



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

**Rigidez e desigualdades espectrais para subvariedades  
compactas com bordo**

**Erisvaldo Vêras Vieira**

**Teresina - 2025**

**Erisvaldo Vêras Vieira**

**Tese de Doutorado:**

**Rigidez e desigualdades espectrais para subvariedades compactas  
com bordo**

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa

Co-Orientador:

Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz

**Teresina - 2025**



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

*Rigidez e desigualdades espectrais com subvariedades compactas com bordo*


Erisvaldo Véras Vieira

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.


Tese aprovada em 28 de julho de 2025.

**Banca Examinadora:**

Documento assinado digitalmente  
 **LEANDRO DE FREITAS PESSOA**  
Data: 01/08/2025 15:18:16-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa – Orientador

Documento assinado digitalmente  
 **CICERO TIARLOS NOGUEIRA CRUZ**  
Data: 02/08/2025 10:13:14-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof. Dr. Cicero Tiarlos Nogueira Cruz – UFAL - Coorientador

Documento assinado digitalmente  
 **BARNABE PESSOA LIMA**  
Data: 08/08/2025 11:15:07-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima – UFPI

Documento assinado digitalmente  
 **RONDINELLE MARCOLINO BATISTA**  
Data: 02/08/2025 16:57:42-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista – UFPI

Documento assinado digitalmente  
 **GREGORIO PACELLI FEITOSA BESSA**  
Data: 09/08/2025 10:53:53-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa – UFC

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI  
Biblioteca Setorial do CCN

V657r Vieira, Erisvaldo Véras.  
Rigidez e desigualdades espectrais para subvariedades compactas com bordo / Erisvaldo Véras Vieira. -- 2025.  
71 f.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Piauí. Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2025.

“Orientador: Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa.  
Coorientador: Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz .”

1. Hipersuperfícies Capilares. 2. Desigualdades espectrais. 3. Índice de Estabilidade. I. Pessoa, Leandro de Freitas. II. Cruz, Cícero Tiarlos Nogueira. III. Título.

CDD 515.3

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

*Dedico este trabalho a toda a minha família, em especial ao meu pai, Edvaldo Alves Vieira, à minha mãe, Rosa Maria Veras Vieira, à minha irmã, Rosivalda Veras Vieira, e às minhas tias, Edileusa Veras Vieira (in memoriam) e Manuela Maria dos Santos (tia Dadinha) (in memoriam).*

# Agradecimentos

Agradeço Primeiramente a Deus por ter chegado até aqui, já que sem ele na minha vida nada disso seria possível!

Agradeço a toda minha família, em especial minha mãe Rosa Maria, meu pai Edvaldo, minha irmã Rosivalda e meu cunhado Rivaldo por todo o apoio dado até então nessa caminhada que parece ser fácil mas não é. Sem todos eles eu não estaria aqui agora!

Agradeço ao meu orientador, Leandro de Freitas Pessoa, por toda a ajuda ao longo desta trajetória. Sou profundamente grato pelos conselhos e ensinamentos que recebi ao longo desses 10 anos.

Um agradecimento especial aos professores Barnabé Pessoa Lima, João Xavier da Cruz Neto e Jurandir de Oliveira Lopes, que desde o início da minha trajetória na UFPI me ajudaram bastante. Sou muito grato a vocês.

Agradeço a todos os meus professores que tive até o ensino médio, em especial ao professor Antônio Cardoso do Amaral, pessoa sempre presente em minha vida e por quem tenho um carinho muito grande; ao professor Aniceto Freitas, por sempre me incentivar a ir mais longe e pelos conselhos que sigo até hoje; ao professor Raimundo, que também esteve presente em toda essa trajetória; e à diretora e professora Aurilene, pelas conversas e pelo constante incentivo aos estudos. Agradeço também aos professores do departamento de matemática da UFPI, em especial ao professor Bruno Vasconcelos Mendes, um amigo que me deu grande apoio ao longo do desenvolvimento da tese. Obrigado a todos.

Agradeço aos professores Rondinele Marcolino Batista, Barnabé Pessoa Lima, Cícero Tiarlos Nogueira Cruz e Gregório Pacelli Feitosa Bessa por terem aceito o convite e participarem da banca examinadora e por todas sugestões para o melhoramento da minha tese de doutorado.

---

Agradeço ao meu amigo e irmão por consideração João Vinícius, uma pessoa muito importante na minha vida e que me ajudou bastante até aqui. Sou muito grato pela nossa amizade, pelo nosso convívio! Agradeço também a toda sua família por todo o apoio que recebi durante esses 10 anos de convívio, em especial a sua mãe Valda Maria e sua irmã Geovana. Obrigado a todos, de coração!

Um agradecimento especial à minha turma do terceiro ano do ensino médio, composta por pessoas de meu apreço, meus amigos que caminharam comigo desde o quinto ano do ensino fundamental.

Agradeço de coração aos meus amigos Sandoel Vieira, Marilene Magalhães, Rodolfo Fontenele, Ricael Daniel, Fátima, Deylane, Anderson e Jeferson (Seno e Cosseno), pessoas que caminharam comigo, me dando conselhos e que sempre estiveram a disposição pra me ajudar quando precisei. Sou muito grato!

Agradeço a todos os amigos que conheci na minha trajetória até aqui na UFPI. Em especial ao José Edilson, Raynara, Ruan Diego, Hotávio Fonseca, Kevin Marçal, Emília Amorim, Juliano Nascimento, Antônio Nilson, Marcos Carvalho, Júlio José, Danrley, André, Alexia, Osvaldo, George Lucas, Lucas Bandeira, Melquisedeque, Ousadia, Raylan, Pedro Paulo, Pedro Rodrigues, Raimundo Bruno, Christopher, Severino, Idalina, Jaciane, Leonardo Silva, Nielson, Edimilson Lopes, Igor, Douglas Rafael, Michell Dhouglas, Sillas Augusto, Raimundo(Xerox) Raquel Lemos, Paulo Sérgio, Jonatas Arrais, Suerlan, Atécio Alves, Jordan, Bruno, Antônio Aguiar, Rui Marques, Lucas Viana, Jardiel, Kadu, Jefferson de Brito, João Santos, Alexandre Bezerra, Rafael Emanuel, Dário e os Danilos.

Por fim, agradeço a FAPEPI pelo apoio financeiro.

*"Ser professor, é algo social. Você precisa ver mudanças no lugar onde vive".*

Antônio Cardoso do Amaral.

# Resumo

Neste trabalho, estuda-se subvariedades com bordo não vazio, propriamente mergulhadas em variedades com bordo, com vistas à obtenção de resultados de rigidez e desigualdades espectrais. Em um primeiro momento, obtemos estimativas de área para hipersuperfícies capilares estáveis com curvatura média constante  $\Sigma$ , com invariante de Yamabe não positivo, que são propriamente mergulhadas em uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $M$  com curvatura escalar  $R^M$  e curvatura média do bordo  $H^{\partial M}$  limitadas inferiormente. Também demonstramos um resultado de rigidez local no caso em que  $\Sigma$  é mergulhada e minimiza a  $\mathcal{J}$ -energia. Em um segundo momento, estabelecemos desigualdades espectrais envolvendo o  $k$ -ésimo autovalor de Steklov para o operador Laplaciano definido em uma subvariedade com bordo conformemente propriamente imersa na bola unitária do espaço Euclidiano em termos do volume conforme da imersão, do volume do bordo e do volume da subvariedade. Mais geralmente, consideramos operadores do tipo Schrödinger-Steklov, incluindo os casos do Laplaciano conforme. Por fim, apresentamos um resultado de extremização do tipo Hersch e estimativas para o índice dos operadores do tipo Schrödinger-Steklov.

**Palavras-Chaves:** Hipersuperfícies capilares, curvatura média constante, estabilidade, autovalores de Steklov, operador do tipo Schrödinger-Steklov, desigualdades espectrais, índice de estabilidade.

# Abstract

In this work, we study submanifolds with non-empty boundary properly immersed in manifolds with boundary, aiming to obtain rigidity results and spectral inequalities. First, we derive area estimates for stable capillary hypersurfaces with constant mean curvature  $\Sigma$  and non-positive Yamabe invariant, properly immersed in an  $n$ -dimensional Riemannian manifold  $M$  whose scalar curvature  $R^M$  and boundary mean curvature  $H^{\partial M}$  are bounded below. We also prove a local rigidity result in the case where  $\Sigma$  is immersed and minimizes the J-energy. Next, we establish spectral inequalities involving the  $k$ -th Steklov eigenvalue for the Laplace operator defined on a submanifold with boundary conformally properly immersed in the unit ball of Euclidean space, in terms of the conformal volume of the immersion, the boundary volume, and the volume of the submanifold. More generally, we consider Schrödinger–Steklov type operators, including the conformal Laplacian as a particular case. Finally, we present a Hersch-type extremal result and index estimates for Schrödinger–Steklov type operators.

**Keywords:** Capillary hypersurfaces; constant mean curvature; stability; Steklov eigenvalues; Schrödinger–Steklov type operator; spectral inequalities; stability index.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>8</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>16</b>
1.1 Hipersuperfícies capilares . . . . .	16
1.2 $\mathcal{J}$ -estabilidade . . . . .	21
1.3 Invariante de Yamabe e o problema de Yamabe . . . . .	24
1.4 Decomposição de um espaço métrico com medida por anéis . . . . .	25
1.5 Volume conforme relativo . . . . .	26
1.6 Operadores do tipo Schrödinger-Steklov . . . . .	27
<b>2 Hipersuperfícies capilares</b>	<b>33</b>
2.1 Estimativas de área . . . . .	33
2.2 Rigidez de hipersuperfícies capilares . . . . .	36
<b>3 Espectro de Steklov</b>	<b>50</b>
3.1 Construção das funções testes . . . . .	50
3.2 Estimativas para o espectro de Steklov via volume conforme relativo . . . . .	54
3.3 Estimativas para o operador Laplaciano Conforme . . . . .	57
3.4 Resultados de Extremização do tipo Hersch . . . . .	61
3.5 Operador do tipo Schrödinger-Steklov . . . . .	63
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>67</b>

# Introdução

Nas últimas décadas, o estudo de hipersuperfícies propriamente mergulhadas em variedades com bordo tem-se destacado como uma área de grande interesse na geometria diferencial. Diversos avanços foram obtidos, abrangendo desde resultados geométrico-topológicos, que revelam fortes relações entre hipóteses sobre a curvatura do ambiente e propriedades topológicas das hipersuperfícies, até resultados de natureza analítica, como desigualdades espectrais envolvendo autovalores de operadores elípticos com condições de contorno.

Diversos resultados de rigidez foram obtidos para superfícies (ou hipersuperfícies) mínimas ou de curvatura média constante (cmc), fechadas ou compactas com bordo capilar, sob diferentes hipóteses sobre a curvatura escalar da variedade ambiente.

O estudo das superfícies capilares remonta ao célebre trabalho de T. Young [57], que investigou o comportamento de um líquido incompressível em um recipiente na ausência de gravidade. Variacionalmente, as superfícies capilares surgem como pontos críticos de um funcional de energia que envolve a área da superfície de interface entre o fluido e o ar, a área molhada no bordo do recipiente e o ângulo constante de contato entre a superfície de interface e a borda do espaço ambiente (ver [22]).

Um grande número de trabalhos tem se dedicado ao estudo de superfícies capilares estáveis, isto é, superfícies que minimizam a energia até a segunda ordem. Por exemplo, A. Ros e E. Vergasta [47] demonstraram que hipersuperfícies mínimas com bordo livre mergulhadas em uma bola de uma forma espacial são totalmente umbílicas. O caso das superfícies cmc com bordo livre foi resolvido por meio da combinação dos esforços de [43] e [47] (ver também [7]). Esse resultado foi finalmente estendido para hipersuperfícies cmc capilares em [55].

Com base nos teoremas de rigidez para superfícies fechadas minimizantes de área obtidos em [9, 10, 38, 44], L.C. Ambrozio [2] investigou a rigidez de superfícies com bordo livre minimizantes de área mergulhadas em uma variedade riemanniana tridimensional  $M$ , estabelecendo uma importante relação entre a curvatura escalar de  $M$ , a curvatura média de  $\partial M$

e a topologia (característica de Euler) de superfícies mínimas estáveis, a qual conduz a uma decomposição local da variedade ambiente ao longo da superfície. O mesmo problema foi investigado em [35, 37] para superfícies cmc capilares.

Em dimensões mais altas, resultados de rigidez foram obtidos para hipersuperfícies fechadas em [11, 41], nas quais o invariante topológico considerado foi o chamado invariante de Yamabe, em vez da característica de Euler. De fato, para variedades fechadas, o invariante de Yamabe pode ser visto como uma generalização da característica de Euler, pois uma variedade com invariante de Yamabe não positivo não admite uma métrica de curvatura escalar positiva (ver [50], Lema 1.2).

Além disso, A. Barros e C. Cruz [8] obtiveram estimativas de área para hipersuperfícies mínimas compactas e estáveis com bordo livre, em termos do invariante de Yamabe e da curvatura escalar do ambiente. Eles também obtiveram resultados de rigidez e de divisão local para variedades que possuem uma hipersuperfície que minimiza a área (ou a energia). Recentemente, de Almeida e A. Mendes [16], entre outros resultados, estenderam os principais resultados de [8] para o contexto de superfícies marginalmente aprisionadas exteriormente com bordo livre (free boundary marginally outer trapped surfaces, MOTS), no contexto de dados iniciais com bordo.

No primeiro capítulo desta tese, com base em [8, 37], obtemos resultados de rigidez envolvendo hipersuperfícies cmc capilares compactas estáveis, através de desigualdades que envolvem o invariante de Yamabe, bem como as áreas da hipersuperfície e de seu bordo.

No primeiro teorema, estabelecemos estimativas para a área do bordo e para a área da própria hipersuperfície.

**Teorema 1.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana ( $n \geq 4$ ) com bordo  $\partial M$ . Seja  $\Sigma^{n-1}$  uma hipersuperfície cmc capilar com ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$ , compacta, propriamente imersa em  $M$ , 2-lados e estável.*

*i) Suponha que  $H^{\partial M} + H \cos \theta \geq 0$ ,  $\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2 < 0$  e  $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$ . Então, a área de  $\Sigma$  satisfaz*

$$A(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} \geq \frac{Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2} \geq \frac{\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2}. \quad (1)$$

*ii) Suponha que  $R^M + \frac{n}{n-1}H^2 \geq 0$ ,  $\inf H^{\partial M} + H \cos \theta < 0$  e  $\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$ . Então, a área de  $\partial\Sigma$  satisfaz*

$$A(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-2}} \geq \frac{\sin \theta}{2} \frac{Q_g^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf H^{\partial M} + H \cos \theta} \geq \frac{\sin \theta}{2} \frac{\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf H^{\partial M} + H \cos \theta}.$$

No segundo resultado, investigamos a rigidez de variedades que contêm uma hipersuperfície capilar que minimiza a energia, em relação ao funcional de energia  $\mathcal{J}$  (ver. Seção 1.1). O resultado deve ser comparado com [8, Teorema 2], e fornece um análogo para o caso de curvatura média constante (*cmc*) que não foi considerado em [8, Teorema 3].

**Teorema 2.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana ( $n \geq 4$ ) com bordo  $\partial M$ . Seja  $\Sigma^{n-1}$  uma hipersuperfície 2-lados  $\mathcal{J}$ -minimizante, propriamente mergulhada em  $M$ , com ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$ , tal que  $H^{\partial M} + H \cos \theta \geq 0$ . Se  $\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2 < 0$ ,  $\sigma_{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$ , e a igualdade ocorre em (1), então  $\Sigma$  é uma hipersuperfície mínima com bordo livre, infinitesimalmente rígida e existe uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $M$  isométrica a  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ , dotada da métrica  $dt^2 + g$ , onde  $g$  é a métrica induzida em  $\Sigma$ , a qual é Einstein com bordo totalmente geodésico  $\partial\Sigma$ .*

No terceiro resultado, assumimos novas hipóteses sobre a curvatura escalar e sobre a curvatura média do bordo da variedade ambiente.

**Teorema 3.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana ( $n \geq 4$ ) com bordo  $\partial M$ . Seja  $\Sigma^{n-1}$  uma hipersuperfície 2-lados  $\mathcal{J}$ -minimizante, propriamente mergulhada em  $M$  com ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$ , tal que  $H^{\partial M} + H \cos \theta \geq 0$ . Se  $R^M + \frac{n}{n-1}H^2 \geq 0$  e  $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0$ , então  $\Sigma$  é uma hipersuperfície *cmc capilar* de curvatura média constante infinitesimalmente rígida e existe uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $M$  isométrica a  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ , munida da métrica  $dt^2 + e^{-2Ht}g$ , onde  $g$  é a métrica induzida em  $\Sigma$ , a qual é Ricci plana com bordo totalmente geodésico  $\partial\Sigma$ .*

Em se tratando de desigualdades, nas últimas décadas foram obtidos diversos resultados envolvendo os autovalores de operadores elípticos de segunda ordem em variedades fechadas de dimensão  $n = 2$ . Podemos citar, por exemplo, os trabalhos de Hersch [31] (1970), Yang e Yau [56] (1980), Korevaar [33] (1993) e Hassannezhad [29] (2011), envolvendo o espectro do operador Laplaciano, além do volume da variedade e de seu gênero.

Li e Yau [36], em dimensão  $n = 2$ , e, mais tarde, El Soufi e Ilias [17], em dimensões maiores, mostraram que o primeiro autovalor do Laplaciano em uma variedade fechada  $(\Sigma^n, g)$  satisfaz uma desigualdade envolvendo o  $m$ -volume conforme da própria variedade, além da dimensão  $n$ . Em seguida, Kokarev [32], tendo em vista que o espectro do Laplaciano é discreto e ilimitado, mostrou que os autovalores de ordem mais alta desse operador satisfazem uma

desigualdade envolvendo o  $m$ -volume conforme da variedade e de uma constante dependendo das dimensões  $m$  e  $n$  somente.

A. Fraser e R. Schoen [23] introduziram o que seria o  $m$ -volume relativo conforme para variedades compactas com bordo, levando em conta imersões na bola, em analogia com o  $m$ -dimensional volume conforme para variedades fechadas, considerando imersões na esfera, introduzido por Li e Yau [36].

Foi mostrado em [23] que o  $m$ -volume relativo conforme fornece um limite superior geral para o primeiro autovalor não nulo de Steklov  $\sigma_1$  de  $\Sigma$ . Mais precisamente, eles demonstraram que

$$\sigma_1 \text{Vol}(\partial\Sigma) \text{Vol}(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}} \leq V^{rc}(\Sigma, m)^{2/n} \cdot n.$$

Além disso, a igualdade ocorre se existir uma aplicação harmônica conforme

$$\psi: \Sigma \rightarrow \mathbb{B}^m$$

que seja uma isometria em  $\partial\Sigma$ , com  $\psi(\partial\Sigma) \subset \partial\mathbb{B}^m$ , e tal que  $\psi(\Sigma)$  intercepte  $\partial\mathbb{B}^m$  ortogonalmente ao longo de  $\psi(\partial\Sigma)$ .

Em um primeiro momento, no terceiro capítulo desta tese, inspirados nos resultados obtidos por Kokarev [32], demonstraremos estimativas superiores para o  $k$ -ésimo autovalor de Steklov, envolvendo o  $m$ -volume conforme relativo introduzido em [23].

**Teorema 4.** *Seja  $\Sigma^n$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo não vazio e dimensão  $n \geq 2$ , que admite uma imersão própria conforme  $\psi: \Sigma^n \rightarrow \mathbb{B}^m$ , tal que  $\psi(\partial\Sigma^n) \subset \partial\mathbb{B}^m$ . Então, para cada  $k \geq 1$ , o  $k$ -ésimo autovalor de Steklov em  $\Sigma$  satisfaz a desigualdade*

$$\sigma_k \text{Vol}(\partial\Sigma) \text{Vol}(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}} \leq C \cdot V^{rc}(\Sigma, m)^{2/n} k^{2/n},$$

onde  $C = C(n, m) > 0$  depende apenas das dimensões  $n$  e  $m$ .

Inspirados em Kokarev [32] e Sire e Xu [49], demonstraremos o seguinte resultado que trata de estimativas para o  $k$ -ésimo autovalor de um problema do tipo Schrödinger-Steklov, mais especificamente, o operador Laplaciano conforme definido em uma variedade compacta com bordo, envolvendo o  $m$ -volume conforme relativo da variedade.

**Teorema 5.** *Para toda métrica  $\tilde{g} \in [g]$ , o  $k$ -ésimo autovalor para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_{\tilde{g}} u + c_n R_{\tilde{g}} u = 0 & \text{em } \Sigma^n \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{\eta}} + b_n H_{\tilde{g}} = \sigma u & \text{em } \partial\Sigma^n, \end{cases}$$

satisfaz a desigualdade

$$\sigma_k(\Sigma, \tilde{g}) \text{Vol}(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}} \int_{\partial\Sigma} u^{\frac{2}{n-2}} \leq C(n) \left[ V_{rc}(\Sigma, m, \phi) + \|R_g\|_{\frac{n}{2}} + \|H_g\|_{\frac{n}{2}} \left( \frac{\text{Vol}(\partial\Sigma)}{\text{Vol}(\Sigma)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \right] k^{\frac{2}{n}},$$

onde  $R_{\tilde{g}}$  denota a curvatura escalar da variedade  $(\Sigma^n, \tilde{g})$ ,  $H_{\tilde{g}}$  denota a curvatura média do bordo  $\partial\Sigma^n$  em relação à métrica  $\tilde{g}$  e  $C(n)$  é uma constante que depende apenas de  $n$ .

Ainda no contexto do operador Laplaciano conforme, estudamos resultados de extremização de métricas do tipo Hersch. Hersch [29] provou que a métrica padrão maximiza o primeiro autovalor do Laplaciano  $\lambda_1$  entre todas as métricas Riemannianas de mesma área. Além disso, ela é a única maximizadora, a menos de isometria. Para um análogo do teorema de Hersch para superfícies com bordo no contexto dos autovalores de Steklov, veja Fraser e Schoen [23]. Na Seção 3.4, apresentamos um resultado do tipo Hersch no nosso contexto. Mais precisamente, considerando o supremo sobre a classe conforme

$$\Lambda_k(\Sigma, g) = \sup_{\tilde{g} \in [g]} \bar{\sigma}_k(\Sigma, g, \tilde{g}),$$

onde

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma, g, \tilde{g}) = \left( \sigma_k(\Sigma, \tilde{g}) \cdot \int_{\partial\Sigma} u^{\frac{2}{n-2}} d\nu_{\partial\Sigma} \right), \text{ para } k \in \mathbb{N},$$

levando em conta os autovalores do problema dado no teorema 5, temos o seguinte resultado:

**Teorema 6.** *Seja  $(\mathbb{B}^n, g)$  a bola unitária munida com a métrica Euclidiana. Então*

$$\Lambda_1(\mathbb{B}^n, g) = \bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, g).$$

*Além disso,  $\Lambda_1(\mathbb{B}^n, g) = \bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, \tilde{g})$  se, e somente se,  $\tilde{g}$  é a métrica Euclidiana a menos de um produto por escalar.*

Existem também muitas estimativas envolvendo o número de autovalores negativos para o operador de Schrödinger. Dentre elas, podemos citar um resultado devido a Grigor'yan, Netrusov e Yau [27], onde mostram que, para todo potencial não-negativo  $\mathcal{V} \in L^p(\Sigma^n)$ , com  $p > n/2$ , o número de autovalores negativos  $N(\mathcal{V})$  em uma variedade fechada  $(\Sigma^n, g)$  satisfaz a desigualdade

$$N(\mathcal{V}) \geq \frac{C}{\text{Vol}_g(\Sigma^n)^{n/2-1}} \left( \int_{\Sigma^n} \mathcal{V} d\text{Vol}_g \right)^{n/2},$$

onde a constante  $C$  depende apenas da classe conforme da métrica  $g$ . Neste sentido, Kokarev [32] mostra que a dependência da constante  $C$  na classe conforme da métrica  $g$  pode ser incorporada no volume conforme.

