{\ell^2} \iint_Q |\varphi|^2 u \zeta \mathbb{1}_{\mathcal{O}}.
 \end{aligned}$$

Como $|\varphi|^2 u \zeta \mathbb{1}_{\mathcal{O}} > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
 \iint_Q u\zeta|\theta|^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} &\leq \iint_Q (a - c) \varphi \theta \zeta u + \iint_Q \varphi \theta \zeta u_t - 2 \iint_Q \varphi \nabla(u\zeta) \cdot \nabla \theta \\
 &\quad - \iint_Q \varphi \theta \Delta(u\zeta) + \frac{1}{\gamma^2} \iint_Q |\varphi|^2 u \zeta \\
 &=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Vamos estimar cada I_i , $1 \leq i \leq 4$. Manteremos I_5 como está. Da desigualdade de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
 \iint_Q (a - c) \varphi \theta u \zeta &= \frac{2\delta_1}{2\delta_1} \iint_Q (a - c) \varphi \theta \sqrt{u\zeta} \sqrt{u\zeta} \\
 &\leq \frac{2\delta_1}{2} \iint_Q u\zeta|\theta|^2 + \frac{1}{4\delta_1} \iint_Q |a - c|^2 u \zeta |\varphi|^2 \\
 &\leq \delta_1 \iint_Q u\zeta|\theta|^2 + \frac{1}{4\delta_1} \|a - c\|_{\infty}^2 2 \iint_Q u\zeta|\varphi|^2
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Para estimar a segunda integral, notemos que

$$\partial_t \xi = \xi \frac{2t - T}{t(T - t)} \leq \xi \frac{T}{t(T - t)} e^{\lambda(2\|\eta^0\|_{\infty} + \eta^0(x))} \leq T \xi^2. \tag{3.31}$$

Também temos que

$$\begin{aligned}\partial_t \alpha &= \frac{e^{4\lambda\|\eta^0\|_\infty}}{t^2(T-t)^2}(2t-T) - \partial_t \xi \\ &\leq \frac{e^{4\lambda\|\eta^0\|_\infty}}{t^2(T-t)^2}T + T\xi^2 \\ &\leq 2T\xi^2.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Então, como $u = e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3$, por (3.31) e (3.32), obtemos

$$\begin{aligned}|\partial_t u| &= |-2e^{-2s\alpha}s^4\lambda^4\xi^3\partial_t \alpha + 3e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^2\partial_t \xi| \\ &\leq 2e^{-2s\alpha}s^4\lambda^4\xi^3\partial_t \alpha + 3e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^2\partial_t \xi \\ &\leq CT(s^4\lambda^4\xi^5e^{-2s\alpha} + s^3\lambda^4\xi^4e^{-2s\alpha}) \\ &\leq CTs^4\lambda^4\xi^5e^{-2s\alpha}.\end{aligned}$$

Logo, pela estimativa acima e usando a desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \iint_Q |\varphi| \cdot |\theta| \cdot |\partial_t u| \zeta \\ &\leq CT \iint_Q s^4\lambda^4\xi^5e^{-2s\alpha} |\varphi| \cdot |\theta| \zeta \\ &\leq \frac{CT\sqrt{2\delta_2}}{\sqrt{2\delta_2}} \iint_Q us\xi^2 |\varphi| \cdot |\theta| \zeta \\ &\leq \delta_2 \iint_Q u\zeta|\theta|^2 + \frac{CT^2}{\delta_2} \iint_Q us^2\xi^4 |\varphi|^2 \zeta.\end{aligned}$$

Como $s^2 \leq T^2$ e $u = e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3$, concluímos que

$$|I_2| \leq \delta_2 \iint_Q u\zeta|\theta|^2 + \frac{C}{\delta_2} \iint_Q s^7\lambda^4\xi^7e^{-2s\alpha} |\varphi|^2 \zeta, \quad \forall \delta_2 > 0.\tag{3.33}$$

A fim de estimar I_3 , vamos encontrar uma estimativa para $\Delta(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3\zeta)$. Primeiro observemos que

$$\begin{aligned}\Delta(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3\zeta) &= \zeta\Delta(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3) + e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3\Delta\zeta \\ &\quad + 2\nabla(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3) \cdot \nabla\zeta.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Vejamos também que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial \eta^0}{\partial x_j} \xi \leq C_j \lambda \xi \quad \text{pois } \eta^0 \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Logo, pela desigualdade acima, temos

$$\begin{cases} |\nabla \xi| = \lambda \xi |\nabla \eta^0| \leq C \lambda \xi, \\ \Delta \xi = \lambda \xi \Delta \eta^0 + \lambda^2 \xi |\nabla \eta^0|^2 \leq C \lambda^2 \xi. \end{cases}\tag{3.35}$$

Tendo em vista a expressão em (3.34), vamos estimar $\Delta(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3)$ e $\nabla(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3)$.
Vejam os que

$$\Delta(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3) = s^3\lambda^4\xi^3\Delta(e^{-2s\alpha}) + 2s^3\lambda^4\nabla(e^{-2s\alpha}) \cdot \nabla(\xi^3) + e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\Delta(\xi^3). \quad (3.36)$$

Vamos estimar cada um dos termos do lado direito usando as desigualdades em (3.35).
Notemos que

$$\frac{\partial(e^{-2s\alpha})}{\partial x_j} = -2s \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} e^{-2s\alpha} = 2s \frac{\partial \xi}{\partial x_j} e^{-2s\alpha}.$$

Assim,

$$\nabla(e^{-2s\alpha}) = 2se^{-2s\alpha}\nabla\xi. \quad (3.37)$$

Derivando novamente na direção $1 \leq j \leq N$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(e^{-2s\alpha})}{\partial x_j^2} &= 2se^{-2s\alpha} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_j^2} + 2s \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \frac{\partial e^{-2s\alpha}}{\partial x_j} \\ &= 2se^{-2s\alpha} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_j^2} + 4s^2 e^{-2s\alpha} \left| \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right|^2. \end{aligned}$$

Pela expressão acima, obtemos

$$\Delta(e^{-2s\alpha}) = 2se^{-2s\alpha}\Delta\xi + 4s^2e^{-2s\alpha}|\nabla\xi|^2. \quad (3.38)$$

Agora, para obter uma expressão para $\nabla(\xi^3)$ e $\Delta(\xi^3)$, primeiro vejamos que

$$\frac{\partial(\xi^3)}{\partial x_j} = 3\xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 3\lambda\xi^3 \frac{\partial \eta^0}{\partial x_j}.$$

Então, pela expressão acima, segue que

$$\nabla(\xi^3) = 3\lambda\xi^3\nabla\eta^0, \quad (3.39)$$

e

$$\Delta(\xi^3) = 9\lambda^2\xi^3|\nabla\eta^0|^2 + 3\lambda\xi^3\Delta\eta^0. \quad (3.40)$$

Portanto, substituindo (3.37)–(3.40) em (3.36), temos

$$\begin{aligned} \Delta(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3) &= s^3\lambda^4\xi^3(2se^{-2s\alpha}\Delta\xi + 4s^2e^{-2s\alpha}|\nabla\xi|^2) \\ &+ 2s^3\lambda^4(2se^{-2s\alpha}\nabla\xi) \cdot (3\lambda\xi^3\nabla\eta^0) + e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4(9\lambda^2\xi^3|\nabla\eta^0|^2 + 3\lambda\xi^3\Delta\eta^0). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Por (3.35) e pela expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3) &= 2s^4\lambda^5\xi^4e^{-2s\alpha}\Delta\eta^0 + 2s^4\lambda^6\xi^4e^{-2s\alpha}|\eta^0|^2 + 4s^5\lambda^6\xi^5|\nabla\eta^0|^2 \\ &+ 12s^4\lambda^6\xi^4e^{-2s\alpha}|\nabla\eta^0|^2 + 9s^3\lambda^6\xi^3e^{-2s\alpha}|\nabla\eta^0|^2 + 3s^3\lambda^4\xi^3e^{-2s\alpha}\Delta\eta^0. \end{aligned}$$

Já que $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$, existe $C > 0$ tal que

$$C \geq |\nabla^0|^2 + |\Delta \eta^0|.$$

Então, pela expressão de $\Delta(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3)$ obtida anteriormente, segue que

$$\begin{aligned} \Delta(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3) &\leq Ce^{-2s\alpha}(s^4\lambda^5\xi^4 + s^4\lambda^6\xi^4 + s^5\lambda^6\xi^5 + s^4\lambda^6\xi^4 \\ &\quad + s^3\lambda^6\xi^3 + s^3\lambda^4\xi^3) \\ &\leq Ce^{-2s\alpha}s^5\lambda^6\xi^5. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Agora vejamos que

$$\begin{aligned} \nabla(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3) &= s^3\lambda^4\nabla(e^{-2s\alpha}\xi^3) \\ &= s^3\lambda^4(\nabla(\xi^3)e^{-2s\alpha} + \xi^3\nabla(e^{-2s\alpha})). \end{aligned}$$

Pela expressão anterior, por (3.37) e (3.39), temos

$$\begin{aligned} |\nabla(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3)| &= |s^3\lambda^4(\xi^3(2s\lambda e^{-2s\alpha}\xi\nabla\eta^0) + e^{-2s\alpha}3\lambda\xi^3\nabla\eta^0)| \\ &= 2s^4\lambda^5\xi^4e^{-2s\alpha}|\nabla\eta^0| + 3s^3\lambda^4\xi^3e^{-2s\alpha}|\nabla\eta^0|, \end{aligned}$$

isto é

$$|\nabla(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3)| \leq Ce^{-2s\alpha}s^4\lambda^5\xi^4. \quad (3.43)$$

Então, de (3.34)–(3.43) e usando (3.28), obtemos

$$\begin{aligned} |\Delta(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3\zeta)| &\leq \zeta|\Delta(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3)| + e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3|\Delta\zeta| \\ &\quad + 2|\nabla(e^{-2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3)| \cdot |\nabla\zeta| \\ &\leq Ce^{-2s\alpha}(s^5\lambda^6\xi^5\zeta + s^3\lambda^4\xi^3\zeta^{1/2} + s^4\lambda^5\xi^4\zeta^{1/2}). \end{aligned}$$

Logo, pela expressão acima, segue que

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \iint_Q |\varphi| \cdot |\theta| e^{-2s\alpha} s^5 \lambda^6 \xi^5 \zeta + C \iint_Q |\varphi| |\theta| e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 \zeta^{1/2} \\ &\quad + C \iint_Q |\varphi| |\theta| e^{-2s\alpha} s^4 \lambda^5 \xi^4 \zeta^{1/2} \\ &= C \iint_Q |\varphi| |\theta| u s^2 \lambda^2 \xi^2 \zeta + C \iint_Q |\varphi| |\theta| u \zeta^{1/2} + C \iint_Q |\varphi| |\theta| u s \lambda \xi \zeta^{1/2}. \end{aligned}$$

Como (3.27), $\text{supp } \zeta \subset \omega_0$, ou seja, $\zeta^{1/2}|_{\Omega/\omega_0} = 0$, obtemos, usando a desigualdade de

