Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Rigidez do número de Betti para variedades abertas de curvatura de Ricci não negativa

Elliel Mattias Mourão Chaves

Teresina - 2026

Elliel Mattias Mourão Chaves

Dissertação de Mestrado:

Rigidez do número de Betti para variedades abertas de curvatura de Ricci não negativa

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha.

Teresina - 2026

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ

CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DA 133° DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO

No dia 27 do mês de janeiro de dois mil e vinte e seis, às 10:00 horas, na sala de Seminários do Programa de Pós-Gradução em Matemática - PPGMAT/UFPI, reuniram-se os membros da Banca Examinadora composta pelos professores: Dr. **Antonio Wilson Rodrigues da Cunha** (Presidente), Dr. **Rondinelle Marcolino Batista** (UFPI), Dr. **Alberto Rodríguez Vazquéz** (ULB), a fim de julgar a dissertação do mestrando **Elliel Mattias Mourão Chaves**, intitulada *Rigidez do número de Betti para variedades abertas de curvatura de Ricci não negativa*, para obtenção do grau de Mestre em Matemátca. Aberta a sessão pelo presidente, coube o candidato na forma regimental, expor o tema de sua dissertação dentro do tempo regulamentar. Após haver analisado o referido trabalho e arguido o candidato, os membros da Banca Examinadora deliberaram pela **APROVAÇÃO** da mesma. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora.

TERESINA, 27 DE JANEIRO DE 2026.

RECOMENDAÇÕES DA BANCA:

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br
ANTONIO WILSON RODRIGUES DA CUNHA
Data: 28/01/2026 22:36:18-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha – Presidente

Documento assinado digitalmente
gov.br
RONDINELLE MARCOLINO BATISTA
Data: 27/01/2026 21:21:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista

ACESSO REMOTO

Prof. Dr. Alberto Rodríguez Vazquéz - Membro Externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

C512r Chaves, Elliel Mattias de Mourão.
Rigidez do número de Betti para variedades abertas de curvatura de Ricci não negativa / Elliel Mattias de Mourão Chaves. -- 2026.
67 f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2026.
"Orientador: Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha".

1. Número de Betti. 2. Curvatura. 3. Teoria de grupos. 4. Alma (Matemática). I. Cunha, Antonio Wilson Rodrigues da. II. Titulo.

CDD 516.36

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Dedico este trabalho aos meus pais Maria das Dores,
José Chaves e minha irmã Ana Kelly.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus (que para mim é Ele que domina toda a matemática) por até aqui ter me ajudado, me sustentado, me dado forças e coragem para continuar, sei que se não fosse a misericórdia do Senhor, eu não chegaria até aqui.

A minha base é a minha família, e aqui agradeço a ela por todo apoio ao longo de minha vida. À minha mãe, Maria das Dores, por orar por mim e sempre me incentivar (e obrigar) a estudar matemática; ao meu pai, José, por ser o meu herói, amigo. Agradeço à minha irmã, Ana, por ser a melhor irmã do mundo e por sempre está do meu lado. Eu amo a minha família.

Aos meus amigos, aos quais eu devo os meus diplomas de graduação e mestrado: Júnior, Sayd e Vinícius Araújo. Além disso, agradeço ao Sayd por ter me ajudado em algumas das contas desta dissertação e ao Júnior por esclarecer minhas dúvidas de conteúdo.

Aos meus amigos de Graduação, por todos os momentos compartilhados. Em especial, Gabriel, Gustavo Fernandes, Halan, Iara, Maria Vitória, Mariana, Maryzângela, Pedro Costa e Renato.

Aos meu amigos de pós-graduação, por terem me ajudado nessa jornada. Em especial, Ana Júlia, Andreina, Antonio Victor, Eduardo, Emanuelly, Gabriel, Gean, Hyon, Ismael, Jeferson, João Marcelo, João Vinícius, José, Lucas, Maiara, Maria Angélica, Natália, Otávio, Pedro Henrique, Raimundo Bruno, Stefany, Suerlan, Thiago, Vinicius Santos e Ysadora.

A minha família de Teresina, em especial meu tio Ferdinam; às minhas tias Dos Anjos e Ivonete; aos meus primos Balthazer, Camila e Débora; e ao meu grande amigo Melquisedeque, bem como a seus filhos Mikael e Kalel.

Agradeço a tia Fátima e a Lara Letícia as orações e apoio emocional.

A todo o corpo docente do Departamento de Matemática da UFPI, em especial aos professores Barnabé, Gleison do Nascimento, José Francisco, Paulo Alexandre e Sandoel, pelos exelentes cursos ministrados no meu mestrado. Ao professor Halyson pela excelência na coordenação da pós-graduação e por todas as nossas corridas, natações e ciclismos que fizemos ao longo desses anos. Agradeço ao professor Leandro, atual coordenador em 2026, por me ajudar em todas as questões burocráticas. Além disso, agradeço ao professor Mário pelas resmas de papel, e aos professores, Cícero Aquino, Humberto, Marcos Travaglia, Mykael e Roger por todos os seus ensinamentos.

Não poderia deixar de agradecer a incrível secretária da pós-graduação, Larisse, por todos os seus conselhos, injeções de ânimo e os momentos de risos. Além disso, agradeço à Maria da Cruz por toda a sua gentileza.

Ao meu orientador, Antonio Wilson, agradeço pela orientação, incentivo, paciência e tempo dedicados. Desde a graduação, mostrou-me o caminho da pós-graduação e sempre me motivou, com lindos discursos, à pesquisa matemática. Obrigado por tudo, pela confiança e amizade.

Agradeço aos professores Rondinelle Marcolino e Alberto Rodríguez Vazquéz por terem composto a banca avaliadora e por suas contribuições para este trabalho.

Agradeço à FAPEPI pelo apoio financeiro.

"*Grandes coisas fez o SENHOR por nós,*
pelas quais estamos alegres".

Salmos 126:3 - Bíblia Sagrada.

Resumo

Este trabalho, baseado em [27], teve como objetivo estudar a rigidez do primeiro número de Betti para variedades abertas com curvatura de Ricci não negativa, onde demonstramos que o primeiro número de Betti é $b_1(M) = n-1$ se, e somente se, a variedade é plana com uma alma $\mathbb{T}^{n-1}$, um toro plano. Para isto, mostramos como o primeiro número de Betti de um espaço controla o crescimento polinomial do seu grupo fundamental e relacionamos este com o grupo das transformações de recobrimento. Além disto, exibimos exemplos onde os casos $b_1(M) = n-2$ e $b_1(M) = n-3$ não necessariamente garantem que M é plana, e assim o Teorema Princial é sharp (i.e., não pode ser melhorado).
Palavras chaves: Variedades abertas, primeiro número de Betti, grupo fundamental, grupo das transformações de recobrimento, alma.

Abstract

This work, based on [27], aimed to study the rigidity of the first Betti number for open manifolds with nonnegative Ricci curvature. We show that the first Betti number is $b_1(M) = n - 1$ if and only if the manifold is flat with soul $\mathbb{T}^{n-1}$, which is a flat torus. To this end, we demonstrate how the first Betti number of a space controls the polynomial growth of its fundamental group and relate this to the group of covering transformations. Moreover, we present examples showing that the cases $b_1(M) = n-2$ and $b_1(M) = n-3$ do not necessarily guarantee that M is flat. Hence, the main theorem is sharp (i.e., it cannot be improved).

Keywords: Open manifolds, first Betti number, fundamental group, group of covering transformations, soul.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, baseado em [27], estudamos o primeiro número de Betti de uma variedade, que é um invariante topológico definido como posto do primeiro grupo de homologia de uma variedade. Intuitivamente, a teoria de homologia é uma forma alternativa de medir “buracos”em uma variedade. Em particular, o primeiro número de Betti é o número de buracos unidimensionais. Nessa perspectiva, vamos estimar o primeiro número de Betti e finalmente, investigar a rigidez desse invariante para variedades abertas com curvatura de Ricci não negativa quando a igualdade acontece.

No caso compacto, se M^n é uma variedade compacta com curvatura de Ricci não negativa, em 1948, Bochner provou que $b_1(M) \leqslant n$ e a igualdade ocorre se, e somente se, M é um toro plano. Isto motivou o estudo deste objeto topológico para variedades abertas (i.e., completa e não compacta) com curvatura de Ricci não negativa.

O objetivo deste trabalho é estudar o caso não compacto, o qual considera-se uma variedade M^n aberta, com curvatura de Ricci não negativa, para provar que $b_1(M) \leqslant n-1$ e a igualdade ocorre se, e somente se, M é plana com $\mathbb{T}^{n-1}$ uma alma. Para isto, investigamos o crescimento da órbita do grupo das transformações de recobrimento e sua relação com a geometria da variedade.

No Capítulo 1, apresentamos definições e resultados preliminares importantes para o desenvolvimento dos demais capítulos. As principais referências para este capítulo foram [3], [4],[8], [9], [12], [13], [14], [15], [19] e [25].

No Capítulo 2, melhoramos a estimativa de volume de Cheeger-Gromoll, presente na demonstração do Teorema 4 de [5] e, com isto, relacionamos o crescimento da órbita polinomial do grupo das tranformações de recobrimento com uma variedade plana.

No Capítulo 3, provamos uma série de resultados para obter propriedades de crescimento polinomial, bem como estudar a maneira que o primeiro número de Betti controla o crescimento polinomial do grupo fundamental de um espaço, incluindo o estudo do crescimento da órbita de variedades planas abertas.

No Capítulo 4, estimamos o primeiro número de Betti e investigamos a sua rigidez (i.e., quando vale a igualdade na estimativa). Finalmente, apresentamos uma classificação para variedades que tem crescimento de volume linear, cujo o seu recobrimento tem crescimento de volume Euclideano.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos definições e resultados que serão fundamentais para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. As demonstrações desses resultados não serão incluídas, sendo indicadas, quando apropriado, as referências correspondentes. Para a leitura do texto, pressupõe-se que o leitor possua conhecimentos básicos de Geometria Riemanniana, incluindo noções de variedades diferenciáveis, métricas Riemannianas, conexões e curvatura.

1.1 Fatos básicos de geometria Riemanniana

Nesta seção, faremos um breve resumo de alguns fatos em Geometria Riemanniana, como curvatura de Ricci e variedades Riemannnianas completas, que terão foco fundamental nas hipóteses do resultado principal deste trabalho.

Definição 1. *A curvatura* R *de uma variedade Riemanniana* M *é uma correspondência que associa a cada par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *uma aplicação* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *dado por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,\ Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ *é a conexão Riemanniana de* M*.*

Definição 2. *Dado* $p \in M$ *e um subespaço bidimensional* $\sigma \subset T_pM$ *o número real* $K(x,y) = \dfrac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$*, onde* $\{X, Y\}$ *é uma base qualquer de* σ*, é chamado curvatura seccional de* σ *em* p*.*

Definição 3. *Dada uma variedade Riemanniana* M^n*, o tensor*

$$Ric(X,Y) = tr(Z \mapsto R(Z,X)Y),$$

é chamado de tensor de Ricci, onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $X = z_n$ *é um vetor unitário em* T_pM*, tomemos uma base ortonormal* $\{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\}$ *do hiperplano de* T_pM *ortogonal a* X*, definimos a curvatura de Ricci na direção* X *em* p *por*

$$\mathrm{Ric}_p(X) = \frac{1}{n-1}\sum_i \langle R(X, z_i)X, z_i\rangle, \ i = 1, \ldots, n-1.$$

Definição 4. *Uma variedade Riemanniana* M *é (geodesicamente) completa se para todo* $p \in M$*, a aplicação exponencial,* $\exp_p$*, está definida para todo* $v \in T_pM$*, i.e, se as geodésicas* $\gamma(t)$ *que partem de* p *estão definidas para todos os valores do parâmetro* $t \in \mathbb{R}$.

O próximo teorema nos dá um noção de como caracterizar uma variedade completa.

Teorema 1. *Seja* M *uma variedade Riemanniana e seja* $p \in M$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\exp_p$ *está definida em todo o* T_pM.

(b) Os limitados e fechados de M *são compactos.*

(c) M *é completa como espaço métrico.*

(d) M *é geodesicamente completa.*

(e) Existe uma sequêcia de compactos $K_n \subset M$*,* $K_n \subset \mathrm{int}\, K_{n+1}$ *e* $\bigcup_n K_n = M$*, tais que, se* $q_n \notin K_n$ *então* $d(p, q_n) \to \infty$*. (Aqui* $\mathrm{int}\, A$ *indica o interior do conjunto* A*).*

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

(f) Para todo $q \in M$ *existe uma geodésica* γ *ligando* p *a* q *com* $l(\gamma) = d(p, q)$*, onde* $l(\gamma)$ *é o comprimento de* γ.

Para uma demonstração veja [8, Teorema 2.8].

Por fim, temos as seguintes definições sobre geodésicas.

Definição 5. *Uma geodésica* $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$ *(resp.* $\gamma : [0, \infty) \to M$*), com velocidade unitária, é dita uma linha (resp. raio), se*

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|, \ \textit{para todo } t_1, t_2 \in (-\infty, \infty), (\textit{resp. } t_1, t_2 \in [0, \infty)).$$

Isto é, todos seguimentos são minimizantes. Ou equivalentemente, uma linha é uma geodésica $\gamma \colon \mathbb{R} \to M$ *que minimiza o comprimento de arco entre dois quaisquer de seus pontos, ou seja, quando* $d(\gamma(s), \gamma(t)) = \int_s^t |\gamma'(\xi)| d\xi$ *para quaisquer* $s, t \in \mathbb{R}, s \leqslant t$.

Definição 6. *Um raio é uma geodésica* $\gamma : [0, \infty) \to M$ *mínima e parametrizada pelo comprimento de arco.*

1.2 Teoria de Grupos

Uma vez que o leitor tenha uma boa noção de grupos, aqui faremos um bom resumo da teoria de grupos juntamente com algumas definições importantes usadas na prova do resultado principal.

Definição 7. *Um conjunto* G *com uma operação*

$$G \times G \to G$$
$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

é um grupo se as condições são satisfeitas:

(i) A operação é associativa, isto é,

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \ \forall a, b, c \in G.$$

(ii) Existe um elemento neutro, isto é,

$$\exists \ e \in G \text{ tal que } e \cdot a = a \cdot e = a, \ \forall \ a \in G.$$

(iii) Todo elemento possui um elemento inverso, isto é,

$$\forall \ a \in G, \ \exists \ b \in G \text{ tal que } a \cdot b = b \cdot a = e.$$

O grupo é abeliano se:

(iv) A operação é comutativa, isto é,

$$a \cdot b = b \cdot a, \ \forall \ a, b \in G.$$

Muitas vezes deixaremos de indicar a operação do grupo, escrevendo G para denotar um grupo $(G, \cdot)$.

Agora sejam $(G_1, *)$ e $(G_2, \circ)$ dois grupos, e seja o conjunto dado pelo produto $G_1 \times G_2$. Defina neste conjunto a operação

$$(g_1, g_2) \cdot (g_1^{'}, g_2^{'}) = (g_1 * g_1^{'}, g_2 \circ g_2^{'}).$$

Daí, $(G_1 \times G_2, \cdot)$ é ainda um grupo, chamado **produto direto** de G_1 com G_2, com (e_1, e_2) o seu elemento neutro, onde e_i é o elemento neutro de G_i e o inverso de (g_1, g_2) é (g_1^{-1}, g_2^{-1}).

Definição 8. *Seja* $(G, \cdot)$ *um grupo. Um subconjunto não-vazio* H *de* G *é um subgrupo de* G *(denotamos* $H < G$*) quando, com a operação de* G*, o conjunto* H *é um grupo.*

Se S é um subconjunto não-vazio do grupo G, o conjunto $\{s^{-1}; s \in S\}$ será denotado por S^{-1} e definimos o *conjunto gerado* por S como sendo o conjunto

$$\langle S \rangle = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in S \text{ ou } a_i \in S^{-1}\}.$$

Observe que o gerado por um elemento $g \in G$ é dado por

$$\langle g \rangle = \{\dots, (g^{-1})^2, g^{-1}, e, g, g^2, \dots\} = \{g^t \mid t \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposição 1. *Sejam* G *um grupo e* S *um subconjunto não-vazio de* G*. Então o conjunto* $\langle S \rangle$ *é um subgrupo de* G*.*

Para uma demonstração ver Proposição 5.2 de [9].

Para o que segue, dizemos que um grupo G é **finitamente gerado** se existe um subconjunto finito S tal que $G = \langle S \rangle$.

Definição 9. *Seja* G *grupo finitamente gerado. Dado* $S = \{g_1, \dots, g_k\}$ *os geradores simétricos de G, definimos o comprimento de palavra* $|g|$ *de um elemento* $g \in G$ *por* $|g| = \min\{l \mid g = g_{i_1} \cdot g_{i_2} \cdots g_{i_l}\}$.

Definição 10. *Um grupo* G *é cíclico quando ele pode ser gerado por um elemento, isto é, quando* $G = \langle g \rangle$*, para algum* $g \in G$*.*

Definição 11. *Seja* G *um grupo. O subgrupo* $\langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \rangle$ *é o subgrupo dos comutadores do grupo* G*, que será denotado por* $[G, G]$*. Note que* G *é abeliano se, e somente se,* $[G, G] = \{e\}$.

Seja G grupo, lembre que a *ordem* de G é o número de elementos em G. Se $g \in G$, a ordem de g é a ordem do subgrupo gerado por g, isto é, a ordem de $\langle g \rangle$. Agora, dado $H < G$, definimos a relação de equivalência

$$y \sim x \Leftrightarrow \exists\ h \in H \text{ tal que } y = xh.$$

Por definição, a classe de equivalência que contém x é o conjunto

$$xH := \{y \in G \mid y \sim x\} = \{xh \mid h \in H\},$$

da qual chamaremos de *classe lateral à esquerda* de H em G que contém x. Analogamente, definimos as *classes laterais à direita* de H em G, dada por

$$Hx = \{hx \mid h \in H\}.$$

Definição 12. *A cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda é o índice de* H *em* G*; que será denotado por* $[G : H]$*.*

O conjunto

$$T(G) = \{g \in G \mid \exists n \neq 0; n \cdot g = 0\},$$

i.e, o conjunto de todos os elementos de ordem finita, é chamado de **subgrupo de torção**.