Motivados nesses trabalhos, tratamos no Teorema 7 de uma desigualdade envolvendo o número de autovalores negativos para operadores do tipo Schrödinger-Steklov, considerando funções potenciais mais gerais.

**Teorema 7.** *Seja  $\Sigma^n$  uma variedade Riemanniana compacta com  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  e dimensão  $n \geq 2$ . Então, para todo inteiro  $m > 0$  onde o  $m$ -volume conforme de  $\Sigma$  está definido, e para quaisquer funções  $\mathcal{V}_1 \in L^\infty(\Sigma^n)$  e  $\mathcal{V}_2 \in L^\infty_+(\partial\Sigma^n)$ , onde 0 não pertence ao espectro de  $-(\Delta^D + \mathcal{V}_1)$ , o número de autovalores negativos para o problema*

$$\begin{cases} \Delta u + \mathcal{V}_1 u = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} - \mathcal{V}_2 u = \sigma u & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (2)$$

satisfaz a desigualdade

$$N(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \geq \frac{C(n, m)}{\left[ V_c^*(m, \Sigma^n)^{\frac{2}{n}} + \left( \int_{\Sigma} (\mathcal{V}_1)_-^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \right]^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\text{Vol}_g(\Sigma^n)^{n/2-1}} \left( \int_{\partial\Sigma^n} \mathcal{V}_2 d\text{Vol}_g \right)^{n/2},$$

onde  $C(n, m)$  é uma constante dependendo somente de  $n$  e  $m$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições, notações e resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes. Inicialmente, abordaremos hipersuperfícies capilares, a  $\mathcal{J}$ -estabilidade e o problema de Yamabe. Em seguida, discutiremos resultados e definições envolvendo espaços métricos com medida, definiremos o  $m$ -volume conforme relativo de uma hipersuperfície compacta  $\Sigma$  com bordo  $\partial\Sigma$ , e apresentaremos uma caracterização variacional para o espectro de Steklov, ou mais genericamente para o operador do tipo Schrödinger-Steklov. Não demonstraremos todos os resultados, mas indicaremos as devidas referências.

### 1.1 Hipersuperfícies capilares

Sejam  $(M^n, \bar{g})$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M \neq \emptyset$ ,  $\Sigma^m$  uma variedade diferenciável com bordo  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  e  $f : \Sigma^m \rightarrow M^n$  uma aplicação diferenciável. Dizemos que  $f$  é uma imersão suave com bordo quando  $df_p : T_p\Sigma^m \rightarrow T_{f(p)}M^n$  é injetiva para todo  $p \in T_p\Sigma$ . Quando  $m = n - 1$ , dizemos que  $f$  é uma hipersuperfície suave com bordo.

Dizemos que  $f$  é um mergulho suave com bordo quando:

- (i)  $f$  é uma imersão suave com bordo.
- (ii)  $f : \Sigma^{n-1} \rightarrow f(\Sigma^{n-1}) \subset M^n$  é um homeomorfismo, onde a topologia de  $f(\Sigma^n)$  é a topologia subespaço.

**Definição 1.** Dizemos que  $f$  é uma imersão própria quando a mesma é uma imersão e  $f(\Sigma) \cap \partial M = f(\partial\Sigma)$ . Analogamente, dizemos que  $f$  é um mergulho próprio quando o mesmo é um mergulho e  $f(\Sigma) \cap \partial M = f(\partial\Sigma)$ .

**Definição 2.** Dizemos que a hipersuperfície  $\Sigma$  é 2-lados quando existe um campo de vetores normais definido globalmente em  $\Sigma$ .

Seja  $f : \Sigma^{n-1} \rightarrow M^n$  uma imersão suave com bordo. A métrica Riemanniana de  $M^n$  induz de forma natural uma métrica Riemanniana em  $\Sigma^n$ , chamada de métrica induzida, dada por

$$g_p(v_1, v_2) = \bar{g}_{f(p)}(df_p(v_1), df_p(v_2)),$$

onde  $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$ . Com essa métrica,  $\varphi$  é chama de imersão isométrica.

Definiremos a segunda forma fundamental, a curvatura média e outros conceitos importantes para fixar a notação a ser utilizada no decorrer do texto.

Considere  $N$  o normal unitário de  $\Sigma$  ao longo de  $\varphi$ ,  $\nu$  o conormal unitário de  $\partial\Sigma$  em  $\Sigma$  apontando para fora,  $\bar{N}$  o normal unitário de  $\partial M$  apontando para fora e  $\bar{\nu}$  o normal unitário de  $\partial\Sigma$  em  $\partial M$  tal que as bases  $\{N, \nu\}$  e  $\{\bar{N}, \bar{\nu}\}$  tenham a mesma orientação.

**Definição 3.** Seja  $\varphi : \Sigma^{n-1} \rightarrow M^n$  uma imersão própria 2-lados. Definimos por

1.  $A(X, Y) = g(-\nabla_X N, Y)$  a segunda forma fundamental de  $\Sigma$  com respeito a  $N$ , onde  $X, Y \in T\Sigma$ .
2.  $II^{\partial M}(Z, W) = g(\nabla_Z \bar{N}, W)$  a segunda forma fundamental de  $\partial M$  com respeito a  $-\bar{N}$ , onde  $Z, W \in T\partial M$ .
3.  $h^{\partial\Sigma}(z, w) = g(\nabla_z \nu, w)$  a segunda forma fundamental de  $\partial\Sigma$  com respeito a  $-\nu$ , onde  $z, w \in T\partial\Sigma$ .

A curvatura média de  $\Sigma$  é definida como sendo

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} A(e_i, e_i),$$

onde  $\{e_i\}_{i=1}^{n-1} \subset T\Sigma$  é um referencial ortonormal. Já a curvatura média de  $\partial\Sigma$  é dada por

$$k_g = \sum_{i=1}^{n-2} h^{\partial\Sigma}(f_i, f_i),$$

onde  $\{f_i\}_{i=1}^{n-2} \subset T\partial\Sigma$  é um referencial ortonormal. Analogamente, temos a definição de curvatura média  $H^{\partial M}$  para a  $\partial M$ , usando  $II^{\partial M}$ .

Sejam  $X, Y, Z$  e  $W$  campos vetoriais definidos em  $M$  e  $\mathcal{F}(M)$  o espaço de funções suaves de  $M$ . O tensor curvatura de Riemann de  $M$  é a aplicação  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  dada por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle.$$

Considere  $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$  um referencial ortonormal em  $p \in M$ . O tensor de Ricci de  $M$  em  $p$  é dado por

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n-1} R(X, e_i, Y, e_i).$$

A curvatura escalar  $R^M$  é a função  $R^M : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$R^M(p) = \text{Tr}(\text{Ric}) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Ric}(e_i, e_i),$$

onde  $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$  uma base ortonormal em  $p \in M$ .

O lema a seguir terá um papel fundamental nas próximas demonstrações. A equação apresentada nesse lema é conhecida como equação de Gauss.

**Lema 1.** *Seja  $\varphi : \Sigma^{n-1} \rightarrow M^n$  uma imersão isométrica. Então*

$$\text{Ric}(N, N) = \frac{1}{2}(R^M - R_g + H^2 - |A|^2).$$

*Demonstração.* Veja [34, Corolário 2.7]. □

**Definição 4.** *Uma função  $\Phi : \Sigma^{n-1} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$  é chamada de variação própria da imersão  $\varphi$  quando*

1.  $\varphi_t : \Sigma^{n-1} \rightarrow M^n$  definida por  $\varphi_t(x) = \Phi(x, t)$  é uma imersão própria para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .
2.  $\varphi_0(x) = \varphi$ .

Seja  $\Phi$  uma variação própria de  $\varphi$ . O campo variacional associado a essa variação é dado por

$$\xi(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0).$$

Definiremos alguns funcionais importantes relacionados a variação de uma imersão. O funcional área  $A : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$A(t) = \int_{\Sigma} dA_{\varphi_t^* \bar{g}},$$

onde  $dA_{\varphi_t^* \bar{g}}$  denota o elemento de área de  $(\Sigma, \varphi_t^* \bar{g})$ .

O funcional volume  $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$V(t) = \int_{\Sigma \times [0, t]} \Phi^*(dV),$$

onde  $dV$  denota o elemento de volume de  $M$ .  $V$  expressa o volume dado entre  $\varphi_t(\Sigma)$  e  $\varphi_0(\Sigma)$ .

O funcional wetting area  $W : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$W(t) = \int_{\partial\Sigma \times [0,t]} \Phi^*(dA_{\partial M}),$$

onde  $dA_{\partial M}$  denota o elemento de área de  $\partial M$ .

O funcional  $J : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$\mathcal{J}(t) = A(t) - (\cos \theta)W(t) + (n - 1)V(t).$$

Seja  $\Phi$  uma variação qualquer da imersão  $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ . As fórmulas de primeira variação para  $A(t)$ ,  $V(t)$  e  $J(t)$  são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} A'(0) &= - \int_{\Sigma} Hf dA + \int_{\partial\Sigma} g(\xi, \nu) dL \\ V'(0) &= \int_{\Sigma} f dA \\ \mathcal{J}'(0) &= \int_{\Sigma} ((n - 1) - H)f dA + \int_{\partial\Sigma} g(\xi, \nu - (\cos \theta)\bar{\nu}) dL, \end{aligned}$$

onde  $f = g(\xi, N)$  e  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma$  com respeito a  $N$ .

Dizemos que uma variação  $\phi$  preserva volume quando  $V(t) = 0, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Dizemos também, que  $\Sigma$  é uma hipersuperfície capilar cmc quando tem curvatura média constante e  $g(N, \bar{N}) = \cos \theta$  ao longo de  $\partial\Sigma$ . Se  $\Sigma$  é mínima e  $g(N, \bar{N}) = \cos \theta$  ao longo de  $\partial\Sigma$ , dizemos  $\Sigma$  é uma hipersuperfície mínima capilar.

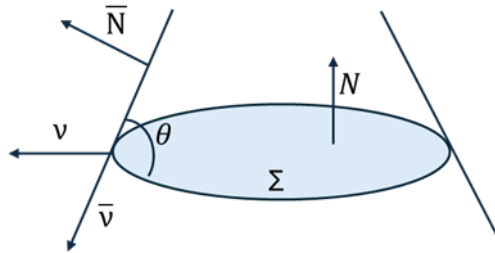


Figura 1.1: Adaptada de [37], pág 7.

Para uma hipersuperfície capilar cmc, com ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$ , as bases ortogonais  $\{N, \nu\}$  e  $\{\bar{N}, \bar{\nu}\}$  se relacionam pelas seguintes equações

$$\begin{cases} \bar{N} = (\cos \theta)N + (\sin \theta)\nu \\ \bar{\nu} = -(\sin \theta)N + (\cos \theta)\nu. \end{cases} \quad (1.1)$$

A seguir, temos caracterizações variacionais para essas classes de hipersuperfícies.

**Proposição 1.**  $\Sigma$  é uma hipersuperfície capilar com curvatura média constante  $H = n - 1$  se, e somente se,  $J'(0) = 0$  para toda variação  $\Phi$  de  $\varphi$ .

*Demonstração.* Suponha que  $\Sigma$  é cmc com  $H = n - 1$  e capilar. Isto é,

$$\langle \bar{N}, N \rangle = \langle \bar{\nu}, \nu \rangle = \cos \theta.$$

Sendo

$$\xi = \langle \xi, \bar{\nu} \rangle \bar{\nu} + \langle \xi, \bar{N} \rangle \bar{N},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \langle \xi, \nu - (\cos \theta) \bar{\nu} \rangle &= \langle \xi, \nu \rangle - (\cos \theta) \langle \xi, \bar{\nu} \rangle \\ &= \langle \langle \xi, \bar{\nu} \rangle \bar{\nu} + \langle \xi, \bar{N} \rangle \bar{N}, \nu \rangle - (\cos \theta) \langle \xi, \bar{\nu} \rangle \\ &= \langle \xi, \bar{\nu} \rangle \langle \bar{\nu}, \nu \rangle + \langle \xi, \bar{N} \rangle \langle \bar{N}, \nu \rangle - (\cos \theta) \langle \xi, \bar{\nu} \rangle \\ &= (\cos \theta) \langle \xi, \bar{\nu} \rangle + \langle \xi, \bar{N} \rangle \langle \bar{N}, \nu \rangle - (\cos \theta) \langle \xi, \bar{\nu} \rangle \\ &= \langle \xi, \bar{N} \rangle \langle \bar{N}, \nu \rangle = 0, \end{aligned}$$

onde usamos que  $\xi \in T\partial M$ , por  $\Phi_t(\partial\Sigma) \subset \partial M$ , e que  $\bar{N} \in T\partial M^\perp$ .

Portanto, pela fórmula da primeira variação do funcional  $\mathcal{J}$ , é direto que

$$\mathcal{J}'(0) = \int_{\Sigma} ((n-1) - H)f + \int_{\partial\Sigma} \langle \xi, \nu - (\cos \theta) \bar{\nu} \rangle = 0,$$

para toda variação  $\Phi$  de  $\varphi$ .

Reciprocamente, seja, a priori,  $\Phi$  uma variação própria com suporte compacto, com  $f = \langle \xi, N \rangle$ , onde  $f \in C^\infty(\Sigma)$ . Logo,

$$\mathcal{J}'(0) = \int_{\Sigma} ((n-1) - H)f = 0, \quad \forall f \in C^\infty(\Sigma),$$

e portanto  $H = n - 1$ . Considere, agora, uma variação própria definida por

$$\xi = g \langle \nu, \bar{\nu} \rangle \bar{\nu},$$

com  $g \in C^\infty(\partial\Sigma)$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{J}'(0) &= \int_{\Sigma} ((n-1) - H)f + \int_{\partial\Sigma} \langle \xi, \bar{\nu} - (\cos \theta) \nu \rangle \\ &= \int_{\partial\Sigma} \langle \xi, \nu - (\cos \theta) \bar{\nu} \rangle \\ &= \int_{\partial\Sigma} \langle g \langle \nu, \bar{\nu} \rangle \bar{\nu}, \nu - (\cos \theta) \bar{\nu} \rangle \\ &= \int_{\partial\Sigma} g \langle \nu, \bar{\nu} \rangle (\langle \nu, \bar{\nu} \rangle - (\cos \theta)), \quad \forall g \in C^\infty(\partial\Sigma), \end{aligned}$$

e assim

$$\langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}} \rangle (\langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}} \rangle - (\cos \theta)) = 0.$$

Portanto,  $\langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = 0$  ou  $\langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = \cos \theta$ . Em qualquer caso,  $\Sigma$  é capilar.  $\square$

## 1.2 $\mathcal{J}$ -estabilidade

Nesta seção veremos o conceito de  $\mathcal{J}$ -estabilidade, que é um dos pré-requisitos necessários para demonstrar os Teoremas 10 e 11 da Seção 2.2, bem como as proposições antes destes.

**Proposição 2.** *Seja  $\varphi : \Sigma^{n-1} \rightarrow M^n$  uma imersão própria. Se  $f : \Sigma^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, então existe uma variação  $\Phi$  de  $\varphi$  tal que  $f = g(\xi_\Phi, \mathbf{N})$ , onde  $\xi_\Phi$  é o campo variacional associado a  $\Phi$ .*

*Demonstração.* Veja [[1], Proposição 2.1]  $\square$

**Proposição 3.** *Seja  $\varphi : \Sigma^{n-1} \rightarrow M^n$  uma imersão capilar cmc e  $f : \Sigma^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave qualquer. Seja  $\Phi$  uma variação própria de  $\varphi$  tal que  $f = g(\xi_\Phi, \mathbf{N})$ . Então*

$$\mathcal{J}''(0) = \int_{\Sigma} \|\nabla f\|^2 - (\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + |A|^2)f^2 - \int_{\partial\Sigma} \mathfrak{q}f^2,$$

onde

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{\sin \theta} \Pi^{\partial M}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}) + (\cot \theta)A(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

*Demonstração.* Observe que

$$\mathcal{J}'(t) = \int_{\Sigma} (n-1 - H(t))f_t dA_t + \int_{\partial\Sigma} g(\xi_t, \mathbf{v}_t - (\cos \bar{\mathbf{v}}_t)) dL_t. \quad (\text{veja [46], Apêndice}).$$

Desta forma, sabendo que  $H(0) = n-1$  obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}''(0) &= - \int_{\Sigma} H'(0)f dA + (n-1 - H(0)) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \int_{\Sigma} f_t dA_t \right) \\ &\quad + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \int_{\partial\Sigma} g(\xi_t, \mathbf{v}_t - (\cos \bar{\mathbf{v}}_t)) dL_t \right) \\ &= - \int_{\Sigma} H'(0)f dA + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \int_{\partial\Sigma} g(\xi_t, \mathbf{v}_t - (\cos \bar{\mathbf{v}}_t)) dL_t \right) \\ &= \int_{\Sigma} \|\nabla f\|^2 - (\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + |A|^2)f^2 - \int_{\partial\Sigma} \mathfrak{q}f^2. \quad (\text{veja [46], Apêndice}). \end{aligned}$$

$\square$

De posse dessa Proposição, podemos definir Estabilidade.

**Definição 5.** *Seja  $\varphi : \Sigma \rightarrow M$  uma hipersuperfície propriamente imersa.*

1. Dizemos que  $\Sigma$  é  $\mathcal{J}$ -minimizante se ela for um mínimo para o funcional  $\mathcal{J}$ , isto é,

$$\mathcal{J}(0) \leq \mathcal{J}(t) \tag{1.2}$$

para toda variação própria  $\Phi$  de  $\varphi$ .

2. Se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície de curvatura média constante capilar, diz-se que ela é estável quando

$$\mathcal{J}''(0) \geq 0 \tag{1.3}$$

para toda variação própria  $\Phi$  de  $\varphi$ .

**Proposição 4.**  *$\varphi : \Sigma^{n-1} \rightarrow M^n$  é uma imersão cmc capilar  $\mathcal{J}$ -estável se, e somente se,  $Q(f, f) \geq 0 \forall f \in H^1(\Sigma)$ .*

*Demonstração.* Basta mostrarmos que o resultado é válido para  $f \in C^\infty(\Sigma)$ , e a conclusão segue do fato de que  $C^\infty(\Sigma)$  é denso em  $H^1(\Sigma)$ . Suponha que  $\mathcal{J}''(0) \geq 0$  para toda variação  $\Phi$  de  $\varphi$ . Dada  $f \in C^\infty(\Sigma)$ , existe pela Proposição 2 uma variação  $\Phi$  de  $\varphi$  com  $f = g(\xi_\Phi, N)$ , onde pela Proposição 3 temos  $Q(f, f) = \mathcal{J}''(0) \geq 0$ . Reciprocamente, suponha que  $Q(f, f) \geq 0$ , para toda  $f \in C^\infty(\Sigma)$ . Considere  $\Phi$  uma variação de  $\varphi$ . Tomando  $f = g(\xi_\Phi, N)$ , obtemos

$$\mathcal{J}''(0) = Q(f, f) \geq 0.$$

□

A partir daí temos o lema seguinte, que é de bastante importância para os resultados que seguem no capítulo seguinte.

**Lema 2.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana com  $\partial M \neq \emptyset$ , e seja  $\Sigma^{n-1}$  uma hipersuperfície capilar, 2-lados, cmc mergulhada em  $M$  com ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$  e curvatura média  $H$ . Então:*

$$II(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + (\cos \theta)A(\nu, \nu) + (\sin \theta)k_g = H^{\partial M} + H \cos \theta.$$

*Demonstração.* Seja  $\{e_i\}_{i=1}^{n-2}$  uma base para  $T\partial\Sigma$ . Desta forma temos que

$$A(\nu, \nu) + \sum_{i=1}^{n-2} A(e_i, e_i) = H.$$

Note agora que

$$\begin{aligned} (\cos \theta)A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\sin \theta)k_g - H \cos \theta &= \cos \theta \left( H - \sum_{i=1}^{n-2} A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) \right) + (\sin \theta)k_g - H \cos \theta \\ &= -\cos \theta \sum_{i=1}^{n-2} A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) + (\sin \theta)k_g. \end{aligned}$$

Substituindo  $k_g$  e depois usando a compatibilidade da métrica teremos

$$\begin{aligned} -\cos \theta \sum_{i=1}^{n-2} A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) + (\sin \theta)k_g &= -\cos \theta \sum_{i=1}^{n-2} \langle -\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_i \rangle \\ &\quad + (\sin \theta) \sum_{i=1}^{n-2} \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle \\ &= -\cos \theta \sum_{i=1}^{n-2} \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_i, \mathbf{N} \rangle \\ &\quad + (\sin \theta) \sum_{i=1}^{n-2} \langle -\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Organizando, obtemos

$$\begin{aligned} -\cos \theta \sum_{i=1}^{n-2} A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) + (\sin \theta)k_g &= \sum_{i=1}^{n-2} \langle -\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_i, (\cos \theta) \mathbf{N} + (\sin \theta) \mathbf{v} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} \langle -\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_i, \bar{\mathbf{N}} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} \Pi^{\partial M}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i). \end{aligned}$$

Como  $\{\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-2}\}$  formam uma base em  $T\partial M$ , então

$$\begin{aligned} \Pi^{\partial M}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}) + (\cos \theta)A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\sin \theta)k_g - H \cos \theta &= \Pi^{\partial M}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}) + \sum_{i=1}^{n-2} \Pi^{\partial M}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) \\ &= H^{\partial M}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Pi(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}) + (\cos \theta)A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\sin \theta)k_g = H^{\partial M} + H \cos \theta.$$

□

A seguir definiremos o conceito de rigidez infinitesimal para hipersuperfícies mínimas e cmc.

**Definição 6.** *Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície capilar 2-lados propriamente imersa em  $M$ .*

- i) Quando  $\Sigma$  é cmc, com  $H > 0$ , diz-se que é infinitesimalmente rígida se for totalmente umbílica, a curvatura escalar  $R^M = \inf R^M$ ,  $Ric(N, N) = -\frac{H^2}{n-1}$  ao longo de  $\Sigma$ ,  $H^{\partial M} = \inf H^{\partial M}$  ao longo de  $\partial\Sigma$  e  $\Sigma$  é Einstein em relação à métrica induzida.
- ii) Quando  $\Sigma$  é mínima, diz-se que é infinitesimalmente rígida se for totalmente geodésica, a curvatura escalar  $R^M = \inf R^M$ ,  $Ric(N, N) = 0$  ao longo de  $\Sigma$ ,  $H^{\partial M} = \inf H^{\partial M}$  ao longo de  $\partial\Sigma$  e  $\Sigma$  é Einstein em relação à métrica induzida.