Hölder, que

$$\begin{aligned}
 |I_3| &\leq C \iint_Q |\varphi| |\theta| u s^2 \lambda^2 \xi^2 \zeta + C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} |\varphi| |\theta| u \zeta^{1/2} \\
 &\quad + C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} |\varphi| |\theta| u s \lambda \xi \zeta^{1/2} \\
 &\leq \frac{2\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{3}} \left(\iint_Q u \zeta |\theta|^2 \right)^{1/2} \left(C \iint_Q u \zeta s^4 \lambda^4 \xi^4 |\varphi|^2 \right)^{1/2} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\delta_3}} \\
 &\quad + \frac{2\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{3}} \left(\iint_Q u \zeta |\theta|^2 \right)^{1/2} \left(C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} u |\varphi|^2 \right)^{1/2} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\delta_3}} \\
 &\quad + \frac{2\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{3}} \left(\iint_Q u \zeta |\theta|^2 \right)^{1/2} \left(C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} u s^2 \lambda^2 \xi^2 |\varphi|^2 \right)^{1/2} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\delta_3}},
 \end{aligned}$$

para todo $\delta_3 > 0$. Usando a desigualdade de Young na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 |I_3| &\leq \delta_3 \iint_Q u \zeta |\theta|^2 + C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2 \\
 &\quad + C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 + C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^5 \lambda^6 \xi^5 |\varphi|^2.
 \end{aligned}$$

Como $\xi \geq 4/T^2$ e $s \geq T^2/4$, segue que $1 \leq s\xi$. Assim, concluímos que

$$|I_3| \leq \delta_3 \iint_Q u \zeta |\theta|^2 + \frac{C}{\delta_3} \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2. \quad (3.44)$$

Agora, vamos estimar I_4 . Vejamos que, por (3.43), vale

$$\begin{aligned}
 |I_4| &\leq 2 \iint_Q |\varphi| |\nabla(u\zeta) \cdot \nabla\theta| \\
 &\leq C \iint_Q |\varphi| |\nabla\theta| |\zeta \nabla u + u \nabla \zeta| \\
 &\leq C \iint_Q |\varphi| |\nabla\theta| (e^{-2s\alpha} s^4 \lambda^5 \xi^4 \zeta + e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 \zeta^{1/2}) \\
 &= C \iint_Q e^{-2s\alpha} s \lambda^2 \xi |\nabla\theta| s^2 \lambda^2 \xi^2 |\varphi| \zeta^{1/2} + C \iint_Q e^{-2s\alpha} s \lambda^2 \xi |\nabla\theta| s^3 \lambda^3 \xi^3 |\varphi| \zeta.
 \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder na ultima expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
 |I_4| &\leq \sqrt{\varepsilon} \left(\iint_Q e^{-2s\alpha} s \lambda^2 \xi |\nabla\theta|^2 \right)^{1/2} \left(C \iint_Q e^{-2s\alpha} s^5 \lambda^6 \xi^5 |\varphi|^2 \zeta^2 \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\
 &\quad + \sqrt{\varepsilon} \left(\iint_Q e^{-2s\alpha} s \lambda^2 \xi |\nabla\theta|^2 \right)^{1/2} \left(C \iint_Q e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2 \zeta^2 \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},
 \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Usando mais uma vez que $1 \leq s\xi$ e a desigualdade de Young, obtemos

$$|I_4| \leq \varepsilon \iint_Q e^{-2s\alpha} s \lambda^2 \xi |\nabla\theta|^2 + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2. \quad (3.45)$$

Agora, tomemos $\delta_i = \frac{1}{6}$ com $i = \{1, 2, 3\}$ e $\varepsilon = \frac{1}{4\tilde{C}}$, onde $\tilde{C}$ é a constante em (3.26). Substituindo (3.30), (3.33), (3.44) e (3.45) em (3.29), deduzimos que

$$\begin{aligned} & \iint_Q e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\theta|^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} \zeta \leq \frac{1}{2} \iint_Q u \zeta |\theta|^2 + \frac{6}{4} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|_\infty^2 \iint_Q u \zeta |\varphi|^2 \\ & + 6C \iint_Q e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^4 \xi^7 \zeta |\varphi|^2 + 6C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^5 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2 + \frac{1}{4\tilde{C}} \iint_Q e^{-2s\alpha} s \lambda^2 \xi |\nabla \theta|^2 \\ & + C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \iint_Q e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \iint_Q e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\theta|^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} \leq C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \left(\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|_\infty^2 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 + s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2 \right) \\ & \quad + \frac{1}{2\tilde{C}} \iint_Q e^{-2s\alpha} s \lambda^2 \xi |\nabla \theta|^2 + \frac{C}{\gamma^2} \iint_Q e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Voltemos à expressão (3.26) e observemos que

$$I_3(s, \lambda; \varphi) + I_3(s, \lambda; \theta) \leq \tilde{C} \left[\iint_{\omega' \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 + \iint_{\omega' \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\theta|^2 \right].$$

Como $\omega' \subset \omega \cap \mathcal{O}_d \subset Q$, temos

$$\iint_{\omega' \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\theta|^2 \leq \iint_Q e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\theta|^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d}, \quad (3.47)$$

e

$$\iint_{\omega' \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 \leq \iint_Q e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2. \quad (3.48)$$

Substituindo (3.47) e (3.48) em (3.26), temos

$$I_3(s, \lambda; \varphi) + I_3(s, \lambda; \theta) \leq \tilde{C} \left(\iint_Q s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 e^{-2s\alpha} + \iint_Q e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\theta|^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} \right).$$

Substituindo (3.46) na expressão acima, segue que

$$\begin{aligned} I_3(s, \lambda; \varphi) + I_3(s, \lambda; \theta) & \leq \tilde{C} \left(C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \left(\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|_\infty^2 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 + s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2\tilde{C}} \iint_Q e^{-2s\alpha} s \lambda^2 \xi |\nabla \theta|^2 + \frac{C}{\gamma^2} \iint_Q e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 \right) \\ & = C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \left(\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|_\infty^2 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 + s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2 \right) \\ & \quad + \frac{C}{\gamma^2} \iint_Q e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 + \frac{1}{2} \iint_Q e^{-2s\alpha} s \lambda^2 \xi |\nabla \theta|^2 \end{aligned}$$

Subtraindo o último termo em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} I_3(s, \lambda; \varphi) + I_3(s, \lambda; \theta) & \leq C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \left(\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|_\infty^2 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 + s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2 \right) \\ & \quad + \frac{C}{\gamma^2} \iint_Q e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2. \end{aligned}$$

Tomando $s \geq CT^2\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|_\infty^{1/2}$, a desigualdade acima se torna

$$\begin{aligned} I_3(s, \lambda; \varphi) + I_3(s, \lambda; \theta) &\leq C \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2 \\ &+ \frac{C}{\gamma^2} \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} s^7 \lambda^8 \xi^7 |\varphi|^2, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\forall s \geq s_2 = s_2(T + T^2 + T^2(\|\mathbf{a}\|_\infty^{2/3} + \|\mathbf{c}\|_\infty^{2/3} + \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|_\infty^{1/2})). \quad (3.50)$$

Tomando γ suficientemente grande, podemos absorver o último termo do lado direito. $\square$

Agora, vamos introduzir novas funções antes de enunciarmos o próximo resultado. Consideremos

$$l(t) = \begin{cases} \frac{T^2}{4}, & \text{se } 0 \leq t \leq T/2, \\ t(T-t), & \text{se } T/2 \leq t \leq T, \end{cases}$$

e as funções

$$\beta(x, t) = \frac{e^{4\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{l(t)}, \quad \phi(x, t) = \frac{e^{\lambda(2\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{l(t)}$$

$$\beta^*(t) = \max_{x \in \Omega} \beta(x, t), \quad \phi^*(t) = \min_{x \in \Omega} \phi(x, t).$$

Proposição 9. *Sejam s e λ como na Proposição 8 e ℓ , γ grandes o suficiente. Então existe uma constante positiva C , dependendo de Ω , ω , $\mathcal{O}_d$, s , λ , $\|\mathbf{a}\|_\infty$, $\|\mathbf{c}\|_\infty$ e T , tal que*

$$\begin{aligned} \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \iint_Q e^{-2s\beta^*} (\phi^*)^3 |\varphi|^2 dx dt + \iint_Q e^{-2s\beta^*} (\phi^*)^3 |\theta|^2 dx dt \\ \leq C \iint_{\omega \times (0, T)} e^{-2s\beta} \phi^7 |\varphi|^2 dx dt \end{aligned} \quad (3.51)$$

para todo $\varphi^T \in L^2(\Omega)$, onde (φ, θ) é a solução de (3.6).

Demonstração. Sejam s e λ fixos como na Proposição 8. Vamos começar por mostrar que podemos reescrever parte da desigualdade (3.17) em termos de β e ϕ ao invés de α e ξ . Primeiro, vamos analisar as funções introduzidas anteriormente no intervalo $[0, T/2]$. Vejamos que nesse intervalo, ϕ e β são limitadas por constantes que dependem de λ e T , a saber

$$\frac{e^{2\lambda\|\eta^0\|_\infty}}{T^2/4} \leq \phi \leq \frac{e^{3\lambda\|\eta^0\|_\infty}}{T^2/4},$$

e

$$\frac{e^{4\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{3\lambda\|\eta^0\|_\infty}}{T^2/4} \leq \beta \leq \frac{e^{4\lambda\|\eta^0\|_\infty}}{T^2/4},$$

para todo $t \in [0, T/2]$. Assim, existe $C_1 = C_1(s, \lambda, T) > 0$ tal que

$$e^{-2s\beta} \phi^7 \geq C_1, \text{ em } [0, T/2]. \quad (3.52)$$

Por outro lado, sabemos que existe $C_2 > 0$ tal que $e^{-r} \leq C_2 \frac{1}{r^7}$, para todo $r > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} e^{-2s\alpha} \xi^7 &\leq C_2 \frac{1}{(2s\alpha)^7} \xi^7 \\ &= C_2 \frac{t^7 (T-t)^7}{e^{4\lambda \|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}} \cdot \frac{e^{7\lambda(2\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t^7 (T-t)^7} \\ &\leq C_2 \frac{e^{21\lambda \|\eta^0\|_\infty}}{e^{4\lambda \|\eta^0\|_\infty}}, \end{aligned}$$

isto é,

$$e^{-2s\alpha} \xi^7 \leq C_3, \text{ em } [0, T/2]. \quad (3.53)$$

Logo, fazendo $C_4 = C_3/C_1$, por (3.52) e (3.53) obtemos que

$$e^{-2s\alpha} \xi^7 \leq C_4 e^{-2s\beta} \phi^7 \text{ em } [0, T/2],$$

e, portanto,

$$\int_0^{T/2} \int_\omega e^{-2s\alpha} \xi^7 |\varphi|^2 \leq C_4 \int_0^{T/2} \int_\omega e^{-2s\beta} \phi^7 |\varphi|^2. \quad (3.54)$$

Agora, no intervalo $[T/2, T]$, temos que $\alpha = \beta$ e $\xi = \phi$. Assim,

$$\begin{aligned} &\int_{T/2}^T \int_\Omega e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 + \int_{T/2}^T \int_\Omega e^{-2s\alpha} \xi^3 |\theta|^2 \\ &= \int_{T/2}^T \int_\Omega e^{-2s\beta} \phi^3 |\varphi|^2 + \int_{T/2}^T \int_\Omega e^{-2s\beta} \phi^3 |\theta|^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Dessa forma, podemos agora reescrever o lado direito da desigualdade (3.17) em termos de β e ϕ , pois, por (3.54), (3.55), temos que

$$\begin{aligned} \iint_{\omega \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^7 |\varphi|^2 &= \int_0^{T/2} \int_\omega e^{-2s\alpha} \xi^7 |\varphi|^2 + \int_{T/2}^T \int_\omega e^{-2s\alpha} \xi^7 |\varphi|^2 \\ &\leq C_4 \iint_{\omega \times (0, T)} e^{-2s\beta} \phi^7 |\varphi|^2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