Definição 13. *Dizemos que um grupo* G *é livre de torção se para todo* $g \in G$*,* $g \neq e$*,* g *tem ordem infinita.*

Definição 14. *Um subgrupo* H *é um subgrupo normal de* G *(e escrevemos* $H \triangleleft G$*) se ele satisfaz* $gHg^{-1} = H$*, para todo* $g \in G$*.*

Teorema 2. *Seja* G *um grupo e seja* H *um subgrupo normal de* G*. Então o conjunto das classes laterais, com a operação* $(xH, yH) \mapsto xyH$*, é um grupo.*

Para uma demonstração veja [9, Teorema 5.2].

Definição 15. *Sejam* G *um grupo e* H *um subgrupo normal de* G*. O grupo de suas classes laterais, com a operação induzida de* G*, é chamado de grupo quociente de* G *por* H*, e será denotado por* G/H*.*

Definição 16. *Sejam* $(G_1, \cdot)$ *e* $(G_2, \times)$ *dois grupos. Uma função* $f : G_1 \to G_2$ *é um homomorfismo se*

$$f(a \cdot b) = f(a) \times f(b),\ \forall\ a, b \in G_1.$$

Um homomorfismo $f : G_1 \to G_2$ *é um isomorfismo se existe um homomorfismo* $g : G_2 \to G_1$ *tal que* $f \circ g = id_{G_2}$ *e* $g \circ f = id_{G_1}$*.*

Definição 17. *Seja* $(\mathsf{G}, \cdot)$ *um grupo. Um automorfismo de* G *é um isomorfismo* $f : \mathsf{G} \to \mathsf{G}$. *O conjunto dos automorfismo de* G*, denotado por* $\mathsf{Aut}(\mathsf{G})$*, é um grupo com a operação composicão de funções.*

Definição 18. *Se* G *é um grupo abeliano, o posto de* G *é o maior inteiro* k *tal que existem* $g_1, \dots, g_k \in \mathsf{G}$ *satisfazendo o seguinte*

$$\text{se } \sum_{i=1}^{k} l_i g_i = 0 \text{ para algum } l_i \in \mathbb{Z}, \text{ então } l_1 = l_2 = \cdots = 0,$$

onde $g_1, \dots, g_k \in \mathsf{G}$ *são ditos independentes neste caso.*
Denote $\mathrm{rank}(\mathsf{G})$ *o* **posto** *de* G.

Definição 19. *Seja* G *um grupo.*

i) Uma série de subgrupos de G*,*

$$\mathsf{G} \equiv \mathsf{G}_0 > \mathsf{G}_1 > \cdots > \mathsf{G}_k = \{e\}, \tag{1.1}$$

é dita uma série normal de G *se temos* $\mathsf{G}_i \lhd \mathsf{G}$*, para cada* $i = 0, \dots, k$.

ii) A cadeia em (1.1) *é dita uma série subnormal de* G *se* $\mathsf{G}_{i+1} \lhd \mathsf{G}_i$ *para cada* $i = 0, \dots, k-1$.

iii) Uma série normal de G (1.1) *é dita central se todos os seus fatores são centrais, i.e,* $[\mathsf{G}, \mathsf{G}_{i+1}] < \mathsf{G}_i$ *para todo* i.

Definição 20. *Um grupo* G *é dito nilpotente se a série central descendente de* G *tiver comprimento finito, i.e, existir uma série normal descendente finita*

$$\mathsf{G} \equiv \mathsf{G}_0 \rhd \mathsf{G}_1 \rhd \cdots \rhd \mathsf{G}_k = \{e\},$$

onde $\mathsf{G}_j = [\mathsf{G}, \mathsf{G}_{j-1}]$ *(os comutadores) para todo* $1 \leqslant j \leqslant k$.

Definição 21. *Um grupo* G *é dito policíclico se existe uma série subnormal finita*

$$\mathsf{G} \equiv \mathsf{G}_m \rhd \mathsf{G}_{m-1} \rhd \cdots \rhd \mathsf{G}_0 = \{e\},$$

tal que $\mathsf{G}_{j-1} \lhd \mathsf{G}_j$ *e* $\mathsf{G}_j/\mathsf{G}_{j-1}$ *é cíclico para cada* j *e não-trivial.*

Definição 22. *Seja* G *um grupo nilpotente finitamente gerado, então o posto de nilpotência de* G *é definido por*

$$\mathrm{rank}(\mathsf{G}) = \#\{1 \leqslant j \leqslant m \mid \mathsf{G}_j/\mathsf{G}_{j-1} \simeq \mathbb{Z} \text{ e não-trivial}\}.$$

Dizemos que um grupo *quase possui uma certa propriedade* se ele tem um subgrupo normal de índice finito que possui essa propriedade. Assim, um grupo G é **quase livre de torção** se ele possui um subgrupo normal de índice finito que é livre de torção.

Definição 23. *Um grupo* G *é dito quase nilpotente se existe um subgrupo normal nilpotente* H *com índice finito.*

Os resultados a seguir sobre grupos serão ferramentas importantíssimas na demonstração de nossos resultados, uma delas sendo a Proposição 12.

Teorema 3. *Todo grupo nilpotente finitamente gerado tem uma série central com fatores cíclicos, e é quase livre de torção. Um grupo nilpotente finitamente gerado, livre de torção tem uma série central com fatores cíclicos infinitos.*

Para uma prova veja Teorema 17.2.2 de [12].

Teorema 4. *Todo grupo cíclico infinito é isomorfo ao grupo* $\mathbb{Z}$.

Para uma prova veja Teorema 2.3.1 de [12].

Lema 1. *Seja* G *um grupo quase nilpotente finitamente gerado. Então, cada subgrupo nilpotente* H *com* $[\mathsf{G} : \mathsf{H}] < \infty$ *tem o mesmo posto de nilpotência. O posto comum é chamado de posto de nilpotência de* G*, denotado por* $\mathtt{rank}(\mathsf{G})$.

Para uma prova veja Lema 2.24 de [19].

Teorema 5. *Sejam* G *um grupo abeliano finitamente gerado e* $\mathsf{T}(\mathsf{G})$ *seu subgrupo de torção. Então, existem um inteiro* $\mathsf{t} \geqslant 0$ *(chamado de posto de* G*) e um subgrupo* $\mathsf{L} \simeq \mathbb{Z}^{\mathsf{t}}$ *tais que* $\mathsf{G} = \mathsf{T}(\mathsf{G}) \oplus \mathsf{L}$.

Para uma demonstração veja o Teorema 9.1 de [9].

Uma consequencia do Teorema 3 é a seguinte:

Observação 1. Todos os grupos nilpotentes finitamente gerados são policíclicos.

1.2.1 Teorema de Bieberbach

Nesta seção introduziremos o Teorema de Bieberbach, o qual utilizaremos nos capítulos seguintes. A principal referência utilizada foi [25].

Definição 24. *Uma aplicação* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é dita uma isometria se*

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Daqui em diante denotaremos por

$$E(n) = \{f \text{ isometria de } \mathbb{R}^n\}$$

o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{R}^n$. Destacamos aqui que, com a operação composição de funções, $E(n)$ é um grupo (chamado **grupo das isometrias de** $\mathbb{R}^n$).

Proposição 2. *O conjunto de todas as translações de* $\mathbb{R}^n$ *é um subgrupo normal de* $E(n)$. *A função* $a \mapsto t_a$ *define um isomorfismo entre o grupo* $(\mathbb{R}^n, +)$ *com o grupo de todas as translações de* $\mathbb{R}^n$.

Para uma demonstração veja a Proposição 1.5 de [25].
Com isto podemos denotar $\mathbb{R}^n$ como o grupo de todas as translações de $\mathbb{R}^n$.

Como conhecido na literatura, denotaremos aqui o conjunto $\mathcal{O}(n)$ a ser o grupo de todas as aplicações lineares $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonais.

Proposição 3. *Qualquer isometria de* $\mathbb{R}^n$ *é a composição de uma aplicação linear ortogonal e uma translação.*

Para uma demonstração veja a Proposição 1.2 de [25].

Definição 25 (Produto semidireto de grupos). *Se* $(K, \cdot), (H, *)$ *são dois grupos e* $\sigma : K \to \mathrm{Aut}(H)$ *é um automorfismo do grupo* K *no grupo dos automorfismos de* H, *então* $\dot{\sigma}$ *denotará a operação definida sobre o conjunto* $K \times H$ *da seguinte maneira*

$$(k, h)\dot{\sigma}(k', h') := (k \cdot k', h * \sigma(k)(h')).$$

O grupo $(K \times H, \dot{\sigma})$ *será denotado por* $K \ltimes H$, *e será chamado o produto semidireto de* K *e* H.

Um exemplo simples é o seguinte.

Exemplo 1. $E(n) = \mathcal{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ *é um produto semidireto com* $(A, a)(B, b) = (AB, Ab + a)$ *e age em* $\mathbb{R}^n$ *por* $(A, a) \cdot x = A \cdot x + a$.

Definição 26. *Um grupo* $G \subset E(n)$ *é* **cristalográfico** *se é discreto e* $E(n)/G$ *é compacto. Se* G *é livre de torção, então dizemos que* G *é um subgrupo de Bieberbach.*

Seja K subgrupo do grupo G. Dizemos que K é *maximal abeliano* se para qualquer $\mathsf{H} < \mathsf{G}$ abeliano implicar $\mathsf{H} \subset \mathsf{K}$.

Finalmente podemos enuciar um resultado crucial que usaremos neste trabalho.

Teorema 6 (Bieberbach). *Se $G \subset E(n)$ é um grupo cristalográfico, então o conjunto de translações $G \cap (I \times \mathbb{R}^n)$ é um grupo abeliano, livre de torção e finitamente gerado de posto n, e é maximal abeliano, subgrupo normal de índice finito de G.*

Para uma prova veja Teorema 2.1 de [25].

1.2.2 Homologia Singular de Grupos

Nesta seção vamos revisar um pouco sobre Homologia singular, a qual será necessária para entendermos o primeiro número de Betti, pois estaremos interessados na rigidez de tal objeto.

Para qualquer inteiro $p \geqslant 0$, seja o **p-simplexo padrão**

$$[e_0, e_1, \ldots, e_p] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i e_i ; t_i \geqslant 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\} = \Delta_p,$$

onde $e_0 = 0$ e $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ para $1 \leqslant i \leqslant p$.

Cada e_i é dito um **vértice** do simplexo e cada simplexo gerado por um conjunto não vazio de Δ_p é chamado de **face** de Δ_p.

Seja X um espaço topológico.

Definição 27. *Um p-simplexo singular em X é um mapa contínuo $\sigma : \Delta_p \to X$.*

Seja $C_p(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto de todos os p-simplexos singulares em X. Um elemento de $C_p(X)$ é dito uma **p-cadeia singular** em X, o qual é uma soma formal finita $\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i$, com $a_i \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_i : \Delta_p \to X$ simplexo singular. O grupo $C_p(X)$ é dito o **grupo das cadeias singulares em dimensão** p.

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, para quaisquer $\nu_0, \ldots, \nu_p \in K$, seja $A(\nu_0, \ldots, \nu_p) : \Delta_p \to \mathbb{R}^n$ o qual denota a aplicação afim que leva e_i em ν_i para $i = 0, \ldots, p$. Pela convexidade, a imagem está contida em K, portanto, trata-se de um p-simplexo singular em K, chamado de **simplexo singular afim**. Uma cadeia singular na qual todo simplexo singular que aparece é afim é chamada de **cadeia afim**.

Para cada $i = 0, \ldots, p$, seja $F_{i,p} : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ o simplexo singular afim

$$F_{i,p} = A(e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_p).$$

Dizemos que $F_{i,p}$ é a **i-ésima aplicação de face em dimensão** p.

Definição 28. *Para qualquer simplexo singular* $\sigma : \Delta_p \to X$*, definimos uma* $(p-1)$*-cadeia* $\partial\sigma$ *chamada bordo de* σ *por*

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_{i,p}.$$

Isto se extente unicamente para o homomorfismo $\partial : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$, chamado de **operador de bordo singular**.

Definição 29. *Os elementos do subgrupo* $Z_p(X) = \mathrm{Ker}\partial : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$ *são chamados de* p*-ciclos e os elementos do subgrupo* $B_p(X) = \mathrm{Im}\partial : C_{p+1}(X) \to C_p(X)$ *são chamados* p*-bordos.*

Um resultado simples de ver é o seguinte:

Lema 2. *Se* c *é uma cadeia singular, então* $\partial(\partial c) = 0$.

Para uma demonstração ver o Lema 13.1 de [13].

Pelo Lema 2, $B_p(X)$ é subgrupo de $Z_p(X)$.

Definição 30. *O* p*-ésimo grupo de homologia singular de* X *é definido como o grupo quociente*

$$H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X) = \mathrm{Ker}\partial_p/\mathrm{Im}\partial_{p+1}.$$

Definição 31. *Seja* X *um espaço topológico. O* **primeiro número de Betti** *de* X*, denotado por* $b_1(X)$*, é o posto do seu primeiro grupo de homologia* $H_1(X)$.

A classe de equivalência de um p-ciclo c em $H_p(X)$ é denotada por $[c]$, e é chamada de **classe de homologia de** c. Se dois p-ciclos determinam a mesma classe de homologia, diz-se que eles são **homólogos**.

Dada uma aplicação contínua $f : X \to Y$, seja $f_\# : C_p(X) \to C_p(Y)$ o homomorfismo definido por

$$f_\#(\sigma) = f \circ \sigma$$

para cada p-simplexo singular σ. O fato principal é que $f_\#$ comuta com os operadores de fronteira, i.e.,

$$\partial \circ f_\# = f_\# \circ \partial.$$

Portanto, $f_\#$ mapeia $Z_p(X)$ em $Z_p(Y)$ e $B_p(X)$ em $B_p(Y)$, e assim passa ao quociente para definir um homomorfismo

$$f_* : H_p(X) \to H_p(Y),$$

chamado de **homomorfismo induzido por** f.

1.2.3 Grupo Fundamental e Espaço de Recobrimento

Nesta seção seguimos as referências [3] e [13], das quais recomendamos o leitor para uma leitura mais profunda.

Definição 32. *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos, e sejam* $f, g : X \to Y$ *aplicações contínuas. Uma homotopia de* f *para* g *é uma aplicação contínua* $H : X \times [0,1] \to Y$ *tal que para todo* $x \in X$,

$$H(x,0) = f(x) \text{ e } H(x,1) = g(x).$$

Se existe uma homotopia de f *para* g*, dizemos que* f *e* g *são homotópicos.*

Exemplo 2. *Definamos* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *por*

$$f(x) = (x, x^2) \text{ e } g(x) = (x, x).$$

Então, a aplicação $H(x,t) = (x, x^2 - tx^2 + tx)$ *é uma homotopia de* f *para* g.

Seja X um espaço topológico. Relembre que um **caminho** em X é uma aplicação contínua $f : [0,1] \to X$. Os pontos $p = f(0)$ e $q = f(1)$ são chamados de **ponto inicial** e **ponto final** de f, respectivamente, e dizemos que f é um **caminho de** p **para** q.

Definição 33. *Se* f *e* g *são caminhos em* X *de* p *para* q*, então uma homotopia de caminho de* f *para* g *é uma aplicação contínua* $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ *tal que*

$$H(s,0) = f(s), \text{ para todo } s \in [0,1];$$

$$H(s,1) = g(s), \text{ para todo } s \in [0,1];$$

$$H(0,t) = p, \text{ para todo } t \in [0,1];$$

$$H(1,t) = q, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Proposição 4. *Seja* X *um espaço topológico. Para quaisquer* $p, q \in X$*, homotopia de caminhos é uma relação de equivalência no conjunto de todos os caminhos em* X *de* p *para* q*.*

Para uma demonstração veja a Proposição 7.7 de [13].

Para qualquer caminho f em X, denotamos a **classe de equivalência de** f por homotopia de caminhos por $[f]$, e chamamos classe de f.

Todos os caminhos que começam e terminam no mesmo ponto são chamados de **laço**. Se f é um laço cujo ponto inicial e final é $p \in X$, dizemos que f é **baseado em** p, e chamamos p de **ponto base de** f.

O conjunto de todos os laços em X baseados em p é denotado por $\Omega(X, p)$. O **laço constante** $c_p \in \Omega(X, p)$ é a aplicação $c_p(s) = p$.

Definição 34. *Definimos o grupo fundamental de* X *baseado em* p*, denotado por* $\pi_1(X, p)$*, como sendo o conjunto das classes de caminhos de laços baseados em* p*.*

Sejam $f, g : [0, 1] \to X$ caminhos. Dizemos que f e g são **caminhos composáveis** se $f(1) = g(0)$. Se f e g são composáveis, definimos o **produto** $f \cdot g : [0, 1] \to X$ por

$$(f \cdot g)(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ g(2s - 1), & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

A condição $f(1) = g(0)$ garante a continuidade de $f \cdot g$. Assim, o produto de classes de caminhos é definido por $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$, onde f e g são composáveis. Portanto, com esse produto, $\pi_1(X, p)$ é um grupo (onde o **caminho inverso** de f é $\bar{f}(s) = f(1 - s)$).

Proposição 5. *Suponha que* X *é conexo por caminho,* $p, q \in X$*, e* g *é qualquer caminho de* p *para* q*. A aplicação* $\phi_g : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, q)$ *definida por*

$$\phi_g[f] = [\bar{g}] \cdot [f] \cdot [g],$$

é um isomorfismo, onde a inversa é $\phi_{\bar{g}}$*.*

Para uma demonstração veja o Teorema 7.13 de [13].

Pela Proposição 5, quando X é conexo por caminhos, às vezes usamos a notação imprecisa $\pi_1(X)$ para nos referirmos ao grupo fundamental de X com respeito a um ponto base não especificado, caso o ponto base seja irrelevante.

Se X é conexo por caminhos e $\pi_1(X)$ é trivial (ou seja, $\pi_1(X,p) = \{[c_p]\}$ para todo $p \in X$), dizemos que X é **simplemente conexo**. Por exemplo, a esfera $\mathbb{S}^2$ é um espaço simplesmente conexo.

Proposição 6. *Se $f, g : [0,1] \to X$ são caminhos homotópicos e $\varphi : X \to Y$ é contínua, então $\varphi \circ f$ e $\varphi \circ g$ são caminhos homotópicos. Ou seja, a relação de homotopia de caminhos é preservada por composição com aplicações contínuas.*

Para uma demonstração veja a Proposição 7.22 de [13].