### 1.3 Invariante de Yamabe e o problema de Yamabe

Uma questão natural em geometria diferencial é saber se uma dada variedade Riemanniana compacta com bordo é necessariamente conforme a uma de curvatura escalar constante, onde a curvatura média do bordo é nula. O problema onde a variedade tem bordo vazio, foi estudado inicialmente por Yamabe, em 1960. Depois disso, vieram os trabalhos de Trudinger [52], Aubin [5] e Schoen[48] completando esta parte da teoria. Em [20], Escobar estuda esse problema para variedades com bordo não vazio.

Seja  $(\Sigma, g)$  uma variedade Riemanniana ( $n \geq 3$ ) com bordo não-vazio  $\partial\Sigma$ . Para  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$ , definimos o seguinte funcional

$$Q_g^{a,b}(\varphi) = \frac{\int_{\Sigma} \left( \frac{4(n-1)}{n-2} \|\nabla \varphi\|_g^2 + R_g \varphi^2 \right) d\sigma + 2 \int_{\partial\Sigma} k_g \varphi^2 d\sigma_{\partial\Sigma}}{\left[ a \left( \int_{\Sigma} \varphi^{\frac{2n}{n-2}} d\sigma \right) + b \left( \int_{\partial\Sigma} \varphi^{\frac{2(n-1)}{n-2}} d\sigma_{\partial\Sigma} \right) \right]^{\frac{n-2}{n}}},$$

onde  $k_g$  denota a curvatura média de  $\partial\Sigma$ ,  $R_g$  é a curvatura escalar de  $\Sigma$ ,  $d\sigma$  e  $d\sigma_{\partial\Sigma}$  denotam o elemento de área de  $\Sigma$  e de  $\partial\Sigma$ , respectivamente.

A constante de Yamabe de  $(\Sigma, g)$  é definida por

$$Q_g^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma) = \inf_{\varphi \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^+)} Q_g^{a,b}(\varphi) : (a, b) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$$

que é invariante sob mudança conforme da métrica  $g$  para  $(a, b) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$  (Ver [21]).

Estudar o problema de Yamabe consiste em estudar a existência de uma solução suave positiva em  $\Sigma$  para as equações

$$\begin{cases} \Delta \varphi - \frac{n-3}{4(n-2)} R_g \varphi + \frac{n-3}{4(n-2)} C \varphi^{\frac{n+1}{n-3}} = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \frac{n-3}{2(n-2)} k_g \varphi = 0 & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde  $\nu$  é o conormal de  $\partial\Sigma$  apontando para fora com respeito a métrica  $g$  e  $C$  é uma constante cujo sinal é determinado de forma única pela estrutura conforme. A métrica  $\bar{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}}g$  tem curvatura escalar constante  $R_{\bar{g}} = C$  e curvatura média do bordo  $k_{\bar{g}} = 0$ .

Foi provado por Escobar [[20], Thm 6.1], que se  $Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < Q(\mathbb{S}_+^n, \partial\mathbb{S}_+^n)$ , então existe um mínimo para  $Q_g^{1,0}(\varphi)$  sobre as funções  $\varphi \in H^1(\Sigma)$ . Em Cherrier [13], mostra-se que tal função é suave. Além disso, observe que  $\varphi$  é solução para o problema 1.4.

Agora, sejam  $[g]$  a classe conforme associada à métrica  $g$  e  $\mathcal{C}(\Sigma)$  o conjunto de todas as classes conformes na variedade  $\Sigma$ . Com isso, é possível definir o invariante de Yamabe de uma variedade compacta  $\Sigma$  com bordo  $\partial\Sigma$  como o supremo das constantes de Yamabe considerados em todas as classes conformes da variedade:

$$\sigma^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma) = \sup_{[g] \in \mathcal{C}(\Sigma)} \inf_{\varphi > 0} Q_g^{a,b}(\varphi).$$

## 1.4 Decomposição de um espaço métrico com medida por anéis

Nesta seção, introduzimos um dos resultados centrais para o desenvolvimento da teoria, bem como algumas definições e notações auxiliares que serão utilizadas recorrentemente ao longo do texto no capítulo 3.

Seja  $(X, d)$  um espaço métrico separável. Considere um ponto  $a \in X$  e  $0 \leq r < R < \infty$ . Chamamos de anel centrado em  $a$  com raio interno  $r$  e raio externo  $R$  o conjunto:  $A = \{x \in X: 0 \leq r < d(x, a) < R < \infty\}$ . De forma análoga, definimos o anel dilatado:  $2A = \{x \in X: 0 \leq r/2 < d(x, a) < 2R < \infty\}$ .

**Definição 7.** *Dado um inteiro  $I > 1$ , dizemos que  $(X, d)$  satisfaz a propriedade global de  $I$ -cobertura, se cada bola  $B_r(a)$  pode ser coberta por  $I$  bolas de raio  $r/2$ .*

Diversas classes de variedades Riemannianas completas satisfazem estas condições, dentre as quais destacam-se: Variedades compactas e Variedades com curvatura de Ricci não negativa. Em particular, este é o caso do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$ . (Veja [30]).

Seja  $(X, d, \mu)$  um espaço métrico com medida que satisfaz uma propriedade global de cobertura  $I$ .

**Definição 8.** *Uma medida  $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$  é não atômica se para qualquer conjunto mensurável  $A$ , com  $\mu(A) > 0$ , existe um subconjunto mensurável  $B$  de  $A$  tal que  $\mu(A) > \mu(B) > 0$ .*

**Lema 3.** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{B}^m$  uma imersão conforme não degenerada. Considerando a menor  $\sigma$ -álgebra de borel gerada pelos abertos de  $\mathbb{R}^m$ , a medida  $\mu$ , suportada em  $\partial\Sigma$ , definida por*

$$\mu(A) = \int_{\psi^{-1}(A \cap \mathbb{S}^{m-1})} 1 \, d\text{vol}_{\partial\Sigma},$$

*é não atômica.*

*Demonstração.* De fato, mostremos que para todo  $p \in \mathbb{R}^m$ , teremos  $\mu(\{p\}) = 0$ . Suponha por absurdo que  $\mu(\{p\}) > 0$ . Desta forma,

$$\mu(\{p\}) = \int_{\psi^{-1}(\{p\} \cap \mathbb{S}^{m-1})} 1 \, d\text{vol}_{\partial\Sigma} = \text{Vol}_{\partial\Sigma}(\psi^{-1}(p)) > 0.$$

Como  $\psi$  é localmente injetiva (via Teorema do posto constante), se tomarmos dois pontos  $p_1$  e  $p_2$  em  $\psi^{-1}(p)$ , vão existir vizinhanças  $V_{p_1}$  e  $V_{p_2}$  disjuntas onde vale a injetividade. Desta forma,  $\psi^{-1}(p)$  é um conjunto discreto e terá medida nula, o que é um absurdo! Segue o resultado.  $\square$

O núcleo da estratégia implementada por Kokarev em [32] para produzir estimativas para autovalores de ordem superior é baseado no próximo lema, devido a A. Grigoryan, Y. Netrusov e S.T. Yau [27, Thm.1, Cor.3.12] (veja também [26, 33]).

**Lema 4.** *Suponha que  $(X, d)$  satisfaça a propriedade de I-cobertura para algum  $I > 1$  e todas as suas bolas  $B_r(a)$  sejam pré-compactadas. Então, para qualquer medida não atômica finita  $\mu$  em  $(X, d)$  e qualquer inteiro positivo  $k$ , existe uma coleção de  $k$  anéis disjuntos  $\{2A_i\}$  tais que*

$$\mu(A_i) \geq C \frac{\mu(X)}{k},$$

*para qualquer  $1 \leq i \leq k$ , com  $C = 8^{-1}I^{-12}$ .*

O Lema 4 será bastante utilizado nos resultados do Capítulo 3, onde demonstraremos desigualdades envolvendo os autovalores para problemas do tipo Schrödinger-Steklov.

## 1.5 Volume conforme relativo

Seja  $\Sigma$  uma variedade Riemanniana compacta  $n$ -dimensional com fronteira  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ . Em 2010 Fraser e Schoen [23] introduziram um importante invariante conforme, chamado volume  $m$ -conforme relativo de  $\Sigma$ . Suponha que  $\Sigma$  admita uma aplicação conforme  $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbb{B}^m$ , onde  $\mathbb{B}^m$  é a bola unitária em  $\mathbb{R}^m$ , com  $\psi(\partial\Sigma) \subset \mathbb{S}^{m-1}$ .

**Definição 9.** O volume  $m$ -conforme relativo de  $\psi$  é definido por

$$V^{rc}(\Sigma, m, \psi) = \sup_{f \in G} \text{Vol}(f(\psi(\Sigma))),$$

onde  $G$  denota o grupo de difeomorfismos conformes de  $\mathbb{B}^m$ . O volume  $m$ -conforme relativo de  $\Sigma$  é então definido como

$$V^{rc}(\Sigma, m) = \inf_{\psi} V^{rc}(\Sigma, m, \psi),$$

onde o ínfimo está sobre todas as aplicações conformes não degeneradas  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{B}^m$  tais que  $\psi(\partial\Sigma) \subset \mathbb{S}^{m-1}$ .

Para qualquer variedade  $\Sigma$  de dimensão  $n$  com bordo, o  $m$ -volume conforme relativo é limitado inferiormente pelo volume da bola  $m$ -dimensional:

$$V^{rc}(\Sigma, m) \geq \text{Vol}(\mathbb{B}^m).$$

De fato, dado um ponto  $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$  e  $t > 0$ , seja  $f_{\theta}(t) : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$  um difeomorfismo conforme dado por

$$f_{\theta}(t) = \Phi_{\theta}^{-1} \circ s_t \circ \Phi_{\theta}, \quad (1.5)$$

onde  $\Phi_{\theta} : \mathbb{S}^{m-1} \setminus \{\theta\} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$  é a projeção estereográfica de um ponto  $\theta$  para o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^m : \langle x, \theta \rangle = 0\}$  e  $s_t : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$  é a aplicação de dilatação dada por  $s_t(v) = tv$ . Veja que para qualquer  $t > 0$ ,  $f_{\theta}(t)$  fixa os pontos  $\theta$  e  $-\theta$ . Seguindo [23, Rmk.5.8], se o diferencial de  $\psi|_{\partial\Sigma}$  tem posto  $n$  em  $\theta$ , o difeomorfismo conforme  $f_{-\psi(\theta)}(t)$  pode ser estendido para um difeomorfismo conforme  $F_{\theta}(t) : \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{B}^m$  e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Vol}(F_{-\psi(\theta)}(t)(\psi(\Sigma))) = P \cdot \text{Vol}(\mathbb{B}^m),$$

onde  $P$  é um inteiro que nos dá a multiplicidade de  $\psi(\partial\Sigma)$  em  $\psi(\theta)$ .

## 1.6 Operadores do tipo Schrödinger-Steklov

Seja  $(\Sigma, g)$  uma variedade Riemanniana compacta  $n$ -dimensional com bordo  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ . O problema de Steklov em  $\Sigma$  é

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \sigma u & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases}$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace-Beltrami e  $\eta$  é o vetor normal unitário de  $\partial\Sigma$  em  $\Sigma$  apontando para fora.

Esse é um problema clássico em análise e geometria, que surge naturalmente em várias áreas da Matemática e da Física, como Teoria do Potencial e Equações Diferenciais Parciais.

Dada uma função  $u \in C^\infty(\partial\Sigma)$ , seja  $\tilde{u}$  a extensão harmônica de  $u$ , ou seja,

$$\begin{cases} \Delta_g \tilde{u} = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \tilde{u} = u & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases}$$

O operador de Dirichlet-Neumann associado ao problema de Steklov é a aplicação

$$E : C^\infty(\partial\Sigma) \rightarrow C^\infty(\partial\Sigma)$$

definida por

$$E(u) = \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right|_{\partial\Sigma}, \quad (1.6)$$

onde  $\tilde{u}$  é a extensão harmônica de  $u$  ao interior de  $\Sigma$ , e  $\eta$  denota o vetor normal unitário exterior ao longo de  $\partial\Sigma$ . O operador de Dirichlet-Neumann é um operador pseudodiferencial elíptico de primeira ordem. Como o resolvente de  $E$  é compacto, seu espectro é discreto e ilimitado superiormente. Além disso, como as funções constantes estão no núcleo de  $E$ , o menor autovalor  $\sigma_1$  de  $E$  é zero. Desta forma temos

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \nearrow \infty.$$

Os autovalores desse problema foram discutidos pela primeira vez em 1902 por Steklov e são frequentemente chamados de *autovalores de Steklov*.

Como o operador  $E$  é autoadjunto e não-negativo, com espectro discreto, podemos caracterizar seus autovalores variacionalmente. O quociente de Rayleigh associado ao problema de Steklov é dado por

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int_{\Sigma} |\nabla u|^2 dv}{\int_{\partial\Sigma} u^2 dv_{\partial\Sigma}},$$

onde  $u \in H^1(\Sigma)$  e  $u|_{\partial\Sigma} \neq 0$ .

Os autovalores de Steklov  $\sigma_k$  são definidos via quociente de Rayleigh, como:

$$\sigma_k = \inf_{G_{k+1}} \sup_{u \in G_{k+1} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Sigma} |\nabla u|^2 dv}{\int_{\partial\Sigma} u^2 dv_{\partial\Sigma}}, \quad (1.7)$$

onde o ínfimo é tomado sobre subespaços  $(k+1)$ -dimensionais  $G_{k+1} \subset H^1(\Sigma)$  (Ver [39, 15]).

No terceiro capítulo, trabalharemos com operadores do tipo Schrödinger-Steklov, isto é, com problemas da forma

$$\begin{cases} \Delta u + \mathcal{V}_1 u = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} - \mathcal{V}_2 u = \sigma u & \text{em } \partial \Sigma, \end{cases}$$

em que as funções  $\mathcal{V}_1 \in L^\infty(\Sigma^n)$  e  $\mathcal{V}_2 \in L^\infty_+(\partial \Sigma^n)$  são denominadas funções potenciais. Precisamos mostrar que tal problema de autovalores tem espectro discreto, tendendo ao infinito, bem como a caracterização variacional de seus autovalores.

Seguindo as mesmas notações de [3], definimos o **Laplaciano de Dirichlet com potenciais**  $-(\Delta^D + \mathcal{V}_1)$  em  $L^2(\Sigma)$  como

$$\begin{cases} D(-\Delta^D - \mathcal{V}_1) = \{u \in H_0^1(\Sigma) : \Delta u + \mathcal{V}_1 u \in L^2(\Sigma)\}, \\ (-\Delta^D - \mathcal{V}_1)u = -\Delta u - \mathcal{V}_1 u. \end{cases}$$

Analogamente, definimos o operador de Dirichlet-para-Neumann com potenciais em um domínio Lipschitz  $\Sigma$  da seguinte forma: para  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(-\Delta^D - \mathcal{V}_1)$ , o **Operador de Dirichlet-para-Neumann com potenciais**  $D_\lambda$  é definido em  $L^2(\partial \Sigma)$  por

$$\begin{cases} D(D_\lambda) := \{\varphi \in L^2(\partial \Sigma) : \exists u \in H^1(\Sigma), u|_{\partial \Sigma} = \varphi, -\Delta u - \mathcal{V}_2 u = \lambda u, \\ (\frac{\partial}{\partial \nu} - \mathcal{V}_2) u \in L^2(\partial \Sigma)\}, \\ D_\lambda \varphi = (\frac{\partial}{\partial \nu} - \mathcal{V}_2) u. \end{cases}$$

O seguinte resultado é crucial para mostrar que  $D_\lambda$  possui espectro discreto (veja [3]).

**Teorema 8.**  $D_\lambda$  é autoadjunto, limitado inferiormente e tem resolvente compacto.

Iremos fazer uso do seguinte resultado para a prova do Teorema 8.

**Proposição 5.** Para  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(-\Delta^D - \mathcal{V}_1)$ , tem-se

$$H^1(\Sigma) = H_0^1(\Sigma) \oplus H^1(\lambda),$$

onde  $H^1(\lambda) = \{u \in H^1(\Sigma) : -(\Delta + \mathcal{V}_1)u = \lambda u\}$ .

*Demonstração.* **a)** Considere o operador  $\mathcal{A} : H_0^1(\Sigma) \rightarrow H_0^1(\Sigma)'$  dado por  $\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \int_\Sigma \nabla u \nabla v - \mathcal{V}_1 uv$ . Assim,  $-(\Delta^D + \mathcal{V}_1)$  é a parte de  $\mathcal{A}$  em  $L^2(\Sigma)$ , onde consideramos

$L^2(\Sigma) \hookrightarrow H_0^1(\Sigma)'$  através de  $\langle f, v \rangle := \int_{\Sigma} f v$ ,  $f \in L^2(\Sigma)$ ,  $v \in H_0^1(\Sigma)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}u, v \rangle &= \int_{\Sigma} (\nabla u \nabla v - \mathcal{V}_1 u v) \\ &= \int_{\Sigma} (-v \Delta u + \mathcal{V}_1 u v) + \int_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \\ &= \langle -(\Delta + \mathcal{V}_1)u, v \rangle. \end{aligned}$$

Segue de [4, Proposição 3.10.3] que  $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\Delta^D)$ . Assim,  $\lambda - \mathcal{A}$  é invertível.

b) Seja  $u \in H^1(\Omega)$ . Considere  $F \in H_0^1(\Omega)'$  dado por

$$F(v) = \int_{\Sigma} \nabla u \nabla v - \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1 u v - \lambda \int_{\Sigma} u v. \quad (1.8)$$

Então, pelo item (a), existe  $u_0 \in H_0^1(\Sigma)$  tal que  $(\lambda - \mathcal{A})(u_0) = F$ .

Isto significa que, para todo  $v \in H_0^1(\Sigma)$ ,

$$\int_{\Sigma} \nabla u_0 \cdot \nabla v - \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1 u_0 v - \lambda \int_{\Sigma} u_0 v = \int_{\Sigma} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1 u v - \lambda \int_{\Sigma} u v.$$

Defina  $u_1 := u - u_0$ . Desta forma, para todo  $v \in H_0^1(\Sigma)$ ,

$$\int_{\Sigma} \nabla u_1 \cdot \nabla v - \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1 u_1 v = \lambda \int_{\Sigma} u_1 v.$$

Logo  $(-\Delta - \mathcal{V}_1)u_1 = \lambda u_1$ , isto é,  $u_1 \in H^1(\lambda)$ . Assim

$$u = u_0 + u_1, \quad u_0 \in H_0^1(\Sigma), \quad u_1 \in H^1(\lambda).$$

Como  $\lambda \notin \sigma(-\Delta^D - \mathcal{V}_1)$ , segue que  $H_0^1(\Sigma) \cap H^1(\lambda) = \{0\}$ , e portanto

$$H^1(\Sigma) = H_0^1(\Sigma) \oplus H^1(\lambda).$$

□

Seja  $V := \{u|_{\Gamma} : u \in H^1(\Omega)\} \subset L^2(\partial\Sigma)$  o espaço de traços, que é um subespaço de  $L^2(\Gamma)$ . Se  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(-\Delta^D - \mathcal{V}_1)$ , então o operador de traço restrito a  $H^1(\lambda)$ , isto é, a aplicação  $u \in H^1(\lambda) \mapsto u|_{\partial\Sigma} \in V$ , é linear e bijetiva pelo Lema 3.2. Definindo  $\|u|_{\Gamma}\|_V := \|u\|_{H^1(\Sigma)}$ , o espaço  $V$  torna-se um espaço de Hilbert. Segue do teorema do gráfico fechado que uma escolha diferente de  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(-\Delta^D - \mathcal{V}_1)$  leva a uma norma equivalente em  $V$ . Como o operador de traço é compacto de  $H^1(\Sigma)$  em  $L^2(\partial\Sigma)$ , segue que a inclusão de  $V$  em  $L^2(\Gamma)$  é compacta. O Teorema de Stone–Weierstrass implica que  $V$  é denso em  $L^2(\partial\Sigma)$ .

Seja  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(-\Delta^D - \mathcal{V}_1)$ . Definimos a aplicação bilinear  $\alpha_{\lambda} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\alpha_{\lambda}(\varphi, \psi) := \int_{\Sigma} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1 u v - \lambda \int_{\Sigma} u v - \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 u v,$$

onde  $u, v \in H^1(\lambda)$  tais que  $\varphi = u|_{\Gamma}$ ,  $\psi = v|_{\Gamma}$ . Então  $\alpha_{\lambda}$  é claramente contínua e simétrica.

**Proposição 6.** *A forma  $a_\lambda$  é elíptica e  $D_\lambda$  é o operador em  $L^2(\Gamma)$  associado a  $a_\lambda$ .*

*Demonstração.* Para mostrar a elipticidade aplicamos o Lema 3.1, apresentado em [3], ao mergulho compacto  $T : H^1(\lambda) \rightarrow L^2(\Sigma)$ ,  $u \mapsto u$ , e ao operador de traço  $S : H^1(\lambda) \rightarrow L^2(\partial\Sigma)$ ,  $u \mapsto u|_{\partial\Sigma}$ , o qual é injetivo em  $H^1(\lambda)$ . Dado  $1 > \delta > 0$ , encontramos  $c > 0$  tal que  $\int_\Sigma u^2 \leq \delta \|u\|_{H^1}^2 + c \int_{\partial\Sigma} u^2$  para todo  $u \in H^1(\lambda)$ . Como  $\|u\|_{H^1}^2 = \int_\Sigma |\nabla u|^2 + \int_\Sigma u^2$ , segue que

$$\int_\Sigma u^2 \leq \frac{\delta}{1-\delta} \int_\Sigma |\nabla u|^2 + \frac{c}{1-\delta} \int_{\partial\Sigma} u^2.$$

Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $c_1 \geq 0$  tal que

$$\int_\Sigma u^2 \leq \varepsilon \int_\Sigma |\nabla u|^2 + c_1 \int_{\partial\Sigma} u^2. \quad (3.1)$$

para todo  $u \in H^1(\lambda)$ .

Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon(|\bar{\lambda}| + 1/2) = 1/2$ , com  $\bar{\lambda} = \lambda + \|\mathcal{V}_1\|_{L^\infty(\Sigma)}$  e defina  $\omega = c_1(|\lambda| + 1/2) + \|\mathcal{V}_2\|_{L^\infty(\partial\Sigma)}$ .

Por (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} a_\lambda(u|_\Gamma) + \omega \int_\Gamma u^2 &= \int_\Sigma |\nabla u|^2 - \int_\Sigma \mathcal{V}_1 u^2 - \lambda \int_\Sigma u^2 - \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 u^2 + \omega \int_{\partial\Sigma} u^2 \\ &\geq \int_\Sigma |\nabla u|^2 - \|\mathcal{V}_1\|_{L^\infty(\Sigma)} \int_\Sigma u^2 - \lambda \int_\Sigma u^2 - \|\mathcal{V}_2\|_{L^\infty(\partial\Sigma)} \int_{\partial\Sigma} u^2 \\ &\quad + \omega \int_{\partial\Sigma} u^2 \\ &= \int_\Sigma |\nabla u|^2 - (\lambda + \|\mathcal{V}_1\|_{L^\infty(\Sigma)}) \int_\Sigma u^2 + (\omega - \|\mathcal{V}_2\|_{L^\infty(\partial\Sigma)}) \int_{\partial\Sigma} u^2 \\ &= \int_\Sigma |\nabla u|^2 - \bar{\lambda} \int_\Sigma u^2 + \bar{\omega} \int_{\partial\Sigma} u^2 \\ &\geq \int_\Sigma |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_\Sigma u^2 - (|\bar{\lambda}| + 1/2) \int_\Sigma u^2 + \bar{\omega} \int_{\partial\Sigma} u^2 \\ &\geq \int_\Sigma |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_\Sigma u^2 - \varepsilon(|\bar{\lambda}| + 1/2) \int_\Sigma |\nabla u|^2 \\ &\quad - (|\bar{\lambda}| + 1/2)c_1 \int_{\partial\Sigma} u^2 + \bar{\omega} \int_{\partial\Sigma} u^2 \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

para todo  $u \in H^1(\bar{\lambda})$ .