De (3.17), (3.55) e (3.56) chegamos a

$$\int_{T/2}^T \int_\Omega e^{-2s\beta} \phi^3 |\varphi|^2 + \int_{T/2}^T \int_\Omega e^{-2s\beta} \phi^3 |\theta|^2 \leq C_5 \iint_{\omega \times (0, T)} e^{-2s\beta} \phi^7 |\varphi|^2. \quad (3.57)$$

Para obter uma desigualdade que envolve também o domínio $\Omega \times (0, T)$, usaremos a estimativa clássica de energia para o sistema (3.6). Antes disso, consideremos uma função $\eta \in C^1([0, T])$ tal que

$$\eta = 1 \text{ em } [0, T/2], \quad \eta = 0 \text{ em } \left[\frac{3T}{4}, T\right], \quad |\eta'(t)| \leq \frac{C}{T}.$$

Consideremos também a função $k(x, t) = \eta(T - t)\varphi(x, T - t)$ e observemos que

$$k_t = -\eta'\varphi - \eta\varphi_t, \quad \Delta k = \eta\Delta\varphi.$$

Logo,

$$\begin{aligned} k_t - \Delta k + ak &= -\eta'\varphi - \eta\varphi_t - \eta\Delta\varphi + a\eta\varphi \\ &= -\eta'\varphi + \eta\theta 1_{\mathcal{O}_d} \quad \text{em } Q, \end{aligned}$$

$$k|_{\Sigma} = 0,$$

$$k(x, 0) = \eta(T)\varphi(T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Aplicando a estimativa clássica de energia (18) para o sistema acima, temos

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|k\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq C \left(\|\eta\theta\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|\eta'\varphi\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right).$$

Como $\eta(0) = 1$ e $\|\eta(0)\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|k(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|k\|_{L^2(\Omega)}^2$, segue pela expressão acima que

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\eta\varphi\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq C \left(\|\eta\theta\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|\eta'\varphi\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right). \quad (3.58)$$

Vamos, em seguida, modificar o intervalo de integração de alguns dos termos da expressão acima. Primeiro observemos, por definição, que $\eta|_{[0, T/2]}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \|\eta\varphi\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 &= \int_0^T \|\eta\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \\ &\geq \int_0^{T/2} |\eta|^2 \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \\ &= \int_0^{T/2} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|\varphi\|_{L^2(0, T/2; H_0^1(\Omega))}^2 \leq \|\eta\varphi\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2. \quad (3.59)$$

Além disso, temos

$$\|\eta\theta\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 = \int_0^T \eta^2 \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^{3T/4} \eta^2 \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\theta\|_{L^2(0,3T/4;L^2(\Omega))}^2 \quad (3.60)$$

e, como η' é nula no exceto intervalo $[T/2, 3T/4]$, também temos que

$$\begin{aligned} \|\eta'\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &= \int_0^T |\eta'|^2 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int_{T/2}^{3T/4} |\eta'|^2 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \int_{T/2}^{3T/4} \frac{C^2}{T^2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{C^2}{T^2} \|\varphi\|_{L^2(T/2,3T/4;L^2(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Substituindo (3.59)–(3.61) em (3.58), segue que

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(0,T/2;H_0^1(\Omega))}^2 \leq C \left(\|\theta\|_{L^2(0,3T/4;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{T^2} \|\varphi\|_{L^2(T/2,3T/4;L^2(\Omega))}^2 \right).$$

Como $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2$, obtemos, ao adicionar $\|\theta\|_{L^2(0,T/2;L^2(\Omega))}^2$ em ambos os lados da expressão acima, que

$$\begin{aligned} &\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(0,T/2;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\theta\|_{L^2(0,T/2;L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq C \left(\|\theta\|_{L^2(0,3T/4;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{T^2} \|\varphi\|_{L^2(T/2,3T/4;L^2(\Omega))}^2 + \|\theta\|_{L^2(0,T/2;L^2(\Omega))}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Vejamos que o termo com θ pode ser absorvido pelo lado direito da desigualdade (3.62). Usando a estimativa de energia (em $\Omega \times (0, T/2)$ para a segunda equação de (3.6)), temos que

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{L^2(0,T/2;L^2(\Omega))}^2 &\leq C \left(\frac{1}{\gamma^4} \|\varphi\|_{L^2(0,T/2;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{\ell^4} \|\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))}^2 \right) \\ &\leq \frac{C}{\min\{\gamma^4, \ell^4\}} \|\varphi\|_{L^2(0,T/2;L^2(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Substituindo (3.63) em (3.62), temos

$$\begin{aligned} &\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(0,T/2;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\theta\|_{L^2(0,T/2;L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq C \left(\|\theta\|_{L^2(T/2,3T/4;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{T^2} \|\varphi\|_{L^2(T/2,3T/4;L^2(\Omega))}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Como $-2s\beta \leq 0$ e ϕ é limitada em $[0, T/2]$, segue que

$$e^{-2s\beta} \phi^3 |\varphi|^2 \leq C |\varphi|^2 \quad \text{em } [0, T/2]. \quad (3.65)$$

Analogamente,

$$e^{-2s\beta} \phi^3 |\theta|^2 \leq C |\theta|^2 \quad \text{em } [0, T/2]. \quad (3.66)$$

Substituindo (3.65) e (3.66) em (3.64), temos que

$$\begin{aligned} & \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{T/2} \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\varphi|^2 + \int_0^{T/2} \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\theta|^2 \\ & \leq C \left(\|\theta\|_{L^2(T/2, 3T/4; L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{T^2} \|\varphi\|_{L^2(T/2, 3T/4; L^2(\Omega))}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Por outro lado, em $[T/2, 3T/4]$ temos

$$\beta \leq \frac{e^{4\lambda\|\eta^0\|_{\infty}}}{l(t)} \leq \frac{e^{4\lambda\|\eta^0\|_{\infty}}}{l(3T/4)} =: C,$$

isto é

$$e^{-2s\beta} \geq C \quad \text{em } [T/2, 3T/4]. \quad (3.68)$$

Também temos em $[T/2, 3T/4]$ que

$$\phi^3 \geq \frac{e^{6\lambda\|\eta^0\|_{\infty}}}{l(t)^3} \geq \frac{4^3 e^{6\lambda\|\eta^0\|_{\infty}}}{T^6}. \quad (3.69)$$

Logo, por (3.68) e (3.69), segue que

$$\int_{T/2}^{3T/4} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \leq C \int_{T/2}^{3T/4} \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\varphi|^2. \quad (3.70)$$

Analogamente,

$$\int_{T/2}^{3T/4} \int_{\Omega} |\theta|^2 \leq C \int_{T/2}^{3T/4} \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\theta|^2. \quad (3.71)$$

Portanto, por (3.57), (3.67), (3.70) e (3.71), obtemos

$$\begin{aligned} & \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{T/2} \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\varphi|^2 + \int_0^{T/2} \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\theta|^2 \\ & \leq C \left(\int_{T/2}^{3T/4} \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\varphi|^2 + \int_{T/2}^{3T/4} \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\theta|^2 \right) \\ & \leq C \iint_{\omega \times (0, T)} e^{-2s\beta} \phi^7 |\varphi|^2. \end{aligned}$$

Mais uma vez por (3.57), e pela desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} & \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{T/2} \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\varphi|^2 + \int_0^{T/2} \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\theta|^2 \\ & + \int_{T/2}^T \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\varphi|^2 + \int_{T/2}^T \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\theta|^2 \\ & \leq C \iint_{\omega \times (0, T)} e^{-2s\beta} \phi^7 |\varphi|^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\varphi|^2 + \int_0^T \int_{\Omega} e^{-2s\beta} \phi^3 |\theta|^2 \leq C \iint_{\omega \times (0,T)} e^{-2s\beta} \phi^7 |\varphi|^2.$$

Pela definição de β^* e ϕ^* e a desigualdade acima, segue o resultado. $\square$

Proposição 10 (Desigualdade de Observabilidade). *Sob as hipóteses da Proposição 8, existem uma constante $C > 0$, dependendo apenas de Ω , ω , $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_d$, $\|a\|_{\infty}$, $\|c\|_{\infty}$ e T , e uma função peso $\rho = \rho(t)$ explodindo em $t = T$, dependendo apenas de Ω , ω , $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_d$, $\|a\|_{\infty}$, $\|c\|_{\infty}$ e T , tais que, para todo $\varphi^T \in L^2(\Omega)$, a solução (φ, θ) de (3.6) satisfaz*

$$\int_{\Omega} |\varphi(0)|^2 dx + \iint_Q \rho^{-2} |\theta|^2 dx dt \leq C \iint_{\omega \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt. \quad (3.72)$$

Demonstração. Consideremos $s = s_2$ como em (3.50) e definamos $\rho = e^{s\beta^*}$. Assim, temos que

$$\rho(t) = e^{s\beta^*(t)} \rightarrow +\infty \text{ quando } t \rightarrow T.$$

Em seguida, notemos que, como $\beta \geq \frac{e^{4\lambda\|\eta^0\|_{\infty} - 3\lambda\|\eta^0\|_{\infty}}}{l(t)} = \frac{C_1(\lambda)}{l(t)}$, existe $C > 0$ tal que

$$e^{-2s\beta} \leq e^{-2C_1/l(t)} \leq C \cdot l(t)^7.$$

Por outro lado, $\phi \leq \frac{e^{3\lambda\|\eta^0\|_{\infty}}}{l(t)}$. Logo, pela expressão acima, segue que

$$e^{-2s\beta} \phi^7 \leq C_1 \frac{l(t)^7}{l(t)^7} = C_1. \quad (3.73)$$

Portanto, de (3.51) e (3.73), temos que

$$\int_{\Omega} |\varphi(0)|^2 dx + \iint_Q \rho^{-2} (\phi^*)^3 |\theta|^2 dx dt \leq C \iint_{\omega \times (0,T)} |\varphi|^2. \quad (3.74)$$

Finalmente, observemos que, pela definição de ϕ^* , segue que

$$(\phi^*)^3 = \frac{C_2(\lambda)}{l(t)^3} \geq \frac{C_2(\lambda)}{(T^2/4)^3} = C. \quad (3.75)$$

Logo, substituindo (3.75) em (3.74), conseguimos obter

$$\int_{\Omega} |\varphi(0)|^2 dx + \iint_Q \rho^{-2} |\theta|^2 dx dt \leq C \iint_{\omega \times (0,T)} |\varphi|^2.$$

$\square$

Capítulo 4

Controlabilidade

Este capítulo será dedicado às demonstrações dos Teoremas 20 e 21. Controlar um sistema significa influenciar seu comportamento ao longo do tempo por meio de ações ou comandos, chamados de controles, de forma a atingir certos objetivos desejados. O objetivo em questão é levar a solução y de (2.97) no tempo final T para $y^*(T)$, isto é, achar um controle $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que a solução correspondente satisfaça $y(T) = y^*(T)$. Porém, como vimos no Capítulo 3, isto é equivalente a levar a solução a 0 no tempo final T , via mudança de variável.