Com isto, a aplicação $\varphi : X \to Y$ induz um homomorfismo $\varphi_* : \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y, \varphi(p))$ dado por

$$\varphi_*[f] = [\varphi \circ f].$$

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ espaços topológicos e $p_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ a projeção no i-ésimo fator. Escolhendo pontos bases $x_i \in X_i$, temos

$$p_{i*} : \pi_1(X_1 \times \cdots \times X_n, (x_1, \ldots, x_n)) \to \pi_1(X_i, x_i).$$

Assim, podemos definir a aplicação $P : \pi_1(X_1 \times \cdots \times X_n, (x_1, \ldots, x_n)) \to \pi_1(X_1, x_1) \times \cdots \times \pi_1(X_n, x_n)$ por

$$P[f] = (p_{1*}[f], \ldots, p_{n*}[f]).$$

Proposição 7. *P é um isomorfismo.*

Para uma demonstração veja a Proposição 7.34 de [13].

Definição 35. *Seja $\varphi : X \to Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que outra aplicação contínua $\psi : Y \to X$ é uma homotopia inversa para φ se $\psi \circ \varphi$ e Id_X são homotópicos, $\varphi \circ \psi$ e Id_Y são homotópicos. Se existe uma homotopia inversa para φ, então φ é chamada de uma equivalência homotópica.*

Definição 36. *Seja X um espaço métrico e $A \subset X$ um subespaço.*

(i) Uma aplicação contínua $r : X \to A$ é dito uma retração se $r \circ \iota_A = \mathrm{Id}_A$, onde $\iota_A : A \hookrightarrow X$.

(ii) Sendo $r : X \to A$ uma retração, dizemos que r é uma retração por deformação se existe uma homotopia $H : X \times [0,1] \to X$ tal que :

$$H(x, 0) = x, \ \textit{para todo } x \in X;$$

$$H(x,1) \in A \quad \textit{para todo } x \in X;$$

$$H(a,1) = a, \quad \textit{para todo } a \in A.$$

(iii) Além disso, uma retração é uma retração por deformação forte se satisfaz (ii) e

$$H(a,t) = a, \quad \textit{para todo } a \in A \textit{ e para todo } t \in [0,1].$$

Definição 37. *Sejam E e X espaços topológicos, e $q : E \to X$ uma aplicação contínua. Um conjunto aberto $U \subset X$ é dito ser uniformemente coberto por q se $q^{-1}(U)$ é a união disjunta de abertos conexos de E (chamados de folhas do recobrimento sobre U) cada qual aplicado homeomorficamente sobre U por q.*

Definição 38. *Uma aplicação de recobrimento é uma aplicação sobrejetiva contínua $q : E \to X$ tal que E é conexo e localmente conexo por caminho, e todos pontos de X tem uma vizinhança uniformemente coberta . Se $q : E \to X$ é uma aplicação de recobrimento, chamamos E de espaço de recobrimento de X, e X a base do recobrimento.*

Exemplo 3. *A aplicação $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $q(x) = (\cos 2x, \ \sin 2x)$ é uma aplicação de recobrimento.*

Definição 39. *Se $q : E \to X$ é uma aplicação de recobrimento e $\varphi : Y \to X$ uma aplicação contínua qualquer, um levantamento de φ é uma aplicação contínua $\tilde{\varphi} : Y \to E$ tal que $q \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.*

Proposição 8. *Seja $q : E \to X$ uma aplicação de recobrimento. Para qualquer ponto $x \in E$, o homomorfismo induzido $q_* : \pi_1(E,x) \to \pi_1(X, q(x))$ é injetiva.*

Para uma demonstração veja o Teorema 11.16 de [13].

Definição 40. *Qualquer recobrimento de X por um espaço simplesmente conexo $\widetilde{X}$ é chamado de recobrimento universal, e $\widetilde{X}$ é dito o espaço de recobrimento universal de X.*

Definição 41. *Uma aplicação de recobrimento $q : E \to X$ é chamada de recobrimento normal se o subgrupo induzido $q_*(\pi_1(E,x))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, q(x))$ para algum $x \in E$. Ou equivalentemente, se para cada $x \in X$ e cada $\tilde{x}, \tilde{x}_0 \in q^{-1}(x)$ existe uma transformação de recobrimento levando $\tilde{x}$ a $\tilde{x}_0$.*

Suponha que $q : E \to X$ seja uma aplicação de recobrimento. Um **automorfismo de q** é um isomorfismo de recobrimento de q para si mesmo, isto é, um homeomorfismo $\varphi : E \to E$ tal que $q \circ \varphi = q$. Estes automorfismos de recobrimento também são conhecidos como **transformações de recobrimento**.

Denotemos por $\mathrm{Aut}_q(E)$ o conjunto de todos os automorfismos do recobrimento $q : E \to X$. É fácil verificar que a composição de dois automorfismos, o inverso de um automorfismo e a aplicação identidade de E são todos automorfismos. Assim, $\mathrm{Aut}_q(E)$ é um grupo, chamado de **grupo de recobrimento**.

Proposição 9. *Se* $q : \widetilde{X} \to X$ *é um recobrimento universal, então*

$$\mathrm{Aut}_q(\widetilde{X}) \approx \pi_1(X, x_0).$$

Para uma demonstração veja o Corolário 6.10 de [3].

Para o que segue, qualquer caminho em X (não necessariamente um laço), denotamos por $[f]_\pi$ sua classe de equivalência módulo homotopia de caminhos. Em particular, se f é um laço baseado em p, então $[f]_\pi$ é sua classe de caminho em $\pi_1(X, p)$. De modo semelhante, se c é qualquer 1-cadeia, denotamos por $[c]_H$ sua classe de equivalência módulo $B_1(X)$, assim, se c é um ciclo (por exemplo, um laço), então $[c]_H$ é um elemento de $H_1(X)$. Definimos uma aplicação

$$h : \pi_1(X, p) \to H_1(X),$$

chamada **homomorfismo de Hurewicz**, por

$$h([f]_\pi) = [f]_H,$$

a qual é bem definida (veja o capítulo 13 de [13]).

Finalizamos este capítulo com o seguinte resultado que será útil na prova de nossos resultados.

Teorema 7. *Seja* X *um espaço conexo por caminhos e seja* x *um ponto de* X. *Então,* $\phi : \pi_1(X, x) \longrightarrow H_1(X)$ *é um homomorfismo sobrejetor cujo núcleo é o subgrupo comutador de* $\pi_1(X, x)$. *Consequentemente,* $H_1(X)$ *é isomorfo à abelianização de* $\pi_1(X, x)$, *i.e, é isomorfo a* $\pi_1(X, x)/[\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)]$.

Para uma demonstração veja o Teorema 13.14 de [13].

Capítulo 2

Crescimento de órbita polinomial

Neste capítulo, vamos relacionar o crescimento de órbita polinomial do grupo das tranformações de recobrimento com uma variedade plana. As principais referências para este capítulo incluem [5] e [27].

Iniciaremos com a seguinte definição.

Definição 42. *Denote por $\#(A)$ o número de elementos no conjunto A. Seja (X, d) um espaço métrico e seja $\mathrm{Isom}(X)$ seu grupo de isometrias. Seja Γ um subgrupo de $\mathrm{Isom}(X)$. Para todo $x \in X$, ponha $D^\Gamma(x, r) = \{g \in \Gamma \mid d(x, g(x)) \leqslant r\}$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$, dizemos que Γ tem crescimento de órbita polinomial relacionado a x de ordem $\geqslant \alpha$ $(\leqslant \alpha)$, se, e somente se,*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(x, r))}{r^\alpha} > 0 \ (\limsup_{r\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(x, r))}{r^\alpha} < \infty).$$

Dizemos que Γ tem crescimento de órbita polinomial relacionado a x de ordem $> \alpha$ $(< \alpha)$, se, e somente se,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(x, r))}{r^\alpha} = \infty \ (= 0).$$

Agora, considere M uma variedade Riemanniana completa. Para $p \in M$, $r > 0$, sejam

$$D_r(p) = \big\{x \in M; d(x, p) \leqslant r\big\},$$

$$C_r(p) = \big\{x \in M; \text{se } q \in M \text{ e } \ d(q, x) > r, \text{ então } d(p, x) + d(x, q) - d(p, q) > 0\big\},$$

$$N_r(p) = D_r(p) \cup C_r(p).$$

Note que $C_r(p)$ é exatamente os pontos $x \in M$ tal que toda geodésica minimizante ligando p e x não pode ser estendida em x a uma geodésica minimizante de comprimento maior que $d(p,x)+r$, pois, caso contrário, x pertenceria a uma geodésica minimizante ligando p a q, implicando que $d(p,x)+d(x,q) = d(p,q)$, uma contradição, já que $x \in C_r(p)$. Além disso, se $d(q,x) > r$, então $d(p,x)+d(x,q) > d(p,x)+r$.

Lema 3. *Seja* $x_0 \in M$, $R > 0$, $\Lambda = \mathrm{Isom}(M)$. *Se* M *não contém linha, então existe um* $d > 0$ *tal que* $\Lambda \cdot B_R(x_0) \subset N_d(x_0)$.

Demonstração. Suponhamos por contradição que isto não seja verdade. Daí existiriam $d_i \to \infty$, $x_i \in B_R(x_0)$ e $f_i \in \Lambda$ tais que $f_i(x_i) \notin N_{d_i}(x_0)$. Pela definição de $N_{d_i}(x_0)$, podemos obter geodésicas minímas de velocidade unitária $\gamma_i : [-d_i, d_i] \to M$ com $\gamma_i(0) = f_i(x_i)$. Mas, afirmamos que $f_i^{-1} \circ \gamma_i$ converge para uma linha γ, com $d(x_0,\gamma) \leqslant R$. Uma contradição, pois M não contém linhas. Para provar o afirmado, vamos escrever $\alpha_i = f_i^{-1} \circ \gamma_i$.

Ao se caracterizar uma geodésica, basta saber a posição dela em um instante e a velocidade nesse mesmo instante. Nesse caso, passando para uma subsequência se necessário, mostraremos que $x_i = \alpha_i(0) \to x$ e $\alpha_i'(0) \to v \in T_xM$ e que a geodésica γ caracterizada por $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$ é a linha procurada.

Note que os vetores $\alpha_i'(0)$ estão em espaços tangentes diferentes ($\alpha_i'(0) \in T_{x_i}M$). Então a convergência $\alpha_i'(0) \to v$ não faz muito sentido a priori, mas podemos considerar a convergência $(x_i, \alpha_i'(0)) \to (x, v)$ em TM.

Considere a sequência $\{(x_i, \alpha_i'(0))\}_i \subset TM$. Observe que como $\{x_i\}_i \in B_R(x_0)$, segue da completude de M que, passando para uma subsequência, podemos supor que $x_i \to x \in \overline{B}_R(x_0)$. Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização em torno de x. Seja $\{X_1, \ldots, X_n\}$ um referêncial ortonormal em torno de x. Então, $\Phi : U \times \mathbb{R}^n \to TM$, dada por

$$\Phi(u, a_1, \ldots, a_n) = \big(\varphi(u), \sum a_j X_j|_{\varphi(u)}\big),$$

é uma parametrização de TM. Seja $B \subset U$ uma bola fechada contento $\varphi^{-1}(x)$ e seja $B' \subset \mathbb{R}^n$ a bola unitária fechada centrada na origem. Pelo fato de $X_1, \ldots, X_n$ ser um refencial ortonormal, temos que

$$\big|\sum a_j X_j|_{\varphi(u)}\big| = |(a_1, \ldots, a_n)|.$$

Logo,

$$\Phi(B \times B') = \{(q, w) \in TM \mid q \in \varphi(B) \quad \text{e} \quad |w| \leqslant 1\}.$$

Observe que para i suficientemente grande temos $x_i \in \varphi(B)$ (pois $x \in \mathrm{int}(\varphi(B))$ e $x_i \to x$). Logo, $(x_i, \alpha_i'(0)) \in \Phi(B \times B')$ para i grande (pois $|\alpha_i'(0)| = 1$). Como $B \times B'$ é compacto, $\Phi(B \times B')$ também o é. Assim, passando para uma subsequência, podemos admitir que $(x_i, \alpha_i'(0)) \to (x, v) \in TM$.

Considere a geodésica parametrizada pelo comprimento de arco γ que satisfaz as condições iniciais $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$. Como M é completa, γ está definida em $\mathbb{R}$ e de fato γ será uma linha. Com efeito, veja que $\alpha_i(s) \to \gamma(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Aqui observe que para s grande pode ocorrer de $s \notin [-d_i, d_i]$ nos primeiros índices i, mas podemos usar que a geodésica α_i está definida em $\mathbb{R}$, e que a sua restrição a $[-d_i, d_i]$ é minimizante (ou seja, $\alpha_i : [-d_i, d_i] \to M$ é a restrição de uma geodésica definida em $\mathbb{R}$, que para simplificar chamamos de α_i também). Seja $s \in \mathbb{R}$, com $s > 0$ (o caso $s < 0$ é análogo). Temos que $\alpha_i(s) = \exp_{x_i}(s\alpha_i'(0))$. Como $(x_i, s\alpha_i'(0)) \to (x, sv)$ (pois $(x_i, \alpha_i'(0)) \to (x, v)$), e como $\exp : TM \to M$ é contínua, segue-se que

$$\alpha_i(s) = \exp_{x_i}(s\alpha_i'(0)) \to \exp_x(sv) = \gamma(s).$$

Por fim, mostremos que γ é minimizante. Sejam $s, t \in \mathbb{R}$, com $s \leqslant t$. Para i suficientemente grande temos $s, t \in [-d_i, d_i]$. Logo α_i minimiza o comprimento de arco entre $\alpha_i(s)$ e $\alpha_i(t)$. Assim,

$$d(\alpha_i(s), \alpha_i(t)) = \int_s^t |\alpha_i'(\xi)| d\xi = t - s.$$

Pela continuidade de $d : M \times M \to \mathbb{R}$, temos que

$$t - s = d(\alpha_i(s), \alpha_i(t)) \to d(\gamma(s), \gamma(t)) \implies d(\gamma(s), \gamma(t)) = t - s.$$

Por outro lado, como γ está parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$\int_s^t |\gamma'(\xi)| d\xi = t - s,$$

o que conclui que γ minimiza o comprimento de arco entre $\gamma(s)$ e $\gamma(t)$. Portanto, γ é uma linha.

Finalmente,

$$d(x_0, \gamma(0)) = \lim_{i \to \infty} d(x_0, \alpha_i(0)) = \lim_{i \to \infty} d(x_0, x_i) = d(x_0, x) \leqslant R.$$

Logo, $d(x_0, \gamma) = \inf_{t \in \mathbb{R}} d(x_0, \gamma(t)) \leqslant R$, o lema segue. $\square$

O lema a seguir melhora a estimativa de Cheeger-Gromoll apresentada no Teorema 4 de [5].

Lema 4. *Fixe* $h > 0$. *Seja* M^m *uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa* ($m \geqslant 2$). *Para* $p \in M$, $r > 0$, *seja* $W_r^h(p) = D_r(p) \cap C_h(p)$. *Então,*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(W_r^h(p))}{r^{m-1}} = 0.$$

Demonstração. Considere os conjuntos

$$S_pM = \{v \in T_pM; \|v\| = 1\},$$
$$C_pM = \{v \in S_pM; \exp_p(tv)|_{[0,\infty)} \text{ não é um raio}\},$$
$$C_p^sM = \{v \in C_pM; \exp_p(tv)|_{[0,s+\epsilon)} \text{ não é geodésica minimizante para todo } \epsilon > 0\}.$$

Seja σ a medida canônica em S_pM. Dado $p \in M^m$, seja $\{x^i\}_{i=1}^m$ as coordenadas polares em $T_pM \setminus \{p\}$, isto é,

$$x^m(v) = t(v) = |v| \quad \text{e} \quad x^i(v) = \theta^i\left(\frac{v}{|v|}\right), \ 1 \leqslant i \leqslant m-1,$$

onde $\{\theta^i\}_{i=1}^{m-1}$ são as coordenadas locais em S_pM. Temos então o sistema de coordenadas polares geodésico

$$x = \{x^i \circ \exp_p^{-1}\} : B(p,r) \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^m,$$

onde $r = d(p, Cut(p))$ o qual denotamos por

$$t = x^m \circ \exp_p^{-1} \quad \text{e} \quad \theta^i = x^i \circ \exp_p^{-1}, \ i = 1, \ldots, m-1,$$

tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} = (x^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^m} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = (x^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i},$$

o qual forma uma base de campos de vetores em $B(p,r) \setminus \{p\}$. Usando o elemento de volume em coordenadas geodésicas polares de T_pM, temos por definição

$$\mathrm{Vol}(W_r^h(p)) = \int_{C_p^{r+h}M} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \mu(t,\theta)\, dt d\theta,$$

onde $\mu(t,\theta)dtd\theta$ é a forma de volume de M em $\exp_p(t\theta)$ e

$$\mu(t,\theta) = \sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{\det\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \theta^j} \right\rangle}$$

é a Jacobiana da exponencial.

Baseado no Exercício 1.85 de [7], assuma que as coordenadas $\{\theta^i\}_{i=1}^{m-1}$ em S_pM que satisfazem $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial\theta^i} := e_i \in T_pM$ são ortonormais, então

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{t^{m-1}} = 1. \tag{2.1}$$

De fato, pelo lema de Gauss temos que $\mathrm{grad}\, t = \frac{\partial}{\partial t}$ em todos os pontos fora de $\mathrm{Cut}(p)$, tal que

$$g_{mm} = |\mathrm{grad}\, t|^2 = \left|\frac{\partial}{\partial t}\right|^2 = \left\langle \mathrm{grad}\, t, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}(t) = 1,$$

e

$$g_{im} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta^i}\right\rangle = 0, \quad \text{para } i = 1, \ldots, m-1.$$

Logo, sendo $(g)_{1j}$ a matriz formada a partir de $(g_{ij})_{i,j=1}^m$ retirando a linha 1 e a j-ésima coluna, temos que

$$\det(g_{ij})_{i,j=1}^m = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1} g_{1j}\cdot \det(g)_{1j} = \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1} g_{1j}\cdot \det(g)_{1j} = \det(g_{ij})_{i,j=1}^{m-1}.$$

Agora, definamos $h_{ij}(t) = \left\langle \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial\theta^i}, \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial\theta^j}\right\rangle$. Veja que, por hipótese, $\lim_{t\to 0} h_{ij}(t) = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, e para $i, j \leqslant m-1$ temos que

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial\theta^i}, \frac{\partial}{\partial\theta^j}\right\rangle = t^2 h_{ij}(t).$$

Logo, $\det g_{ij} = t^{2(m-1)}\det(h_{ij}(t))$, o que implica $\mu(t,\theta) = \sqrt{\det g_{ij}} = t^{m-1}\sqrt{\det(h_{ij}(t)}$. Como $h_{ij}(t) \to \delta_{ij}$ para $t \to 0$, temos que $\det(h_{ij}(t)) \to \det(I) = 1$. Portanto,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mu(t,\theta)}{t^{m-1}} = \lim_{t\to 0}\sqrt{\det(h_{ij}(t)} = 1.$$

Logo vale (2.1).