2. Seja  $B$  o operador em  $L^2(\partial\Sigma)$  que está associado a  $a_\lambda$ . Queremos mostrar que  $B = D_\lambda$ . Seja  $u \in H^1(\lambda)$ ,  $b \in L^2(\partial\Sigma)$ . Então  $u|_{\partial\Sigma} \in D(B)$  e  $Bu|_{\partial\Sigma} = b$  se, e somente se,

$$\int_\Sigma \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Sigma \mathcal{V}_1 uv - \lambda \int_\Sigma uv - \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 uv = \int_{\partial\Sigma} bv \quad (1.9)$$

para todo  $v \in H^1(\lambda)$  e  $u \in H^1(\lambda)$ .

a) Suponha que  $u|_{\partial\Sigma} \in D(B)$  e  $Bu|_{\partial\Sigma} = b$ . Note que para  $u \in H^1(\lambda) = \{u \in H^1(\Sigma) : -(\Delta + \mathcal{V}_1)u = \lambda u\}$  e  $v \in H_0^1(\Sigma)$  tem-se

$$\int_{\Sigma} \nabla u \nabla v - \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1 u v - \lambda \int_{\Sigma} u v - \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 u v = 0 = \int_{\partial\Sigma} b v,$$

onde usamos que  $-(\Delta + \mathcal{V}_1)u = \lambda u$ . Como  $H_0^1(\Sigma) \oplus H^1(\lambda) = H^1(\Sigma)$ , segue que (1.9) vale para todo  $v_0 + v_{\lambda} = v \in H^1(\Sigma)$ .

Agora, usando  $-(\Delta + \mathcal{V}_1)u = \lambda u$  em (1.9), vê-se que

$$\int_{\partial\Sigma} \left( \frac{\partial}{\partial \nu} - \mathcal{V}_2 \right) u v = 0 = \int_{\partial\Sigma} b v,$$

para todo  $v \in H^1(\Sigma)$ . Portanto,  $\left( \frac{\partial}{\partial \nu} - \mathcal{V}_2 \right) u = b$ . Portanto  $u \in D(D_{\lambda})$  e  $D_{\lambda}u = Bu$ .

b) Reciprocamente, seja  $\varphi \in D(D_{\lambda})$  e  $D_{\lambda}\varphi = b$ . Então existe  $u \in H^1(\lambda) = \{u \in H^1(\Sigma) : -(\Delta + \mathcal{V}_1)u = \lambda u\}$  tal que  $u|_{\partial\Sigma} = \varphi$  e  $\left( \frac{\partial}{\partial \nu} - \mathcal{V}_2 \right) u = b$ . Logo

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \nabla u \nabla v - \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1 u v - \lambda \int_{\Sigma} u v - \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 u v &= \int_{\Sigma} \nabla u \nabla v + \int_{\Sigma} v \Delta u \\ &\quad - \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 u v \\ &= \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v - \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 u v \\ &= \int_{\partial\Sigma} v \left( \frac{\partial}{\partial \nu} - \mathcal{V}_2 \right) u. \end{aligned}$$

para todo  $v \in H^1(\Sigma)$ . Segue que  $\varphi \in D(B)$  e  $B\varphi = b$ .  $\square$

Desta forma, o problema envolvendo funções potenciais possui espectro discreto tendendo ao infinito, com autovalores podendo ser negativos.

Define-se o quociente de Rayleigh associado ao problema de autovalores acima da seguinte forma:

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int_{\Sigma} |\nabla_g u|^2 dv - \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1 u^2 dv - \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 u^2 dv_{\partial\Sigma}}{\int_{\partial\Sigma} u^2 dv_{\partial\Sigma}}, \quad (1.10)$$

com  $u \in H^1(\Sigma)$  e  $u|_{\partial\Sigma} \neq 0$ .

Os autovalores em questão,  $\sigma_k$ , são então definidos via quociente de Rayleigh, como:

$$\sigma_k = \inf_{G_{k+1}} \sup_{u \in G_{k+1} \setminus \{0\}} \mathcal{R}(u), \quad (1.11)$$

onde o ínfimo é tomado sobre subespaços  $(k+1)$ -dimensionais  $G_{k+1} \subset H^1(\Sigma)$  (Ver [39, 15]).

## Capítulo 2

# Rigidez de hipersuperfícies capilares

Neste capítulo, inicialmente, obteremos estimativas para o volume e área do bordo de hipersuperfícies capilares cmc's estáveis. Posteriormente, faremos resultados de rigidez para o caso em que a hipersuperfície considerada é mínima, seguida do caso em que a mesma tem curvatura média constante. Um passo crucial na demonstração dos resultados de rigidez é a construção de uma folheação cmc em torno da hipersuperfície.

### 2.1 Estimativas de área

Nesta seção, obteremos estimativas para o volume e a área do bordo de hipersuperfícies capilares cmc estáveis, envolvendo a curvatura escalar e a curvatura média do bordo da variedade ambiente, bem como o invariante de Yamabe da hipersuperfície. Para o que segue, sendo  $(\Sigma^{n-1}, g) \subset (M^n, \bar{g})$  uma hipersuperfície imersa com métrica induzida  $g$ , denotaremos o volume de  $\Sigma$  por  $\text{Vol}(\Sigma)$  e a área de  $\partial\Sigma$  por  $\text{Area}(\partial\Sigma)$ , onde estamos considerando as medidas de Hausdorff  $(n-1)$ -dimensional e  $(n-2)$ -dimensional, respectivamente.

**Teorema 9.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana ( $n \geq 4$ ) com bordo  $\partial M$ . Seja  $\Sigma^{n-1}$  uma hipersuperfície cmc capilar com ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$ , compacta, propriamente imersa em  $M$ , 2-lados e estável.*

*i) Suponha que  $H^{\partial M} + H \cos \theta \geq 0$ ,  $\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2 < 0$  e  $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$ . Então, a área de  $\Sigma$  satisfaz*

$$A(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} \geq \frac{Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2} \geq \frac{\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2}. \quad (2.1)$$

ii) Suponha que  $R^M + \frac{n}{n-1}H^2 \geq 0$ ,  $\inf H^{\partial M} + H \cos \theta < 0$  e  $\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$ . Então, a área de  $\partial\Sigma$  satisfaz

$$A(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-2}} \geq \frac{\sin \theta}{2} \frac{Q_g^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf H^{\partial M} + H \cos \theta} \geq \frac{\sin \theta}{2} \frac{\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf H^{\partial M} + H \cos \theta}. \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Provemos inicialmente o caso i). Pela desigualdade de Newton e equação de Gauss nós temos

$$\text{Ric}(N, N) + |A|^2 \geq \frac{1}{2} \left( R^M - R_g + \frac{n}{n-1}H^2 \right).$$

Usando o fato que  $\Sigma^{n-1}$  é estável e o Lema 2, para  $\varphi \in C_+^\infty(\Sigma)$  obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q(\varphi, \varphi) \\ &= \int_\Sigma \|\nabla \varphi\|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)\varphi^2 - \int_{\partial\Sigma} \left( \frac{1}{\sin \theta} \Pi^{\partial M}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + (\cot \theta)A(v, v) \right) \varphi^2 \\ &\leq \int_\Sigma \|\nabla \varphi\|^2 - \frac{1}{2} \int_\Sigma \left( R^M - R_g + \frac{n}{n-1}H^2 \right) \varphi^2 - \int_{\partial\Sigma} \left( \frac{1}{\sin \theta} H^{\partial M} + H \cot \theta - k_g \right) \varphi^2. \end{aligned}$$

Multiplicando a expressão acima por dois e reorganizando, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Sigma (2\|\nabla \varphi\|^2 + R_g \varphi^2) + \int_{\partial\Sigma} 2k_g \varphi^2 - \int_\Sigma \left( \frac{n}{n-1}H^2 + R^M \right) \varphi^2 \\ &\quad - \int_{\partial\Sigma} \frac{2}{\sin \theta} (H^{\partial M} + H \cos \theta) \varphi^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Daí, como  $\alpha_n = \frac{4(n-2)}{n-3} > 2$  para  $n \geq 4$  e  $H^{\partial M} + H \cos \theta \geq 0$ , chegamos em

$$\int_\Sigma \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2 \right) \varphi^2 \leq \int_\Sigma (\alpha_n \|\nabla \varphi\|^2 + R_g \varphi^2) + \int_{\partial\Sigma} 2k_g \varphi^2. \quad (2.4)$$

Pela desigualdade de Hölder é fácil ver que

$$\int_\Sigma \varphi^2 \leq A(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} \left( \int_\Sigma \varphi^{\frac{2(n-1)}{n-3}} \right)^{\frac{n-3}{n-1}}. \quad (2.5)$$

Sendo  $\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2 < 0$ , por (2.4) e (2.5) obtemos

$$\begin{aligned} \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2 \right) A(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} \left( \int_\Sigma \varphi^{\frac{2(n-1)}{n-3}} \right)^{\frac{n-3}{n-1}} &\leq \int_\Sigma \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2 \right) \varphi^2 \\ &\leq \int_\Sigma (\alpha_n \|\nabla \varphi\|^2 + R_g \varphi^2) + \int_{\partial\Sigma} 2k_g \varphi^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left( \inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2 \right) A(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} \leq Q_g^{1,0}(\varphi).$$

Desta forma,

$$A(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} \geq \frac{Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2} \geq \frac{\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2}.$$

Para o item ii), seguindo os mesmos passos do caso i), temos

$$0 \leq \int_{\Sigma} (2\|\nabla\varphi\|^2 + R_g\varphi^2) + \int_{\partial\Sigma} 2k_g\varphi^2 - \int_{\Sigma} \left( \frac{n}{n-1}H^2 + R^M \right) \varphi^2 - \int_{\partial\Sigma} \frac{2}{\sin\theta} (H^{\partial M} + H \cos\theta)\varphi^2.$$

Como  $\alpha_n = \frac{4(n-2)}{n-3} > 2$ , para  $n \geq 4$  e  $R^M + \frac{n}{n-1}H^2 \geq 0$ , obtemos

$$\frac{2}{\sin\theta} (\inf H^{\partial M} + H \cos\theta) \int_{\partial\Sigma} \varphi^2 \leq \int_{\Sigma} (2\|\nabla\varphi\|^2 + R_g\varphi^2) + \int_{\partial\Sigma} 2k_g\varphi^2. \quad (2.6)$$

Pela desigualdade de Hölder

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi^2 \leq A(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-2}} \left( \int_{\partial\Sigma} \varphi^{\frac{2(n-2)}{n-3}} \right)^{\frac{n-3}{n-2}}. \quad (2.7)$$

Como  $\inf H^{\partial M} + H \cos\theta < 0$ , por (2.6) e por (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sin\theta} (\inf H^{\partial M} + H \cos\theta) A(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-2}} \left( \int_{\partial\Sigma} \varphi^{\frac{2(n-2)}{n-3}} \right)^{\frac{n-3}{n-2}} &\leq \\ \frac{2}{\sin\theta} (\inf H^{\partial M} + H \cos\theta) \int_{\partial\Sigma} \varphi^2 &\leq \int_{\Sigma} (\alpha_n \|\nabla\varphi\|^2 + R_g\varphi^2) + \int_{\partial\Sigma} 2k_g\varphi^2. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{2}{\sin\theta} (\inf H^{\partial M} + H \cos\theta) A(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-2}} \leq Q_g^{0,1}(\varphi).$$

Portanto,

$$A(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-2}} \geq \frac{\sin\theta}{2} \frac{Q_g^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf H^{\partial M} + H \cos\theta} \geq \frac{\sin\theta}{2} \frac{\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf H^{\partial M} + H \cos\theta}. \quad (2.8)$$

□

Quando  $\Sigma$  é uma hipersuperfície mínima, obtemos o seguinte resultado:

**Corolário 1.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana ( $n \geq 4$ ) com bordo não vazio  $\partial M^n$  e seja  $\Sigma^{n-1} \subset M^n$  uma hipersuperfície mínima capilar com ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$ , compacta, propriamente imersa, 2-lados e estável.*

i) *Suponha que  $H^{\partial M} \geq 0$  e  $\inf R^M < 0$ . Então, se  $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$ , a área de  $\Sigma$  satisfaz*

$$A(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} \geq \frac{Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M} \geq \frac{\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M}.$$

ii) Suponha que  $R^M \geq 0$  e  $\inf H^{\partial M} < 0$ . Então, se  $\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$ , a área de  $\partial\Sigma$  satisfaz

$$A(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-2}} \geq \frac{\sin \theta}{2} \frac{Q_g^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf H^{\partial M}} \geq \frac{\sin \theta}{2} \frac{\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf H^{\partial M}}.$$

## 2.2 Rigidez de hipersuperfícies capilares

Nosso objetivo principal nesta seção é demonstrar os teoremas de splitting local para hipersuperfícies capilares cmc, a saber, os Teoremas 2 e 3 enunciados na Introdução. Além disso, para demonstrá-los, precisaremos construir uma folheação cmc em torno de  $\Sigma$ , construção essa, dada pela Proposição 9.

Inicialmente, mostraremos que  $\Sigma$  é infinitesimalmente rígida se estivermos sob as condições do Teorema 10.

**Proposição 7.** *Assuma que  $H^{\partial M} + H \cos \theta \geq 0$ ,  $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$ ,  $\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2 < 0$  e que vale a igualdade em (2.1), isto é,*

$$A(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} = \frac{\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2}. \quad (2.9)$$

Então  $\Sigma$  é infinitesimalmente rígida,  $\Pi^{\partial M}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + A(\nu, \nu) \cos \theta$  ao longo de  $\partial\Sigma$  e a métrica induzida em  $\Sigma$  é Einstein com bordo totalmente geodésico  $\partial\Sigma$ .

*Demonstração.* A hipótese  $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0 < Q_g^{1,0}(\mathbb{S}_+^{n-1}, \partial\mathbb{S}_+^{n-1})$  garante a existência de uma solução para o problema de Yamabe, isto é, existe  $\varphi = \varphi_{\min} > 0$  para o qual  $Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$  é atingido (veja Seção 1.3 ou [20]). Desta forma, todas as desigualdades na demonstração do item i) do Teorema 9 são igualdades, e assim teremos que  $R^M = \inf R^M$ ,  $|A|^2 = \frac{H^2}{n-1}$  ( $\Sigma$  totalmente umbílica),  $H^{\partial M} + H \cos \theta = 0$  ao longo de  $\partial\Sigma$ . Além disso, como  $\alpha_n > 2$ ,  $\|\nabla \varphi_{\min}\|^2 = 0$ . Logo,  $\varphi_{\min}$  é constante.

Considere o problema abaixo

$$\begin{cases} -\Delta_{\Sigma}\phi - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)\phi = \lambda\phi & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = q\phi & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (2.10)$$

onde

$$q = \frac{1}{\sin \theta} \Pi^{\partial M}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + (\cot \theta)A(\nu, \nu).$$

Multiplicando a primeira equação em (3.5) por  $\phi$  e depois integrando, obtemos

$$\int_{\Sigma} -\phi \Delta_{\Sigma} \phi - (\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + \|\mathbf{A}\|^2) \phi^2 = \lambda \int_{\Sigma} \phi^2.$$

Integrando por partes,

$$\int_{\Sigma} \|\nabla \phi\|^2 - \int_{\partial \Sigma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \int_{\Sigma} (\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + \|\mathbf{A}\|^2) \phi^2 = \lambda \int_{\Sigma} \phi^2.$$

Pela segunda equação em (3.5) segue que

$$\int_{\Sigma} \|\nabla \phi\|^2 - \int_{\Sigma} (\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + \|\mathbf{A}\|^2) \phi^2 - \int_{\partial \Sigma} \mathfrak{q} \phi^2 = \lambda \int_{\Sigma} \phi^2.$$

A caracterização variacional do primeiro autovalor nos diz que

$$\lambda_1 = \inf_{\int_{\Sigma} \phi^2 d\sigma = 1} \left( \int_{\Sigma} \|\nabla \phi\|^2 - \int_{\Sigma} (\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + \|\mathbf{A}\|^2) \phi^2 - \int_{\partial \Sigma} \mathfrak{q} \phi^2 \right).$$

Desta forma, como vale a igualdade em (2.1) e  $\Sigma$  é estável, concluímos que

$$\mathbf{Q}(\varphi_{\min}, \varphi_{\min}) = \int_{\Sigma} \|\nabla \varphi_{\min}\|^2 - \int_{\Sigma} (\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + \|\mathbf{A}\|^2) \varphi_{\min}^2 - \int_{\partial \Sigma} \mathfrak{q} \varphi_{\min}^2 = 0.$$

Daí, temos que  $\lambda_1 = \mathbf{Q}(\varphi_{\min}, \varphi_{\min}) = 0$  e  $\varphi_{\min}$  satisfaz o problema (3.5). Segue que  $\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = -\frac{H^2}{n-1}$  e  $\text{II}^{\partial M}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) = -\mathbf{A}(\nu, \nu) \cos \theta = 0$  ao longo de  $\partial \Sigma$ . Além disso, como

$$\frac{1}{\sin \theta} \text{II}^{\partial M}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + (\cot \theta) \mathbf{A}(\nu, \nu) = 0,$$

temos

$$\mathbf{k}_g = H^{\partial M} + H \cos \theta - \left( \frac{1}{\sin \theta} \text{II}^{\partial M}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot \theta \right) \mathbf{A}(\nu, \nu) = 0,$$

e assim a fronteira  $\partial \Sigma$  é uma hipersuperfície mínima. A métrica  $g$  ser Einstein com bordo totalmente geodésico, segue da Proposição 1 em [8].  $\square$

Agora estabelecemos a rigidez infinitesimal de  $\Sigma$  sob as hipóteses do Teorema 11.

**Proposição 8.** *Se  $H^{\partial M} + H \cos \theta \geq 0$ ,  $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial \Sigma) \leq 0$  e  $R^M + \frac{n}{n-1} H^2 \geq 0$ , então  $\Sigma$  é infinitesimalmente rígida,  $\text{II}^{\partial M}(\nu, \nu) + \mathbf{A}(\nu, \nu) \cos \theta = 0$  ao longo de  $\partial \Sigma$ ,  $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial \Sigma) = 0$ , e  $\partial \Sigma$  tem curvatura média nula. Além disso,  $\Sigma$  é Ricci plana com bordo totalmente geodésico com respeito à métrica induzida.*

*Demonstração.* Substituindo as hipóteses na desigualdade (2.3), obtemos

$$0 \leq \int_{\Sigma} (2\|\nabla \phi\|^2 + R_g \phi^2) + \int_{\partial \Sigma} 2\mathbf{k}_g \phi^2.$$

É fácil concluir que

$$0 \leq Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq \sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0. \quad (2.11)$$

Novamente, pela resolução do problema de Yamabe (veja Seção 1.3), existe  $\varphi = \varphi_{\min} > 0$  para o qual  $Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$  é atingido. Então, como vale a igualdade em (2.11), claramente teremos  $R^M = \frac{n}{n-1}H^2$ ,  $H^{\partial M} = -H \cos \theta$  ao longo de  $\partial\Sigma$  e  $\Sigma$  é totalmente umbílica. Novamente teremos que  $\varphi = \varphi_{\min}$  é constante. Então usando o mesmo problema de autovalor usado na Proposição 7, obtemos  $\text{Ric}(N, N) = -\frac{H^2}{n-1}$  em  $\Sigma$ ,  $\text{II}^{\partial M}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + A(\nu, \nu) \cos \theta = 0$  em  $\partial\Sigma$  e  $k_g = 0$ .

Observe agora que, pela equação de Gauss

$$R_g = R^M + H^2 - |A|^2 - 2\text{Ric}(N, N) = 0.$$

Como na proposição 7, a métrica  $g$  é Einstein com bordo totalmente geodésico e desta forma, como o Ricci de  $\Sigma$  é um múltiplo da curvatura escalar, é direto de  $\Sigma$  é Ricci plana.  $\square$

Um teorema de construção de uma folheação se faz necessário para o que segue. Para isso necessitaremos de dois lemas importantes.

**Lema 5.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana com bordo não vazio e  $\varphi : \Sigma^{n-1} \rightarrow M^n$  um mergulho próprio 2-lados de uma hipersuperfície com bordo não vazio. Considere  $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow M$  uma variação própria de  $\varphi$ . A função lapso  $\rho_t$  satisfaz*

$$\begin{cases} \frac{\partial H_t}{\partial t} = \Delta_\Sigma \rho_t + (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2)\rho_t - dH_t(\xi_{\Phi,t}^\perp) & \text{em } \Sigma_t, \\ \frac{\partial(\cos \theta_t)}{\partial t} = -(\sin \theta_t) \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} + (\cos \theta_t)A(\nu_t, \nu_t)\rho_t + \text{II}^{\partial M}(\bar{\nu}_t, \bar{\nu}_t)\rho_t + d\theta_t(W_t) & \text{em } \partial\Sigma_t, \end{cases}$$

onde  $\xi_{\Phi,t}^\perp$  é a projeção ortogonal de  $\xi_{\Phi,t}$  em  $T\Sigma_t$ .

*Demonstração.* Veja [35].  $\square$

**Corolário 2.** *Seja  $(\Sigma_t)_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$  uma família de hipersuperfícies capilares de curvatura média constante e ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$ . A função lapso  $\rho_t$  satisfaz*

$$\begin{cases} \frac{\partial H_t}{\partial t} = \Delta_\Sigma \rho_t + (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2)\rho_t & \text{em } \Sigma_t, \\ \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} = \left( \frac{1}{\sin \theta} \text{II}^{\partial M}(\bar{\nu}_t, \bar{\nu}_t) + (\cot \theta)A(\nu_t, \nu_t) \right) \rho_t & \text{em } \partial\Sigma_t, \end{cases} \quad (2.12)$$

onde  $\xi_{\Phi,t}^\perp$  é a projeção ortogonal de  $\xi_{\Phi,t}$  em  $T\Sigma_t$ .

*Demonstração.* Veja [35]. □

**Lema 6.** *Seja  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $f \in C^{0,\alpha}(\Sigma)$  e  $g \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$  tal que*

$$\int_{\Sigma} f = \int_{\partial\Sigma} g.$$

*Então existe uma única solução  $u \in C^{2,\alpha}(\Sigma)$  para o problema*

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma} u = f & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases}$$

*na classe*

$$\mathcal{C} = \left\{ u \in C^{2,\alpha}(\Sigma) : \int_{\Sigma} u = 0 \right\}.$$

*Demonstração.* Veja [42, Teorema 3.15]. □

Para a proposição seguinte adaptada de E. Longa [37], considere  $Z$  um campo de vetores ao longo de  $\Sigma$  tal que  $g(Z, N) = 1$ , com  $Z$  tangente a  $\partial M$  ao longo de  $\partial\Sigma$ . Sem perda de generalidade considere  $Z$  como sendo uma extensão à  $M$  onde  $Z \in T\partial M$ . Além disso, considere  $\phi(x, t)$  o fluxo local de  $Z$ .