4.1 Caso Semilinear

Esta seção é dedicada a demonstrar o Teorema 20. Primeiro, vamos mostrar o controle aproximado mencionado na Proposição 11 para o caso linearizado. Para isso, definiremos um funcional cujo mínimo será o controle desejado. Em seguida, utilizaremos um argumento de ponto fixo para mostrar o controle aproximado para o caso semilinear. E, por fim, na passagem de limites, obteremos o controle nulo que, por sua vez, implicará controle exato às trajetórias.

Dados $a, c \in L^\infty(Q)$, $z_0 \in L^2(Q)$ e $z_d \in L^2(\mathcal{O}_d \times (0, T))$, consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + az = h\mathbb{1}_\omega - \frac{1}{\ell^2}q\mathbb{1}_\mathcal{O} + \frac{1}{\gamma^2}q & \text{em } Q, \\ -q_t - \Delta q + cq = (z - z_d)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ z = q = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(x, 0) = z_0(x), q(x, T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

com o sistema adjunto correspondente sendo (3.6). Observemos que o sistema acima é a versão linearizada do sistema (3.5). Primeiro, vamos mostrar a seguinte proposição:

Proposição 11. *Assumamos que $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$. Seja $C > 0$ e ρ como na Proposição 4. Para todo $\varepsilon > 0$, $z_0 \in L^2(\Omega)$ e $z_d \in L^2(\mathcal{O}_d \times (0, T))$ tais que (1.11) é satisfeita, existe um controle líder $h_\varepsilon \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que a solução de (4.1) associada a $(z_\varepsilon, q_\varepsilon)$ satisfaz*

$$\|z_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \quad (4.2)$$

Mais ainda, os controles $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ são uniformemente limitados em $L^2(\omega \times (0, T))$, isto é,

$$\|h_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq \sqrt{C} (\|z_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho z_d\|_{L^2(Q)}), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.3)$$

Demonstração. Consideremos o funcional dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(\varphi^\top) = & \frac{1}{2} \iint_{\omega \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt + \varepsilon \|\varphi^\top\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} z_0 \varphi(0) dx \\ & - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} \theta z_d dx dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

Vamos mostrar que tal funcional possui um mínimo único. Para isso, vamos verificar que $\mathcal{F}_\varepsilon$ é contínuo, estritamente convexo e coercivo (Teorema 4).

Contínuo: Advém da continuidade da norma e do produto interno em $L^2(Q)$.

Estritamente Convexo: Sejam $\varphi_1^\top, \varphi_2^\top \in L^2(\Omega)$, $0 < r < 1$ e (φ_i, θ_i) solução de (3.6) associado a φ_i , $i = 1, 2$. Como (3.6) é linear, temos que $(\bar{\varphi}, \bar{\theta}) = ((1-r)\varphi_1 + r\varphi_2, (1-r)\theta_1 + r\theta_2)$ é solução de (3.6) associada a $\bar{\varphi}^\top = (1-r)\varphi_1^\top + r\varphi_2^\top \in L^2(\Omega)$. Lembrando que a função $f(x) = x^2$ é estritamente convexa, isto é,

$$|(1-r)\varphi_1 + r\varphi_2|^2 < (1-r)|\varphi_1|^2 + r|\varphi_2|^2,$$

podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon((1-r)\varphi_1^\top + r\varphi_2^\top) = & \frac{1}{2} \iint_{\omega \times (0, T)} |(1-r)\varphi_1 + r\varphi_2|^2 + \varepsilon \|(1-r)\varphi_1^\top + r\varphi_2^\top\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \int_{\Omega} z_0((1-r)\varphi_1(0) + r\varphi_2(0)) - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} ((1-r)\theta_1 + r\theta_2) z_d \\ & < \frac{1-r}{2} \iint_{\omega \times (0, T)} |\varphi_1|^2 + \frac{r}{2} \iint_{\omega \times (0, T)} |\varphi_2|^2 + \varepsilon(1-r)\|\varphi_1^\top\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \varepsilon r\|\varphi_2^\top\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} z_0((1-r)\varphi_1(0) + r\varphi_2(0)) \\ & - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} ((1-r)\theta_1 + r\theta_2) z_d, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{F}_\varepsilon((1-r)\varphi_1^T + r\varphi_2^T) < (1-r)\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi_1^T) + r\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi_2^T).$$

Coercivo: Como

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi^T) \geq \frac{1}{2} \iint_{\omega \times (0,T)} |\varphi|^2 dxdt + \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(\Omega)} - \int_{\Omega} |z_0| \cdot |\varphi(0)| - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0,T)} \frac{\rho}{\rho} \theta z_d,$$

deduzimos, usando a condição (1.11), que $(\rho z_d)^2$ é integrável em $\mathcal{O}_d \times (0, T)$. Assim, usando a desigualdade de Young no lado direito da desigualdade acima segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(\varphi^T) &\geq \frac{1}{2} \iint_{\omega \times (0,T)} |\varphi|^2 dxdt + \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(\Omega)} - C \int_{\Omega} |z_0|^2 - \frac{1}{4C} \int_{\Omega} |\varphi(0)|^2 \\ &\quad - C \iint_{\mathcal{O}_d \times (0,T)} \rho^2 z_d^2 - \frac{1}{4C} \iint_Q \rho^{-2} |\theta|^2, \end{aligned}$$

onde $C > 0$ é a constante da Proposição 10. Usando a desigualdade de observabilidade (3.72) na expressão anterior, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(\varphi^T) &\geq \frac{1}{2} \iint_{\omega \times (0,T)} |\varphi|^2 dxdt + \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{4} \iint_{\omega \times (0,T)} |\varphi|^2 \\ &\quad - C \left(\|z_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho z_d\|_{L^2(\mathcal{O}_d \times (0,T))}^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \iint_{\omega \times (0,T)} |\varphi|^2 dxdt + \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(\Omega)} - C \left(\|z_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho z_d\|_{L^2(\mathcal{O}_d \times (0,T))}^2 \right). \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi^T) \rightarrow +\infty$ quando $\|\varphi^T\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow +\infty$, isto é $\mathcal{F}_\varepsilon$ é coercivo.

Sendo contínuo, estritamente convexo e coercivo então, pelo Teorema 4, temos que $\mathcal{F}_\varepsilon$ possui um único mínimo, que denotaremos por $\varphi_\varepsilon^T \in L^2(\Omega)$. Quando $\varphi_\varepsilon^T \neq 0$, temos

$$\mathcal{F}'_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^T) \varphi^T = 0, \quad \forall \varphi^T \in L^2(\Omega)$$

isto é,

$$\iint_{\omega \times (0,T)} \varphi_\varepsilon \varphi + \varepsilon \left(\frac{\varphi_\varepsilon^T}{\|\varphi_\varepsilon^T\|}, \varphi^T \right) + \int_{\Omega} z_0 \varphi(0) - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0,T)} \theta_\varepsilon z_d = 0, \quad (4.5)$$

para todo $\varphi^T \in L^2(\Omega)$, onde $(\varphi_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ é solução de (3.6) associada à φ_ε^T .

Isolando o termo com produto interno em (4.5) e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, é possível obter que

$$\iint_{\omega \times (0,T)} \varphi_\varepsilon \varphi + \int_{\Omega} z_0 \varphi(0) - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0,T)} \theta_\varepsilon z_d \leq \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.6)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Fubini, segue que

$$\begin{aligned} (z_\varepsilon(T), \varphi^T)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} z_\varepsilon(T) \varphi^T dx \\ &= \int_{\Omega} z_\varepsilon(0) \varphi(0) dx + \int_0^T \int_{\Omega} (z_\varepsilon \varphi)_t dxdt \\ &= \int_{\Omega} z_\varepsilon(0) \varphi(0) dx + \iint_Q z_{\varepsilon,t} \varphi dxdt + \iint_Q z_\varepsilon \varphi_t dxdt. \end{aligned}$$

Tomando $h_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \mathbf{1}_\omega$, obtemos por (3.6) e (4.1), e pela expressão acima, que

$$\begin{aligned} (z_\varepsilon(T), \varphi^T)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega z_\varepsilon(0) \varphi(0) + \iint_Q \left(\Delta z_\varepsilon - \mathbf{a} z_\varepsilon + \varphi_\varepsilon \mathbf{1}_\omega - \frac{1}{\ell^2} \mathbf{q} \mathbf{1}_\mathcal{O} + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{q} \right) \varphi \\ &\quad + \iint_Q z_\varepsilon (-\Delta \varphi + \mathbf{a} \varphi - \theta \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}). \end{aligned}$$

Distribuindo e cancelando os termos semelhantes do lado direito da expressão acima, usando a Segunda Fórmula de Green (Teorema 16) e o sistema (3.6), temos que

$$\begin{aligned} (z_\varepsilon(T), \varphi^T)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega z_\varepsilon(0) \varphi(0) + \iint_{\omega \times (0, T)} \varphi_\varepsilon \varphi + \iint_Q \left(-\frac{1}{\ell^2} \varphi \mathbf{1}_\mathcal{O} + \frac{1}{\gamma^2} \varphi \right) \mathbf{q} \\ &\quad - \iint_Q z_\varepsilon \theta \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d} \\ &= \int_\Omega z_\varepsilon(0) \varphi(0) + \iint_{\omega \times (0, T)} \varphi_\varepsilon \varphi + \iint_Q (\theta_t - \Delta \theta + c \theta) \mathbf{q}_\varepsilon \\ &\quad - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} z_\varepsilon \theta \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d} \\ &= \int_\Omega z_\varepsilon(0) \varphi(0) + \iint_{\omega \times (0, T)} \varphi_\varepsilon \varphi + \int_\Omega \theta(T) \mathbf{q}_\varepsilon(T) - \int_\Omega \theta(0) \mathbf{q}_\varepsilon(0) \\ &\quad + \iint_Q \theta (-\mathbf{q}_{\varepsilon, t} - \Delta \mathbf{q}_\varepsilon + c \mathbf{q}_\varepsilon) - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} z_\varepsilon \theta \\ &= \int_\Omega z_\varepsilon(0) \varphi(0) + \iint_{\omega \times (0, T)} \varphi_\varepsilon \varphi + \iint_Q \theta (z_\varepsilon - z_d) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d} \\ &\quad - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} z_\varepsilon \theta \\ &= \int_\Omega z_\varepsilon(0) \varphi(0) + \iint_{\omega \times (0, T)} \varphi_\varepsilon \varphi - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} \theta z_d. \end{aligned}$$

Pela ultima igualdade acima e por (4.6), obtemos que

$$(z_\varepsilon(T), \varphi^T)_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi^T \in L^2(\Omega).$$

Portanto, podemos concluir que

$$\|z_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Agora, tomando $\varphi^T = \varphi_\varepsilon^T$ em (4.5) obtemos que

$$\iint_{\omega \times (0, T)} |\varphi_\varepsilon|^2 + \varepsilon \left(\frac{\varphi_\varepsilon^T}{\|\varphi_\varepsilon^T\|}, \varphi_\varepsilon^T \right)_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega z_0 \varphi_\varepsilon(0) - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} z_d \theta_\varepsilon = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\iint_{\omega \times (0,T)} |\mathbf{h}_\varepsilon|^2 &= - \int_{\Omega} \mathbf{z}_0 \varphi_\varepsilon(0) + \iint_{\mathcal{O}_d \times (0,T)} \mathbf{z}_d \boldsymbol{\theta}_\varepsilon - \varepsilon \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^T\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \int_{\Omega} |\mathbf{z}_0| \cdot |\varphi_\varepsilon(0)| + \iint_{\mathcal{O}_d \times (0,T)} \frac{\rho}{\bar{\rho}} \mathbf{z}_d \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \\
&\leq \left((-\mathbf{z}_0, \rho \mathbf{z}_d \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d}), (\varphi_\varepsilon(0), \rho^{-1} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \right)_{L^2(\Omega) \times L^2(Q)} \\
&\leq \|(-\mathbf{z}_0, \rho \mathbf{z}_d \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d})\|_{L^2(\Omega) \times L^2(Q)} \cdot \|(\varphi_\varepsilon(0), \rho^{-1} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega) \times L^2(Q)} \\
&= \sqrt{\|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho \mathbf{z}_d\|_{L^2(Q)}^2} \cdot \sqrt{\|\varphi_\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho^{-1} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon\|_{L^2(Q)}^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade de observabilidade em (3.72), temos que

$$\|\mathbf{h}_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0,T))}^2 \leq (\|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho \mathbf{z}_d\|_{L^2(Q)}) \sqrt{C} \|\mathbf{h}_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0,T))},$$

ou seja,

$$\|\mathbf{h}_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0,T))} \leq \sqrt{C} (\|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho \mathbf{z}_d\|_{L^2(Q)}).$$

□

4.1.1 Demonstração do Teorema 20

Demonstração. Vamos provar uma propriedade de ponto fixo para obter um resultado de controle aproximado para o sistema não-liner (3.5).