Agora, por definição de limite, temos

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0;\ 0 < |t| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\mu}{t^{m-1}} - 1\right| < \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{\mu}{t^{m-1}} - 1 < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow (1-\varepsilon)t^{m-1} < \mu < (1+\varepsilon)t^{m-1}.\end{aligned}$$

Logo, tomando $\varepsilon << 1$, temos que $\mu(t,\theta) \leqslant t^{m-1}$. Com isto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(W_r^h(p)) &\leqslant \int_{C_p^{r+h}M}\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} t^{m-1}\,dt\,d\theta \\ &\leqslant \int_{S_pM} d\theta \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} t^{m-1}\,dt \qquad (\text{pois } C_p^{r+h}M \subset S_pM) \\ &= \sigma(S_pM)\cdot\frac{b(\theta)^m - a(\theta)^m}{m}. \end{aligned}\tag{2.2}$$

Note que $b(\theta) - a(\theta) \leqslant h$ e $0 \leqslant a(\theta) \leqslant b(\theta) \leqslant r$ para todo $\theta \in C_p^{r+h}M$. De fato, $[a(\theta), b(\theta)]$ é o intervalo de valores t tais que $exp_p(t\theta) \in W_r^h(p)$. Por definição, para $\theta \in C_p^{r+h}M$, $exp_p(t\theta)|_{[0,r+h+\epsilon)}$ não é minimizante para todo $\epsilon > 0$, ou seja, $exp_p(t\theta)|_{[0,r+h]}$ é minimizante. Assim, veja que $exp_p((r+h)\theta) \in Cut(p)$. Logo, $b(\theta) \leqslant r + h$ e mais ainda

$$r \geqslant d(p, exp_p(b(\theta)\theta)) = d(exp_p(0\theta), exp_p(b(\theta)\theta)) = d(0, b(\theta)) = b(\theta).$$

Além disso, $a(\theta) \geqslant 0$, pois $exp_p(t\theta)$ está sendo definida para valores $t \geqslant 0$. Portanto, $0 \leqslant a(\theta) \leqslant b(\theta) \leqslant r$. Para cada direção $\theta \in C_p^{r+h}M$, seja $s \in [a(\theta), b(\theta)]$, temos $exp_p(s\theta) \in W_r^h(p)$ e por definição, a geodésica minimizante $exp_p(t\theta)|_{[0,s]}$ ligando x a p não pode ser extendida em x a uma geodésica minimizante de comprimento maior que $d(p, x) + h = s + h$. Logo, temos $r - h \leqslant s$, pois, caso contrário, $s < r - h < r$, implicando $s + h < r < r + h$, o que é uma contradição, uma vez que $exp_p((r+h)\theta) \in Cut(p)$. É claro que $s \leqslant r$, pois $s \leqslant b(\theta)$. Portanto, $s \in [r-h, r]$ e por conseguinte $[a(\theta), b(\theta)] \subset [r-h, r]$, donde, $b(\theta) - a(\theta) \leqslant h$. Com isto,

$$\begin{aligned}
Vol(W_r^h(p)) &\leqslant \sigma(S_pM)\frac{b(\theta)^m - a(\theta)^m}{m} \\
&= \sigma(S_pM)\frac{b(\theta) - a(\theta)}{m}[b(\theta)^{m-1} + b(\theta)^{m-2}a(\theta) + \cdots + a(\theta)^{m-1}] \\
&\leqslant \sigma(S_pM)\frac{h}{m}mr^{m-1} = \sigma(S_pM)hr^{m-1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$Vol(W_r^h(p)) \leqslant \sigma(S_pM)hr^{m-1}, \tag{2.3}$$

é exatamente a estimativa de Cheeger-Gromoll em [5].

Por outro lado, veja que

$$C_p^{r_1}M \subset C_p^{r_2}M \text{ para } r_1 < r_2; \tag{2.4}$$

$$C_pM = \bigcup_{r>0} C_p^rM; \tag{2.5}$$

$$\sigma(C_pM) < \infty. \tag{2.6}$$

De fato, se $v \in C_p^{r_1}M$ então $exp_p(tv)|_{[0,r_1+\epsilon)}$ não é minimizante para todo $\epsilon > 0$. Como $r_1 < r_2$, $exp_p(tv)|_{[0,r_2+\epsilon)}$ não é minimizante para todo $\epsilon > 0$ (já que $r_2 = r_1 + \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$). Logo, $v \in C_p^{r_2}M$, provando (2.4).

Para provar (2.5), suponha que $v \notin C_pM$, daí $\gamma_v(t) = exp_p(tv)|_{[0,\infty)}$ é minimizante e, assim, $v \notin \bigcup_{r>0} C_p^r M$, logo, $\bigcup_{r>0} C_p^r M \subset C_pM$. Por ouro lado, seja $v \in C_pM$, então $exp_p(tv)|_{[0,\infty)}$ não é raio, logo, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $exp_p(t_0 v) \in Cut(p)$, donde $exp_p(tv)|_{[0,t_0+\epsilon)}$ não é minimizante para todo $\epsilon > 0$, logo, $v \in C_p^{t_0}M \subset \bigcup_{r>0} C_p^r M$, provando (2.5).

Finalmente, seja $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ uma carta em torno de $p \in M$. Desde que φ é um difeomorfismo sobre sua imagem, $\varphi_* : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$ é isomorfismo, logo S_pM é topologicamente equivalente a $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ a qual tem $\sigma(\mathbb{S}^{m-1}) < \infty$, implicando $\sigma(S_pM) < \infty$. Como $C_pM \subset S_pM$, temos que $\sigma(C_pM) < \infty$, provando (2.6).

Agora, observe que $C_p^{\sqrt{r}}M \subset C_p^{r+h}M$, implicando $\sigma(C_p^{\sqrt{r}}M) \leqslant \sigma(C_p^{r+h}M)$. Além disso, a equação (2.5) juntamente com (2.6) implicam que $\sigma(C_p^{r+h}M) < \infty$. Logo, podemos escrever

$$\sigma(C_p^{r+h}M - C_p^{\sqrt{r}}M) = \sigma(C_p^{r+h}M) - \sigma(C_p^{\sqrt{r}}M).$$

Para $r >> 1$ o lado direito da equação acima se torna muito pequena, ou seja,

$$\lim_{r\to\infty} \sigma(C_p^{r+h}M - C_p^{\sqrt{r}}M) = 0. \tag{2.7}$$

Ponha $A_r = C_p^{r+h}M - C_p^{\sqrt{r}}M$, daí para $r > max\{1, h\}$, de forma análoga ao cálculo de volume em (2.2), temos que

$$\begin{aligned} Vol(W_r^h(p) - W_{\sqrt{r}}^h(p)) &= Vol(D_r(p) \cap C_h(p) - D_{\sqrt{r}}(p) \cap C_h(p)) \\ &= Vol(C_h(p) \cap (D_r(p) - D_{\sqrt{r}}(p))) \\ &= \int_{A_r} \int_{f(\theta)}^{g(\theta)} \mu(t,\theta) dt d\theta \leqslant \int_{A_r} \int_{r-h}^{r} t^{m-1} dt d\theta, \end{aligned}$$

onde, como provado acima, também temos que $g(\theta) - f(\theta) \leqslant h$ e $\sqrt{r} \leqslant f(\theta) \leqslant g(\theta) \leqslant r$ (pois $W_r^h(p) - W_{\sqrt{r}}^h(p) \subset D_r(p) - D_{\sqrt{r}}(p)$) e as funções f e g são como as funções a e b definidas anteriormente. Logo,

$$\begin{aligned} Vol(W_r^h(p) - W_{\sqrt{r}}^h(p)) &\leqslant \int_{A_r} \int_{r-h}^{r} t^{m-1} dt d\theta = \sigma(A_r) \left[\frac{t^m}{m-1} \right]_{r-h}^{r} \\ &= \sigma(A_r) \frac{1}{m-1} [r^m - (r-h)^m] \\ &= \frac{\sigma(A_r)}{m-1} h[r^{m-1} + r^{m-2}(r-h) + \cdots + (r-h)^{m-1}] \\ &= \sigma(A_r) h r^{m-1}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Assim, pelas equações (2.3) e (2.8), concluímos que

$$\begin{aligned}\mathsf{Vol}(W^h_r(p)) &= \mathsf{Vol}(W^h_{\sqrt{r}}(p)) + \mathsf{Vol}(W^h_r(p)) - \mathsf{Vol}(W^h_{\sqrt{r}}(p))\\ &= \mathsf{Vol}(W^h_{\sqrt{r}}(p)) + \mathsf{Vol}(W^h_r(p) - W^h_{\sqrt{r}}(p)) \leqslant h[\sigma(S_pM)r^{\frac{m-1}{2}} + \sigma(A_r)r^{m-1}].\end{aligned}$$

Portanto, por (2.7), obtemos que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mathsf{Vol}(W^h_r(p))}{r^{m-1}} \leqslant h[\sigma(S_pM)\lim_{r\to\infty} r^{-\frac{m-1}{2}} + \lim_{r\to\infty}\sigma(A_r)] = 0.$$

Isto termina a prova do lemma. □

Observação 2. *Sejam* $\overline{M}$ *e* M *variedades e* $\pi : \overline{M} \to M$ *uma aplicaçaõ de recobrimento. Se* Γ *é o grupo das transformações de recobrimento* $g : \overline{M} \to \overline{M}$*, então* $\Gamma < \mathsf{Isom}(\overline{M})$*.*

De fato, para ver isto, basta verificar que uma transformação de recobrimento qualquer $g : \overline{M} \to \overline{M}$ é uma isometria. Por definição, g é homeomorfismo e $\pi \circ g = \pi$. Veja que as condições $\pi \circ g = \pi$ e $\pi = \pi \circ g^{-1}$ implicam na suavidade de g e g^{-1}. Assim, sendo g homeomorfismo, segue na verdade que g é difeomorfismo. Além disso, derivando de ambos os lados de $\pi \circ g = \pi$ e utilizando o fato de π ser uma isometria local, temos para qualquer $p \in \overline{M}$ e $u, v \in T_p\overline{M}$ que

$$\langle dg_p(u), dg_p(v)\rangle = \langle d\pi_{g(p)}(dg_p(u)), d\pi_{g(p)}(dg_p(v))\rangle = \langle d\pi_{g(p)}(u), d\pi_{g(p)}(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Portanto, g é uma isometria.

Lema 5. *Seja* $f : \widetilde{M} \to M$ *o recobrimento universal Riemanniano. Se* $\mathsf{Ric}_M \geqslant 0$*, então* $\mathsf{Ric}_{\widetilde{M}} \geqslant 0$*.*

Demonstração. Seja $p \in \widetilde{M}$ e $\{e_i\}$ um referencial móvel em p. Note que f é uma isometria local, logo existe $U \subset \widetilde{M}$, $p \in U$ tal que $f|_U : U \to f(U)$ é isometria, isto é, $f|_U$ é difeomorfismo e uma imersão isométrica. Para $X \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$,

$$(\mathsf{Ric}_{\widetilde{M}})_p(X, X) = \mathsf{tr}(v \in T_p\widetilde{M} \mapsto \widetilde{R}(v, X)X) = \sum_i \langle e_i, \widetilde{R}(e_i, X)X\rangle = \sum_i \langle f_*e_i, f_*(\widetilde{R}(e_i, X)X)\rangle.$$

Veja que em U, $f_*(\widetilde{\nabla}_X Y) = \nabla_{f_*X} f_*Y$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$. De fato, usando que f é isometria em U e a fórmula de Koszul,

$$\begin{aligned}2\langle f_*(\nabla_X Y), (f_*Z)\rangle &= 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle\\ &= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, X], Z\rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
2\langle \bar{\nabla}_{f_*X} f_*Y, f_*Z\rangle &= (f_*X)\langle f_*Y, f_*Z\rangle + (f_*Y)\langle f_*Z, f_*X\rangle - (f_*Z)\langle f_*X, f_*Y\rangle - \langle [f_*Y, f_*Z], f_*X\rangle \\
&\quad - \langle [f_*X, f_*Z], f_*Z\rangle - \langle [f_*Y, f_*X], f_*Z\rangle.
\end{aligned}
$$

Veja que

$$(f_*X)\langle f_*Y, f_*Z\rangle = X(\langle f_*Y, f_*Z\rangle \circ f).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
2\langle \bar{\nabla}_{f_*X} f_*Y, f_*Z\rangle &= X(\langle f_*Y, f_*Z\rangle \circ f) + Y(\langle f_*Z, f_*X\rangle \circ f) - Z(\langle f_*Y, f_*X\rangle \circ f) - \langle [f_*Y, f_*Z], f_*X\rangle \\
&\quad - \langle [f_*X, f_*Z], f_*Z\rangle - \langle [f_*Y, f_*X], f_*Z\rangle \\
&= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle Y, X\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Z], Z\rangle - \langle [Y, X], Z\rangle \\
&= 2\langle f_*(\nabla_X Y), (f_*Z)\rangle,
\end{aligned}
$$

como havíamos afirmado. Assim, $f_*(\widetilde{R}(e_i, X)X) = R(f_*e_i, f_*X)f_*X$, onde f_*X deve ser interpretado como o pushforword de X na vizinhança U, a qual f é difeomorfismo. Logo,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}})_p(X, X) &= \sum_i \langle f_*e_i, R(f_*e_i, f_*X)f_*X\rangle \\
&= \mathrm{tr}\big(v \in T_{f(p)}M \mapsto R(v, f_*X)f_*X\big) \\
&= (\mathrm{Ric}_M)_{f(p)}(f_*X, f_*X) \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, sendo p arbitrário, segue que $\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}} \geqslant 0$. □

Para o próximo resultado iremos fazer uso do seguinte resultado de Cheeger-Gromoll em [5]:

Teorema 8. *Seja M uma variedade completa com curvatura de Ricci não negativa. Então M é o produto isométrico $N \times \mathbb{R}^k$, onde N não contém linhas e $\mathbb{R}^k$ tem métrica plana padrão.*

Agora estamos em condições de provar o resultado principal deste capítulo:

Teorema 9. *Seja M^n uma variedade aberta com curvatura de Ricci não negativa. Seja $\pi : \widetilde{M} \to M$ recobrimento universal Riemanniano com o grupo das transformções de recobrimento Γ. Se M não é plana, então Γ tem crescimento de órbita polinomial de ordem $< n - 1$.*

Demonstração. Fixe $\tilde{p} \in \widetilde{M}$. Como M não é plana, temos que $\widetilde{M} \neq \mathbb{R}^n$. Com isto, pelo Lema 5 juntamente com o fato de $\widetilde{M}$ ser completa, obtemos pelo o Teorema 8 que $(\widetilde{M}, \tilde{p}) = (N^k \times \mathbb{R}^{n-k}, (x_0, 0))$, onde N não contém linhas e $k \geqslant 2$.

Fixe $l > 0$ tal que $B_l(g_1\tilde{p}) \cap B_l(g_2\tilde{p}) = \emptyset$ para todo $g_1, g_2 \in \Gamma$, $g_1 \neq g_2$ (pois, como Γ age propriamente descontínua em $\widetilde{M}$, existe uma vizinhança $U_{\tilde{p}}$ de $\tilde{p}$ tal que $g_1(U_{\tilde{p}}) \cap g_2(U_{\tilde{p}}) = \emptyset$, implicando que $g_1\tilde{p} \neq g_2\tilde{p}$ e sendo $\widetilde{M}$ Hausdorff, existe tal l). Pelo Lema 3, existe $d > 0$ tal que $\Lambda \cdot B_l(x_0) \subset N_d(x_0)$, onde $\Lambda = \mathrm{Isom}(N)$. Seja $G = \mathrm{Isom}(\widetilde{M})$. Afirmamos que $G \simeq \Lambda \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n-k})$. Com efeito, considere $\phi : \mathrm{Isom}(N) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n-k}) \to \mathrm{Isom}(N \times \mathbb{R}^{n-k})$ definida por $\phi(h_1, h_2) = h_1 \times h_2 = h$, vamos provar que tal aplicação é um isomorfismo (pois assim $\mathrm{Isom}(\widetilde{M}) = \mathrm{Isom}(N \times \mathbb{R}^{n-k}) \simeq \Lambda \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n-k})$). De fato, dados $h = (h_1, h_2)$, $g = (g_1, g_2) \in \mathrm{Isom}(N) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n-k})$ temos

$$\phi(h \cdot g) = \phi((h_1, h_2) \cdot (g_1, g_2)) = \phi(h_1 \circ g_1, h_2 \circ g_2) = (h_1 \circ g_1) \times (h_2 \circ g_2).$$

Veja que para $(x, y) \in N \times \mathbb{R}^{n-k}$, temos

$$\begin{aligned} ((h_1 \circ g_1) \times (h_2 \circ g_2))(x, y) &= ((h_1 \circ g_1)(x), (h_2 \circ g_2)(y)) = (h_1(g_1(x)), h_2(g_2(x))) \\ &= (h_1 \times h_2)(g_1(x), g_2(y)) = (h_1 \times h_2) \circ (g_1 \times g_2)(x, y). \end{aligned}$$

Assim, $\phi(h \cdot g) = (h_1 \times h_2) \circ (g_1 \times g_2) = \phi(h) \circ \phi(g)$. Portanto, ϕ é um homomorfismo.

Agora, note que ϕ é claramente injetiva, pois, se $\phi(h_1, h_2) = \phi(g_1, g_2)$, então $h_1 \times h_2 = g_1 \times g_2$, ou seja, para cada $(p, v) \in N \times \mathbb{R}^{n-k}$, temos

$$(h_1(p), h_2(v)) = (h_1 \times h_2)(p, v) = (g_1 \times g_2)(p, v) = (g_1(p), g_2(v)).$$

Implicando que $h_1(p) = g_1(p)$ e $h_2(v) = g_2(v)$. Sendo (p, v) arbitrário, segue que $(h_1, h_2) = (g_1, g_2)$.