**Proposição 9.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana com bordo não vazio. Assuma que  $M^n$  contém uma hipersuperfície mínima capilar propriamente mergulhada  $\Sigma$  tal que  $H^{\partial M}$  e  $R^M$  são limitadas inferiormente. Se  $\Sigma$  é infinitesimalmente rígida, então existem  $\varepsilon > 0$  e uma função suave  $\mu : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\Sigma_t := \{\phi(\mu(t, x) + t, x) : x \in \Sigma\}$$

*é uma família de hipersuperfícies capilares com curvatura média constante. Além disso,  $\mu(0, x) = 0$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial t}(0, x) = 0$  e  $\int_{\Sigma} \mu(t, \cdot) = 0$  para todo  $x \in \Sigma$  e  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .*

*Demonstração.* Seja  $E_n = \{u \in C^{n,\alpha}(\Sigma) : \int_{\Sigma} u = 0\}$  um espaço de Banach com expoente de Hölder  $\alpha \in (0, 1)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Dada uma função  $u \in C^{2,\alpha}(\Sigma)$  considere

$$\Sigma_u = \{\phi(u(x), x) : x \in \Sigma\}.$$

Se a norma de  $u$  for pequena,  $\Sigma_u$  é uma hipersuperfície propriamente mergulhada em  $M$ .

Para  $\Sigma_u$  tome  $N_u$  como sendo o campo normal unitário de  $\Sigma_u$ ,  $Z_u = Z|_{\partial\Sigma}$  e  $H(u)$  é a curvatura média de  $\Sigma_u$ . Agora, para  $\tau > 0$  e  $\delta > 0$  defina a aplicação

$$\Psi : (-\tau, \tau) \times (B_{\delta}(0) \cap E_2) \rightarrow E_0 \times C^{1,\alpha}(\partial\Sigma),$$

dada por

$$\Psi(\mathbf{t}, \mathbf{u}) = \left( H(\mathbf{t} + \mathbf{u}) - \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} H(\mathbf{t} + \mathbf{u}) d\sigma, g(\mathbf{N}_{\mathbf{t}+\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{N}}_{\mathbf{t}+\mathbf{u}}) - \cos \theta \right),$$

onde  $B_{\delta}(0) = \{\mathbf{u} \in C^{2,\alpha}(\Sigma) : \|\mathbf{u}\|_{2,\alpha} < \delta\}$  denota a bola aberta de raio  $\delta$  centrada na origem de  $E_2$ . Observe que  $\Psi(0, 0) = 0$ , uma vez que  $\Sigma$  é mínima capilar.

Mostraremos que  $(D\Psi)_{(0,0)}$  é um isomorfismo quando restrito a  $\{0\} \times E_2$ . De fato, considere agora a aplicação  $\Phi : (-\tau, \tau) \times \Sigma \rightarrow M$  definida por  $\Phi(\mathbf{t}, \cdot) = \phi(\mathbf{t}\mathbf{v}(\cdot), \cdot)$ , onde a mesma é uma variação para cada  $\mathbf{v} \in E_2$ , cujo campo variacional é dado por

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{t}=0} \Phi = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{t}=0} \phi(\mathbf{t}\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{t}}(0, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{x}).$$

Calculemos  $D\Psi_{(0,0)}(0, \mathbf{v})$  para cada  $\mathbf{v} \in E_2$ . Note que o Lema 5 nos dar que

$$\frac{d}{ds} H(s\mathbf{v}) = \Delta_{\Sigma} \mathbf{v} + (\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + |\mathbf{A}|^2)\mathbf{v} = \Delta_{\Sigma} \mathbf{v},$$

uma vez que  $\Sigma$  é infinitesimalmente rígida, sabemos que  $\text{Ric}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 0$  e  $|\mathbf{A}|^2 = 0$ .

$$\begin{aligned} D\Psi_{(0,0)}(0, \mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \Psi(0, s\mathbf{v}) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left( H(s\mathbf{v}) - \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} H(s\mathbf{v}) d\sigma, g(\mathbf{N}_{s\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{N}}_{s\mathbf{v}}) - \cos \theta \right) \\ &= \left( \Delta_{\Sigma} \mathbf{v} - \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma} \mathbf{v} d\sigma, -(\sin \theta) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} \right) \\ &= \left( \Delta_{\Sigma} \mathbf{v} - \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} d\sigma, -(\sin \theta) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} \right). \end{aligned}$$

Mostremos que  $D\Psi_{(0,0)}$  é sobrejetiva. Dado  $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in E_0 \times C^{1,\alpha}(\partial \Sigma)$  considere o problema dado por

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma} \mathbf{v} = \mathbf{w} - \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\partial \Sigma} \frac{\mathbf{z}}{\sin \theta} d\sigma \text{ em } \Sigma, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\mathbf{z}}{\sin \theta} \text{ em } \partial \Sigma. \end{cases} \quad (2.13)$$

Observe que

$$\int_{\Sigma} \left( \mathbf{w} - \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\partial \Sigma} \frac{\mathbf{z}}{\sin \theta} d\sigma \right) = \int_{\Sigma} \mathbf{w} d\sigma - \int_{\partial \Sigma} \frac{\mathbf{z}}{\sin \theta} d\sigma = \int_{\partial \Sigma} -\frac{\mathbf{z}}{\sin \theta} d\sigma.$$

Desta forma, pelo Lema 6 existe uma única função  $\gamma$  solução do problema (2.13). Assim,  $D\Psi_{(0,0)}(0, \gamma) = (\mathbf{w}, \mathbf{z})$ . Para a injetividade mostraremos que o núcleo de  $D\Psi_{(0,0)}$  é formado

apenas pelo vetor nulo. De fato, o núcleo de tal operador é dado pelos vetores que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma} v - \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma = 0 \text{ em } \Sigma, \\ -(\sin \theta) \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \partial\Sigma, \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma} v = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \partial\Sigma. \end{cases}$$

Como  $v$  satisfaz a equação de Neumann homogênea, então ela é constante e desta forma,  $v = 0$ , uma vez que  $v \in E_2$ , onde as funções tem média nula. Portanto, como  $D\Psi_{(0,0)}$  é linear bijetivo, então é um isomorfismo quando restrito a  $\{0\} \times E_2$ .

Pelo teorema da função implícita, existe  $\varepsilon > 0$  e uma função suave  $\mathbf{t} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \mu(\mathbf{t})(\mathbf{x}) \in B_{\delta}(0) \cap E_2$ , onde

$$\mu(0)(\mathbf{x}) = \mu(0, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{e} \quad \Psi(\mathbf{t}, \mu(\mathbf{t})) = \Psi(0, 0) = (0, 0).$$

Considere então a aplicação dada por

$$G(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \phi(\mu(\mathbf{t}, \mathbf{x}) + \mathbf{t}, \mathbf{x}),$$

onde o campo variacional é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{t}=0} G(\mathbf{t}, \mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{t}=0} \phi(\mu(\mathbf{t}, \mathbf{x}) + \mathbf{t}, \mathbf{x}) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{t}}(0, \mathbf{x}) \left( 1 + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{t}=0} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{t}=0} \right) Z(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} (0, 0) &= \Psi(\mathbf{t}, \mathbf{u}(\mathbf{t})) \\ &= \left( H(\mathbf{t} + \mu(\mathbf{t})) - \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} H(\mathbf{t} + \mu(\mathbf{t})) d\sigma, g(\mathbf{N}_{\mathbf{t} + \mu(\mathbf{t})}, \bar{\mathbf{N}}_{\mathbf{t} + \mu(\mathbf{t})}) - \cos \theta \right), \end{aligned} \tag{2.14}$$

segue que  $\Sigma_{\mathbf{t}}$  é uma hipersuperfície capilar com curvatura média constante para todo  $\mathbf{t} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Tome agora  $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $w(t, x) = \mu(t, x) + t$ . Derivando (2.14) em  $t = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \Psi &= \left( \Delta_{\Sigma} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) - \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} \frac{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} \right)}{\partial \nu} d\sigma, -(\sin \theta) \frac{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} \right)}{\partial \nu} \right) \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

Daí, segue que  $\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0}$  satisfaz o problema de Neumann homogêneo, ou seja,  $\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0}$  é constante.

Agora, como  $\mu(t, \cdot) \in E_2$  então

$$\int_{\Sigma} (w(t, x) - t) d\sigma = \int_{\Sigma} \mu(t, x) d\sigma = 0.$$

Derivando a expressão acima obtemos

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} d\sigma = \text{vol}(\Sigma),$$

o que nos diz que  $\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 1$  e assim, como  $w(t, x) = \mu(t, x) + t$ , teremos  $\frac{\partial \mu}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ . Logo é direto que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} G(t, x) = \left( \frac{\partial \mu}{\partial t} \Big|_{t=0} + 1 \right) Z(x) = N(x).$$

Reduzindo  $\varepsilon$ , se necessário, segue o resultado. □

O Lema abaixo é de grande importancia para a demonstração do Teorema 10.

**Lema 7** (Lema de Gronwall - Forma diferencial). *Sejam  $\mu, : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável,  $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , satisfazendo*

$$\mu'(t) \leq \beta(t)\mu(t),$$

para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Então

$$\mu(t) \leq \mu(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \beta(s) ds \right),$$

para todo  $t \in (t_0, \varepsilon)$ .

*Demonstração.* Defina

$$x(t) = \exp \left( \int_{t_0}^t \beta(s) ds \right), \quad t > t_0.$$

Observe que  $x'(t) = \beta(t)x(t)$ , onde  $x(t_0) = 1$  e  $x(t) > 0$ , para todo  $t \in (t_0, \varepsilon)$ . Desta forma,

$$\frac{d}{dt} \frac{\mu(t)}{x(t)} = \frac{\mu'(t) - \beta(t)\mu(t)}{x^2(t)} \leq 0.$$

Segue que  $\frac{\mu(t)}{x(t)}$  é não crescente, e portanto

$$\frac{\mu(t)}{x(t)} \leq \frac{\mu(t_0)}{x(t_0)} = \mu(t_0), \quad \forall t > t_0.$$

□

**Observação 1.** *Veja que se  $t < t_0$ , obteríamos que*

$$\frac{\mu(t)}{x(t)} \geq \frac{\mu(t_0)}{x(t_0)} = \mu(t_0), \quad \forall t < t_0.$$

Agora daremos a demonstração do Teorema 10.

**Teorema 10.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana ( $n \geq 4$ ) com bordo  $\partial M$ . Seja  $\Sigma^{n-1}$  uma hipersuperfície 2-lados  $J$ -minimizante, propriamente mergulhada em  $M$ , com ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$ , tal que  $H^{\partial M} + H \cos \theta \geq 0$ . Se  $\inf R^M + \frac{n}{n-1}H^2 < 0$ ,  $\sigma_{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$ , e a igualdade ocorre em (2.1), então  $\Sigma$  é uma hipersuperfície mínima com bordo livre, infinitesimalmente rígida e existe uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $M$  isométrica a  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ , dotada da métrica  $dt^2 + g$ , onde  $g$  é a métrica induzida em  $\Sigma$ , a qual é Einstein com bordo totalmente geodésico  $\partial\Sigma$ .*

*Demonstração.* A proposição 7 mostra que  $\Sigma$  é infinitesimalmente rígida, e então, pela proposição 9 podemos considerar uma folheação local por hipersuperfícies cmc capilares  $\Sigma_t$  para  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , com  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Pelo Corolário 2 a função lapso satisfaz

$$\begin{cases} H'(t) = \Delta_\Sigma \rho_t + (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2)\rho_t & \text{em } \Sigma_t, \\ \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} = \left( \frac{1}{\sin \theta} \Pi^{\partial M}(\bar{\nu}_t, \bar{\nu}_t) + (\cot \theta)A_t(\nu_t, \nu_t) \right) \rho_t & \text{em } \partial\Sigma_t. \end{cases}$$

Pela equação de Gauss e usando a desigualdade de Newton

$$\text{Ric}(N_t, N_t) + |A|^2 \geq \frac{1}{2} \left( R_t^M - R_t + \frac{n}{n-1}H(t)^2 \right).$$

Substituindo na primeira equação, dividindo por  $\rho_t$  e multiplicando por 2, obtemos

$$2H'(t)\rho_t^{-1} \geq 2\rho_t^{-1}\Delta_\Sigma \rho_t + R_t^M - R_t + \frac{n}{n-1}H(t)^2. \quad (2.15)$$

Denote por  $g_t$  a métrica induzida em  $\Sigma_t$ . A solução do problema de Yamabe com bordo (veja Seção 1.3) garante que para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  existe uma métrica  $\tilde{g}_t = u_t^{\frac{4}{n-3}} g_t$  com curvatura escalar constante igual a  $\inf R^M$  e bordo sendo uma hipersuperfície mínima. Seja  $u_t$  uma função positiva em  $\Sigma_t$  satisfazendo  $\tilde{g}_t = u_t^{\frac{4}{n-3}} g_t$ , onde a constante de Yamabe é atingida.

Multiplicando (2.15) por  $u_t^2$  e integrando, obtemos

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Sigma_t} H'(t) \rho_t^{-1} u_t^2 &\geq \int_{\Sigma_t} 2 \rho_t^{-1} u_t^2 \Delta_{\Sigma} \rho_t + \int_{\Sigma_t} \left( R_t^M + \frac{n}{n-1} H(t)^2 \right) u_t^2 - \int_{\Sigma_t} u_t^2 R_t \\ &= 2 \int_{\Sigma_t} \rho_t^{-1} u_t^2 \Delta_{\Sigma} \rho_t + \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1} H(t)^2 \right) \int_{\Sigma_t} u_t^2 - \int_{\Sigma_t} u_t^2 R_t. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pelo teorema da divergência

$$\int_{\Sigma_t} \rho_t^{-1} u_t^2 \Delta_{\Sigma} \rho_t + \int_{\Sigma_t} \langle \nabla(\rho_t^{-1} u_t^2), \nabla \rho_t \rangle = \int_{\partial \Sigma_t} \rho_t^{-1} u_t^2 \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t},$$

ou seja,

$$\int_{\Sigma_t} \rho_t^{-1} u_t^2 \Delta_{\Sigma} \rho_t = \int_{\Sigma_t} \rho_t^{-2} u_t^2 \|\nabla \rho_t\|^2 - 2 \rho_t^{-1} u_t \langle \nabla u_t, \nabla \rho_t \rangle + \int_{\partial \Sigma_t} \rho_t^{-1} u_t^2 \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t}.$$

Substituindo em (2.16) e sabendo que  $\Sigma_t$  tem curvatura média constante, obtemos

$$\begin{aligned} 2H'(t) \int_{\Sigma_t} \rho_t^{-1} u_t^2 &\geq 2 \left( \int_{\Sigma_t} \rho_t^{-2} u_t^2 \|\nabla \rho_t\|^2 - 2 \rho_t^{-1} u_t \langle \nabla u_t, \nabla \rho_t \rangle + \int_{\partial \Sigma_t} \rho_t^{-1} u_t^2 \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} \right) \\ &\quad + \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1} H(t)^2 \right) \int_{\Sigma_t} u_t^2 - \int_{\Sigma_t} u_t^2 R_t \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pela desigualdade de Young com  $\epsilon$  tomando  $\epsilon(t) = \frac{\rho_t}{u_t}$ , obtemos

$$2 \langle \nabla u_t, \nabla \rho_t \rangle \leq \|\nabla u_t\|^2 \frac{\rho_t}{u_t} + \|\nabla \rho_t\|^2 \frac{u_t}{\rho_t}.$$

Assim,

$$-\|\nabla u_t\|^2 \leq \|\nabla \rho_t\|^2 \frac{u_t^2}{\rho_t^2} - 2 \frac{u_t}{\rho_t} \langle \nabla u_t, \nabla \rho_t \rangle. \quad (2.18)$$

Utilizando o Lema 2, a equação (2.12) e substituindo (2.18) em (2.17), obtemos

$$\begin{aligned} 2H'(t) \int_{\Sigma_t} \rho_t^{-1} u_t^2 &\geq -2 \int_{\Sigma_t} \|\nabla u_t\|^2 + 2 \int_{\partial \Sigma_t} u_t^2 \left( \frac{1}{\sin \theta} \text{II}^{\partial M}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + (\cot \theta) A(\nu_t, \nu_t) \right) \\ &\quad + \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1} H(t)^2 \right) \int_{\Sigma_t} u_t^2 - \int_{\Sigma_t} u_t^2 R_t \\ &= - \left[ \int_{\Sigma_t} (2 \|\nabla u_t\|^2 + u_t^2 R_t d\sigma_t) + 2 \int_{\partial \Sigma_t} u_t^2 k_t \right] + \frac{2}{\sin \theta} \int_{\partial \Sigma_t} u_t^2 H_t^{\partial M} \\ &\quad + \frac{2}{\sin \theta} \int_{\partial \Sigma_t} (H_t^{\partial M} + H(t) \cos \theta) u_t^2 + \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1} H(t)^2 \right) \int_{\Sigma_t} u_t^2. \end{aligned}$$

Como  $\alpha_n = \frac{4(n-2)}{n-3} > 2$  para  $n \geq 4$ , então

$$2H'(t) \int_{\Sigma_t} \rho_t^{-1} u_t^2 \geq - \left[ \int_{\Sigma_t} \alpha_n \|\nabla u_t\|^2 + u_t^2 R_t d\sigma_t + 2 \int_{\partial\Sigma_t} u_t^2 k_t \right] \\ + \frac{2}{\sin \theta} \int_{\partial\Sigma_t} (H_t^{\partial M} + H(t) \cos \theta) u_t^2 + \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1} H(t)^2 \right) \int_{\Sigma_t} u_t^2.$$

Desde que  $H^{\partial M} \geq -H \cos \theta$ , obtemos

$$2H'(t) \int_{\Sigma_t} \rho_t^{-1} u_t^2 \geq - \left[ \int_{\Sigma_t} \alpha_n \|\nabla u_t\|^2 + u_t^2 R_t d\sigma_t + 2 \int_{\partial\Sigma_t} u_t^2 k_t \right] \\ + \frac{2}{\sin \theta} \int_{\partial\Sigma_t} (-H \cos \theta + H(t) \cos \theta) u_t^2 \\ + \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1} H(t)^2 \right) \int_{\Sigma_t} u_t^2 \\ = - \left[ \int_{\Sigma_t} \alpha_n \|\nabla u_t\|^2 + u_t^2 R_t d\sigma_t + 2 \int_{\partial\Sigma_t} u_t^2 k_t \right] \\ + 2(H(t) - H) \cot \theta \int_{\partial\Sigma_t} u_t^2 + \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1} H(t)^2 \right) \int_{\Sigma_t} u_t^2,$$

e desta forma

$$H'(t)\psi_1(t) \geq \frac{\int_{\Sigma_t} \alpha_n \|\nabla u_t\|^2 + u_t^2 R_t d\sigma_t + 2 \int_{\partial\Sigma_t} u_t^2 k_t}{\left( \int_{\Sigma_t} u_t^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma_t \right)^{\frac{n-3}{n-1}}} + \frac{2(H(t) - H) \cot \theta \int_{\partial\Sigma_t} u_t^2}{\left( \int_{\Sigma_t} u_t^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma_t \right)^{\frac{n-3}{n-1}}} \\ + \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1} H(t)^2 \right) \frac{\int_{\Sigma_t} u_t^2}{\left( \int_{\Sigma_t} u_t^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma_t \right)^{\frac{n-3}{n-1}}},$$

onde

$$\psi_1(t) = \frac{2 \int_{\Sigma_t} \rho_t^{-1} u_t^2}{\left( \int_{\Sigma_t} u_t^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma_t \right)^{\frac{n-3}{n-1}}}.$$

$$\text{Tomando } \psi_2(t) = \frac{2 \int_{\partial\Sigma_t} u_t^2}{\left( \int_{\Sigma_t} u_t^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma_t \right)^{\frac{n-3}{n-1}}} \text{ e } \psi_3(t) = \frac{\int_{\Sigma_t} u_t^2}{\left( \int_{\Sigma_t} u_t^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma_t \right)^{\frac{n-3}{n-1}}} \leq A(\Sigma_t)^{\frac{2}{n-1}},$$

obtemos

$$H'(t)\psi_1(t) \geq -Q^{1,0}(u_t) + \psi_2(t) (H(t) - H) \cot \theta \\ + \psi_3(t) \left( \inf R^M + \frac{n}{n-1} H(t)^2 \right). \quad (2.19)$$

Assuma que  $\inf \mathbb{R}^M + \frac{n}{n-1}H^2 < 0$ . Suponhamos que valha a igualdade em (2.1), isto é,

$$\mathcal{A}(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} = \frac{\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf \mathbb{R}^M + \frac{n}{n-1}H^2}. \quad (2.20)$$

Nós temos que

$$\begin{aligned} H'(t)\psi_1(t) &\geq -Q^{1,0}(u_t) + \psi_2(t)(H(t) - H) \cot \theta + \psi_3(t) \left( \inf \mathbb{R}^M + \frac{n}{n-1}H(t)^2 \right) \\ &\geq -\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) + \psi_2(t)(H(t) - H) \cot \theta \\ &\quad + \left( \inf \mathbb{R}^M + \frac{n}{n-1}H(t)^2 \right) \mathcal{A}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n-1}} \\ &= - \left( \inf \mathbb{R}^M + \frac{n}{n-1}H^2 \right) \mathcal{A}(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} + \psi_2(t)(H(t) - H) \cot \theta \\ &\quad + \left( \inf \mathbb{R}^M + \frac{n}{n-1}H(t)^2 \right) \mathcal{A}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n-1}} \\ &= \left( \inf \mathbb{R}^M + \frac{n}{n-1}H^2 \right) (\mathcal{A}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n-1}} - \mathcal{A}(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}}) + \psi_2(t)(H(t) - H) \cot \theta \\ &\quad + \frac{n}{n-1} (H(t)^2 - H^2) \mathcal{A}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n-1}} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n-1}} - \mathcal{A}(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} &= \frac{2}{n-1} \int_0^t \left( \frac{d}{ds} \mathcal{A}(\Sigma_s) \right) \mathcal{A}(\Sigma_s)^{\frac{3-n}{n-1}} ds \\ &= -\frac{2}{n-1} \int_0^t \mathcal{A}(\Sigma_s)^{\frac{3-n}{n-1}} \left( H(s) \left( \int_{\Sigma} \rho(s) \right) + \cot \theta \left( \int_{\partial\Sigma} \rho(s) \right) \right), \end{aligned}$$

e assim podemos reescrever nossa estimativa como sendo

$$\begin{aligned} H'(t)\psi_1(t) &\geq -\frac{2}{n-1} \left( \inf \mathbb{R}^M + \frac{n}{n-1}H^2 \right) \int_0^t (H(s)\xi(s) + \eta(s) \cot \theta) ds \\ &\quad + \psi_2(t)(H(t) - H) \cot \theta + \frac{n}{n-1} (H(t)^2 - H^2) \mathcal{A}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n-1}}. \end{aligned}$$

onde

$$\xi(s) = \mathcal{A}(\Sigma_s)^{\frac{3-n}{n-1}} \int_{\Sigma} \rho_s \quad \text{e} \quad \eta(s) = \mathcal{A}(\Sigma_s)^{\frac{3-n}{n-1}} \int_{\partial\Sigma} \rho_s.$$