Já que f é continuamente diferenciável, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever

$$g(\mathbf{z}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{t}; \mathbf{z}) \cdot \mathbf{z},$$

onde G é uma função contínua definida como

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{t}; \mathbf{z}) = \int_0^1 f'(\mathbf{y}^*(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \sigma \mathbf{z}) \, d\sigma.$$

Para cada $\zeta \in L^2(\Omega)$, consideremos

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\zeta = G(\mathbf{x}, \mathbf{t}; \zeta) \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}_\zeta = f'(\zeta + \mathbf{y}^*),$$

onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ são como no sistema (4.1). Como f é lipschitziana, temos que

$$|f'(s)| = \left| \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(s + \lambda) - f(s)}{\lambda} \right| = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left| \frac{f(s + \lambda) - f(s)}{\lambda} \right| \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{L|\lambda|}{|\lambda|} = L.$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim,

$$|\mathbf{a}_\zeta| = \int_0^1 |f'(\mathbf{y}^* + \sigma \zeta)| \, d\sigma \leq \int_0^1 L \, d\sigma = L, \quad (4.7)$$

e, portanto,

$$\|\mathbf{a}_\zeta\|_\infty \leq L \text{ e } \|\mathbf{c}_\zeta\|_\infty \leq L, \quad \forall \zeta \in L^2(Q).$$

Pela Proposição 11, dado $\varepsilon > 0$ existe um controle $\mathbf{h}_\zeta = \mathbf{h}_\zeta(\varepsilon) \in L^\infty(\omega \times (0, T))$ tal que a solução $(z_\zeta, \mathbf{q}_\zeta)$ de (4.1) associada a $\mathbf{a}_\zeta$ e $\mathbf{c}_\zeta$ satisfaz

$$\|z_\zeta(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Ainda,

$$\|\mathbf{h}_\zeta\|_{L^\infty(\omega \times (0, T))} \leq \sqrt{C}(\|z_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho z_d\|_{L^2(Q)}), \quad \forall \zeta \in L^2(Q). \quad (4.8)$$

Consideremos a aplicação $\Lambda : L^2(Q) \rightarrow L^2(Q)$ definida por $\Lambda\zeta = z_\zeta$ com $(z_\zeta, \mathbf{q}_\zeta)$ sendo solução de (4.1) associada a $\mathbf{a}_\zeta$, $\mathbf{c}_\zeta$ e ao controle líder $\mathbf{h}_\zeta$. Vamos mostrar que a norma de z_ζ em $W(0, T)$ é limitada pela norma de $\mathbf{h}_\zeta$ em $L^2(Q)$ mais uma constante que depende de $\mathbf{y}_0$ e $\mathbf{y}_d$. Relembremos que para ℓ e γ suficientemente grandes, mostramos que existe $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\varphi}})$ tal que

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_{L^2(Q)} < +\infty, \text{ onde } \mathbf{y} = \mathbf{y}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\varphi}}),$$

isto é,

$$\|z - z_d\|_{L^2(Q)} < +\infty, \quad z = \mathbf{y} - \mathbf{y}^* \quad \text{e} \quad z_d = \mathbf{y}_d - \mathbf{y}^*.$$

Assim, pela estimativa de energia e pelo sistema (4.1), temos

$$\begin{aligned} \|z_\zeta\|_{W(0, T)} &\leq C_1 \left(\|\mathbf{h}_\zeta\|_{L^2(\omega \times (0, T))} + \left\| -\frac{1}{\ell^2} \mathbf{q}_\zeta \mathbf{1}_\Theta + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{q}_\zeta \right\|_{L^2(Q)} + \|z_0\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C_1 \left(\|\mathbf{h}_\zeta\|_{L^2(\omega \times (0, T))} + \frac{1}{\min\{\ell^2, \gamma^2\}} \|\mathbf{q}_\zeta\|_{L^2(Q)} + \|z_0\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C_2 \left(\|\mathbf{h}_\zeta\|_{L^2(\omega \times (0, T))} + \frac{1}{\min\{\ell^2, \gamma^2\}} \|z - z_d\|_{L^2(Q)} + \|z_0\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Tomando ℓ, γ suficientemente grandes tal que $\frac{C_2}{\min\{\ell^2, \gamma^2\}} < 1$, obtemos que

$$\|z_\zeta\|_{W(0, T)} \leq C_3 (\|\mathbf{h}_\zeta\|_{L^2(\omega \times (0, T))} + 1) \leq C, \quad (4.9)$$

onde C_3 depende de $\mathbf{y}_d, \mathbf{y}_0$. Logo, por (4.7)-(4.9), a aplicação Λ é limitada em um subconjunto de $W(0, T)$. Pelo Teorema de Aubin-Lions, $W(0, T) \hookrightarrow L^2(Q)$. Portanto, Λ é um operador compacto. (Existe K compacto tal que $\Lambda(L^2(Q)) \subset K$).

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder (Teorema 19) Λ possui um ponto fixo, que denotaremos por z_ε , onde $(z_\varepsilon, q_\varepsilon)$, e que, junto com $h_\varepsilon := h_{z_\varepsilon}$, resolvem o problema

$$\begin{cases} z_{\varepsilon,t} - \Delta z_\varepsilon + G(x, t, z_\varepsilon)z_\varepsilon = h_\varepsilon \mathbb{1}_\omega - \frac{1}{\ell^2} q_\varepsilon \mathbb{1}_\mathcal{O} + \frac{1}{\gamma^2} q_\varepsilon & \text{em } Q, \\ -q_{\varepsilon,t} - \Delta q_\varepsilon + f'(y^* + z_\varepsilon)q_\varepsilon = (z_\varepsilon - z_d) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ z_\varepsilon = q_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z_\varepsilon(x, 0) = z_0(x), \quad q_\varepsilon(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.10)$$

Para concluir a prova do Teorema 20, vamos à passagem de limite em (4.10) e (4.2). Já vimos que

1. Graças à (4.8), $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uniformemente limitada.
2. $\{(z_\varepsilon, q_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ pertence a um subconjunto compacto de $W(0, T) \times W(0, T)$.

Então, tomando uma subsequência, se necessário, temos que

$$\begin{cases} h_\varepsilon \rightharpoonup h \text{ fracamente em } L^2(\omega \times (0, T)), \\ (z_\varepsilon, q_\varepsilon) \rightarrow (z, q) \text{ em } L^2(Q) \times L^2(Q), \\ z_\varepsilon(T) \rightarrow z(T) \text{ em } L^2(\Omega), \end{cases} \quad (4.11)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para algum $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ e algum $(z, q) \in W(0, T) \times W(0, T)$.

Como g é contínuo, vale que $g(z_\varepsilon) \rightarrow g(z)$ em $L^2(Q)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Dada $\phi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, consideremos os funcionais auxiliares $F_j : W(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$\begin{aligned} F_1(u) &= \int_0^T (u_t, \phi)_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} dt, \\ F_2(u) &= \int_0^T (\nabla u, \nabla \phi)_{L^2(\Omega)} dt, \\ F_3(u) &= \int_0^T (u, \phi)_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Notemos que $F_j \in (W(0, T))'$ para cada $j = 1, 2, 3$ e, portanto, pela Proposição 1, $F_j(u_n) \rightarrow F_j(u)$ quando $u_n \rightharpoonup u$. Tomando $u_\varepsilon = (z_\varepsilon, q_\varepsilon)$, segue que $F_j(z_\varepsilon, q_\varepsilon) \rightarrow F(z, q)$. Por outro lado, como $(z_\varepsilon, q_\varepsilon)$ são soluções de (3.5), então

$$\begin{cases} F_1(z_\varepsilon) + F_2(z_\varepsilon) + F_3\left(g(z_\varepsilon) - h_\varepsilon \mathbb{1}_\omega + \frac{1}{\ell^2} q_\varepsilon \mathbb{1}_\mathcal{O} - \frac{1}{\gamma^2} q_\varepsilon\right) = 0, \\ F_1(-q_\varepsilon) + F_2(q_\varepsilon) + F_3\left(f'(z_\varepsilon + y^*)q_\varepsilon - (z_\varepsilon - z_d) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_d}\right) = 0. \end{cases}$$

Logo, sendo g e f' contínuas e pela unicidade do limite fraco, temos que

$$\begin{cases} F_1(z) + F_2(z) + F_3\left(g(z) - h\mathbb{1}_\omega + \frac{1}{\ell^2}q\mathbb{1}_\mathcal{O} - \frac{1}{\gamma^2}q\right) = 0, \\ F_1(-q) + F_2(q) + F_3\left(f'(z + y^*)q - (z - z_d)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_d}\right) = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Além disso, dada qualquer $\zeta \in L^2(\Omega)$, tem-se

$$\begin{aligned} (z(\cdot, 0) - z_0, \zeta)_{L^2(\Omega)} &= \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_\varepsilon(\cdot, 0) - z_0, \zeta\right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \\ (q(\cdot, T), \zeta)_{L^2(\Omega)} &= \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_\varepsilon(\cdot, T), \zeta\right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Assim, $z(x, 0) = z_0(x)$ e $q(x, T) = 0$ q.t.p em Ω , mas, pela continuidade de z e q , segue que

$$z(x, 0) = z_0(x) \quad \text{e} \quad q(x, T) = 0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.13)$$

Portanto, devido à dependência contínua dos dados iniciais, por (4.12) e (4.13) temos que (z, q) resolve (3.5) com o controle líder h e dado inicial z_0 . Vejamos ainda que h satisfaz a propriedade de controle, pois, tomando $\varepsilon \rightarrow 0$ em (4.2) temos que

$$\|z(T)\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

isto é,

$$z(T) = y(T) - y^*(T) = 0 \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

Isto prova que $y(T) = y^*(T)$ em $L^2(\Omega)$.

□

4.2 Caso linear

O objetivo desta seção é demonstrar o Teorema 21. Antes de iniciar a prova, apresentaremos algumas propriedades relacionadas aos conjuntos $\mathcal{V}_{ad}$ e Ψ_{ad} definidos em (1.6) e (1.7), respectivamente.

4.2.1 Resultados preliminares

Lema 9. Ψ_{ad} e $\mathcal{V}_{ad}$ são fechados, não-vazios, convexos e limitados em $L^2(Q)$ e $L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, respectivamente.