Finalmente, ϕ é sobrejetiva, pois, se $f \in \mathrm{Isom}(N \times \mathbb{R}^{n-k})$, f leva retas em retas, fatores de $\mathbb{R}^{n-k}$ em fatores de $\mathbb{R}^{n-k}$ e fatores de N em fatores de N isometricamente. Fixe $x \in N$ e $v \in \mathbb{R}^{n-k}$, então $f : \{x\} \times \mathbb{R}^{n-k} \to N \times \mathbb{R}^{n-k}$ é um mergulho isométrico sobre $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Também, $f : N \times \{v\} \to N \times \mathbb{R}^{n-k}$ é um mergulho isométrico sobre $N \times \{w\}$. Como $T_{(x,v)}(N \times \mathbb{R}^{n-k}) \simeq T_xN \times T_v\mathbb{R}^{n-k}$, a aplicação linear $f_*(x, v)$ é da forma (A, B), onde $A : T_xN \to T_yN$ e $B : T_v\mathbb{R}^{n-k} \to T_w\mathbb{R}^{n-k}$ são isometrias. Assim, podemos ter $h_1 : N \to N$ e $h_2 : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}$ isometrias tais que $(h_1)_*(x) = A$ e $(h_2)_*(v) = B$. Se tomarmos a isometria $h = (h_1, h_2) : N \times \mathbb{R}^{n-k} \to N \times \mathbb{R}^{n-k}$ e $h_*(x, v) = f_*(x, v)$ então $h \equiv f$, pois duas isometrias que tem o mesmo valor e a mesma diferencial em um ponto devem ser iguais. Portanto, $f = \phi(h_1, h_2)$, e ϕ é um isomorfismo.

Agora, dado $g \in \Gamma$, (a qual temos $g \in G$) podemos escrever $g = g_1 \times h \in \Lambda \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n-k})$, daí

$$g(B_l(\tilde{p})) = g_1(B_l(x_0)) \times h(B_l(0)) \subset N_d(x_0) \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Ou seja,

$$\Gamma \cdot B_l(\tilde{p}) \subset N_d(x_0) \times \mathbb{R}^{n-k}. \tag{2.9}$$

Escrevendo $\Gamma_r = D^{\Gamma}(\tilde{p}, r) = \{g \in \Gamma \mid d(g\tilde{p}, \tilde{p}) \leqslant r\}$, temos por (2.9), que

$$\bigsqcup_{g \in \Gamma_r} g \cdot B_l(\tilde{p}) \subset (N_d(x_0) \cap B_{r+l}(x_0)) \times B_{r+l}(0). \tag{2.10}$$

De fato, seja $y \in \bigsqcup_{g \in \Gamma_r} g \cdot B_l(\tilde{p})$, então existem $g \in \Gamma_r$ (onde podemos escrever $g = g_1 \times h \in \Lambda \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n-k})$) e $x = (x_1, x_2) \in B_l(\tilde{p}) = B_l(x_0) \times B_l(0)$ tal que $y = gx = (g_1 \times h)(x_1, x_2) = (g_1 x_1, h x_2)$. Como existe $d > 0$ tal que $\Lambda \cdot B_l(x_0) \subset N_d(x_0)$, temos que $g_1(B_l(x_0)) \subset N_d(x_0)$ e

$$r \geqslant d(g\tilde{p}, \tilde{p}) = d((g_1 \times h)(x_0, 0), (x_0, 0)) = d(g_1 x_0, x_0) + d(h(0), 0).$$

Assim, para $z \in B_l(x_0)$ temos que

$$d(g_1 z, x_0) \leqslant d(g_1 z, g_1 x_0) + d(g_1 x_0, x_0) = d(z, x_0) + d(g_1 x_0, x_0) \leqslant r + l.$$

Logo, $g_1(B_l(x_0)) \subset N_d(x_0) \cap B_{r+l}(x_0)$ e assim, $g_1 x_1 \in N_d(x_0) \cap B_{r+l}(x_0)$. Além disso,

$$d(hx_2, 0) = d(x_2, h^{-1}(0)) = d(x_2, 0) \leqslant l \leqslant r + l.$$

então, $hx_2 \in B_{r+l}(0)$ e portanto, $y = gx \in (N_d(x_0) \cap B_{r+l}(x_0)) \times B_{r+l}(0)$, provando (2.10).

Pelo Lema 4, podemos escrever $\mathrm{Vol}(W_r^d(x_0)) = f(r) r^{k-1}$, onde $\lim_{r \to \infty} f(r) = 0$. Logo, por (2.10),

$$\begin{aligned}\#(\Gamma_r) \cdot \mathrm{Vol}(B_l(\tilde{p})) &\leqslant \mathrm{Vol}(N_d(x_0) \cap B_{r+l}(x_0)) \mathrm{Vol}(B_{r+l}(0)) \\ &= \mathrm{Vol}(N_d(x_0) \cap B_{r+l}(x_0)) \omega_{n-k} (r + l)^{n-k},\end{aligned}$$

onde $\omega_{n-k} = \mathsf{Vol}(B_1(0))$, $B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-k}$. Agora, note que (considerando $r + l > d$, pois faremos $r \to \infty$),

$$\begin{aligned}
\mathsf{Vol}(N_d(x_0) \cap B_{r+l}(x_0)) &= \mathsf{Vol}((D_d(x_0) \cup C_d(x_0)) \cap B_{r+l}(x_0)) \\
&= \mathsf{Vol}((D_d(x_0) \cap B_{r+l}(x_0)) \cup (C_d(x_0) \cap B_{r+l}(x_0))) \\
&= \mathsf{Vol}(D_d(x_0) \cup W^d_{r+l}(x_0)) \\
&= \mathsf{Vol}(D_d(x_0)) + \mathsf{Vol}(W^d_{r+l}(x_0))) - \mathsf{Vol}(D_d(x_0) \cap W^d_{r+l}(x_0))) \\
&\leqslant \mathsf{Vol}(D_d(x_0)) + \mathsf{Vol}(W^d_{r+l}(x_0))).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\#(\Gamma_r) \cdot \mathsf{Vol}(B_l(\tilde{p})) &\leqslant \mathsf{Vol}(D_d(x_0)) + \mathsf{Vol}(W^d_{r+l}(x_0)))\omega_{n-k}(r+l)^{n-k} \\
&\leqslant \omega_{n-k}(\omega_k d^k + f(r+l)(r+l)^{k-1})(r+l)^{n-k},
\end{aligned}$$

desde que $k \geqslant 2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(\tilde{p}, r))\mathsf{Vol}(B_l(\tilde{p}))}{r^{n-1}} &\leqslant \lim_{r\to\infty} \frac{\omega_{n-k}(\omega_k d^k + f(r+l)(r+l)^{k-1})(r+l)^{n-k}}{r^{n-1}} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{\omega_{n-k}\omega_k d^k (r+l)^{n-k}}{r^{n-1}},
\end{aligned}$$

pois

$$\lim_{r\to\infty} \frac{(f(r+l)(r+l)^{k-1})(r+l)^{n-k}}{r^{n-1}} = \lim_{r\to\infty} \frac{f(r+l)(r+l)^{n-1}}{r^{n-1}} = \lim_{r\to\infty} f(r+l)\left(1 + \frac{l}{r}\right)^{n-1} = 0.$$

Além disso, pela fórmula do Binômio de Newton, temos que

$$\frac{(r+l)^{n-k}}{r^{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} r^{(n-k-i)+1-n} l^i = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} r^{1-(k+i)} l^i.$$

Logo,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\omega_{n-k}\omega_k d^k (r+l)^{n-k}}{r^{n-1}} = 0,$$

e assim

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(\tilde{p}, r))}{r^{n-1}} = 0.$$

Portanto, Γ tem crescimento polinomial da órbita de ordem $< n-1$. $\square$

Capítulo 3

Realização do Crescimento Máximo de Órbitas

Neste capítulo, estudaremos alguns resultados que permitem obter o crescimento máximo da órbita sob diversas condições. Esses resultados auxiliarão na obtenção da rigidez do primeiro número de Betti.

Primeiramente, vejamos as seguintes definições.

Definição 43. *Seja Γ um grupo discreto finitamente gerado, com geradores $\{g_1, \ldots, g_s\}$, $g_i \in \Gamma$ e considere $U(r) = \{g \in \Gamma \mid |g| \leqslant r\}$, onde $|g|$ comprimento de palavra de $g \in \Gamma$. O grupo Γ tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant p$ se*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\#(U(r))}{r^p} > 0,$$

e Γ tem crescimento polinomial de ordem $\leqslant p$ se

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\#(U(r))}{r^p} < \infty.$$

Se ambas as equações acima ocorrem simultaneamente, Γ terá crescimento polinomial de ordem $= p$.

Definição 44. *Seja M^n variedade aberta e $\widetilde{M}$ seu recobrimento universal. Dizemos que o grupo das transformações de recobrimento Γ tem crescimento de órbita máxima se, e somente se, Γ tem crescimento de órbita polinomial de ordem $\geqslant n-1$, isto é,*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(\tilde{x}, r))}{r^{n-1}} > 0, \text{ para algum } \tilde{x} \in \widetilde{M}.$$

Para obter a propriedade de crescimento polinomial de um subgrupo finitamente gerado de $\pi_1(M)$, Milnor [18] utilizou essencialmente o crescimento da órbita como uma ponte:

Proposição 10 (Milnor, [18])**.** *Seja* X *um espaço métrico,* $x_0 \in X$*,* $\Gamma <$ *Isom*(X) *finitamente gerado, e* $S = \{g_1, \ldots, g_k\}$ *um conjunto de geradores simétricos de* Γ*. Ponha,*

$$U(r) = \{g \in \Gamma \mid \textit{o comprimento da palavra de } g \textit{ relacionado a } S, |g| \leqslant r\},$$

$$h = \max\{d(x_0, g_i x_0) \mid i = 1, \ldots, k\}.$$

Então, $U(r) \subset D^{\Gamma}(x_0, hr) = \{g \in \Gamma \mid d(x_0, gx_0) \leqslant hr\}$*. Especialmente, se* Γ *tem crescimento polinomial de ordem* $\geqslant p$ $(> p)$*, então* Γ *tem crescimento de órbita polinomial de ordem* $\geqslant p$ $(> p)$*.*

Demonstração. Se $g \in U(r)$, podemos escrever $g = g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_t}$, onde $t \leqslant r$, $g_{i_j} \in S$. Usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} d(x_0, gx_0) = d(x_0, g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_t} x_0) &\leqslant d(x_0, g_{i_1} x_0) + d(g_{i_1} x_0, g_{i_1} g_{i_2} x_0) \\ &\quad + \cdots + d(g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_{t-1}} x_0, g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_t} x_0). \end{aligned}$$

Como cada g_{i_j} é isometria, temos que

$$d(g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_{j-1}} x_0, g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_j} x_0) = d(x_0, g_{i_j} x_0) \leqslant h, \text{ para todo } j.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(x_0, gx_0) &\leqslant d(x_0, g_{i_1} x_0) + d(g_{i_1} x_0, g_{i_1} g_{i_2} x_0) + \cdots + d(g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_{t-1}} x_0, g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_t} x_0) \\ &\leqslant th \leqslant rh. \end{aligned}$$

Portanto, $U(r) \subset D^{\Gamma}(x_0, hr)$. Com isto, segue por definição, a última implicação.

□

Em seguida, vamos mostrar como o primeiro número de Betti de um espaço controla o crescimento polinomial de seu grupo fundamental. Da demonstração do Teorema 1.3 em [1], temos a seguinte proposição algébrica.

Proposição 11. *Seja* X *um espaço conexo por caminho,* $x_0 \in X$*. Se* $b_1(X) = k$*, então existe* $G < \pi_1(X, x_0)$ *tal que* G *é gerado por k elementos e* G *tem crescimento polinomial de ordem* $\geqslant k$*.*

Demonstração. Seja $h : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ o homomorfismo de Hurewicz. Desde que $b_1(X) = k$, podemos escolher $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in H_1(X)$ independentes. Como h é sobrejetiva (vide Teorema 7), podemos escolher $g_i \in h^{-1}(\gamma_i)$. Sejam

$$S_1 = \{g_1, \ldots, g_k, g_1^{-1}, \ldots, g_k^{-1}\},$$

$$S_2 = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_k^{-1}\},$$

$$G_i = \langle S_i \rangle \text{ para } i = 1, 2,$$

$$U_i(r) = \{g \in G_i \mid \text{o comprimento de palavra de } g \text{ relacionado a } S_i, |g| \leqslant r\}.$$

Para todo $r > 0$, seja

$$\begin{aligned} A_r : U_2(r) &\to U_1(r) \\ l_1\gamma_1 + \cdots + l_k\gamma_k &\longmapsto g_1^{l_1} g_2^{l_2} \cdots g_k^{l_k}. \end{aligned}$$

Veja que $h \circ A_r = Id$. De fato,

$$h \circ A_r \left(\sum_{i=1}^{k} l_i \gamma_i \right) = h(g_1^{l_1} g_2^{l_2} \cdots g_k^{l_k}) = h(g_1^{l_1}) + h(g_2^{l_2}) + \cdots + h(g_k^{l_k}) = l_1\gamma_1 + \cdots + l_k\gamma_k.$$

Donde segue que A_r é injetiva. Agora, note que $G_2 = \langle\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_k^{-1}\}\rangle$ tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant k$. Com efeito, sendo $H_1(X)$ abeliano (pois é isomorfo a $\pi_1(X, x_0)$ abelianizado) temos que $G_2 < H_1(X)$também é abeliano. Como $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ são independentes em G_2, então $\mathrm{rank}(G_2) = k$. Sendo G_2 grupo abeliano finitamente gerado, pelo Teorema 5, $G_2 = L \oplus T(G_2)$, com $L \simeq \mathbb{Z}^k$, onde $T(G_2) = \{g \in G_2 \mid \exists n \neq 0; n \cdot g = 0\}$. Logo, G_2 tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant k$, pois $\mathbb{Z}^k$ tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant k$. Por fim, pela injetividade de A_r, segue que

$$\#U_2(r) = \#A_r(U_2(r)) \leqslant \#U_1(r),$$

implicando que G_1 tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant k$. Portanto, tomando $G = G_1$, segue o resultado. □

Similarmente, temos

Proposição 12. *Se G é um grupo quase nilpotente finitamente gerado com $\mathrm{rank}(G) = k$, então G tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant k$.*

Demonstração. Observe que se um subgrupo finitamente gerado Γ de um grupo A tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant k$, então

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\#U^\Gamma(r)}{r^k} > 0,$$

onde $U^\Gamma(r) = \{g \in \Gamma; |g| \leqslant r\}$. Veja que $U^\Gamma(r) \subset U(r)$ e assim, $\#U^\Gamma(r) \leqslant \#U(r)$, donde

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\#U(r)}{r^k} > 0.$$

Portanto, A tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant k$.

Agora, as hipóteses sobre G implicam que existe um subgrupo K de G nilpotente finitamente gerado com índice finito, e que, pelo Teorema 3, K é quase livre de torção. Ademais, por definição, existe um subgrupo H de K, nilpotente finitamente gerado livre de torção com índice finito. Então, H tem $\mathrm{rank}(H) = k$ (vide Lema 1). Pela observação feita no início, para concluir a demonstração é suficiente provar que H tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant k$. Para este fim, usando os Teoremas 3 e 4, existe uma série normal

$$H = H_k \rhd H_{k-1} \rhd \cdots \rhd H_0 = \{e\},$$

tal que cada H_i/H_{i-1} é isomorfo a $\mathbb{Z}$. Denote por $[h_i] = h_i H_{i-1}$ um gerador de H_i/H_{i-1}. Veja que

$$\begin{aligned} I : \mathbb{Z}^k &\to H \\ (l_1, \ldots, l_k) &\longmapsto h_1^{l_1} \cdots h_k^{l_k} \end{aligned}$$

é injetiva. De fato, se $I(l_1, \ldots, l_k) = I(m_1, \ldots, m_k)$ então $h_1^{l_1} \cdots h_k^{l_k} = h_1^{m_1} \cdots h_k^{m_k}$. Note que $h_1, \ldots h_k \in H_{k-1}$, e assim $h_1^{l_1} \cdots h_k^{l_k}$ e $h_1^{m_1} \cdots h_k^{m_k}$ pertencem a H_{k-1}. Olhando para H/H_{k-1}, temos que

$$[h_k^{l_k}] = [h_1^{l_1} \cdots h_{k-1}^{l_{k-1}} h_k^{l_k}] = [h_1^{m_1} \cdots h_{k-1}^{m_{k-1}} h_k^{m_k}] = [h_k^{m_k}].$$

Como H/H_{k-1} é isomorfo a $\mathbb{Z}$, segue que $l_k = m_k$. Agora, removemos $h_k^{l_k}$ e $h_k^{m_k}$ na igualdade e repetimos o mesmo argumento para H_{k-1}/H_{k-2} para concluir que $l_{k-1} = m_{k-1}$. Prosseguindo recursivamente, temos que $l_i = m_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e assim I é injetiva.

Finalmente se escolhermos um conjunto finito de geradores de H contendo $h_1, \ldots h_k$, então o fato de I ser injetiva implica que H tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant k$ com respeito ao conjunto destes geradores, pois $\mathbb{Z}^k$ tem crescimento pollinomial de ordem $\geqslant k$. Isto conclui a prova. $\square$

Agora, vamos estudar o crescimento da órbita de variedades planas abertas.

Lema 6. *Seja* (X, d) *um espaço métrico e seja* $H < \mathrm{Isom}(X)$*. Seja* $K < H$ *com índice finito. Se* K *tem crescimento de órbita polinomial de ordem* $\leqslant k$*, então* H *também tem crescimento de órbita polinomial de ordem* $\leqslant k$*.*

Demonstração. Escreva H como uma união disjunta de classes laterais à esquerda, i.e.,

$$H = \bigsqcup_{i=1}^{k} h_i K.$$

Fixe um $x_0 \in X$. Seja $r_0 = \max\{d(x_0, h_i x_0);\ i = 1, \ldots, l\}$. Se $h = h_j b \in D^H(x_0, r) = \{g \in H \mid d(x_0, gx_0) \leqslant r\}$ para algum $b \in K$, então

$$d(bx_0, x_0) \leqslant d(bx_0, h_j^{-1}x_0) + d(h_j^{-1}x_0, x_0) \leqslant r + r_0,$$

pois $d(h_j^{-1}x_0, x_0) \leqslant r_0$ e $h_j b \in D^H(x_0, r)$, uma vez que, sendo h_j isometria de X,

$$r \geqslant d(x_0, h_j b x_0) = d(h_j^{-1}x_0, bx_0).$$

Logo, $b \in D^K(x_0, r + r_0)$. Então, dado $h \in H$, escrevemos $h = h_j b$ para algum $j = 1, \ldots, i$ e $b \in K$, e assim segue que

$$\# D^H(x_0, r) \leqslant l \cdot \# D^K(x_0, r + r_0).$$

Donde segue o resultado. □

Para o que segue, precisamos de um conceito fundamental em geometria, que é o conceito de alma de uma variedade.