Agora, uma vez que a função lapso pode ser assumida positiva, podemos concluir que

$$H'(t) \geq \left[ R_0(t) \int_0^t \eta(s) ds + R_1(t)(H(t) - H) \right] \cot \theta + R_2(t)(H(t)^2 - H^2), \quad (2.21)$$

com

$$R_0(t) = -\frac{2}{(n-1)\psi_1(t)} \left( \inf \mathbb{R}^M + \frac{n}{n-1}H^2 \right), \quad R_1(t) = \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)},$$

e

$$R_2(t) = \frac{n}{(n-1)\psi_1(t)} A(\Sigma_t)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Suponha que  $H > 0$ . Observe primeiro que  $H'(0) \geq 0$ . Se  $H'(0) > 0$ , então  $H(t) > H$  para  $t$  positivo pequeno e pela primeira variação do funcional  $\mathcal{J}$  obtemos

$$\mathcal{J}(t) - \mathcal{J}(0) = \int_0^t (H - H(s)) \left( \int_{\Sigma} \rho(s) \right) ds < 0, \quad (2.22)$$

o que contradiz o fato de que  $\Sigma$  é  $\mathcal{J}$ -minimizante. Então  $H'(0) = 0$ . Seja

$$g(t) = \left[ R_0(t) \int_0^t \eta(s) ds + R_1(t)(H(t) - H) \right] \cot \theta + R_2(t)(H(t)^2 - H^2).$$

Derivando  $g(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} g'(t) &= \left[ R_0'(t) \int_0^t \eta(s) ds + \eta(t)R_0(t) + R_1'(t)(H(t) - H) + H'(t)R_1(t) \right] \cot \theta \\ &+ R_2'(t)(H(t)^2 - H^2) + 2H'(t)H(t)R_2(t). \end{aligned}$$

Sabendo que  $g(0) = 0$ , é verdade que

$$\frac{H'(t) - H'(0)}{t} \geq \frac{g(t) - g(0)}{t},$$

e desta forma,

$$H''(0) \geq g'(0) = R_0(0)\eta(0) \cot \theta.$$

Se  $H''(0) > 0$ , então  $H'(t) > 0$  para  $t > 0$  suficientemente pequeno, ou seja,  $H(t)$  seria crescente, o que contradiz o fato de que  $\Sigma$  minimiza o funcional  $\mathcal{J}$ . De forma semelhante, se  $H''(0) < 0$ , então deduzimos que  $H'(t) > 0$  e  $H(t)$  seria crescente para  $t < 0$  suficientemente pequeno, e chegamos à mesma contradição. Portanto,  $\Sigma$  deve ser uma hipersuperfície com bordo livre. Assim, a desigualdade (2.21) reduz-se a

$$H'(t) \geq R_2(t)(H(t)^2 - H^2).$$

Aplicando o Lema de Gronwall (Lema 7) à função  $u(t) = H - H(t)$ , obtemos

$$H(t) - H \geq (H(s) - H) \exp \left( \int_s^t R_2(\tau)(H(\tau) + H) d\tau \right),$$

para  $s < t$ . No entanto,  $H(0) = H$  implica que  $H(t) \geq H$  para  $t > 0$  e  $H(t) \leq H$  para  $t < 0$ , ou seja,  $J(t) \leq J(0)$ , para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  e  $J(t) = J(0)$  para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  devido ao fato de que  $\Sigma$  é minimizante para  $\mathcal{J}$ . Portanto,  $H(t) \equiv H$  e cada  $\Sigma_t$  é uma

hipersuperfície capilar estável de curvatura média constante. Por outro lado, aplicando o Teorema 9, devemos ter

$$0 \leq A(\Sigma_t) - A(\Sigma) = \int_0^t \frac{d}{ds} A(\Sigma_s) ds = -H \int_0^t \left( \int_{\Sigma} \rho(s) ds \right) ds,$$

o que significa que  $H \leq 0$ , o que contradiz o fato de que  $H > 0$ . Se  $H = 0$ , também concluímos que  $\Sigma$  é de bordo livre, e o resultado segue diretamente de [8, Thm.2].  $\square$

Estamos prontos para demonstrar o Teorema 3, reescrito abaixo.

**Teorema 11.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana ( $n \geq 4$ ) com bordo  $\partial M$ . Seja  $\Sigma^{n-1}$  uma hipersuperfície 2-lados  $\mathcal{J}$ -minimizante, propriamente mergulhada em  $M$  com ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$ , tal que  $H^{\partial M} + H \cos \theta \geq 0$ . Se  $R^M + \frac{n}{n-1} H^2 \geq 0$  e  $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial \Sigma) \leq 0$ , então  $\Sigma$  é uma hipersuperfície cmc capilar de curvatura média constante infinitesimalmente rígida e existe uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $M$  isométrica a  $(-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$ , munida da métrica  $dt^2 + e^{-2Ht} g$ , onde  $g$  é a métrica induzida em  $\Sigma$ , a qual é Ricci plana com bordo totalmente geodésico  $\partial \Sigma$ .*

*Demonstração.* A proposição 7 mostra que  $\Sigma$  é infinitesimalmente rígida, e então, pela proposição 8 podemos considerar uma folheação local por hipersuperfícies cmc capilares  $\Sigma_t$  para  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , com  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. Seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema 10, sendo  $\inf R^M + \frac{n}{n-1} H^2 \geq 0$  e  $\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial \Sigma) \leq 0$ , a desigualdade em 2.19 se reduz a

$$H'(t)\psi_1(t) \geq \psi_2(t) (H(t) - H) \cot \theta.$$

Aplicando o Lema de Gronwall (Lema 7) para função  $u(t) = H - H(t)$ , nós obtemos

$$H(t) - H \geq (H(s) - H) \exp \left( \cot \theta \int_s^t \frac{\psi_2(\tau)}{\psi_1(\tau)} d\tau \right),$$

para  $s < t$ . Como na demonstração do Teorema 10, segue da propriedade de minimização de  $\Sigma$  que  $H(t) \equiv H$  e  $J(t) = J(0)$  para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Assim, cada  $\Sigma_t$  é uma hipersuperfície capilar de curvatura média constante estável. Aplicando a Proposição 8 para  $\Sigma_t$ , concluímos que elas também são infinitesimalmente rígidas. Segue do Corolário 2 que  $\rho_t$  satisfaz o seguinte problema de Neumann homogêneo

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t = 0 \text{ em } \Sigma_t, \\ \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} = 0 \text{ em } \partial \Sigma_t. \end{cases}$$

Portanto,  $\rho_t$  é constante e, sem perda de generalidade, podemos assumir  $\rho_t = 1$ . Assim, a menos de isometria, podemos escrever a métrica de  $M$ , em uma vizinhança suficientemente pequena de  $\Sigma$ , como  $g = dt^2 + g_t$ . Como  $\Sigma_t$  é totalmente umbílica, por [[28],Lema 7.4], a métrica  $g_t$  satisfaz a seguinte equação de evolução.

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t) = -2H\rho_t g_{ij}(t).$$

Portanto,  $g_t = e^{-2Ht}g$  para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Isso conclui a demonstração.  $\square$

## Capítulo 3

# Estimativas Superiores para o Espectro de Steklov

Neste capítulo, obteremos desigualdades envolvendo os autovalores associados a problemas do tipo Steklov e Schrödinger-Steklov em termos do volume conforme relativo de uma subvariedade compacta com bordo,  $\Sigma$ , imersa conformemente na bola. Ademais, discutiremos um resultado de extremização do tipo Hersch e obteremos uma estimativa inferior para a quantidade de autovalores negativos associados a este tipo de problema.

### 3.1 Construção das funções testes

Nesta seção, focaremos na construção das funções teste para o quociente de Rayleigh associado ao problema de Steklov. A construção se baseia na extensão Lipschitz das funções testes construídas em [32].

Inicialmente, recordemos a construção das funções teste implementadas em [32]. Assim como na Seção 1.5, para cada ponto  $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$  e  $t > 0$ , tomemos  $f_\theta(t) : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$  um difeomorfismo conforme definido por

$$f_\theta(t) = \Phi_\theta^{-1} \circ s_t \circ \Phi_\theta,$$

onde  $\Phi_\theta : \mathbb{S}^{m-1} \setminus \{\theta\} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$  é a projeção estereográfica de um ponto  $\theta$  para o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^m : \langle x, \theta \rangle = 0\}$  e  $s_t : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$  é a aplicação de dilatação dada por  $s_t(v) = tv$ .

Para  $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$  e  $R \in (0, \pi/2)$  fixados, é possível escolher um parâmetro  $t = t(R) > 0$  tal que  $f_\theta(t)$  mapeia a bola aberta  $\tilde{B}_{2R}(\theta) \subset \mathbb{S}^{m-1}$  conformemente no hemisfério  $\mathbb{S}_+^{m-1} = \{\omega \in \mathbb{S}^{m-1} : \langle \omega, \theta \rangle > 0\}$ .

Para cada par  $(R, \theta)$ , Kokarev [32] definiu uma função  $\varphi_{R,\theta}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  como segue

$$\varphi_{R,\theta}(x) = \begin{cases} \langle f_\theta(t)(x), \theta \rangle, & \text{if } x \in \tilde{B}_{2R}(\theta), \\ 0 & \text{if } x \notin \tilde{B}_{2R}(\theta), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\tilde{B}_{2R}(\theta) \subset \mathbb{S}^m$  é a bola de raio  $2R$  centrada em  $\theta$ .

Similarmente, dado  $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$  e  $r \in (0, \pi)$  podemos mapear a bola  $\tilde{B}_{r/2}(\theta) \subset \mathbb{S}^{m-1}$  no hemisfério  $\mathbb{S}_+^{m-1}$  via um difeomorfismo conforme  $f_\theta(\tau)$  para algum  $\tau = \tau(r) > 0$ . Neste caso, o autor construiu em [32] uma função  $\bar{\varphi}_{r,\theta}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\bar{\varphi}_{r,\theta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in \tilde{B}_{r/2}, \\ -\langle f_\theta(\tau)(x), \theta \rangle, & \text{if } x \notin \tilde{B}_{r/2}, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $\tilde{B}_{r/2} \subset \mathbb{S}^{m-1}$  é a bola de raio  $r/2$  centrada em  $\theta$ .

As funções  $\varphi_{R,\theta}$  e  $\bar{\varphi}_{r,\theta}$  satisfazem as seguintes estimativas.

**Lema 8** (Lemas 2.3,2.4 em [32]). *Seja  $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$ .*

- Para cada  $R \in (0, \pi/2)$  temos  $\text{supp } \varphi_{R,\theta} \subset \tilde{B}_{2R}(\theta)$  e

$$\varphi_{R,\theta}(\omega) \geq \frac{3}{5} \quad \text{para todos } \omega \in \tilde{B}_R(\theta) \subset \mathbb{S}^{m-1}.$$

- Para cada  $r \in (0, \pi)$  temos  $\text{supp } \bar{\varphi}_{r,\theta} \subset \mathbb{S}^{m-1} \setminus \tilde{B}_{r/2}(\theta)$  e

$$\bar{\varphi}_{r,\theta}(\omega) \geq \frac{3}{5} \quad \text{para todos } \omega \notin \tilde{B}_r(\theta) \subset \mathbb{S}^{m-1}.$$

A ideia é construir uma extensão conforme da função  $f_\theta(t)$  para a bola unitária. Vamos considerar a aplicação  $F: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m$  definida por

$$F(x_1, \dots, x_m) = \left( \frac{2x'}{(1+x_m)^2 + |x'|^2}, \frac{1-|x|^2}{(1+x_m)^2 + |x'|^2} \right), \quad (3.3)$$

onde  $x' = (x_1, \dots, x_{m-1})$ .  $F$  é uma aplicação conforme (veja [18]) cujo inverso  $F^{-1}: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{B}^m$  é dado por

$$F^{-1}(y_1, \dots, y_{m-1}, t) = \left( \frac{2y}{(1+t)^2 + |y|^2}, \frac{1-t^2-|y|^2}{(1+t)^2 + |y|^2} \right),$$

onde  $y = (y_1, \dots, y_{m-1})$ . A restrição do mapa  $F$  à esfera é a projeção estereográfica através do pólo sul  $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$ , ou seja,  $F(\mathbb{S}^{m-1} \setminus \{\theta\}) = \partial \mathbb{R}_+^m$ . Além disso,  $F(\mathbb{D}^{m-1}) = \mathbb{S}_+^{m-1} \subset \mathbb{R}_+^m$  onde  $\mathbb{D}^{m-1} \subset \mathbb{B}^m$  é o disco equatorial.

Para cada anel  $A_i = B_{R_i} \setminus B_{r_i} \subset \mathbb{R}^m$  dado pelo Lema 4, denote por  $\tilde{A}_i \subset \mathbb{S}^{m-1}$  o anel centrado em  $\theta_i$  com raio interno  $\tilde{r}_i > 0$  e raio externo  $\tilde{R}_i$ , ou seja,  $\tilde{A}_i = \tilde{B}_{\tilde{R}_i} \setminus \tilde{B}_{\tilde{r}_i}$ . Vamos definir  $\mathcal{B}_{R_i} = B_{R_i} \cap \mathbb{B}^m$ . Escreveremos  $\partial \mathcal{B}_{R_i} = \partial_0 \mathcal{B}_{R_i} \cup \partial_1 \mathcal{B}_{R_i}$ , onde

$$\partial_0 \mathcal{B}_{R_i} = \partial \mathcal{B}_{R_i} \cap \text{int } \mathbb{B}^m \quad \text{e} \quad \partial_1 \mathcal{B}_{R_i} = \partial \mathcal{B}_{R_i} \cap \mathbb{S}^{m-1}.$$

Para  $\theta_i \in \mathbb{S}^{m-1}$  e  $\tilde{R}_i \in (0, \pi/2)$  fixos, consideramos o difeomorfismo conforme  $f_{\theta_i}(t_i)$  tal que  $f_{\theta_i}(t_i)(\tilde{B}_{2\tilde{R}_i}) = \mathbb{S}_+^{m-1}$ . Agora, seja  $F_i = F_{\theta_i}(t_i): \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{B}^m$  o difeomorfismo conforme que estende  $f_{\theta_i}(t_i)$  dado por  $F_i = F^{-1} \circ s_{t_i} \circ F$ , onde  $F$  é o difeomorfismo conforme definido em (3.3), que estende a projeção estereográfica através do polo sul  $\theta_i$ .

Para facilitar a notação, escreveremos simplesmente  $\varphi_i$  e  $\bar{\varphi}_i$  para denotar as funções definidas em (3.1) e (3.2), respectivamente. Primeiro, consideramos uma função 1-Lipschitz  $\alpha_i: \partial F_i(\mathcal{B}_{2R_i}) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha_i(y) = \begin{cases} \langle y, \theta_i \rangle, & \text{if } y \in \partial_1(F_i(\mathcal{B}_{2R_i})) = \mathbb{S}_+^{m-1}, \\ 0, & \text{if } y \in \partial_0(F_i(\mathcal{B}_{2R_i})). \end{cases}$$

Agora, tomamos uma extensão de Lipschitz de  $\alpha_i$ , ou seja, uma função  $\beta_i: F_i(\mathcal{B}_{2R_i}) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\text{Lip}_{F_i(\mathcal{B}_{2R_i})}(\beta_i) = \text{Lip}_{\partial F_i(\mathcal{B}_{2R_i})}(\alpha_i).$$

Por exemplo, podemos considerar a função de extensão de McShane (veja [40]) definida como

$$\beta_i(x) = \sup_{y \in \partial F_i(\mathcal{B}_{2R_i})} \{\alpha(y) - |x - y|\}.$$

Podemos estender a função  $\beta_i$  para a bola inteira  $\mathbb{B}^m$  definindo  $\beta_i(y) = 0$  se  $y \notin F_i(\mathcal{B}_{2R_i})$ . Note que  $\beta_i$  é uma função 1-Lipschitz definida em  $\mathbb{B}^m$  e suportada em  $F_i(\mathcal{B}_{2R_i})$ . Definimos  $\Psi_i: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{R}$  por meio da composição  $\Psi_i = \beta_i \circ F_i$ .

De forma semelhante, podemos construir uma função  $\bar{\Psi}_i: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\bar{\Psi}_i = \bar{\beta}_i \circ F_i$ , onde  $\bar{\beta}_i: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é uma extensão 1-Lipschitz da função

$$\bar{\beta}_i(y) = \begin{cases} 0, & \text{if } y \in \partial_0(F_i(\mathcal{B}_{\frac{r_i}{2}})). \\ -\langle y, \theta_i \rangle, & \text{if } y \in \partial_1(F_i(\mathcal{B}_{\frac{r_i}{2}})) = \mathbb{S}_+^{m-1}, \end{cases}$$

tal que  $\bar{\beta}_i(y) = 0$  se  $y \notin F_i(\mathcal{B}_{\frac{r_i}{2}})$ .

A função teste para o quociente de Rayleigh em  $\mathbb{B}^m$  é então definida como

$$u_i = \begin{cases} \Psi_i \bar{\Psi}_i, & \text{if } \tilde{r}_i > 0, \\ \Psi_i, & \text{if } \tilde{r}_i = 0. \end{cases}$$

O lema a seguir será de grande importância para os resultados que seguem.

**Lema 9.**  $u_i$  é uma função Lipschitz em  $\mathbb{B}^n$  satisfazendo

i)  $0 \leq u_i(x) \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{B}^n$ .

ii)  $u_i(x) \geq \frac{9}{25}$  para todo  $x \in 2\mathcal{A}_i \cap \mathbb{S}^n$ .

iii)  $\text{supp } u_i \subset 2\mathcal{A}_i$ .

*Demonstração.* Fazemos o caso  $\tilde{r}_i > 0$ . O caso  $\tilde{r}_i = 0$  é análogo. Por construção é direto que  $\text{supp } u_i \subset 2\mathcal{A}_i$ . Além disso, como  $u_i$  coincide com  $\varphi_i$  em  $2\mathcal{A}_i \cap \mathbb{S}^n$ , é direto que  $u_i(x) \geq \frac{9}{25}$  para todo  $x \in 2\mathcal{A}_i \cap \mathbb{S}^n$ . Para i), observe que

$$\alpha_i(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{y}, \theta_i \rangle = |\mathbf{y}||\theta_i| \cos \theta \in [-1, 1],$$

uma vez que  $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^{m-1}$  e  $\theta_i \in \mathbb{S}_+^{m-1}$ . Logo

$$\beta_i(x) = \sup\{\alpha_i(\mathbf{y}) - |x - \mathbf{y}|\} \leq \alpha_i(\mathbf{y}) \leq 1, \forall x \in \mathbb{B}^m.$$

Analogamente,  $\bar{\beta}_i \leq 1$ . Portanto

$$u_i = (\beta_i \circ F_i)(\bar{\beta}_i \circ \bar{F}_i) \leq 1.$$

Como  $F_i(2\mathcal{A}_i) \subset \mathbb{S}_+^{m-1}$ , e além disso  $F_i$  tem suporte em  $F_i^{-1}(2\mathcal{A}_i)$ , com o mesmo valendo para  $\bar{F}_i$ , as funções  $\beta_i \circ F_i$  e  $\bar{\beta}_i \circ \bar{F}_i$  são não negativas, e desta forma

$$u_i = (\beta_i \circ F_i)(\bar{\beta}_i \circ \bar{F}_i) \geq 0.$$

□

Ao tratarmos de resultados que envolvem a imersão conforme  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{B}^m$ , as funções teste serão definidas simplesmente da seguinte forma:

$$u_i = \begin{cases} (\Psi_i \cdot \bar{\Psi}_i) \circ \psi, & \text{if } \tilde{r}_i > 0, \\ \Psi_i \circ \psi, & \text{if } \tilde{r}_i = 0. \end{cases}$$

Observe que o suporte de  $\Psi_i \circ \psi$  está contido em  $\psi^{-1}(\mathcal{B}_{2R_i})$ . Além disso,  $u_i$  restrito a  $\partial\Sigma$  coincide com as funções de teste consideradas em [32], portanto, elas satisfazem o Lema 8. Observamos que as funções  $u_i$  são 1-Lipschitz com suporte contido no subconjunto  $2\mathcal{A}_i = 2\mathcal{A}_i \cap \mathbb{B}^m$ , e  $u_i|_{\partial\Sigma}$ ,  $u_j|_{\partial\Sigma}$  são  $L^2$ -ortogonais em  $\partial\Sigma$  para  $i \neq j$ .

## 3.2 Estimativas para o espectro de Steklov via volume conforme relativo

Nesta seção, estabeleceremos uma estimativa para o  $k$ -ésimo autovalor de Steklov em função do volume conforme relativo.

**Teorema 12.** *Seja  $\Sigma^n$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo não vazio e dimensão  $n \geq 2$ , que admite uma imersão própria conforme  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{B}^m$ , tal que  $\psi(\partial\Sigma^n) \subset \partial\mathbb{B}^m$ . Então, para cada  $k \geq 1$ , o  $k$ -ésimo autovalor de Steklov em  $\Sigma$  satisfaz a desigualdade*

$$\sigma_k(\Sigma) \text{Vol}(\partial\Sigma) \text{Vol}(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}} \leq C \cdot V^{rc}(\Sigma, m)^{2/n} k^{2/n}, \quad (3.4)$$

onde  $C = C(n, m) > 0$  depende apenas das dimensões  $n$  e  $m$ .