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para $\Psi_{\text{ad}} = \{\psi \in L^2(Q) : \psi(x, t) \in E_2 \text{ q.s.}\}$, visto que a demonstração para $\mathcal{V}_{\text{ad}}$ é feita de forma similar.

Que Ψ_{ad} é não-vazio e limitado é claro pela definição de E_2 .

Convexo: Sejam $\lambda \in (0, 1)$ e $\psi_1, \psi_2 \in \Psi_{\text{ad}}$. Consideremos a função $\bar{\psi} = \lambda\psi_1 + (1 - \lambda)\psi_2$ e N_1, N_2 conjuntos de medida nula tais que

$$\psi_1(x, t) \in E_2, \forall (x, t) \in Q \setminus N_1$$

e

$$\psi_2(x, t) \in E_2, \forall (x, t) \in Q \setminus N_2$$

Dado $E_2 = [a, b]$, temos, para todo $(x, t) \in Q \setminus (N_1 \cup N_2)$, que

$$\bar{\psi}(x, t) = \lambda\psi_1(x, t) + (1 - \lambda)\psi_2(x, t) \leq \lambda b(1 - \lambda)b = b.$$

Analogamente, obtemos que $a \leq \bar{\psi}(x, t)$ para todo $(x, t) \in Q \setminus (N_1 \cup N_2)$. Como $N_1 \cup N_2$ é de medida nula, segue que Ψ_{ad} é convexo.

Fechado: Seja $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset \Psi_{\text{ad}}$ tal que $\psi_n \rightarrow \psi$ em $L^2(Q)$. Em particular,

$$\psi_n(x, t) \rightarrow \psi(x, t) \quad \text{q.s.}$$

donde, como E_2 é fechado, segue que $\psi(x, t) \in E_2$ q.s. Portanto, Ψ_{ad} é fechado. □

Em seguida, vamos garantir a existência do ponto de sela para $J_r(v, \psi)$. Para isso, consideremos o resultado a seguir.

Proposição 12 (Prop 2.1, p. 171, Ekeland e Témam (1999)). *Seja J um funcional definido em $X \times Y$, onde X e Y são convexos, fechados, não vazios e limitados. Se*

1. $\forall v \in X, \psi \mapsto J(v, \psi)$ *é côncava e semicontínua superiormente,*

2. $\forall \psi \in Y, v \mapsto J(v, \psi)$ *é convexa e semicontínua inferiormente,*

então J possui pelo menos um ponto de sela $(\bar{v}, \bar{\psi})$ e

$$J(\bar{v}, \bar{\psi}) = \min_{v \in X} \sup_{\psi \in Y} J(v, \psi) = \max_{\psi \in Y} \inf_{v \in X} J(v, \psi).$$

Vamos verificar que o funcional $J_r(v, \psi)$ satisfaz as hipóteses da proposição 12. Seguindo a mesma lógica do Capítulo 2, estamos interessados em derivar o funcional $J_r(v, \psi)$. A regularidade de $J_r(v, \psi)$ é explorada nos lemas a seguir.

Lema 10. *Sejam $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$ dados. A aplicação $(v, \psi) \mapsto y(v, \psi)$ de $\mathcal{V}_{ad} \times \Psi_{ad}$ em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ é afim, contínua e tem derivada de Gâteaux $y'(v', \psi')$ em toda direção $(v', \psi') \in L^2(\omega \times (0, T)) \times L^2(Q)$. Mais ainda, a derivada $y'(v', \psi')$ resolve o sistema linear*

$$\begin{cases} y'_t - \Delta y' + \alpha y' = \bar{v}1_\omega + \psi' & \text{em } Q, \\ y' = 0 & \text{em } \Sigma, \\ y'(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.14)$$

Demonstração. Definamos a aplicação $G : L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q) \mapsto L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ tal que $G(v, \psi) = y$, onde y é solução do sistema linear

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \alpha y = h1_\omega + v1_\omega + \psi & \text{em } Q \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.15)$$

onde $\alpha \in L^\infty(Q)$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$. Recordemos (ver Evans (2010) Cap. 7, por exemplo) que para todo $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ e cada $(v, \psi) \in \mathcal{V}_{ad} \times \Psi_{ad}$, o sistema acima possui uma única solução $y \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Afim: Consideremos a solução $\tilde{y} = G(0, 0)$ do sistema linear

$$\begin{cases} \tilde{y}_t - \Delta \tilde{y} + \alpha \tilde{y} = h1_\omega & \text{em } Q, \\ \tilde{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \tilde{y}(x, 0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e a aplicação

$$\begin{aligned} H : L^2(\omega \times (0, T)) \times L^2(Q) &\rightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ (v, \psi) &\mapsto \bar{y}(v, \psi), \end{aligned}$$

onde $\bar{y}$ é solução do sistema

$$\begin{cases} \bar{y}_t - \Delta \bar{y} + \alpha \bar{y} = v1_\omega + \psi & \text{em } Q, \\ \bar{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \bar{y}(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.16)$$

Por (4.16), temos que H é linear. Além disso, notemos que se y é solução de (4.15), então

$$y = \tilde{y} + \bar{y},$$

ou seja,

$$G(v, \psi) = G(0, 0) + H(v, \psi).$$

Logo, G é uma composição de uma aplicação linear com uma translação, ou seja G é afim.

Continuidade: Seja $\{(v_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sequência em $L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q)$ que converge para $(v, \psi) \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q)$. Temos que

$$G(v_n, \psi_n) = G(0, 0) + H(v_n, \psi_n).$$

Vejamos que, pela estimativa de energia clássica no sistema (4.16), vale

$$\|H(v, \psi)\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C(\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} + \|\psi\|_{L^2(Q)}),$$

Assim,

$$\|H(v, \psi) - H(v_n, \psi_n)\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \rightarrow 0 \text{ quando } (v_n, \psi_n) \rightarrow (v, \psi).$$

Logo, $H(v_n, \psi_n) \rightarrow H(v, \psi)$ em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e, portanto, H é contínua. Como G é composição de aplicações contínuas, segue que G é contínua.

Diferenciabilidade: Consideremos $y^\lambda = [y(v + \lambda v', \psi + \lambda \psi') - y(v, \psi)]/\lambda$ onde (v', ψ') é uma direção qualquer em $L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \times L^2(Q)$. Como

$$\begin{aligned} y^\lambda &= \frac{G(0, 0) + H(v + \lambda v', \psi + \lambda \psi') - G(0, 0) - H(v, \psi)}{\lambda} \\ &= \frac{H(\lambda v', \lambda \psi')}{\lambda} = H(v', \psi'), \end{aligned}$$

temos que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} y^\lambda = H(v', \psi')$. Assim, G possui derivada de Gâteaux e a derivada $y'(v', \psi')$ satisfaz

$$\begin{cases} y'_t - \Delta y' + ay' = v' \mathbf{1}_{\mathcal{O}} + \psi' & \text{em } Q, \\ y' = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y'(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

□

4.2.2 Demonstração do Teorema 21

Agora, demonstraremos o Teorema 21. Primeiro, garantiremos a existência do ponto de sela. Para isso, vejamos na proposição a seguir que o funcional J_r satisfaz as hipóteses da Proposição 12.

Proposição 13. *Sejam $y_0 \in L^2(\Omega)$ e $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ dados. Então, para γ suficientemente grande, valem:*

1. *Para todo $\psi \in \Psi_{ad}$, $v \mapsto J_r(v, \psi)$ é estritamente convexo e semi-contínuo inferiormente.*
2. *Para todo $v \in V_{ad}$, $\psi \mapsto J_r(v, \psi)$ é estritamente côncavo e semi-contínuo superiormente.*

Demonstração. Provemos primeiramente o item 1. Pelo Lema 10, já temos que a aplicação $v \mapsto J_r(v, \psi)$ é semicontínua inferiormente. Para mostrar a convexidade estrita, tomemos $\lambda \in (0, 1)$ e $v_1, v_2 \in V_{ad}$ e observemos que

$$\begin{aligned} J_r((1-\lambda)v_1 + \lambda v_2, \psi) &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |G((1-\lambda)v_1 + \lambda v_2, \psi) - y_d|^2 dx dt \\ &\quad + \frac{\ell^2}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2|^2 dx dt - \frac{\gamma^2}{2} \iint_Q |\psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} G((1-\lambda)v_1 + \lambda v_2, \psi) &= G(0, 0) + H((1-\lambda)v_1 + \lambda v_2, \psi) \\ &= (1-\lambda + \lambda)G(0, 0) + (1-\lambda)H(v_1, \psi) + \lambda H(v_2, \psi) \\ &= (1-\lambda)G(v_1, \psi) + \lambda G(v_2, \psi) \end{aligned}$$

e

$$\|(1-\lambda)\varphi_1 + \lambda\varphi_2\|_{L^2(Q)}^2 < (1-\lambda)\|\varphi_1\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda\|\varphi_2\|_{L^2(Q)}^2, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in L^2(Q),$$

temos que

$$\begin{aligned} J_r((1-\lambda)v_1 + \lambda v_2, \psi) &< \frac{(1-\lambda)}{2} \left(\iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |G(v_1, \psi) - y_d|^2 + \ell^2 \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |v_1|^2 \right) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \left(\iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |G(v_2, \psi) - y_d|^2 + \ell^2 \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |v_2|^2 \right) \\ &\quad - (1-\lambda + \lambda) \frac{\gamma^2}{2} \iint_Q |\psi|^2 \\ &= (1-\lambda)J_r(v_1, \psi) + \lambda J_r(v_2, \psi). \end{aligned}$$

Portanto, $v \mapsto J_r(v, \psi)$ é estritamente convexa, concluindo a prova do item 1

Agora mostremos o item 2. Pelo Lema 10, já temos que $\psi \mapsto J_r(v, \psi)$ é semicontínua superiormente. Para mostrar a concavidade estrita, fixemos v , ψ e $\bar{\psi}$. Consideremos a aplicação

$$g(\tau) = J_r(v, \psi + \tau\bar{\psi}).$$

Então, é suficiente mostrar que $g(\tau)$ é côncava com respeito a τ .