Uma subvariedade $S \subset M^n$ é **totalmente convexa** se para todos $x, y \in S$ e qualquer geodésica γ ligando x e y tem-se $\gamma \subset S$. Dizemos que S é **totalmente geodésica** se a sua segunda forma fundamental é nula ou equivalentemente se toda geodésica de S também é geodésica de M.

Definição 45 (Alma de uma variedade)**.** *Dada* M^n *variedade riemanianna não compacta, dizemos que uma subvariedade* S *de* M *é uma alma se* S *é fechada, totalmente convexa e totalmente geodésica tal que* M *é difeomorfa ao fibrado normal de* S*.*

Com esta definição, podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 10 (Teorema da Alma, [6])**.** *Se M é uma variedade aberta com curvatura seccional não negativa, então M contém uma alma S.*

Para uma demonstração veja o Teorema 1.11 de [6].

Para o próximo resultado iremos fazer o uso do seguinte teorema (veja [23]).

Teorema 11 (Sharafutdinov, [23])**.** *Seja M^n variedade Riemanniana aberta com $n \geqslant 2$ e curvatura seccional não negativa. Então, para qualquer alma S de M existe uma retração por deformação forte de M para S que não aumenta a distância.*

Para uma prova veja Teorema 2.3 de [23].

Proposição 13. *Seja M^n variedade plana aberta. Seja $\pi : \mathbb{R}^n \to M$ o recobrimento universal, com o grupo das transformações de recobrimento Γ. Então,*

(i) Γ tem crescimento de órbita polinomial de ordem $\geqslant k$ e $\leqslant k$, onde k é a dimensão da alma S de M.

(ii) Se $\mathbb{T}^{n-1}$ é uma alma de M, então M é difeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}$ ou $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{T}^{n-2}$ (onde $\mathbb{M}^2$ é a faixa de Mobius aberta). No primeiro caso, M é isométrica a $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}$.

Demonstração. Para provar (i), denote a retração de Sharafutdinov por $r : M \to S$, a qual é uma retração de deformação forte que não aumenta distâncias (veja que tal aplicação existe pelo Teorema 11). Escolha um ponto base $x_0 \in S$ e seja $\iota : S \hookrightarrow M$ a inclusão. Pode-se assumir que $(0, 0, \ldots, 0) := 0^n \in \pi^{-1}(x_0)$ e por $\iota_* : \pi_1(S, x_0) \to \pi_1(M, x_0)$, faremos a identificação $\pi_1(M, x_0) = \pi_1(S, x_0)$.

As propriedades de S e r garantem os seguintes fatos:

(a) $\pi^{-1}(S)$ com a métrica induzida é totalmente geodésica em $\mathbb{R}^n$ e $\pi|_{\pi^{-1}(S)} : (\pi^{-1}(S), 0^n) \to (S, x_0)$ é o recobrimento universal Riemanniano de S. Portanto, $\pi^{-1}(S)$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k.

(b) Para todo $\gamma \in \pi_1(S, x_0)$, $y \in \pi^{-1}(S)$, $\gamma \cdot y = \iota_*(\gamma) \cdot y$, onde ambas as transformações de recobrimento são determinados pelo ponto base 0^n.

Para provar (a), veja que $\pi^{-1}(S)$ é totalmente geodésica. Com efeito, seja $p \in \pi^{-1}(S)$ e $\bar{\gamma}$ uma geodésica partindo de p. Numa vizinhança V de p, π é isometria, logo, em V, $\pi \circ \bar{\gamma}$ é uma geodésica em S partindo de $\pi(p)$. Sendo S totalmente geodésica, tem-se que $\pi \circ \bar{\gamma}$ é geodésica em M. Portanto, como localmente, π^{-1} é isometria, segue que $\bar{\gamma}$ é geodésica em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\pi^{-1}(S)$ é totalmente geodésica.

Agora, vamos verificar que $\pi|_{\pi^{-1}(S)}$ é uma aplicação de recobrimento. De fato, temos que π é sobrejetiva e contínua, e em particular, $\pi|_{\pi^{-1}(S)}$ também o é.
Todo ponto de S tem uma vizinhança uniformemente coberta por $\pi|_{\pi^{-1}(S)}$. De fato, como π é uma aplicação de recobrimento, então existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M, onde cada U_α é uniformemente coberto por π, ou seja, $\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{i \in A} V_\alpha^i$, sendo $\pi : V_\alpha^i \to U_\alpha$ um homeomorfismo para todo $i \in A$. Veja que $\{U_\alpha \cap S\}$ é uma cobertura aberta de S. Para cada α,

$$\pi^{-1}(U_\alpha \cap S) = \pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(S) = \bigsqcup_{i \in A} (V_\alpha^i \cap \pi^{-1}(S)),$$

e $\pi : V_\alpha^i \cap \pi^{-1}(S) \to \pi(V_\alpha^i \cap \pi^{-1}(S))$ é homeomorfismo, por ser a restrição de $\pi : V_\alpha^i \to U_\alpha$. Também observe que $\pi(V_\alpha^i \cap \pi^{-1}(S)) = U_\alpha \cap S$, pois π é bijeção em $V_\alpha^i \cap \pi^{-1}(S)$. Portanto, $U_\alpha \cap S$ é uniformemente coberta por π. Finalmente, veja que $\pi^{-1}(S)$ é conexo e localmente conexo por caminho. De fato, basta mostrar que existe uma retração de $\mathbb{R}^n$ para $\pi^{-1}(S)$, assim, seja $\tilde{r} : \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(S)$ o levantamento de $r \circ \pi|_{\pi^{-1}(S)}$. Como r é retração por deformação forte, existe uma homotopia $H : M \times [0,1] \to M$ tal que

$$H(x,0) = x, \text{ para todo } x \in M;$$

$$H(x,1) \in S \text{ para todo } x \in M;$$

$$H(a,1) = a, \text{ para todo } a \in S.$$

$$H(a,t) = a, \text{ para todo } a \in S \text{ e para todo } t \in [0,1].$$

Daí, existe $\widetilde{H} : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ levantamento de $H \circ (\pi \times Id_{[0,1]})$ tal que $\widetilde{H}(x,0) = x$. Logo,

$$\widetilde{H}(x,0) = x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos $\pi(\widetilde{H}(x,1)) = H(\pi(x),1) \in S$, pois $\pi(x) \in M$, assim $\widetilde{H}(x,1) \in \pi^{-1}(S)$ e sendo x arbitrário, segue que

$$\widetilde{H}(x,1) \in \pi^{-1}(S), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Por fim, dados $x \in \pi^{-1}(S)$ e $t \in [0,1]$, temos $\pi(\widetilde{H}(x,t)) = H(\pi(x),t) = \pi(x)$, pois $\pi(x) \in S$. Logo, $\widetilde{H}(x,[0,1]) \subset \pi^{-1}(\pi(x))$, para cada $x \in \pi^{-1}(S)$. Veja que $\widetilde{H}(x,[0,1])$ é conexo e $\pi^{-1}(\pi(x))$ é discreto (já que π é aplicação de recobrimento), então $\widetilde{H}(x,[0,1])$ é um único ponto. Assim,

$$\widetilde{H}(x,t)=x, \text{ para todo } t\in[0,1] \text{ e para todo } x\in\pi^{-1}(S).$$

Portanto, $\tilde{r}$ é uma retração por deformação forte, e segue (a).

O item (b), segue da identificação feita anteriormente.

Agora, veja que $\pi_1(S,x_0)=\pi_1(M,x_0)\simeq\Gamma$. Com isso, vamos mostrar que Γ é discreto e por conseguinte $\pi_1(S)$ também o é. Com efeito, se Γ não fosse discreto, existiria $(f_i)\subset\Gamma$ tal que $f_i\to f\in\Gamma$ e $f_i\neq \mathrm{Id}$. Logo, para qualquer compacto $K\subset\mathbb{R}^n$, existem infinitos f_i tais que $f_i(K)\cap f(K)\neq\emptyset$, um absurdo, já que Γ age propriamente descontínua em $\mathbb{R}^n$. Além disso, sendo $\pi|_{\pi^{-1}(S)}$ recobrimento universal, pela Proposição 4.3 do capítulo 8 de [8], temos

$$S\cong\pi^{-1}(S)/\pi_1(S,x_0)=\mathbb{R}^k/\pi_1(S,x_0).$$

Logo, pela compacidade de S e a Proposição 1.9 de [25], temos que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^k)/\pi_1(S,x_0)$ é compacto. Assim, $\pi_1(S,x_0)$ é um grupo cristalográfico e, pelo Teorema 6, o conjunto das translações $\pi_1(S,x_0)\cap(I\times\mathbb{R}^k)$ tem índice finito, o qual é isomorfo a $\mathbb{Z}^k$ (pois, ainda pelo Teorema 6, $\pi_1(S,x_0)\cap(I\times\mathbb{R}^k)$ é grupo abeliano finitamente gerado de posto k e livre de torção, daí, pelo Teorema 5, segue que $\pi_1(S,x_0)\cap(I\times\mathbb{R}^k)\simeq\mathbb{Z}^k$).

Pelo fato (b), $\iota_*(\mathbb{Z}^k)<\Gamma$ tem crescimento de órbita polinomial de ordem $\leqslant k$ e $\geqslant k$ (já que $\mathbb{Z}^k$ tem o mesmo crescimento). Então, segue que Γ tem crescimento de órbita polinomial de ordem $\geqslant k$ pelo argumento na demonstração da Proposição 12. Pelo Lema 6, temos que Γ tem crescimento de órbita polinomial de ordem $\leqslant k$, e o item (i) está provado.

Para provar o item (ii), temos por hipótese que $S=\mathbb{T}^{n-1}$, logo, $\pi_1(M,x_0)=\pi_1(S,x_0)\simeq\mathbb{Z}^{n-1}$. Desde que todo $\gamma\in\mathbb{Z}^{n-1}$ age em $\mathbb{R}^n$ por isometria (isso porque Γ age isometricamente em $\mathbb{R}^n$ e $\pi_1(M,x_0)\simeq\Gamma$), podemos escrever

$$\gamma=(A_\gamma,v_\gamma)\in O(n)\ltimes\mathbb{R}^n,$$

onde A_γ é uma aplicação ortogonal e v_γ é uma translação. Ponhamos $\Lambda=\pi^{-1}(S)$. Pelo item (a) visto em (i), podemos identificar Λ com $\mathbb{R}^{n-1}$ e como $\mathbb{Z}^{n-1}$ age em Λ por translações, para cada $y\in\Lambda$ e para todo $\gamma\in\pi_1(S,x_0)$, temos

$$\gamma\cdot y=y+v_\gamma.$$

Por outro lado, cada $\iota_*(\gamma)$ age em $\mathbb{R}^n$ como isometria, ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\iota_*(\gamma) \cdot x = A_\gamma \cdot x + v_\gamma.$$

Restringindo-se a Λ e usando o item (b) visto em (i) (que nos diz que as ações de $\iota_*(\gamma)$ e γ coincidem em Λ), temos

$$A_\gamma \cdot y + v_\gamma = \iota_*(\gamma) \cdot y = \gamma \cdot y = y + v_\gamma, \quad y \in \Lambda,$$

implicando que $A_\gamma|_\Lambda \cdot y = y$, para todo $y \in \Lambda$. Assim, $A_\gamma\big|_\Lambda = \mathrm{Id}$ para todo $\gamma \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

Por (a), Λ é subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n-1$ (onde $\Lambda \simeq \mathbb{R}^{n-1}$), logo podemos escrever $\mathbb{R}^n = \Lambda \oplus \Lambda^\perp$, onde $\Lambda^\perp$ é o complemento ortogonal de Λ. Então, $\Lambda^\perp$ é um subespaço invariante 1-dimensional para cada A_γ, ou seja, para cada A_γ, $A_\gamma(w) \in \Lambda^\perp$ para todo $w \in \Lambda^\perp$. De fato, dados A_γ e $w \in \Lambda^\perp$, para todo $v \in \Lambda$, tem-se

$$\langle A_\gamma(w), v\rangle = \langle A_\gamma(w), A_\gamma(v)\rangle = \langle w, v\rangle = 0.$$

Portanto, $A_\gamma(w) \in \Lambda^\perp$. Como $\Lambda^\perp \simeq \mathbb{R}$, então para cada γ, $A_\gamma|_{\Lambda^\perp}$ é uma reflexão ou a identidade. Com efeito, em dimensão 1, qualquer aplicação linear é da forma $f(x) = ax$ com $a \in \mathbb{R}$ uma constante. Supondo f ortogonal, temos que $|f(x)| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$|x| = |f(x)| = |ax| = |a||x|,$$

donde devemos ter $|a| = 1$, ou seja, $a = 1$ ou $a = -1$. Assim, para $a = 1$ temos a identidade e para $a = -1$ temos uma reflexão.

Sejam $e_1 = (1, \ldots, 0), \ldots, e_{n-1} = (0, \ldots, 1)$ os geradores canônicos de $\mathbb{Z}^{n-1}$. Escreva $e_i = (A_i, v_i)$, e com isto, temos duas situações a analizar.

Primeiramente, se todos os A_i são a identidade em $\Lambda^\perp$, então

$$e_i \cdot x = (A_i, v_i) \cdot x = A_i x + v_i = x + v_i.$$

Logo, dado $\gamma \in \Gamma$, pondo $\gamma = (m_1, \ldots, m_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ e $(t, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, temos

$$(m_1, \ldots, m_{n-1}) \cdot (t, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (t, x_1 + m_1, \ldots, x_{n-1} + m_{n-1}).$$

Assim, a ação de $\mathbb{Z}^{n-1}$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ é da forma $\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x, y) = \{(x, \gamma \cdot y);\ \gamma \in \mathbb{Z}^{n-1}\}$, e, temos o seguinte isomorfismo $\varphi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})/\mathbb{Z}^{n-1} \to \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1})$ dado por

$$\varphi(\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x, y)) = (x, \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y).$$

De fato, veja que φ não depende do representante (x, y) escolhido para a classe $\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x, y)$. Se (x', y') é outro representante da mesma classe, existe $\gamma \in \mathbb{Z}^{n-1}$ tal que $(x', y') = \gamma \cdot (x, y) = (x, \gamma \cdot y)$. Logo,

$$\varphi(\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x', y')) = (x', \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y') = (x, \mathbb{Z}^{n-1} \cdot (\gamma \cdot y)) = (x, \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y) = \varphi(\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x, y)).$$

Logo, não depende da classe. Além disso, para quaisquer classes em $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})/\mathbb{Z}^{n-1}$, tem-se

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x, y) \cdot \mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x', y')) &= \varphi(\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x, y) \cdot (x', y')) = \varphi(\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x \cdot x', y \cdot y')) \\ &= (x \cdot x', \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y \cdot y') = (x \cdot x', \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y \cdot \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y') \\ &= (x, \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y) \cdot (x', \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y') \\ &= \varphi(\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x, y)) \cdot \varphi(\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x', y')).\end{aligned}$$

Assim, φ é um homomorfismo. Para a sobrejetividade, seja $(x, \mathbb{Z}^{n-1} \cdot x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1})$, então o elemento $\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x, y)$ em $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})/\mathbb{Z}^{n-1}$ é uma pré-imagem, pois $\varphi(\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x, y)) = (x, \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y)$. Finalmente, veja que φ é injetiva, pois se $\varphi(\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x, y)) = \varphi(\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x', y'))$ então $(x, \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y) = (x', \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y')$. Logo, $x = x'$ e $\mathbb{Z}^{n-1} \cdot y = \mathbb{Z}^{n-1} \cdot y'$. A segunda igualdade implica que existe $\gamma \in \mathbb{Z}^{n-1}$ tal que $y' = \gamma \cdot y$ e assim $(x', y') = (x, \gamma \cdot y) = \gamma \cdot (x, y)$. Portanto, (x, y) e (x', y') pertencem a mesma classe, ou seja, $\mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x, y) = \mathbb{Z}^{n-1} \cdot (x', y')$. Portanto, φ é um isomorfismo.

Com isto, temos a seguinte identificação,

$$M \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^{n-1} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})/\mathbb{Z}^{n-1} \simeq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1}) = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1},$$

onde aqui "$\cong$"indica uma isometria entre os espaços M e $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^{n-1}$ (vide Proposição 4.3 do capítulo 8 de [8]).

Por outro lado, para a segunda situação, sem perda de generalidade, assuma que $A_1, \ldots, A_l$ são reflexões em $\Lambda^\perp$ e $A_{l+1}, \ldots, A_{n-1}$ são a identidade em $\Lambda^\perp$. Como $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ é base de $\mathbb{Z}^{n-1}$, temos que

$$f_1 = e_1, f_2 = e_2 - e_1, \ldots, f_l = e_l - e_1, f_{l+1} = e_{l+1}, \ldots, f_{n-1} = e_{n-1},$$

também é base de $\mathbb{Z}^{n-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}\Gamma &= \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \\ &= \langle e_1, e_2 - e_1, \ldots, e_l - e_1, e_{l+1}, \ldots, e_{n-1} \rangle.\end{aligned}$$

Agora, observe que $(A_\gamma, v_\gamma)^{-1} = (A_\gamma^{-1}, -A_\gamma^{-1}v_\gamma)$. Com efeito, $(A_\gamma, v_\gamma)(B_\gamma, w_\gamma) = (e, e)$ se, e somente se, $A_\gamma B_\gamma = e$ e $A_\gamma(w_\gamma) + v_\gamma = e$, donde $B_\gamma = A_\gamma^{-1}$ e $w_\gamma = -A_\gamma^{-1}v_\gamma$. Com isto,

$$
\begin{aligned}
f_2 = e_2 - e_1 &= (A_2, v_2) - (A_1, v_1) = (A_2, v_2)(A_1, v_1)^{-1} = (A_2, v_2)(A_1^{-1}, -A_1^{-1}v_1) \\
&= (A_2A_1^{-1}, -A_2A_1^{-1}v_1 + v_2).
\end{aligned}
$$

Uma vez que A_1 é uma reflexão em $\Lambda^\perp$, temos que $A_1A_1 = \mathrm{Id}$, e assim

$$A_1 = A_1\mathrm{Id} = A_1(A_1A_1^{-1}) = (A_1A_1)A_1^{-1} = \mathrm{Id}A_1^{-1} = A_1^{-1}.$$

Além disso, para todo $i = 1, \dots, l$, $A_i|_{\Lambda^\perp} = -\mathrm{Id}$ daí, $A_2A_1^{-1}|_{\Lambda^\perp} = A_2A_1|_{\Lambda^\perp} = \mathrm{Id}$. Isto juntamente com o fato de que para cada i, $A_i = \mathrm{Id}$ em Λ, temos que $f_2 = (\mathrm{Id}, v_2 - v_1)$ e de forma análoga, temos que $f_3 = (\mathrm{Id}, v_3 - v_1), \dots, f_l = (\mathrm{Id}, v_l - v_1)$. Portanto,

$$\Gamma = \langle (A_1, v_1), (\mathrm{Id}, v_2 - v_1), \dots, (\mathrm{Id}, v_l - v_1), (\mathrm{Id}, v_{l+1}), \dots, (\mathrm{Id}, v_{n-1}) \rangle,$$

pois $A_{l+1}, \dots, A_{n-1}$ são aplicações identidade em $\mathbb{R}^n$.