*Demonstração.* Seja  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{B}^m$  uma imersão conforme (não degenerada) com  $\psi(\partial\Sigma) \subset \partial\mathbb{B}^m$ . Consideramos no espaço Euclidiano a função distância usual  $d_{\text{can}}$ , e lembramos que  $(\mathbb{R}^m, d_{\text{can}})$  satisfaz a propriedade global de I-cobertura. Considere agora  $\nu$  a medida dada pelo push-forward da medida de volume  $\text{Vol}_g$  em  $\Sigma^n$  com relação a imersão conforme  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{B}^m$ . Como em [14], definimos uma medida de Borel  $\mu$  suportada em  $\partial\Sigma$  como segue: para qualquer conjunto aberto  $O \in \mathbb{R}^m$  nós definimos

$$\mu(O) = \int_{\psi^{-1}(O \cap \mathbb{S}^{m-1})} 1 \, d\nu_{\partial\Sigma},$$

onde  $d\nu_{\partial\Sigma}$  denota a medida de volume em  $\partial\Sigma$ . Como a medida  $\mu$  é não atômica, aplicando o Lema 4 ao espaço métrico com medida  $(\mathbb{R}^m, d_{g_{\text{can}}}, \mu)$  podemos encontrar uma coleção  $\{\mathcal{A}_i\}$  de  $2(k+1)$  anéis em  $\mathbb{R}^m$  tal que

$$\mu(\mathcal{A}_i) \geq C \frac{\mu(\mathbb{R}^m)}{2(k+1)} \geq C \frac{\mu(\mathbb{R}^m)}{4k} \quad \text{para todo } i = 1, \dots, 2k+2, \quad (3.5)$$

com  $C = 8^{-1}I^{-12} > 0$ . Ademais, a coleção de anéis  $\{2\mathcal{A}_i\}$  é mutuamente disjunta. Reordenando-os, se necessário, podemos afirmar que os primeiros  $k+1$  satisfazem

$$\nu(2\mathcal{A}_i) \leq \frac{\nu(\mathbb{B}^m)}{k+1} \leq \frac{\nu(\mathbb{B}^m)}{k}. \quad (3.6)$$

Considere estas desigualdades pra  $i = 1, \dots, k+1$ . Depois, tome as funções teste de Lipschitz  $W^{1,2}$  ortogonais com suporte em  $\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)$  construídas na seção anterior

$$u_i = \begin{cases} (\Psi_i \circ \psi) \cdot (\bar{\Psi}_i \circ \psi), & \text{if } \tilde{r}_i > 0, \\ \Psi_i \circ \psi, & \text{if } \tilde{r}_i = 0. \end{cases}$$

Sendo o quociente de Rayleigh dado por

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}) = \frac{\int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{v}}{\int_{\partial \Sigma} \mathbf{u}^2 d\mathbf{v}_{\partial \Sigma}},$$

para obter o resultado desejado, precisamos apenas mostrar que para toda  $\mathbf{u} \in \text{Span}\{\mathbf{u}_i\}$

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}) \leq C \cdot \frac{V^{\text{rc}}(\Sigma, \mathbf{m})^{2/n}}{\text{Vol}(\partial \Sigma) \text{Vol}(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}}} k^{2/n}.$$

Vamos supor que  $\tilde{r}_i > 0$ . O outro caso pode ser tratado da mesma maneira. Sabendo que  $(\Psi_i \circ \psi)^2 \leq 1$ ,  $(\bar{\Psi}_i \circ \psi)^2 \leq 1$  e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{v} &\leq 2 \left( \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} (\bar{\Psi}_i \circ \psi)^2 |\nabla(\Psi_i \circ \psi)|^2 d\mathbf{v} + \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} (\Psi_i \circ \psi)^2 |\nabla(\bar{\Psi}_i \circ \psi)|^2 d\mathbf{v} \right) \\ &\leq 2 \left( \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} |\nabla(\Psi_i \circ \psi)|^2 d\mathbf{v} + \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} |\nabla(\bar{\Psi}_i \circ \psi)|^2 d\mathbf{v} \right) \\ &\leq 2 \left( \left( \int_{\Sigma} |\nabla(\Psi_i \circ \psi)|^n d\mathbf{v} \right)^{2/n} + \left( \int_{\Sigma} |\nabla(\bar{\Psi}_i \circ \psi)|^n d\mathbf{v} \right)^{2/n} \right) \text{Vol}_g(\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i))^{1-\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

Para a primeira integral, como  $\beta_i$  é 1-Lipschitz, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla(\Psi_i \circ \psi)|^n &= \int_{\Sigma} |\nabla(\beta_i \circ F_i \circ \psi)|^n d\mathbf{v} \\ &\leq \int_{\Sigma} |\nabla(F_i \circ \psi)|^n d\mathbf{v} \\ &= n^{n/2} \text{Vol}(\Sigma, (F_i \circ \psi)^* g_{\text{can}}) \\ &\leq n^{n/2} V^{\text{rc}}(\Sigma, \mathbf{m}, \psi), \end{aligned}$$

onde  $g_{\text{can}}$  é a métrica canônica de  $\mathbb{B}^m$ . Similarmente, obtemos

$$\int_{\Sigma} |\nabla(\bar{\Psi}_i \circ \psi)|^n d\mathbf{v} \leq n^{n/2} V^{\text{rc}}(\Sigma, \mathbf{m}, \psi).$$

Somando as desigualdades acima e usando (3.6) obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{v} &\leq 4n V^{\text{rc}}(\Sigma, \mathbf{m}, \psi)^{\frac{2}{n}} \text{Vol}_g(\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i))^{1-\frac{2}{n}} \\ &= 4n V^{\text{rc}}(\Sigma, \mathbf{m}, \psi)^{\frac{2}{n}} \nu(2\mathcal{A}_i)^{1-\frac{2}{n}} \\ &\leq 4n V^{\text{rc}}(\Sigma, \mathbf{m}, \psi)^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\nu(\mathbb{B}^m)}{k} \right)^{1-\frac{2}{n}} \\ &= 4n V^{\text{rc}}(\Sigma, \mathbf{m}, \psi)^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\text{Vol}(\Sigma)}{k} \right)^{1-\frac{2}{n}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Agora, usando (3.5), também podemos estimar a integral de  $\mathbf{u}_i$  na fronteira  $\partial\Sigma$  como

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \mathbf{u}_i^2 dv_{\partial\Sigma} &= \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i \cap \mathbb{S}^m)} \mathbf{u}_i^2 dv_{\partial\Sigma} \\ &\geq \left(\frac{3}{5}\right)^4 \mu(2\mathcal{A}_i) \\ &\geq \left(\frac{3}{5}\right)^4 \mu(\mathcal{A}_i) \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^4 C \frac{\mu(\mathbb{R}^m)}{k} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^4 C \frac{\text{Vol}(\partial\Sigma^n)}{k}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Usando (3.7) e (3.8), obtemos

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_i) \leq C \cdot \frac{V^{rc}(\Sigma, \mathbf{m})^{2/n}}{\text{Vol}(\partial\Sigma)\text{Vol}(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}}} k^{2/n}, \quad (3.9)$$

E então, dada  $\mathbf{u} \in \text{Span}\{\mathbf{u}_i\}$ , teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{u}) &= \frac{\int_{\Sigma} \left| \nabla \left( \sum_i a_i \mathbf{u}_i \right) \right|^2 dv}{\int_{\partial\Sigma} \left( \sum_i a_i \mathbf{u}_i \right)^2 dv_{\partial\Sigma}} = \frac{\sum_i a_i a_j \int_{\Sigma} \langle \nabla \mathbf{u}_i, \nabla \mathbf{u}_j \rangle dv}{\sum_i a_i a_j \int_{\partial\Sigma} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j dv_{\partial\Sigma}} \\ &= \frac{\sum_i a_i^2 \int_{\Sigma} |\nabla \mathbf{u}_i|^2 dv}{\sum_i a_i^2 \int_{\partial\Sigma} \mathbf{u}_i^2 dv_{\partial\Sigma}} \\ &\leq C \cdot \frac{V^{rc}(\Sigma, \mathbf{m})^{2/n}}{\text{Vol}(\partial\Sigma)\text{Vol}(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}}} k^{2/n}, \end{aligned}$$

onde usamos que que as funções teste são  $W^{1,2}$  ortogonais. Portanto, usando a caracterização Min-Max segue que

$$\sigma_k \text{Vol}(\partial\Sigma)\text{Vol}(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}} \leq C V^{rc}(\Sigma^n, \mathbf{m})^{2/n} k^{2/n},$$

onde  $C = C(n, \mathbf{m})$  é uma constante que depende apenas das dimensões  $n$  e  $\mathbf{m}$ .  $\square$

Como uma consequência direta do Teorema 12, obtemos o seguinte resultado para superfícies.

**Corolário 3.** *Seja  $\Sigma$  uma superfície compacta com bordo não vazio. Então*

$$\sigma_k L(\partial\Sigma) \leq C(\mathbf{m}) V^{rc}(\Sigma, \mathbf{m}) k, \quad (3.10)$$

onde  $L(\partial\Sigma)$  é o comprimento de  $\partial\Sigma$ .

### 3.3 Estimativas para o operador Laplaciano Conforme

Seja  $(\Sigma^n, g)$ , com  $n \geq 3$ , uma variedade compacta com bordo  $\partial\Sigma$  e curvatura escalar  $R_g$ . Considere  $[g]$  a classe conforme de  $g$ . Dada uma métrica  $\tilde{g} \in [g]$ , escrevemos  $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$  para alguma função suave e positiva  $u: \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Observamos que as formas de volume Riemannianas em  $\Sigma$  e em  $\partial\Sigma$  estão relacionadas pela mudança conforme por  $dv_{\tilde{g}} = u^{\frac{2n}{n-2}}dv_g$  e  $d\tilde{v}_{\partial\Sigma} = u^{\frac{2(n-1)}{n-2}}dv_{\partial\Sigma}$ , respectivamente.

Recordamos que o Laplaciano conforme é o operador que atua em  $C^\infty(\Sigma)$  definido por

$$L_g \phi = -\Delta \phi + c_n R_g \phi,$$

onde  $R_g$  é a curvatura escalar de  $(\Sigma, g)$  e  $c_n = \frac{n-2}{4(n-1)}$ . O operador de bordo conforme correspondente, atuando em  $C^\infty(\partial\Sigma)$ , é dado por

$$B_g \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \nu_g} + b_n H_g \phi,$$

onde  $H_g$  é a curvatura média do bordo  $\partial\Sigma$ ,  $b_n = \frac{n-2}{2}$ , e  $\eta_g$  é o vetor normal unitário exterior ao longo de  $\partial\Sigma$ . Dado  $\tilde{g} \in [g]$ , recordamos que a curvatura escalar e a curvatura média satisfazem as seguintes leis de transformação:

$$\begin{cases} R_{\tilde{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2} u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g u & \text{em } \Sigma, \\ H_{\tilde{g}} = \frac{2}{n-2} u^{-\frac{n}{n-2}} B_g u & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (3.11)$$

Estamos interessados no seguinte problema de autovalores:

$$\begin{cases} L_g \phi = 0 & \text{em } \Sigma, \\ B_g \phi = \sigma \phi & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (3.12)$$

O próximo teorema estabelece uma desigualdade envolvendo os autovalores do seguinte problema associado ao Laplaciano conforme, considerando a bola  $\mathbb{B}^n$  com a métrica euclidiana:

$$\begin{cases} -\Delta_{\tilde{g}} \phi + c_n R_{\tilde{g}} \phi = 0 & \text{em } \mathbb{B}^n \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\eta}} + b_n H_{\tilde{g}} \phi = \sigma \phi & \text{em } \mathbb{S}^{n-1}. \end{cases}$$

Seja  $g$  a métrica Euclidiana em  $\mathbb{B}^n$  e  $\tilde{g} \in [g]$ , onde  $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ . Considere  $dv, d\tilde{v}$  as medidas de volume induzidas pelas métricas  $g, \tilde{g}$ , respectivamente, além de suas restrições  $dv_{\mathbb{S}^{n-1}}, d\tilde{v}_{\mathbb{S}^{n-1}}$  à esfera. Observe que, desta forma,  $d\tilde{v} = u^{\frac{2n}{n-2}}dv$  e  $d\tilde{v}_{\mathbb{S}^{n-1}} = u^{\frac{2(n-1)}{n-2}}dv_{\mathbb{S}^{n-1}}$ .

Fixada a notação, agora apresentaremos um lema essencial para a demonstração desse resultado.

**Lema 10.** *Para toda função  $f$  Lipschitz, temos*

$$\int_{\mathbb{B}^n} |\nabla_{\tilde{g}} f|^2 d\tilde{v} + c_n \int_{\mathbb{B}^n} R_{\tilde{g}} f^2 d\tilde{v} + b_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_{\tilde{g}} f^2 d\tilde{v}_{\mathbb{S}^{n-1}} =$$

$$\int_{\mathbb{B}^n} |\nabla_g(uf)|^2 dv + c_n \int_{\mathbb{B}^n} R_g(uf)^2 dv + b_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_g(uf)^2 dv_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

*Demonstração.* Observe que

$$\int_{\mathbb{B}^n} |\nabla_g(uf)|^2 dv + c_n \int_{\mathbb{B}^n} R_g(uf)^2 dv + b_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_g(uf)^2 dv_{\mathbb{S}^{n-1}} =$$

$$- \int_{\mathbb{B}^n} uf \Delta_g(uf) dv + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} uf \frac{\partial(uf)}{\partial \eta} dv_{\mathbb{S}^{n-1}} + c_n \int_{\mathbb{B}^n} R_g(uf)^2 dv + b_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_g(uf)^2 dv_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

$$= \int_{\mathbb{B}^n} uf [-\Delta_g + c_n R_g](uf) dv + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} uf \left[ \frac{\partial(uf)}{\partial \eta} + b_n H_g uf \right] dv_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Pelo Lema 4.1 em [49], obtemos

$$\int_{\mathbb{B}^n} |\nabla_g(uf)|^2 dv + c_n \int_{\mathbb{B}^n} R_g(uf)^2 dv + b_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_g(uf)^2 dv_{\mathbb{S}^{n-1}} =$$

$$\int_{\mathbb{B}^n} f [-\Delta_{\tilde{g}} + c_n R_{\tilde{g}}](f) u^{\frac{2n}{n-2}} dv + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} uf \left[ \frac{\partial(uf)}{\partial \eta} + b_n H_g uf \right] dv_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Observe agora que

$$\frac{\partial(uf)}{\partial \eta} + b_n H_g uf = u \frac{\partial f}{\partial \eta} + f \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} + b_n H_g u \right)$$

$$= u \frac{\partial f}{\partial \tilde{\eta}} u^{\frac{2}{n-2}} + \frac{n-2}{2} f H_{\tilde{g}} u^{\frac{2}{n-2}}$$

$$= u^{\frac{n}{n-2}} \left[ \frac{\partial u}{\partial \tilde{\eta}} + b_n H_{\tilde{g}} u \right],$$

onde usamos que  $\frac{\partial f}{\partial \tilde{\eta}} = u^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial f}{\partial \eta}$  e a definição de  $H_{\tilde{g}}$ .

Desta forma

$$\int_{\mathbb{B}^n} |\nabla_g(uf)|^2 dv + c_n \int_{\mathbb{B}^n} R_g(uf)^2 dv + b_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_g(uf)^2 dv_{\mathbb{S}^{n-1}} =$$

$$\int_{\mathbb{B}^n} f [-\Delta_{\tilde{g}} + c_n R_{\tilde{g}}](f) u^{\frac{2n}{n-2}} dv + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (uf) u^{\frac{n}{n-2}} \left[ \frac{\partial u}{\partial \tilde{\eta}} + b_n H_{\tilde{g}} u \right] dv_{\mathbb{S}^{n-1}} =$$

$$\int_{\mathbb{B}^n} f [-\Delta_{\tilde{g}} + c_n R_{\tilde{g}}](f) d\tilde{v} + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f \left[ \frac{\partial u}{\partial \tilde{\eta}} + b_n H_{\tilde{g}} u \right] d\tilde{v}_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

Pelo Teorema da divergência segue que

$$\int_{\mathbb{B}^n} (|\nabla_{\tilde{g}} f|^2 d\tilde{v} + c_n R_{\tilde{g}} f^2) d\tilde{v} + b_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_{\tilde{g}} f^2 d\tilde{v}_{\mathbb{S}^{n-1}} = \int_{\mathbb{B}^n} |\nabla_g(uf)|^2 dv + c_n \int_{\mathbb{B}^n} R_g(uf)^2 dv$$

$$+ b_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_g(uf)^2 dv_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

□

Nosso primeiro objetivo nesta subseção é estender a estimativa obtida no Teorema 12 para o Laplaciano conforme na classe de variedades Riemannianas compactas  $(\Sigma^n, g)$  com bordo não vazio  $\partial\Sigma$  e dimensão  $n \geq 2$ , que admitem uma imersão conforme própria  $\psi: (\Sigma, g) \rightarrow (\mathbb{B}^m, g_0)$ , onde  $g_0$  é a métrica canônica.

Considere  $\psi: (\Sigma^n, g) \rightarrow (\mathbb{B}^m, g_0)$ , com

$$g = \psi^* g_0.$$

Seja  $\tilde{g} \in [g]$  uma métrica conforme, que está relacionada a  $g$  por

$$\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g,$$

para alguma função  $u \in C^\infty(\Sigma)$ .

**Teorema 13.** *Para toda métrica  $\tilde{g} \in [g]$ , o  $k$ -ésimo autovalor para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_{\tilde{g}}\phi + c_n R_{\tilde{g}}\phi = 0 & \text{em } \Sigma^n \\ \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{\eta}} + b_n H_{\tilde{g}}\phi = \sigma\phi & \text{em } \partial\Sigma^n, \end{cases}$$

satisfaz a desigualdade

$$\sigma_k(\Sigma, \tilde{g}) \text{vol}_g(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}} \int_{\partial\Sigma} u^{\frac{2}{n-2}} \leq C \left[ V^{rc}(\Sigma, m, \phi)^{\frac{2}{n}} + \|R_g\|_{\frac{n}{2}} + \|H_g\|_{\frac{n}{2}} \left( \frac{\text{vol}_g(\partial\Sigma)}{\text{vol}_g(\Sigma)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \right] k^{\frac{2}{n}},$$

onde  $C > 0$  é uma constante dependendo apenas de  $n$ .

*Demonstração.* Seja  $\psi: (\Sigma, g) \rightarrow \mathbb{B}^m$  uma imersão conforme própria. Consideramos a medida de Borel

$$\mu(O) \doteq \int_{\psi^{-1}(O \cap \mathbb{S}^{m-1})} u^{\frac{2}{n-2}} dv_{\partial\Sigma},$$

definida para todo subconjunto aberto  $O \in \mathbb{R}^m$ . Assim como na demonstração do Teorema 12, aplicamos o Lema 4 ao espaço métrico de medida  $(\mathbb{R}^m, d_{can}, \mu)$  e obtemos a existência de  $2(k+1)$  anéis  $\{A_i\} \subset \mathbb{R}^m$  tais que

$$\mu(A_i) \geq C \frac{\mu(\mathbb{R}^m)}{4k} = C \frac{\int_{\Sigma} u^{\frac{2}{n-2}} dv_{\partial\Sigma}}{4k}, \quad (3.13)$$

para todo  $i = 1, \dots, 2k+2$ , e uma constante  $C > 0$  que depende apenas de  $n$ . Como os anéis  $\{2A_i\}$  são mutuamente disjuntos, reordenando os índices, temos também

$$\text{vol}_g(\psi^{-1}(2A_i)) \leq \frac{\text{vol}_g(\Sigma)}{k} \quad \text{e} \quad \text{vol}_g(\psi^{-1}(2A_i \cap \mathbb{S}^{m-1})) \leq \frac{\text{vol}_g(\partial\Sigma)}{k}, \quad (3.14)$$

onde  $2\mathcal{A}_i = 2\mathcal{A}_i \cap \mathbb{B}^m$ .

Mais uma vez, para todo  $i = 1, \dots, k+1$  definimos  $f_i = \frac{u_i}{u}$ , onde  $u_i$  são as funções teste definidas na Seção 3.1 e  $u$  é a função positiva que satisfaz  $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ . Assim, podemos estimar

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Sigma} f_i^2 d\tilde{\nu}_{\partial\Sigma} &= \int_{\partial\Sigma} u_i^2 u^{\frac{2}{n-2}} d\nu_{\partial\Sigma} \\
 &\geq \frac{3^4}{5^4} \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i \cap \mathbb{S}^{m-1})} u^{\frac{2}{n-2}} d\nu_{\partial\Sigma} \\
 &= \frac{3^4}{5^4} \mu(2\mathcal{A}_i) \\
 &\geq \frac{3^4}{5^4} \frac{c}{k} \int_{\partial\Sigma} u^{\frac{2}{n-2}} d\nu_{\partial\Sigma}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 10 sabemos que

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Sigma} |\nabla_{\tilde{g}} f_i|^2 d\nu_{\tilde{g}} + c_n \int_{\Sigma} R_{\tilde{g}} f_i^2 d\nu_{\tilde{g}} + b_n \int_{\partial\Sigma} H_{\tilde{g}} f_i^2 d\tilde{\nu}_{\partial\Sigma} \\
 &= \int_{\Sigma} |\nabla_g u_i|^2 d\nu_g + c_n \int_{\Sigma} R_g u_i^2 d\nu_g + b_n \int_{\partial\Sigma} H_g u_i^2 d\nu_{\partial\Sigma} \\
 &= \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} |\nabla_g u_i|^2 d\nu_g + c_n \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} R_g u_i^2 d\nu_g + b_n \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i \cap \mathbb{S}^{m-1})} H_g u_i^2 d\nu_{\Sigma}. \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo argumento da demonstração do Teorema 12 para estimar o termo do gradiente (ver (3.7)), e aplicando as estimativas de (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} |\nabla_g u_i|^2 d\nu_g &\leq \left( \int_{2\mathcal{A}_i} |\nabla u_i|^n d\nu_g \right)^{\frac{2}{n}} \text{vol}_g(2\mathcal{A}_i)^{\frac{n-2}{n}} \\
 &\leq 4nV^{rc}(\Sigma, m, \psi)^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\text{vol}_g(\Sigma)}{k} \right)^{\frac{n-2}{n}}. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Também podemos estimar os dois termos restantes no lado direito de (3.16) como

$$\begin{aligned}
 &c_n \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} R_g u_i^2 d\nu_g + b_n \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i \cap \mathbb{S}^{m-1})} H_g u_i^2 d\nu_{\Sigma} \\
 &\leq c_n \left( \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} |R_g|^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \left( \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} u_i^{\frac{2n}{n-2}} d\nu_g \right)^{\frac{n-2}{n}} + \\
 &\quad b_n \left( \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i \cap \mathbb{S}^{m-1})} |H_g|^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \left( \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i \cap \mathbb{S}^{m-1})} u_i^{\frac{2n}{n-2}} d\sigma_g \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
 &\leq c_n \left( \int_{\Sigma} |R_g|^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\text{vol}_g(\Sigma)}{k} \right)^{\frac{n-2}{n}} + b_n \left( \int_{\partial\Sigma} |H_g|^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\text{vol}(\partial\Sigma)}{k} \right)^{\frac{n-2}{n}}. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Combinando (3.17) com (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} |\nabla_{\tilde{g}} f_i|^2 dv_{\tilde{g}} + c_n \int_{\Sigma} R_{\tilde{g}} f_i^2 dv_{\tilde{g}} + b_n \int_{\partial\Sigma} H_{\tilde{g}} f_i^2 d\tilde{\nu}_{\partial\Sigma} \\ & \leq \left( \frac{\text{vol}_g(\Sigma)}{k} \right)^{\frac{n-2}{n}} \left[ 4n V^{rc}(\Sigma, m, \psi)^{\frac{2}{n}} + c_n \left( \int_{\Sigma} |R_g|^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \right] + b_n \left( \int_{\partial\Sigma} |H_g|^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\text{vol}(\partial\Sigma)}{k} \right)^{\frac{n-2}{n}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Portanto, substituindo (3.15) e (3.19) na caracterização min-max para o  $k$ -ésimo autovalor de Steklov, concluimos que

$$\begin{aligned} & \sigma_k(\Sigma, \tilde{g}) \text{vol}_g(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}} \int_{\partial\Sigma} u^{\frac{2}{n-2}} dv_{\partial\Sigma} \leq \\ & \left[ 4n V^{rc}(\Sigma, m, \psi)^{\frac{2}{n}} + c_n \left( \int_{\Sigma} |R_g|^{\frac{n}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{n}} + b_n \left( \int_{\partial\Sigma} |H_g|^{\frac{n}{2}} dv_{\partial\Sigma} \right)^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\text{vol}(\partial\Sigma)}{\text{vol}_g(\Sigma)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \right] k^{\frac{2}{n}}. \end{aligned} \quad \square$$

### 3.4 Resultados de Extremização do tipo Hersch

Seja  $(\Sigma^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ . Para toda métrica  $\tilde{g} \in [g]$  com  $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ , nós definimos o funcional

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma, g, \tilde{g}) = \left( \sigma_k(\Sigma, \tilde{g}) \cdot \int_{\partial\Sigma} u^{\frac{2}{n-2}} dv_{\partial\Sigma} \right), \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

Na expressão acima,  $\sigma_k(\Sigma, \tilde{g})$  está associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta_{\tilde{g}} \phi + c_n R_{\tilde{g}} \phi = 0 & \text{em } \mathbb{B}^n \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\eta}} + b_n H_{\tilde{g}} \phi = \sigma \phi & \text{em } \mathbb{S}^{n-1}, \end{cases} \quad (3.20)$$

Desta forma, podemos considerar o supremo sobre a classe conforme

$$\Lambda_k(\Sigma, g) = \sup_{\tilde{g} \in [g]} \bar{\sigma}_k(\Sigma, g, \tilde{g}).$$

O próximo teorema mostra que, ao considerarmos a bola unitária  $\mathbb{B}^n$  com a métrica euclidiana  $g$ , o supremo do funcional em questão na classe conforme de  $g$  é atingido pela própria métrica  $g$ .