Derivando $g(\tau)$ temos

$$g'(\tau) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} 2 \frac{d}{d\tau} (G(v, \psi + \tau \bar{\psi}) - y_d) (G(v, \psi + \tau \bar{\psi}) - y_d) \\ - \frac{\gamma^2}{2} \iint_Q 2 \frac{d}{d\tau} (\psi + \tau \bar{\psi}) (\psi + \tau \bar{\psi}).$$

Observando que

$$G(v, \psi + \tau \bar{\psi}) = G(0, 0) + H(v, \psi) + \tau H(0, \bar{\psi}) = y + \tau y',$$

onde y' é solução de (4.14) com $v' = 0$, temos que

$$g'(\tau) = \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (y + \tau y' - y_d) y' dx dt - \gamma^2 \iint_Q (\psi + \tau \bar{\psi}) \bar{\psi}.$$

Derivando novamente, obtemos que

$$g''(\tau) = \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} |y'|^2 dx dt - \gamma^2 \iint_Q |\bar{\psi}|^2 dx dt. \quad (4.17)$$

Usando a estimativa clássica de energia para o sistema (4.14) com $v' = 0$, temos que

$$\|y'\|_{L^2(\mathcal{O}_d \times (0, T))}^2 \leq C \|\bar{\psi}\|_{L^2(Q)}^2.$$

Assim, por (4.17), concluímos que

$$g''(\tau) \leq -(\gamma^2 - C) \|\bar{\psi}\|_{L^2(Q)}^2,$$

onde C depende de Ω , $\mathcal{O}_d$, $\|a\|_\infty$ e T . Logo, para γ suficientemente grande, $g''(\tau) < 0$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$. Portanto, $\psi \mapsto J_r(v, \psi)$ é estritamente côncavo. Isto conclui a prova da proposição. □

Retornando à prova do Teorema 21, temos, pelas Proposições 12 e 13, a existência de pelo menos um ponto de sela $(\bar{v}, \bar{\psi}) \in \mathcal{V}_{ad} \times \Psi_{ad}$. Em particular, já que $(\bar{v}, \bar{\psi})$ é ponto de sela, vale

$$J_r(\bar{v}, \bar{\psi}) \leq J_r((1 - \lambda)\bar{v} + \lambda v, \bar{\psi}), \quad \forall v \in \mathcal{V}_{ad}$$

ou, equivalentemente,

$$0 \leq J_r(\bar{v} + \lambda(v - \bar{v}), \bar{\psi}) - J_r(\bar{v}, \bar{\psi}), \quad \forall v \in \mathcal{V}_{ad}.$$

Dividindo a expressão acima por λ , temos

$$0 \leq \frac{J_r(\bar{v} + \lambda(v - \bar{v}), \bar{\psi}) - J_r(\bar{v}, \bar{\psi})}{\lambda}. \quad (4.18)$$

Como

$$\begin{aligned} G(\bar{v} + \lambda(v - \bar{v}), \bar{\psi}) &= G(0, 0) + H(\bar{v} + \lambda(v - \bar{v}), \bar{\psi}) \\ &= G(0, 0) + H(\bar{v}, \bar{\psi}) + \lambda H(v - \bar{v}, 0) \\ &= y + \hat{y}, \end{aligned}$$

onde y é solução de (4.14) e $\hat{y}$ é a derivada de $(v, \psi) \mapsto y(v, \psi)$ na direção $(v - \bar{v}, 0) \in \mathcal{V}_{ad} \times \Psi_{ad}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{J_r(\bar{v} + \lambda(v - \bar{v}), \bar{\psi}) - J_r(\bar{v}, \bar{\psi})}{\lambda} &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} \frac{[y + \lambda \hat{y} - y_d]^2 - |y - y_d|^2}{\lambda} dx dt \\ &\quad + \frac{\ell^2}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \frac{|\bar{v} + \lambda(v - \bar{v})|^2 - |\bar{v}|^2}{\lambda} dx dt. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |\bar{v} + \lambda(v - \bar{v})|^2 - |\bar{v}|^2 &= (\bar{v} + \lambda(v - \bar{v}) - \bar{v})(\bar{v} + \lambda(v - \bar{v}) + \bar{v}) \\ &= \lambda(v - \bar{v})(2\bar{v} + \lambda(v - \bar{v})), \end{aligned} \quad (4.20)$$

Assim, combinando (4.18)–(4.20) e tomando o limite $\lambda \rightarrow 0$, obtemos que

$$0 \leq \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (y - y_d) \hat{y} + \ell^2 \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \bar{v}(v - \bar{v}). \quad (4.21)$$

Consideremos o sistema adjunto

$$\begin{cases} -q_t - \Delta q + \alpha q = (y - y_d) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ q = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ q(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.22)$$

Multiplicando (4.22)₁ por $\hat{y}$ e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (y - y_d) \hat{y} &= \iint_Q -q_t \hat{y} + \iint_Q -\hat{y} \Delta q + \iint_Q \alpha q \hat{y} \\ &= \int_{\Omega} q \hat{y} \Big|_{t=0}^{t=T} + \iint_Q q \hat{y}_t - \iint_Q q \Delta \hat{y} + \iint_Q \alpha q \hat{y} \\ &= \iint_Q (\hat{y}_t - \Delta \hat{y} + \alpha \hat{y}) q \\ &= \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} (v - \bar{v}) q. \end{aligned}$$

Logo, por (4.21) e pela expressão acima, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) \mathbf{q} - \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \hat{\mathbf{y}} \\ &\leq \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) \mathbf{q} + \ell^2 \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \bar{\mathbf{v}} (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}). \end{aligned}$$

Portanto, colocando $(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})$ em evidência, chegamos a

$$0 \leq \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} (\mathbf{q} + \ell^2 \bar{\mathbf{v}}) (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{ad}. \quad (4.23)$$

Por outro lado, ainda pela propriedade de ponto de sela, temos

$$J_r(\bar{\mathbf{v}}, (1 - \lambda)\bar{\boldsymbol{\psi}} + \lambda\boldsymbol{\psi}) \leq J_r(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}), \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \Psi_{ad}.$$

ou equivalentemente

$$J_r(\bar{\mathbf{v}}, (1 - \lambda)\bar{\boldsymbol{\psi}} + \lambda\boldsymbol{\psi}) - J_r(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}) \leq 0.$$

Dividindo por λ e fazendo $\lambda \rightarrow 0$, como anteriormente, obtemos

$$\iint_{Q \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \tilde{\mathbf{y}} - \gamma^2 \iint_Q \bar{\boldsymbol{\psi}} (\boldsymbol{\psi} - \bar{\boldsymbol{\psi}}) \leq 0,$$

onde $\mathbf{y}$ é solução de (4.15) associada a $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\psi}})$ e $\tilde{\mathbf{y}}$ denota a derivada em (4.14) na direção $(0, \boldsymbol{\psi} - \bar{\boldsymbol{\psi}})$. Multiplicando (4.22)₁ por $\tilde{\mathbf{y}}$ e integrando por partes, temos

$$\iint_Q (-\mathbf{q}_t - \Delta \mathbf{q} + \mathbf{a} \mathbf{q}) \tilde{\mathbf{y}} = \iint_{\mathcal{O}_d \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \tilde{\mathbf{y}}.$$

Logo

$$\iint_Q (\tilde{\mathbf{y}}_t - \Delta \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{a} \tilde{\mathbf{y}}) \mathbf{q} \leq \gamma^2 \iint_Q \bar{\boldsymbol{\psi}} (\boldsymbol{\psi} - \bar{\boldsymbol{\psi}}),$$

donde

$$\iint_Q (\boldsymbol{\psi} - \bar{\boldsymbol{\psi}}) \mathbf{q} - \gamma^2 \iint_Q \bar{\boldsymbol{\psi}} (\boldsymbol{\psi} - \bar{\boldsymbol{\psi}}) \leq 0,$$

isto é,

$$\iint_Q (\mathbf{q} - \gamma^2 \bar{\boldsymbol{\psi}}) (\boldsymbol{\psi} - \bar{\boldsymbol{\psi}}) \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \Psi_{ad}. \quad (4.24)$$

Assim, temos que $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\psi}})$ satisfaz o problema de controle robusto se $(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\psi}})$ satisfazem (4.23), (4.21), $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}) \in \mathcal{V}_{ad} \times \Psi_{ad}$ e o sistema abaixo

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t - \Delta \mathbf{y} + \mathbf{a} \mathbf{y} = \mathbf{h} \mathbf{1}_\omega + \bar{\mathbf{v}} \mathbf{1}_\mathcal{O} + \bar{\boldsymbol{\psi}} & \text{em } Q, \\ -\mathbf{q}_t - \Delta \mathbf{q} + \mathbf{a} \mathbf{q} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ \mathbf{y} = \mathbf{q} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.25)$$

O próximo passo é obter um controle líder tal que a solução $\mathbf{y}$ do sistema acoplado (4.25) satisfaz (1.10). Graças à linearidade do sistema, isto é equivalente a provar que $\mathbf{y}(T) = 0$. A ideia é aplicar os resultados da seção anterior.

Primeiro, notemos que se $\bar{\psi}$ satisfaz a desigualdade variacional em (4.24), então $\bar{\psi}$ pode ser escrito como a projeção ortogonal sobre o conjunto Ψ_{ad} de $\frac{1}{\gamma^2}\mathbf{q}$, ou seja,

$$\bar{\psi} = \Pi_{\Psi_{\text{ad}}} \left(\frac{1}{\gamma^2} \mathbf{q} \right).$$

De fato, por (4.24), temos que

$$(\mathbf{q} - \gamma^2 \bar{\psi}, \psi - \bar{\psi})_{L^2(Q)} \leq 0,$$

isto é,

$$\left(\frac{1}{\gamma^2} \mathbf{q} - \bar{\psi}, \psi - \bar{\psi} \right)_{L^2(Q)} \leq 0$$

Assim (ver Brezis (2011), Teorema 5.2), $\bar{\psi}$ caracteriza a projeção de $\frac{1}{\gamma^2}\mathbf{q}$ no conjunto convexo Ψ_{ad} . Analogamente, por (4.23) temos que

$$\bar{\mathbf{v}} = \Pi_{V_{\text{ad}}} \left(-\frac{1}{\ell^2} \mathbf{q}|_{\mathcal{O}} \right).$$

Dessa forma, podemos reescrever o sistema (4.25) como

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t - \Delta \mathbf{y} + \mathbf{a}\mathbf{y} = h\mathbf{1}_{\omega} + \Pi_{V_{\text{ad}}} \left(-\frac{1}{\ell^2} \mathbf{q}|_{\mathcal{O}} \right) \mathbf{1}_{\mathcal{O}} + \Pi_{\Psi_{\text{ad}}} \left(\frac{1}{\gamma^2} \mathbf{q} \right) & \text{em } Q, \\ -\mathbf{q}_t - \Delta \mathbf{q} + \mathbf{a}\mathbf{q} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ \mathbf{y} = \mathbf{q} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Agora, para todo $\mathbf{z} \in L^2(Q)$ podemos escrever $\Pi_{\Psi_{\text{ad}}}(\mathbf{z}) = \rho(\mathbf{z})\mathbf{z}$ onde

$$\rho(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{z} \in \Psi_{\text{ad}} \\ \Pi_{\Psi_{\text{ad}}}(\mathbf{z})/\mathbf{z} & \text{se não.} \end{cases}$$

Notemos que ρ é contínua e limitada com $\|\rho(\mathbf{z})\|_{L^\infty(Q)} \leq 1$. De fato, para verificar a continuidade, tomemos $\{\mathbf{z}_n\}_{n=1}^\infty \subset L^2(Q)$ convergindo para $\mathbf{z} \in L^2(Q)$. Se $\mathbf{z} \in \text{int}\Psi_{\text{ad}}$ então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{z}_n \in \text{int}\Psi_{\text{ad}}$, e, logo, $\rho(\mathbf{z}_n) = 1 = \rho(\mathbf{z})$ para todo $n \geq n_0$. Se $\mathbf{z} \notin \Psi_{\text{ad}}$ então $\mathbf{z} \neq 0$, e, como $\Pi_{\Psi_{\text{ad}}}(\mathbf{z})$ e $1/\mathbf{z}$ são contínuas, temos que $\rho(\mathbf{z}_n) \rightarrow \rho(\mathbf{z})$. Por fim, se $\mathbf{z} \in \partial\Psi_{\text{ad}}$, então $\rho(\mathbf{z}) = 1$, pois Ψ_{ad} é fechado. Assim, basta mostrarmos que

$\rho(z_n) \rightarrow 1$, onde $z_n \notin \Psi_{ad}$, ou seja, $z_n(x, t) \notin [a, b] =: E_2$. Logo $|z_n|^{-1} \leq (\min\{|a|, |b|\})^{-1}$.