Considere, $\mathbb{R}^2 = \Lambda^\perp \oplus \mathsf{SPAN}\{v_1\}$ e $\mathbb{R}^{n-2}$ seu complemento ortogonal gerado por $\{v_2 - v_1, \dots, v_l - v_1, v_{l+1}, \dots, v_{n-1}\}$. Se $x \in \mathbb{R}^n$, então $x = (x^1, x^2)$, onde $x^1 \in \mathbb{R}^2$ e $x^2 \in \mathbb{R}^{n-2}$. Com isto, observe que $v_1 = (v_1^1, v_1^2)$ é tal que $v_1^2 = 0$, logo, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se

$$f_1(x, y) = A_1(x, y) + v_1 = (x + v_1^1, v_1^2 - y),$$

pois $A_1|_{\Lambda^\perp} = -\mathrm{Id}$ e $A_1|_\Lambda = \mathrm{Id}$. Além disso, $A_1|_\Lambda = \mathrm{Id}$ onde $\Lambda \simeq \mathbb{R}^{n-1}$, logo, sendo $v_1^2 = 0$ segue que $f_1|_{\mathbb{R}^{n-2}} = \mathrm{Id}$ (ou seja, a ação de f_1 em $\mathbb{R}^{n-2}$ é trivial). Agora, note que $f_2, \dots, f_{n-1}$ agem trivialmente em $\mathbb{R}^2$. Com efeito, a coordenada ortogonal, i.e, a coordenada da aplicação ortogonal, de cada f_i para $i = 2, \dots, n-1$ é a identidade e sendo $v_2 - v_1, \dots, v_l - v_1, v_{l+1}, \dots, v_{n-1}$ vetores em $\mathbb{R}^{n-2}$, as coordenadas destes em $\mathbb{R}^2$ são nulas. É claro que $f_2, \dots, f_{n-1}$ agem por translações em $\mathbb{R}^{n-2}$, pois cada f_i, $i = 1, \dots, n-1$, é da forma (Id, w_i). Portanto, como feito anteriormente, obtemos

$$
\begin{aligned}
M &\cong \mathbb{R}^n/\Gamma \\
&= (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2})/\langle (A_1, v_1), (\mathrm{Id}, v_2 - v_1), \dots, (\mathrm{Id}, v_l - v_1), (\mathrm{Id}, v_{l+1}), \dots, (\mathrm{Id}, v_{n-1}) \rangle \\
&\simeq (\mathbb{R}^2/\langle (A_1, v_1) \rangle) \times (\mathbb{R}^{n-2})/\langle (\mathrm{Id}, v_2 - v_1), \dots, (\mathrm{Id}, v_l - v_1), (\mathrm{Id}, v_{l+1}), \dots, (\mathrm{Id}, v_{n-1}) \rangle \\
&= \mathbb{M}^2 \times \mathbb{T}^{n-2}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Observe que pela Proposição 10 sabemos que, para um grupo das transformações de recobrimento Γ, crescimento polinomial de ordem $\geqslant k$ ($> k$) implica crescimento de órbita polinomial de ordem $\geqslant k$ ($> k$). Em [1], foi provado a seguinte desigualdade para Γ com crescimento de volume polinomial de ordem $\geqslant k$.

$$\#U(r)\cdot \mathrm{Vol}(B_r(x_0)) \leqslant \mathrm{Vol}(B_{cr}(\bar{x}_0)).$$

O próximo resultado é uma versão de órbita para a desigualdade acima.

Teorema 12. *Seja* M^m *uma variedade Riemanniana completa. Seja* $\pi : (\widetilde{M}, \bar{x}_0) \to (M, x_0)$ *um recobrimento normal com o grupo das transformações de recobrimento* Γ*. Então, para todo* $r > 0$*, tem-se*

$$\#(D^\Gamma(\bar{x}_0, 2r)\cdot \mathrm{Vol}(B_r(x_0)) \geqslant \mathrm{Vol}(B_r(\bar{x}_0)), \tag{3.1}$$

$$\#(D^\Gamma(\bar{x}_0, r)\cdot \mathrm{Vol}(B_r(x_0)) \leqslant \mathrm{Vol}(B_{2r}(\bar{x}_0)). \tag{3.2}$$

Demonstração. Para provarmos (3.1), usaremos a noção de domínio de Dirichlet como em [1]. Para todo $g \in \Gamma$, ponha

$$D_g = \{x \in \widetilde{M} \mid d(x, \bar{x}_0) < d(x, g\bar{x}_0)\}.$$

Defina o domínio de Dirichlet F associado a $\bar{x}_0$ por

$$F = \bigcap_{g\in\Gamma, g\neq e} D_g.$$

Então F é um domínio fundamental por ação de Γ. De fato, para ver isto, basta verificar que

$$gF \cap hF = \emptyset \text{ para todo } g \neq h \quad \text{e} \quad \widetilde{M} = \bigcup_{g\in\Gamma} g\overline{F},$$

onde $\overline{F}$ é o fecho de F. Primeiro, suponha que existe $x \in gF \cap hF$ com $g \neq h$. Então, $g^{-1}x, h^{-1}x \in F$ e por definição, para todo $k \in \Gamma, k \neq e$, temos

$$d(g^{-1}x, \bar{x}_0) < d(g^{-1}x, k\bar{x}_0) \quad \text{e} \quad d(h^{-1}x, \bar{x}_0) < d(h^{-1}x, k\bar{x}_0).$$

Assim, tomando $k = hg^{-1}$ (o qual é diferente de e já que $h \neq g$) e usando Observação 2 ($\Gamma < \mathrm{Isom}(\widetilde{M})$), tem-se

$$d(x, g\bar{x}_0) = d(g^{-1}x, \bar{x}_0) < d(g^{-1}x, (hg^{-1})\bar{x}_0) = d(x, h\bar{x}_0).$$

De maneira análoga, tomando $k = h^{-1}g$, tem-se

$$d(x, h\bar{x}_0) = d(h^{-1}x, \bar{x}_0) < d(h^{-1}x, (h^{-1}g)\bar{x}_0) = d(x, g\bar{x}_0).$$

Donde, $d(x, g\bar{x}_0) < d(x, h\bar{x}_0) < d(x, g\bar{x}_0)$, o que é uma contradição, e assim, segue que $gF \cap hF = \emptyset$ para todo $g \neq h$. Além disso, é claro que

$$\bigcup_{g\in\Gamma} g\overline{F} \subset \widetilde{M},$$

já que

$$\overline{F} = \bigcap_{g\in\Gamma, g\neq e} \overline{\{x \in \widetilde{M} \mid d(x, \bar{x}_0) \leqslant d(x, g\bar{x}_0)\}} \subset \widetilde{M} \quad \text{e} \quad g : \widetilde{M} \to \widetilde{M}.$$

Por outro lado, seja $x \in \widetilde{M}$. Como Γ age (propriamente descontínua) em $\widetilde{M}$, então o conjunto $\Gamma \cdot \bar{x}_0 = \{g\bar{x}_0 \mid g \in \Gamma\}$ é discreto. Com efeito, por definição, existe $U_{\bar{x}_0}$ vizinhança de $\bar{x}_0$ tal que $U_{\bar{x}_0} \cap g(U_{\bar{x}_0}) = \emptyset$ para todo $g \neq e$. Seja $\phi(U_{\bar{x}_0})$ uma vizinhança de $\phi\bar{x}_0$ onde $\phi \in \Gamma$. Se $h \in \Gamma$ é tal que $h\bar{x}_0 \in \phi(U_{\bar{x}_0})$, então $\phi^{-1}h\bar{x}_0 \in U_{\bar{x}_0}$ e por Γ agir propriamente descontínua em $\widetilde{M}$, segue que $\phi^{-1}h = e$, ou seja, $\phi = h$ e portanto, $\phi(U_{\bar{x}_0}) \cap \Gamma \cdot \bar{x}_0 = \{\phi \cdot \bar{x}_0\}$. Logo, $\Gamma \cdot \bar{x}_0$ é discreto.

Assim, o conjunto $\{d(x, g\bar{x}_0);\ g \in \Gamma\}$ atinge seu mínimo, e daí, existe $g_0 \in \Gamma$ tal que $d(x, g_0\bar{x}_0) \leqslant d(x, g\bar{x}_0)$ para todo $g \in \Gamma$. Implicando que $d(g_0^{-1}x, \bar{x}_0) \leqslant d(g_0^{-1}x, (g_0^{-1}g)\bar{x}_0)$ para todo $g \in \Gamma$. Ou seja, $g_0^{-1}x \in \overline{F}$ e então $x \in g_0\overline{F}$. Sendo x arbitrário, segue que $\widetilde{M} \subset \bigcup_{g\in\Gamma} g\overline{F}$. Portanto, F é um domínio fundamental por ação de Γ.

Agora, sejam $B_r(\bar{x}_0)$ e $B_r(x_0)$ bolas geodésicas. Então,

$$\pi(B_r(\bar{x}_0) \cap \overline{F}) = B_r(x_0), \quad x_0 = \pi(\bar{x}_0), \tag{3.3}$$

$$\partial F = \overline{F} \setminus F \text{ tem medida Riemanniana nula em } \widetilde{M}, \tag{3.4}$$

$$\mathsf{Vol}(B_r(\bar{x}_0) \cap F) = \mathsf{Vol}(B_r(x_0)). \tag{3.5}$$

De fato, para ver (3.3), seja $\gamma : [0,1] \to M$ uma geodésica minimizante com $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ e $L(\gamma) \leqslant r$ (i.e, $x_1 \in B_r(x_0)$). Seja $\overline{\gamma}$ o único levantamento de γ a $\widetilde{M}$ com $\overline{\gamma}(0) = \bar{x}_0$, ou seja, temos que $\pi \circ \overline{\gamma} = \gamma$, donde temos que $d\pi_{\overline{\gamma}(t)} \circ \overline{\gamma}'(t) = \gamma'(t)$. Com isso, como π é isometria local, tem-se

$$L(\overline{\gamma}) = \int_0^1 |\overline{\gamma}'(t)|\, dt = \int_0^1 |d\pi_{\overline{\gamma}(t)} \circ \overline{\gamma}'(t)|\, dt = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt = L(\gamma).$$

Por propriedades de levantamento, $\bar{x}_1 = \overline{\gamma}(1)$ é um levantamento de x_1 em $B_r(\bar{x}_0)$ e existe um levantamento x_1' de x_1 com $x_1' \in \overline{F}$. Como o recobrimento é normal, existe $g_1 \in \Gamma$ tal que $\bar{x}_1 = g_1 x_1'$. Logo,

$$r \geqslant L(\overline{\gamma}) = d(\bar{x}_1, \bar{x}_0) = d(g_1 x_1', \bar{x}_0) = d(x_1', g_1^{-1}\bar{x}_0) \geqslant d(x_1', \bar{x}_0).$$

Assim, $x_1' \in B_r(\bar{x}_0) \cap \overline{F}$ é um levantamento de x_1, ou seja, $\pi(x_1') = x_1$, donde segue (3.3).

A equação (3.4) segue do seguinte fato:

$$\partial F \subset \bigcup_{g \in \Gamma} \partial D_g, \text{ onde } \partial D_g \text{ tem medida nula.}$$

Primeiramente, note que tal união é enumerável. Isso segue do fato de Γ ser isomorfo a $\pi_1(M, x_0)/\pi_*\pi_1(\widetilde{M}, \bar{x}_0)$ o qual é enumerável, pois $\pi_1(M, x_0)$ também o é. (veja Teorema 7.21, [13]). Agora, dado $g \neq e$, considere $f : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, \bar{x}_0 - g\bar{x}_0)$ a qual é suave em $\widetilde{M} \setminus \mathrm{Cut}(\bar{x}_0 - g\bar{x}_0)$ (vide Corolário 3.10 de [21]). Além disso, considerando uma geodésica normalizada partindo de $\bar{x}_0 - g\bar{x}_0$, temos (pela Proposição 3.11 de [21])

$$|\mathrm{grad}\ f| = |\mathrm{grad}\ d(\cdot, \bar{x}_0 - g\bar{x}_0)| = 1.$$

Ou seja, $\mathrm{grad}\ f$ não é nulo, donde 0 é valor regular de f restrita a $\widetilde{M} \setminus \mathrm{Cut}(\bar{x}_0 - g\bar{x}_0)$. Pelo Corolário 5.14 de [14], $f^{-1}(0) \cap (\widetilde{M} \setminus \mathrm{Cut}(\bar{x}_0 - g\bar{x}_0))$ é uma subvariedade regular de dimensão $m - 1$, onde $f^{-1}(0) = \partial D_g$. Como,

$$\partial D_g \subset [f^{-1}(0) \cap \widetilde{M} \setminus \mathrm{Cut}(\bar{x}_0 - g\bar{x}_0)] \cup \mathrm{Cut}(\bar{x}_0 - g\bar{x}_0),$$

onde $f^{-1}(0) \cap \widetilde{M} \setminus \mathrm{Cut}(\bar{x}_0 - g\bar{x}_0)$ e $\mathrm{Cut}(\bar{x}_0 - g\bar{x}_0)$ possuem medida nula pois um é subvariedade com dimensão menor que a dimensão de $\widetilde{M}$ e o outro é o cut locus, segue que ∂D_g tem medida nula para qualquer $g \in \Gamma$, provando (3.4).

Para provar (3.5), veja que π restrita a F é injetiva, pois dados $p, q \in F$ quaisquer com $\pi(p) = \pi(q)$, e sendo π é um recobrimento normal, existe $h \in \Gamma$ tal que $q = hp$. Suponha que $h \neq e$, daí, pela definição de F e por h ser uma isometria, temos

$$d(p, \bar{x}_0) < d(p, h^{-1}\bar{x}_0) \Rightarrow d(hp, h\bar{x}_0) < d(hp, \bar{x}_0),$$

ou seja, $d(q, \bar{x}_0) < d(q, h\bar{x}_0) < d(q, \bar{x}_0)$, o que é uma contradição, logo, $p = q$. A injetividade de π em F juntamente com o fato de π ser isometria local, implica que π é isometria em $B_r(\bar{x}_0) \cap F$, donde $d\pi$ é uma aplicação ortogonal em $B_r(\bar{x}_0) \cap F$. Assim,

$\det(d\pi) = \pm 1$. Portanto, usando (3.3) e (3.4) e o Teorema de Mudança de Variável, segue que

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(B_r(x_0) &= \mathrm{Vol}(\pi(B_r(\bar{x}_0) \cap \overline{F})) = \int_{\pi(B_r(\bar{x}_0)\cap\overline{F})} dM = \int_{B_r(\bar{x}_0)\cap\overline{F}} |\det\, d\pi| d\widetilde{M} \\ &= \int_{B_r(\bar{x}_0)\cap F} d\widetilde{M} = \mathrm{Vol}(B_r(\bar{x}_0) \cap F).\end{aligned}$$

Isto conclui equação (3.5).

Afirmação 1.

$$\bigcup_{g\in D^\Gamma(\bar{x}_0,2r)} g\cdot(B_r(\bar{x}_0 \cap \overline{F}) \supset B_r(\bar{x}_0).$$

Com efeito, para todo $y \in B_r(\bar{x}_0)$, seja $g_y\bar{x}_0 \in \Gamma\cdot\bar{x}_0$ tal que

$$d(g_y\bar{x}_0, y) = \min_{g\in\Gamma} d(g_y\bar{x}_0, y).$$

Então, $d(g_y\bar{x}_0, y) \leqslant d(e\bar{x}_0, y) = d(\bar{x}_0, y) < r$. Logo, $g_y \in D^\Gamma(\bar{x}_0, 2r)$, pois

$$d(\bar{x}_0, g_y\bar{x}_0) \leqslant d(\bar{x}_0, y) + d(y, g_y\bar{x}_0) < 2r$$

e $g_y^{-1}y \in B_r(\bar{x}_0)$, uma vez que $d(\bar{x}_0, g_y^{-1}y) = d(g_y\bar{x}_0, y) < r$. Além disso,

$$d(g_y^{-1}y, \bar{x}_0) = \min_{g\in\Gamma} d(g_y^{-1}y, g\bar{x}_0). \tag{3.6}$$

De fato, temos que

$$d(g_y^{-1}y, \bar{x}_0) = d(y, g_y\bar{x}_0) \leqslant d(h\bar{x}_0, y) = d(g_y^{-1}h\bar{x}_0, g_y^{-1}y), \text{ para todo } h \in \Gamma.$$

Seja $g = g_y^{-1}h$, e daí, temos $d(g_y^{-1}y, \bar{x}_0) \leqslant d(g_y^{-1}y, g\bar{x}_0)$ para todo $g \in \Gamma$. Se $\bar{x}_0$ é o único ponto em $\Gamma\cdot\bar{x}_0$ que está mais próximo de $g_y^{-1}y$, então $d(g_y^{-1}y, \bar{x}_0) < d(g_y^{-1}y, g\bar{x}_0)$ para todo $g \in \Gamma$, ou seja, $g_y^{-1}y \in D_g$ para todo $g \neq e$ e por definição, $g_y^{-1}y \in F$. Assim, $g_y^{-1}y \in B_r(\bar{x}_0) \cap F$, implicando que $y \in g_y\cdot(B_r(\bar{x}_0) \cap F)$.