**Teorema 14.** *Seja  $(\mathbb{B}^n, g)$  a bola unitária munida com a métrica Euclidiana. Então*

$$\Lambda_1(\mathbb{B}^n, g) = \bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, g).$$

*Além disso,  $\Lambda_1(\mathbb{B}^n, g) = \bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, \tilde{g})$  se, e somente se,  $\tilde{g}$  é a métrica Euclidiana a menos de um produto por escalar.*

*Demonstração.* Para toda  $\tilde{g} \in [g]$ , dada por  $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ , considerando  $\frac{1}{u}$  a função teste para o quociente de Rayleigh associado ao problema (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_1(\mathbb{B}^n, \tilde{g}) &\leq \frac{\int_{\mathbb{B}^n} \left| \nabla_{\tilde{g}} \left( \frac{1}{u} \right) \right|^2 d\tilde{v} + c_n \int_{\mathbb{B}^n} R_{\tilde{g}} \left( \frac{1}{u} \right)^2 d\tilde{v} + b_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_{\tilde{g}} \left( \frac{1}{u} \right)^2 d\tilde{v}_{\mathbb{S}^{n-1}}}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left( \frac{1}{u} \right)^2 d\tilde{v}_{\mathbb{S}^{n-1}}} \\ &\leq \frac{b_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_g d\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u^{\frac{2}{n-2}} d\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}} = \frac{b_n H_g \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u^{\frac{2}{n-2}} d\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}} \\ &= \frac{\bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, g)}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u^{\frac{2}{n-2}} d\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde usamos o Lema 10 e que em  $\tilde{g} = g$  teremos  $u = 1$ ,  $\sigma_1(\mathbb{B}^n, g) = b_n H_g$ . Desta forma,

$$\bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, \tilde{g}) = \sigma_1(\mathbb{B}^n, \tilde{g}) \cdot \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u^{\frac{2}{n-2}} d\nu_{\mathbb{S}^{n-1}} \leq \bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, g).$$

Tomando o supremo na classe conforme, obtemos

$$\Lambda_1(\mathbb{B}^n, g) \leq \bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, g).$$

Logo,

$$\Lambda_1(\mathbb{B}^n, g) = \bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, g).$$

Suponha agora que  $\Lambda_1(\mathbb{B}^n, g) = \bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, \tilde{g})$ . Desta forma

$$\Lambda_1(\mathbb{B}^n, g) = \bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, \tilde{g}) = \sigma_k(\mathbb{B}^n, \tilde{g}) \cdot \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u^{\frac{2}{n-2}} d\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}, \tag{3.22}$$

e assim

$$\sigma_1(\mathbb{B}^n, \tilde{g}) = \frac{\Lambda_1(\mathbb{B}^n, g)}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u^{\frac{2}{n-2}} d\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}} = \frac{\bar{\sigma}_1(\mathbb{B}^n, g, g)}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u^{\frac{2}{n-2}} d\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}}. \tag{3.23}$$

Segue que valem todas as igualdades em (3.21) e, portanto,  $\frac{1}{u}$  é uma autofunção com autovalor  $\sigma_1(\mathbb{B}^n, \tilde{g})$ . Desta forma

$$\begin{aligned} \sigma_1(\mathbb{B}^n, g) &= \left( \frac{\partial}{\partial \eta} + b_n H_g \right) 1 = u^{\frac{n}{n-2}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} + b_n H_{\tilde{g}} \right) (u^{-1}) \\ &= \sigma_1(\mathbb{B}^n, \tilde{g}) u^{\frac{2}{n-2}}. \end{aligned}$$

Concluimos que  $u$  é uma função constante e isto finaliza a segunda parte da prova.  $\square$

### 3.5 Operador do tipo Schrödinger-Steklov

Nesta seção, estabeleceremos uma desigualdade envolvendo o número de autovalores negativos para o problema

$$\begin{cases} \Delta u + \mathcal{V}_1 u = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} - \mathcal{V}_2 u = \sigma u & \text{em } \partial \Sigma, \end{cases} \quad (3.24)$$

onde  $\mathcal{V}_1 \in L^\infty(\Sigma^n)$  e  $\mathcal{V}_2 \in L^\infty_+(\partial \Sigma^n)$  são funções potenciais. Definimos, neste contexto, o quociente de Rayleigh da seguinte forma:

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int_\Sigma |\nabla_g u|^2 dv - \int_\Sigma \mathcal{V}_1 u^2 dv - \int_{\partial \Sigma} \mathcal{V}_2 u^2 dv_{\partial \Sigma}}{\int_{\partial \Sigma} u^2 dv_{\partial \Sigma}}. \quad (3.25)$$

**Teorema 15.** *Seja  $\Sigma^n$  uma variedade Riemanniana compacta com  $\partial \Sigma \neq \emptyset$  e dimensão  $n \geq 2$ . Então, para cada inteiro  $m > 0$  onde o  $m$ -volume conforme relativo de  $\Sigma$  está definido, e para funções potenciais  $\mathcal{V}_1 \in L^\infty(\Sigma^n)$  e  $\mathcal{V}_2 \in L^\infty_+(\partial \Sigma^n)$ , onde 0 não pertence ao espectro de  $-(\Delta^D + \mathcal{V}_1)$ , o número de autovalores negativos para o problema (3.24) satisfaz*

$$N(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \geq \frac{C}{\left[ \text{Vrc}(m, \Sigma^n)^{\frac{2}{n}} + \left( \int_\Sigma (\mathcal{V}_1)^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \right]^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\text{Vol}_g(\Sigma^n)^{n/2-1}} \left( \int_{\partial \Sigma^n} \mathcal{V}_2 d\text{Vol}_g \right)^{n/2}, \quad (3.26)$$

onde  $C > 0$  é uma constante dependendo somente de  $n$  e  $m$ .

*Demonstração.* Seguindo a notação da demonstração do Teorema 12, consideremos  $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbb{B}^m$  uma imersão conforme própria. Assim como na demonstração de [32, Thm.1.12], consideramos  $(\mathbb{B}^m, \omega)$ , onde  $\omega$  é a medida induzida pela medida de volume  $\text{vol}_g$  em  $\Sigma$  pela

imersão conforme  $\psi$ , e  $(\mathbb{R}^m, d_{\text{can}}, \mu)$  munido da medida de Borel não atômica definida por

$$\mu(\mathcal{O}) = \int_{\psi^{-1}(\mathcal{O} \cap \mathbb{S}^{m-1})} \mathcal{V}_2 d\nu_{\Sigma}.$$

Podemos invocar o Lema 4 para garantir a existência de  $2(k+1)$  anéis mutuamente disjuntos  $\{\mathcal{A}_i\} \subset \mathbb{R}^m$  tais que

$$\mu(\mathcal{A}_i) \geq C \frac{\mu(\mathbb{R}^m)}{2(k+1)} \geq C \frac{\mu(\mathbb{R}^m)}{4k}, \quad (3.27)$$

para todo  $i = 1, \dots, 2k+2$ . Como os anéis  $2\mathcal{A}_i$  são mutuamente disjuntos, também temos para  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i \cap \mathbb{B}^m$

$$\omega(2\mathcal{A}_i) \leq \frac{\omega(\mathbb{B}^m)}{k+1} \leq \frac{\text{vol}_g(\Sigma)}{k}. \quad (3.28)$$

Fixamos então  $k \geq 0$  como a parte inteira de

$$\left( \frac{9C}{2500} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{\text{vol}_g(\Sigma)^{\frac{2-n}{2}}}{n^{\frac{n}{2}} \left[ V^{\text{rc}}(\mathfrak{m}, \Sigma)^{\frac{2}{n}} + \left( \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1^{\frac{n}{2}} d\nu_g \right)^{\frac{2}{n}} \right]^{\frac{n}{2}}} \left( \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 d\nu_{\partial\Sigma} \right)^{\frac{n}{2}},$$

onde  $C$  é a constante positiva dada em (3.27). O restante da demonstração consiste em mostrar que existem  $k+1$  funções teste  $u_i$ , cujos suportes são mutuamente disjuntos, tais que

$$\int_{\Sigma} |\nabla u_i|^2 d\nu_g - \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1 u_i^2 d\nu_g < \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 u_i^2 d\nu_{\partial\Sigma}. \quad (3.29)$$

De fato, essa última desigualdade implica que

$$\mathcal{N}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \geq k+1 \geq \frac{C \text{vol}_g(\Sigma)^{\frac{2-n}{2}}}{\left[ V^{\text{rc}}(\mathfrak{m}, \Sigma)^{\frac{2}{n}} + \left( \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1^{\frac{n}{2}} d\nu_g \right)^{\frac{2}{n}} \right]^{\frac{n}{2}}} \left( \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 d\nu_{\partial\Sigma} \right)^{n/2}.$$

Sejam  $u_i$  as funções teste Lipschitz definidas na Seção 3.1, cujo suporte está contido em  $\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)$ . Usando (3.7), o lado esquerdo de (3.29) pode ser estimado como

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla u_i|^2 d\nu_g - \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1 u_i^2 d\nu_g &\leq 4n V^{\text{rc}}(\Sigma, \mathfrak{m}, \psi)^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\text{vol}_g(\Sigma)}{k} \right)^{\frac{n-2}{n}} + \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} \mathcal{V}_1 u_i^2 d\nu_g \\ &\leq 4n V^{\text{rc}}(\Sigma, \mathfrak{m}, \psi)^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\text{vol}_g(\Sigma)}{k} \right)^{\frac{n-2}{n}} + \left( \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1^{\frac{n}{2}} d\nu_g \right)^{\frac{2}{n}} \left( \int_{\psi^{-1}(2\mathcal{A}_i)} u_i^{\frac{2n}{n-2}} d\nu_g \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\leq \left( \frac{\text{vol}_g(\Sigma)}{k} \right)^{\frac{n-2}{n}} \left[ 4n V^{\text{rc}}(\Sigma, \mathfrak{m}, \psi)^{\frac{2}{n}} + \left( \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1^{\frac{n}{2}} d\nu_g \right)^{\frac{2}{n}} \right] \\ &< \left( \frac{\text{vol}_g(\Sigma)}{k} \right)^{\frac{n-2}{n}} 9n \left[ V^{\text{rc}}(\Sigma, \mathfrak{m}, \psi)^{\frac{2}{n}} + \left( \int_{\Sigma} \mathcal{V}_1^{\frac{n}{2}} d\nu_g \right)^{\frac{2}{n}} \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado, o lado direito de (3.29) satisfaz

$$\int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 u_i^2 dv_\Sigma \geq \frac{81}{625} \int_{\psi^{-1}(A_i \cap \mathbb{S}^{m-1})} \mathcal{V}_2 dv_\Sigma = \frac{81}{625} \mu(A_i) \geq \frac{81C}{2500} \frac{\mu(\mathbb{R}^m)}{k}.$$

Reunindo essas duas estimativas, obtemos

$$\frac{\int_\Sigma |\nabla u_i|^2 dv_g - \int_\Sigma \mathcal{V}_1 u_i^2 dv_g}{\int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}_2 u_i^2 dv_\Sigma} < \frac{2500n \text{vol}_g(\Sigma)^{\frac{n-2}{n}}}{9C\mu(\mathbb{R}^m)} \left[ V^{rc}(m, \Sigma, \psi)^{\frac{2}{n}} + \left( \int_\Sigma \mathcal{V}_1^{\frac{n}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{n}} \right] k^{\frac{2}{n}} \leq 1,$$

onde na última desigualdade foi usada a definição de  $k$ . Isso conclui a demonstração.  $\square$

### Aplicações para o operador de Jacobi-Steklov

Faremos agora um resultado relacionado ao índice de estabilidade, considerando um problema associado ao operador de Jacobi. Problemas relacionados à este operador já foram considerados nos trabalhos [6, 51].

Considere o problema abaixo, associado à forma de índice apresentada no Capítulo 1, onde se assume  $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ .

$$\begin{cases} -\Delta_\Sigma \phi - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)\phi = \lambda\phi & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = q\phi & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases}$$

onde  $q = \frac{1}{\sin \theta} \text{II}^{\partial M}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + (\cot \theta)A(\nu, \nu)$ .

Sendo  $(\mathbb{B}^n, g)$  a bola unitária munida da métrica canônica e  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{B}^n$  uma hipersuperfície de bordo livre  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ , podemos denotar o operador de Jacobi por  $J = \Delta + |A|^2$ . Considere então, o problema do tipo Schrödinger-Steklov associado ao operador de Jacobi  $J$ :

$$\begin{cases} \Delta u + |A|^2 u = 0 & \text{em } \Sigma^{n-1}, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} - u = \sigma u & \text{em } \partial\Sigma^{n-2}. \end{cases}$$

Nesse caso, as funções potenciais são dadas por  $\mathcal{V}_1 = |A|^2$  e  $\mathcal{V}_2 = -\text{II}^{\mathbb{S}^{n-1}}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) = 1$ , onde usamos o fato de  $\Sigma$  ter bordo livre. Assim, temos o seguinte corolário, que se relaciona ao índice da forma bilinear associada:

**Corolário 4.** *Seja  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{B}^n$  uma hipersuperfície 2-lados de bordo livre compacta. O número de autovalores negativos para o problema*

$$\begin{cases} \Delta u + |A|^2 u = 0 & \text{em } \Sigma^{n-1}, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} - u = \sigma u & \text{em } \partial\Sigma^{n-2}. \end{cases}$$

satisfaz a desigualdade:

$$N(J) \geq C \frac{\text{vol}_g(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}} \text{vol}_g(\partial\Sigma)^{n/2}}{V^{rc}(\mathbf{m}, \Sigma)},$$

onde  $C > 0$  é uma constante dependendo somente de  $n$  e  $m$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Ainouz, A., Souam, R. Stable capillary hypersurfaces in a half-space or a slab. *Indiana Univ. Math. J.* 65(3), 813–831, 2016.
- [2] Ambrozio, L. Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds. *J. Geom. Anal.* 25 (2015) n.2, 1001–1017.
- [3] Arendt, Wolfgang, and Rafe Mazzeo. Spectral properties of the Dirichlet-to-Neumann operator on Lipschitz domains. *Ulmer Seminare 12.28-38 (2007)*: 33.
- [4] Arendt, W.; Batty, C. J. K.; Hieber, M.; Neubrander, F. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. 2ª edição, Monographs in Mathematics, vol. 96. Springer Basel, 2011. DOI: 10.1007/978-3-0348-0087-7
- [5] Aubin, T. Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl.*, v. 55, p. 269–296, 1976.
- [6] Batista, M., Cavalcante, M. P., e Melo, L. R. (2024). First Eigenvalue of Jacobi operator and Rigidity Results for Constant Mean Curvature Hypersurfaces. arXiv preprint arXiv:2405.18233.
- [7] Barbosa, E. On CMC free-boundary stable hypersurfaces in a Euclidean ball. *Math. Ann.* 372 (2018) n.1-2, 179–187.
- [8] Barros, A., Cruz, C. Free boundary hypersurfaces with nonpositive Yamabe invariant in mean convex manifolds. *J. Geom. Anal.* 30, n.4 (2020), 3542–3562.
- [9] Bray, H., Brendle, S., Neves, A. Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds. *Commun. Anal. Geom.* 18 (2010) n.4, 821–830.
- [10] Cai, M., Galloway, G. Rigidity of area-minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. *Commun. Anal. Geom.* 8 (2000) n.3, 565–573.

- [11] Cai, M. Volume minimizing hypersurfaces in manifolds of nonnegative scalar curvature, Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry (Baltimore, MD, 1999), Adv. Stud. Pure Math., vol. 34, Math. Soc. Japan, Tokyo, pp. 1–7 (2002).
- [12] Chavel, Isaac. Eigenvalues in Riemannian geometry. Vol. 115. Academic press, 1984.
- [13] Cherrier, Problèmes de Neumann non lineaires sur les varietes Riemanniennes, J. Funct. Anal. 57 (1984) 154-206.
- [14] Colbois, B., El Soufi, A., and Girouard, A. *Isoperimetric control of the steklov spectrum*. Journal of Functional Analysis 261, 5 (2011), 1384-1399.
- [15] Colbois, Bruno, et al. Some recent developments on the Steklov eigenvalue problem. Revista Matemática Complutense 37.1 (2024): 1-161.
- [16] De Almeida, D., Mendes, A. Rigidity results for free boundary hypersurfaces in initial data sets with boundary. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2502.09433>, (2025).
- [17] El Soufi, A., and Ilias, S. *Immersiones minimales, premiere valeur propre du laplacien et volume conforme*. Mathematische Annalen 275, 2 (1986), 257-267
- [18] Escobar, J. F. *Sharp Constant in a Sobolev Trace Inequality*. Indiana Univ. Math. J. 37, 3 (1988), 687-698.
- [19] Escobar, J. F. The geometry of the first non-zero Steklov eigenvalue. Journal of Functional Analysis, 150(2), 544–556, 1997.
- [20] Escobar, J. *The Yamabe problem on manifolds with boundary*. J. Differential Geom. 35 (1992), 21–84.
- [21] Escobar, J. *Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities and an eigenvalue estimate*. Commun. Pure Appl. Math. 43 (1990), 857–883.
- [22] Finn, R. Equilibrium capillary surfaces. Grundlehren Math. Wiss., 284 [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] Springer-Verlag, New York, 1986. xvi+245 pp.
- [23] Fraser, A., and Schoen, R. *The first steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces*. Advances in Mathematics 226, 5 (2011), 4011-4030.

- [24] Friedlander, L. *Some inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues*, Arch. Rational Mech. Anal. 116 (1991), no. 2, 153-160.
- [25] Gabard, A. *Sur la représentation conforme des surfaces de Riemann à bord et une caractérisation des courbes séparantes*, Comment. Math. Helv. 81 (2006), no. 4, 945-964.
- [26] Grigoryan, A., and Yau, S. *Decomposition of a metric space by capacitors*. In Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (1999), vol. 65, American Mathematical Society, pp. 39-76.
- [27] Grigoryan, A., Netrusov, Y., and Yau, S.-T. *Eigenvalues of elliptic operators and geometric applications*. Surveys in differential geometry 9, 1 (2004), 147-217
- [28] Huisken, G.; Polden, A., *Geometric evolution equations for hypersurfaces*. In: Hildebrandt, S., Struwe, M.(eds) Calculus of variations and geometric evolution problems. (2006) 45-84, Lecture Notes in Math. vol. 1713.
- [29] Hassannezhad, A. *Conformal upper bounds for the eigenvalues of the laplacian and steklov problem*. urnal of Functional analysis 261, 12 (2011), 3419-3436.
- [30] Heinonen, J. *Lectures on Analysis on Metric Spaces*. Springer, 2001.
- [31] Hersch, J. *Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes* CR Acad. Sci. Paris Sér. AB 270, 5 (1970).
- [32] Kokarev, G. *Conformal volume and eigenvalue problems*. Indiana Univ. Math. J. 69 (2020), 1975-2003.
- [33] Korevaar, N. *Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics*. Journal of Differential Geometry 37, 1 (1993), 73-93.
- [34] Lee, D.A.: *Geometric Relativity*. American Mathematical Society (2019).
- [35] Li, C.: *A polyhedron comparison theorem for 3-manifolds with positive scalar curvature*. Invent. Math. 219, 1–37 (2020).
- [36] Li, P., and Yau, S.-T. *A new conformal invariant and its applications to the willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces*. Inventiones mathematicae 69, 2 (1982), 269-291.

- [37] Longa, E.R., *Low Index Capillary Minimal Surfaces in Riemannian 3-Manifolds*. J. Geom. Anal. 32, 143 (2022), 1–21.
- [38] Micallef, M., Moraru, V. Splitting of 3-Manifolds and rigidity of area-minimizing surfaces. Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015) n.7, 2865–2872.
- [39] Karpukhin, Mikhail, and Daniel Stern. "Min-max harmonic maps and a new characterization of conformal eigenvalues." Journal of the European Mathematical Society (EMS Publishing) 26.11 (2024).
- [40] McShane, E. J. Extension of range of functions. Bulletin of the American Mathematical Society, 40(12), 837–842, 1934.
- [41] Moraru, V. On area comparison and rigidity involving the scalar curvature. J. Geom. Anal. 26 (2016) n.1, 294–312.
- [42] Nardi, G., Schauder estimation for solutions of Poissons equation with Neumann boundary condition. Enseign. Math. 60, n.3/4 (2014), 421–435.
- [43] Nunes, I. On stable constant mean curvature surfaces with free boundary. Math. Z. 287 (2017) n.1-2, 473–479.
- [44] Nunes, I. Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds. J. Geom. Anal. 23 (2013) n.3, 1290–1302.
- [45] Pessoa, L. F., Vêras, E., Vieira, B., Area estimates for capillary cmc hypersurfaces with nonpositive Yamabe invariant. Bulletin of the London Mathematical Society, v. 57, p. 1-15, 2025.
- [46] Ros, A., Souam, R., On stability of capillary surfaces in a ball. Pac. J. Math. 178(2), (1997) 345–361.
- [47] Ros, A., Vergasta, E. Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary. Geom. Dedicata 56 (1995), 19–33.
- [48] Schoen, R. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. J. Di. Geom. , v. 20, p. 479495, 1984.

- [49] Sire, Y., e Xu, H. On a new functional for extremal metrics of the conformal Laplacian in high dimensions. *Communications in Contemporary Mathematics*, 24(09), 2150096, 2022.
- [50] Schoen, R. Variational theory for the total scalar curvature functional for riemannian metrics and related topics. In: Giaquinta, M. (eds) *Topics in Calculus of Variations*. *Lecture Notes in Mathematics*, vol 1365. Springer, Berlin, Heidelberg (1989).
- [51] Tran, Hung. Index characterization for free boundary minimal surfaces. arXiv preprint arXiv:1609.01651 (2016).
- [52] Trudinger, N. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, v. 22, p. 265 274, 1968.
- [53] Volkmann, A. *A monotonicity formula for free boundary surfaces with respect to the unit ball*. arXiv preprint arXiv:1402.4784 (2014).
- [54] Weiner, J. L. *On a problem of chen, willmore et al*. *Indiana University mathematics journal* 27, 1 (1978), 19–35.
- [55] Wang, G., Xia, C. Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball. *Math. Ann.* 374 (2019) n.3-4, 1845–1882.
- [56] Yang, P. C., and Yau, S.-T. *Eigenvalues of the laplacian of compact riemann surfaces and minimal submanifolds*. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa- Classe di Scienze* 7, 1 (1980), 55–63.
- [57] Young, T. An essay on the cohesion of fluids, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* 95 (1805), 65–87.