Então,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Pi_{\Psi_{ad}}(z_n)}{z_n} - 1 \right\|_{L^2(Q)} &= \left\| \frac{\Pi_{\Psi_{ad}} - z_n}{z_n} \right\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \frac{1}{\|z_n\|_{L^\infty(Q)}} \cdot \|\Pi_{\Psi_{ad}}(z_n) - z_n\|_{L^2(Q)} \\ &= C \|\Pi_{\Psi_{ad}}(z_n) - \Pi_{\Psi_{ad}}(z) - z_n + z\|_{L^2(Q)} \\ &\leq C \left(\|\Pi_{\Psi_{ad}}(z_n) - \Pi_{\Psi_{ad}}(z)\|_{L^2(Q)} + \|z_n - z\|_{L^2(Q)} \right) \\ &\leq 2C \|z_n - z\|_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

pois $\Pi_{\Psi_{ad}}(z) = z$. Pela expressão acima, fica claro que $\rho(z_n) \rightarrow 1$. Portanto, ρ é contínua.

Agora, notemos que $\rho(z) \in L^\infty(Q)$ e $\|\rho(z)\|_{L^\infty(Q)} \leq 1$, são obtidos como consequência da proposição abaixo.

Proposição 14. *Se $z \in L^2(Q) \setminus \Psi_{ad}$, isto é,*

$$z \in L^2(Q) \quad e \quad z(x, t) \in (-\infty, -a) \cup (b, +\infty) \quad q.s. \text{ em } Q,$$

então

$$\Pi_{\Psi_{ad}}(z)(x, t) = \begin{cases} -a, & \text{se } z(x, t) \in (-\infty, -a), \\ b, & \text{se } z(x, t) \in (b, +\infty). \end{cases}$$

Em particular, $|\Pi_{\Psi_{ad}}(z)(x, t)| \leq |z(x, t)|$ q.s..

Demonstração. Observemos que a projeção $\Pi_{\Psi_{ad}}$ satisfaz

$$\iint_Q (z - \Pi_{\Psi_{ad}}(z))(\xi - \Pi_{\Psi_{ad}}(z)) \, dx dt \leq 0, \quad \forall \xi \in \Psi_{ad}.$$

De fato, a partir do fato de $\Pi_{\Psi_{ad}}(z)(x, t) \in [-a, b]$, deduzimos que

- Se $z \in (-\infty, -a)$, então $z - \Pi_{\Psi_{ad}}(z) = z + a < -a + a = 0$.
- Se $z \in (b, +\infty)$, então $z - \Pi_{\Psi_{ad}}(z) = z - b > b - b = 0$.

Além disso,

$$\xi - \Pi_{\Psi_{ad}}(z) = \begin{cases} \xi - a > -a + a = 0, & \text{se } z \in (-\infty, -a) \\ \xi - b < b - b = 0, & \text{se } z \in (b, +\infty). \end{cases}$$

Em todo caso, temos que

$$(z - \Pi_{\Psi_{ad}}(z)) \cdot (\xi - \Pi_{\Psi_{ad}}(z)) \leq 0.$$

Portanto, como $z(x, t) \notin [-a, b]$ q.s. e $\Pi_{\Psi_{ad}}(z) = -a$ ou b , obtemos que

- Se $z(x, t) < -a$, então $\Pi_{\Psi_{ad}}(z) = -a$. Logo,

$$|\Pi_{\Psi_{ad}}(z)(x, t)| \leq |z(x, t)| \text{ q.s..}$$

- Se $z(x, t) \geq b$, então $\Pi_{\Psi_{ad}}(z) = b$. Logo,

$$|\Pi_{\Psi_{ad}}(z)(x, t)| \leq |z(x, t)| \text{ q.s..}$$

Isso conclui a prova da proposição.

□

Retornemos à prova do teorema. De forma análoga, podemos definir uma função σ tal que $\Pi_{V_{ad}}(z)$ pode ser expressado da forma $\Pi_{V_{ad}} = \sigma(z)z$ para todo $z \in L^2(Q \times (0, T))$. Portanto, o problema de controlabilidade se resume a encontrar $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que a solução de

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + ay = h\mathbb{1}_\omega - \tilde{\sigma}(q)\frac{1}{\ell^2}q\mathbb{1}_\mathcal{O} + \tilde{\rho}(q)\frac{1}{\gamma^2}q & \text{em } Q, \\ -q_t - \Delta q + aq = (y - y_d)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ y = q = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad q(x, T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.26)$$

satisfaz $y(T) = 0$, onde $\tilde{\sigma}(q) = \sigma(-\frac{1}{\ell^2}q|_\mathcal{O})$ e $\tilde{\rho}(q) = \rho(\frac{1}{\gamma^2}q)$.

Para cada $\tilde{q} \in L^2(Q)$, consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + ay = h\mathbb{1}_\omega - \tilde{\sigma}(\tilde{q})\frac{1}{\ell^2}\tilde{q}\mathbb{1}_\mathcal{O} + \tilde{\rho}(\tilde{q})\frac{1}{\gamma^2}\tilde{q} & \text{em } Q, \\ -q_t - \Delta q + aq = (y - y_d)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ y = q = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad q(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.27)$$

Podemos obter uma desigualdade de observabilidade, como em (3.72), para o sistema adjunto a (4.27), dado por

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta \varphi + a\varphi = \theta\mathbb{1}_{\mathcal{O}_d} & \text{em } Q, \\ \theta_t - \Delta \theta + c\theta = -\frac{1}{\ell^2}\tilde{\sigma}(\tilde{q})\varphi\mathbb{1}_\mathcal{O} + \frac{1}{\gamma^2}\tilde{\rho}(\tilde{q})\varphi & \text{em } Q, \\ \varphi = \theta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(x, T) = \varphi^T(x), \quad \theta(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Observemos que o sistema acima ainda satisfaz todos os pontos cruciais como no caso semilinear. De fato, como $\|\tilde{\rho}(\tilde{\mathbf{q}})\|_\infty, \|\tilde{\sigma}(\tilde{\mathbf{q}})\|_\infty \leq 1$, então

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{\ell^2} \tilde{\sigma}(\tilde{\mathbf{q}}) \varphi \mathbb{1}_O + \frac{1}{\gamma^2} \tilde{\rho}(\tilde{\mathbf{q}}) \varphi \right|^2 &\leq \left(\frac{1}{\ell^2} \|\tilde{\sigma}(\tilde{\mathbf{q}})\|_\infty + \frac{1}{\gamma^2} \|\tilde{\rho}(\tilde{\mathbf{q}})\|_\infty \right)^2 |\varphi|^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{\ell^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 |\varphi|^2. \end{aligned}$$

Logo, tomando λ suficientemente grande, ainda podemos obter (3.26).

Ainda com a propriedade de $\|\tilde{\sigma}(\tilde{\mathbf{q}})\|_\infty, \|\tilde{\rho}(\tilde{\mathbf{q}})\|_\infty \leq 1$, conseguimos manter as desigualdades em (3.29) e (3.63). Nas demais passagens para se obter (3.72), a adição dos termos $\tilde{\sigma}(\tilde{\mathbf{q}})$ e $\tilde{\rho}(\tilde{\mathbf{q}})$ não interfere em nada.

Com essa nova observabilidade e seguindo os argumentos da seção 4.1.1, podemos construir um controle $\tilde{\mathbf{h}}$ para cada $\tilde{\mathbf{q}} \in L^2(Q)$ tal que

$$\|\tilde{\mathbf{y}}(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon,$$

onde $\tilde{\mathbf{y}}$ denota a primeira componente de $(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{q})$ solução de (4.27) com esse controle. Mais ainda, o controle $\tilde{\mathbf{h}}$ satisfaz

$$\|\tilde{\mathbf{h}}\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq C, \quad (4.28)$$

como na Proposição 11. Graças a (4.28), a solução controlada $(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{q})$, onde $\tilde{\mathbf{y}}$ é solução associada à $\tilde{\mathbf{q}}$, é uniformemente limitada em $W(0, T) \times W(0, T)$, pois como em (4.9) conseguimos obter

$$\|\tilde{\mathbf{y}}\|_{W(0, T)} \leq C (1 + \|\tilde{\mathbf{h}}\|_{L^2(\omega \times (0, T))}),$$

o que implica, pela estimativa de energia em $W(0, T)$, que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\|_{W(0, T)} &\leq C (\|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d\|_{L^2(Q)}) \\ &\leq C (1 + \|\tilde{\mathbf{h}}\|_{L^2(\omega \times (0, T))}). \end{aligned}$$

Portanto, podemos deduzir, via ponto fixo de Schauder, que o mapa $\tilde{\mathbf{q}} \mapsto \mathbf{q}$ solução de (4.27) possui pelo menos um ponto fixo.

O resto da prova segue análogo ao caso semilinear.

Referências

AMBROSETTI, Antonio; PRODI, Giovanni. **A Primer of Nonlinear Analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 2021.

BELMILOUDI, Aziz. On some robust control problems for nonlinear parabolic equations. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 11, n. 2, p. 119–149, 2004.

BEWLEY, Thomas R.; TEMAM, Roger; ZIANE, Mohammed. **A Generalized Framework for Robust Control in Fluid Mechanics**. [S.l.: s.n.], 1997. P. 299–316.

BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. **Introduction to Functional Analysis**. Cham: Springer International Publishing, 2025.

BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

CIPOLATTI, Ruy. **Cálculo Avançado**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

EKELAND, Ivar; TÉMAM, Roger. **Convex Analysis and Variational Problems**. [S.l.]: Society for Industrial e Applied Mathematics, 1999.

EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2010.

FERNÁNDEZ, L. A.; ZUAZUA, E. Approximate controllability for the semilinear heat equation involving gradient terms. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 101, n. 2, p. 307–328, 1999.

FURSIKOV, A. V.; IMANUVILOV, O. Yu. **Controllability of Evolution Equations**. [S.l.]: Springer.

HERNÁNDEZ-SANTAMARÍA, V.; TERESA, L. de. Robust Stackelberg controllability for linear and semilinear heat equations. **Evolution Equations & Control Theory**, v. 7, n. 2, p. 247–273, 2018.

KESAVAN, S. **Nonlinear Functional Analysis: A First Course**. 2. ed. Delhi: Jainendra K Jain, 2021.

LADYZHENSKAYA, Olga A.; SOLONNIKOV, V. A.; URAL'CEVA, Nina N. **Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type**. Providence: American Mathematical Society, 2011.

LIONS, J. L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. **SIAM Review**, v. 30, n. 1, p. 1–68, 1988.

_____. Some remarks on Stackelberg's optimization. **Mathematical Models & Methods in Applied Sciences (M3AS)**, v. 4, n. 4, p. 477–487, 1994.

SEIDMAN, T. I.; ZHOU, H.-X. Existence and uniqueness of optimal controls for a quasilinear parabolic equation. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 20, n. 6, p. 747–762, 1982.

SERRANO, R. An alternative proof of the Aubin–Lions lemma. **Archiv der Mathematik**, v. 101, n. 3, p. 253–257, 2013.

VAN TIEL, Joram. **Convex Analysis: An Introductory Text**. Chichester: John Wiley & Sons, 1984.

VON STACKELBERG, Heinrich. **Marktform und Gleichgewicht**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 1934.

YAMAMOTO, M.; IMANOUILOV, Yu. Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations. **Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences**, v. 39, n. 2, p. 227–274, 2003.