Por outro lado, considere os pontos $p_i \neq g_y^{-1}y$ em uma geodésica minimizante ligando $\bar{x}_0$ e $g_y^{-1}y$ tal que $\lim_{i\to\infty} d(p_i, g_y^{-1}y) = 0$. Logo, para todo $g \in \Gamma\setminus\{e\}$, por (3.6) e pelo fato da geodésica ligando $\bar{x}_0$ e $g_y^{-1}y$ ser minimizante, temos

$$d(g\bar{x}_0, p_i) \geqslant d(g\bar{x}_0, g_y^{-1}y) - d(g_y^{-1}y, p_i) \geqslant d(\bar{x}_0, g_y^{-1}y) - d(g_y^{-1}y, p_i) = d(\bar{x}_0, p_i).$$

Agora, se $d(g\bar{x}_0, p_i) = d(\bar{x}_0, p_i)$, então

$$d(g\bar{x}_0, g_y^{-1}y) = d(g\bar{x}_0, p_i) - d(g_y^{-1}y, p_i) = d(\bar{x}_0, g_y^{-1}y),$$

mas, isto não pode acontecer, pois as geodésicas não podem se ramificar. Logo, $d(g\bar{x}_0, p_i) > d(\bar{x}_0, p_i)$. Desde que $g \neq e$ é arbitrário, segue que $p_i \in F$ e então $g_y^{-1} y \in \overline{F}$. Portanto, $y \in g_y \cdot (B_r(\bar{x}_0) \cap \overline{F})$, e segue a afirmação.

Como F é domínio fundamental, para todo $g_1 \neq g_2$ em Γ, tem-se

$$(g_1 \cdot (B_r(\bar{x}_0) \cap F)) \cap (g_2 \cdot (B_r(\bar{x}_0) \cap F)) = \emptyset.$$

Logo, passando ao volume na afirmação 1 e usando (3.4) e (3.5), temos

$$\begin{aligned} \#(D^\Gamma(\bar{x}_0, 2r) \cdot \mathsf{Vol}(B_r(x_0)) &= \#(D^\Gamma(\bar{x}_0, 2r) \cdot \mathsf{Vol}(B_r(\bar{x}_0) \cap F) \\ &= \#(D^\Gamma(\bar{x}_0, 2r) \cdot \mathsf{Vol}(B_r(\bar{x}_0) \cap \overline{F}) \\ &\geqslant \mathsf{Vol}(B_r(\bar{x}_0)). \end{aligned}$$

Isto termina (3.1).

Finalmente, para provar (3.2), veja que

$$\bigcup_{g \in D^\Gamma(\bar{x}_0, r)} g \cdot (B_r(\bar{x}_0 \cap F) \subset B_{2r}(\bar{x}_0). \tag{3.7}$$

De fato, dado y na união acima, então existem $g_y \in D^\Gamma(\bar{x}_0, r)$ e $x \in B_r(\bar{x}_0 \cap F)$ tais que $y = g_y x$. Então,

$$d(y, \bar{x}_0) = d(g_y x, \bar{x}_0) \leqslant d(g_y x, g_y \bar{x}_0) + d(g_y \bar{x}_0, \bar{x}_0) = d(x, \bar{x}_0) + d(g_y \bar{x}_0, \bar{x}_0) \leqslant 2r.$$

Como y é arbitrário, segue (3.7).

De maneira análoga, passando ao volume em (3.7) e usando (3.5), temos

$$\#(D^\Gamma(\bar{x}_0, r) \cdot \mathsf{Vol}(B_r(x_0)) = \#(D^\Gamma(\bar{x}_0, r) \cdot \mathsf{Vol}(B_r(x_0) \cap F) \leqslant \mathsf{Vol}(B_{2r}(\bar{x}_0)).$$

Isto termina o teorema. $\square$

Capítulo 4

Rigidez e estimativa do primeiro número de Betti

Neste capítulo, vamos provar uma estimativa para o primeiro número de Betti de uma variedade aberta M^n com curvatura de Ricci não negativa, e além disso obtemos uma rigidez no caso da igualdade.

Primeiramente, lembremos do resultado clássico quando a variedade é compacta. Em 1948, Bochner em [2] considerou uma variedade compacta e com curvatura de Ricci não negativa, e provou o seguinte resultado:

Teorema 13 (Bochner, [2]). *Se M é uma variedade Riemanniana compacta com Ricci não negativo, então $b_1(M) \leqslant \dim M = n$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, M for um toro plano.*

Para uma demonstração veja o Corolário 19 de [22].

Mais recentemente o caso completo foi abordado por Anderson em [1], onde ele provou uma estimativa por cima para o primeiro número de Betti, como mostra o seguinte:

Teorema 14 ([1]). *Se M^n é uma variedade aberta (i.e, completa e não compacta) com curvatura de Ricci não negativa, então $b_1(M) \leqslant n-1$.*

Demonstração. Seja $\pi : (\widetilde{M}, \tilde{p}) \to (M, p)$ o recobrimento universal Riemanniano. Seja G subgrupo finitamente gerado de $\pi_1(M, p)$. Dado $S = \{g_1, \ldots, g_k\}$ os geradores simétricos de G, considere o comprimento de palavra $|g|$ de um elemento $g \in G$, e seja $U(r) = \{g \in G;\ |g| \leqslant r\}$.

Analogamente como no Teorema 12, podemos mostrar que

$$\#(U(r)) \cdot \mathrm{Vol}(B_r(p)) \leqslant \mathrm{Vol}(B_{cr}(\tilde{p})). \tag{4.1}$$

De fato, considere o domínio de Dirichlet associado a $\tilde{p}$,

$$F = \bigcap_{g \in G, g \neq e} D_g \ ,$$

onde $D_g = \{x \in \widetilde{M} \mid d(x, \tilde{p}) < d(x, g\tilde{p})\}$. Vimos que F é um domínio fundamental por ação de G, isto é,

$$gF \cap hF = \emptyset \text{ para todo } g \neq h \quad \text{e} \quad \widetilde{M} = \bigcup_{g \in G} g\overline{F},$$

onde $\overline{F}$ é o fecho de F.

Para $g \in U(r)$, veja que $\Omega_g := B_r(g\tilde{p}) \cap gF = g(B_r(\tilde{p}) \cap F)$. Com efeito, se $y \in B_r(g\tilde{p}) \cap gF$, então $d(y, g\tilde{p}) < r$ e $y = gx$ para algum $x \in F$. Logo,

$$d(x, \tilde{p}) = d(gx, g\tilde{p}) = d(y, g\tilde{p}) < r,$$

i.e., $x \in B_r(\tilde{p}) \cap F$, e assim, $y = gx \in g(B_r(\tilde{p}) \cap F)$.

Por outro lado, se $y \in g(B_r(\tilde{p}) \cap F)$ então existe $x \in B_r(\tilde{p}) \cap F$ tal que $y = gx$ e assim, temos que $y \in gF$. Além disso, veja que

$$d(y, g\tilde{p}) = d(gx, g\tilde{p}) = d(x, \tilde{p}) < r,$$

portanto, $y \in B_r(g\tilde{p}) \cap gF$. Como queríamos.

Note que $\Omega_g \cap \Omega_{g'} = \emptyset$, para $g \neq g'$, uma vez que F é um domínio fundamental. Seja $\mu = \max\{d(g_i\tilde{p}, \tilde{p}) \mid i = 1, \ldots, s\}$, então $d(g\tilde{p}, \tilde{p}) \leqslant \mu r$. Logo, existe $c > 0$, independente de r, tal que para $r >> 1$, temos $B_r(g\tilde{p}) \subset B_{cr}(\tilde{p})$. Assim,

$$\bigcup_{g \in U(r)} \Omega_g \subset B_{cr}(\tilde{p}).$$

Passando ao volume e usando a equação (3.5), temos

$$\#(U(r)) \cdot \mathrm{Vol}(B_r(p)) = \#(U(r)) \cdot \mathrm{Vol}(B_r(\tilde{p}) \cap F) \leqslant \mathrm{Vol}(B_{cr}(\tilde{p})).$$

Isto mostra a validade de (4.1).

Ademais, pela comparação de volume de Bishop-Gromov, lembre que

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\mathrm{Vol}(B_r(\tilde{p}))}{r^n} \leqslant \omega_n,$$

onde $\omega_n = \mathrm{Vol}(B_1(0))$ e $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Assim, existe $a > 0$ tal que $\mathrm{Vol}(B_r(\tilde{p})) \leqslant ar^n$. Por outro lado, por Yau [26], (segue do $\mathrm{Ric} \geqslant 0$)

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(B_r(p))}{r} > 0,$$

donde existe $b > 0$ tal que $\mathrm{Vol}(B_r(p)) \geqslant br$. Logo,

$$\#(U(r)) \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(B_{cr}(\tilde{p}))}{\mathrm{Vol}(B_r(p))} \leqslant \frac{ar^n}{br} =: Ar^{n-1}.$$

Portanto, $\limsup_{r\to\infty} \frac{\#(U(r))}{r^{n-1}} < \infty$, implicando, pela arbitrariedade de G, que todo subgrupo finitamente gerado de $\pi_1(M, p)$ tem crescimento polinomial de ordem $\leqslant n - 1$. Assim, pelo Teorema 1.3 de [1] concluimos que $b_1(M) \leqslant n - 1$. □

Finalmente, podemos enunciar e provar o resultado principal deste trabalho, que é a rigidez do teorema acima.

Teorema 15. *Se M^n é uma variedade aberta com curvatura de Ricci não negativa, então $b_1(M) = n - 1$ se, e somente se, M é plano com uma alma $\mathbb{T}^{n-1}$.*

Antes de apresentarmos a demonstração, vale ressaltar algumas observações.

Observação 3. Pela Proposição 13, a variedade M no Teorema 15 possui apenas dois possíveis tipos de difeomorfismo, que é $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}$ ou $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{T}^{n-2}$ (onde $\mathbb{M}^2$ é a faixa de Mobius aberta). No primeiro caso, M é isométrica ao produto métrico $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}$.

Observação 4. O Teorema 15 é conhecido nos seguintes casos especiais:

(i) Para $n = 3$, Gang Liu em [17], provou que, se M^3 é uma variedade aberta com curvatura de Ricci não negativa, então, ou M^3 é difeomorfa a $\mathbb{R}^3$, ou o recobrimento universal de M^3 é isométrico a um produto riemanniano $N^2 \times \mathbb{R}$, onde N^2 e uma variedade completa com curtatura seccional não negativa.

(ii) Para a curvatura de Ricci estritamente positiva, tem-se que $b_1(M) \leqslant n - 3$ (veja Teorema 3.1 de [1]). Logo, se $b_1(M) = n - 3$, então o doubly warped product $M^4 = [0, \infty) \times_f \mathbb{S}^2 \times_h \mathbb{S}^1$ construido por Nabonnand em [20], tem curvatura de Ricci estritamente positiva e $b_1(M^4) = 1 = 4 - 3$.

Observação 5. O Teorema 15 é sharp (i.e., não tem como melhorar) no sentido de que, se $b_1(M) = n - 2$, então M pode não ser plana. Um exemplo é o produto métrico de um parabolóide com $\mathbb{S}^1$. Embora a variedade neste exemplo não seja plana, ela possui curvatura seccional não negativa.

Com efeito, seja $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ um parabolóide. Pelo Teorema 7, $H_1(P \times \mathbb{S}^1)$ é isomorfo à abelianização de $\pi_1(P \times \mathbb{S}^1)$. Pela Proposição 7, $\pi_1(P \times \mathbb{S}^1) \simeq \pi_1(P) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \{[e]\} \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$. Assim, $\pi_1(P \times \mathbb{S}^1)$ é abeliano e segue que a abelianização de $\pi_1(P \times \mathbb{S}^1)$ é o próprio $\pi_1(P \times \mathbb{S}^1)$. Logo,

$$b_1(P \times \mathbb{S}^1) = \mathrm{rank} H_1(P \times \mathbb{S}^1) = 1 = 3 - 2.$$

Agora, calculemos a curvatura seccional de $P \times \mathbb{S}^1$. Seja $\sigma(x, y)$ o plano bidimensional gerado por x e y. Se $\sigma(x, y) \subset T_{(q,r)}(P \times \mathbb{S}^1)$ é tal que $x, y \in T_q P$, então

$$K_{P \times \mathbb{S}^1}(\sigma) = K_P(\sigma) = \frac{4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} > 0,$$

pois em dimensão 2 a curvatura seccional coincide com a curvatura Gaussiana.

Se $\sigma(x, y) \subset T_{(q,r)}(P \times \mathbb{S}^1)$ é tal que $x, y \in T_q \mathbb{S}^1$, então

$$K_{P \times \mathbb{S}^1}(\sigma) = K_{\mathbb{S}^1}(\sigma) = 0.$$

Se $\sigma(x, y) \subset T_{(q,r)}(P \times \mathbb{S}^1)$ é tal que $x \in T_q P$ e $y \in T_q \mathbb{S}^1$, então $K_{P \times \mathbb{S}^1}(\sigma) = 0$. Assim, $P \times \mathbb{S}^1$ tem curvatura seccional não negativa e como $K_P(\sigma) > 0$, $P \times \mathbb{S}^1$ não é plana.

Finalmente, vamos a demonstração do Teorema 15.

Demonstração. Primeiramente, suponha que $b_1(M) = n - 1$. Então $\pi_1(M)$ tem um subgrupo finitamente gerado de crescimento polinomial de ordem $\geqslant n - 1$ (ver Proposição 11). Considerando $\pi : \widetilde{M} \to M$ recobrimento universal Riemanniano, então $\Gamma \simeq \pi_1(M)$, onde Γ é o grupo das transformações de recobrimento. Logo, Γ tem um subgrupo finitamente gerado de crescimento polinomial de ordem $\geqslant n - 1$. Pela demonstração da Proposição 12, obtemos que Γ tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant n - 1$ e usando a Proposição 10, temos que Γ tem crescimento de órbita polinomial de ordem $\geqslant n - 1$. Pelo Teorema 9, M é plana. Usando o Teorema 10, existe uma alma $S \subset M$ de M. Assim, existe uma retração por deformação forte $r : M \to S$ (pelo Teorema 11), a qual é uma equivalência homotópica, pois existe $\iota_S : S \to M$ (inclusão) tal que $\iota_S \circ r$ é homotópica a Id_M e $r \circ \iota_S$ é homotópica a Id_S. Logo, pelo Corolário 13.9 de [13], temos que $H_1(M)$ é isomorfo a $H_1(S)$. Assim,

$$n - 1 = b_1(M) = b_1(S).$$

Portanto, como a dimensão de S é $n-1$ (isto acontece devido a Proposição 13), pelo caso compacto, $S = \mathbb{T}^{n-1}$.

Reciprocamente, pela Proposição 13, temos que M é difeomorfa à $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}$ ou $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{T}^{n-2}$. Logo, em ambos os casos tem-se que $b_1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}) = n-1 = b_1(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{T}^{n-2})$. De fato, (para o entendimento da conta a seguir recomendamos o leitor ler o capítulo IV de [3]) veja que

$$\begin{aligned}(H_*(\mathbb{M}^2) \otimes H_*(\mathbb{T}^{n-2}))_1 &= \bigoplus_{p+q=1} H_p(\mathbb{M}^2) \otimes H_q(\mathbb{T}^{n-2}) \\ &= H_1(\mathbb{M}^2) \otimes H_0(\mathbb{T}^{n-2}) \oplus H_0(\mathbb{M}^2) \otimes H_1(\mathbb{T}^{n-2}).\end{aligned}$$

Como $\mathbb{M}^2$ e $\mathbb{T}^{n-2}$ são conexos por caminhos, temos que $H_0(\mathbb{M}^2) \simeq \mathbb{Z} \simeq H_0(\mathbb{T}^{n-2})$. Além disso, $H_1(\mathbb{M}^2) \simeq \mathbb{Z}$ (pois $\mathbb{M}^2$ é homotopicamente equivalente a $\mathbb{S}^1$) e $H_1(\mathbb{T}^{n-2}) \simeq \mathbb{Z}^{n-2}$. Logo,

$$(H_*(\mathbb{M}^2) \otimes H_*(\mathbb{T}^{n-2}))_1 \simeq \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}^{n-2} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-2}.$$

Ademais, $(H_*(\mathbb{M}^2) * H_*(\mathbb{T}^{n-2}))_0 = \mathsf{Tor}(H_0(\mathbb{M}^2), H_0(\mathbb{T}^{n-2})$, mas $H_0(\mathbb{M}^2) \simeq \mathbb{Z} \simeq H_0(\mathbb{T}^{n-2})$ e então $\mathsf{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$. Assim, pelo Teorema 1.6 do capítulo VI de [3],

$$H_1(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{T}^{n-2}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-2} \Rightarrow b_1(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{T}^{n-2}) = n-1.$$

Por fim, note que

$$\pi_1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}) \simeq \pi_1(\mathbb{R}) \times \pi_1(\mathbb{T}^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}.$$

Donde, a abelianização de $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1})$ é o própio $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1})$, então pelo Teorema 7, $H_1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$ e portanto $b_1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}) = n-1$.

□

Finalizamos este trabalho com um resultado de classificação via crescimento de volume linear e Euclideano. Para isto, lembremos de algumas definições necessárias.

Seja M uma variedade, para qualquer $x_0 \in M$, considere $B_r(x_0)$ a bola geodésica de raio r sobre x_0. Dizemos que M tem crescimento de **volume polinomial** se existem $c, k \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\mathsf{Vol}(B_r(x_0)) \leqslant c \cdot r^k \text{ para } r \geqslant 1.$$

Se $k = 1$, então M tem **crescimento de volume linear**. Ademais, dizemos que M^m tem **crescimento de volume Euclideano** se existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que para qualquer ponto $p \in M$ e $r \geqslant 1$, temos

$$c_1 r^m \leqslant \mathrm{Vol}(B_r(p)) \leqslant c_2 r^m.$$

Agora observe que pelo Teorema 15, $b_1(M) = n-1$ implica que M é plana, ou seja, o seu recobrimento $\widetilde{M} = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ tem crescimento de volume Euclideano). Além disso, M é isométrica ao produto métrico $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}$, o qual tem crescimento de volume linear (pois $\mathbb{T}^{n-1}$ é compacto e $\mathbb{R}$ tem crescimento de volume linear). Portanto, M tem crescimento de volume linear e $\widetilde{M}$ tem crescimento de volume Euclideano. Isto motiva o seguinte.

Teorema 16. *Seja M^n uma variedade aberta com curvatura de Ricci não negativa. Seja $\pi : \widetilde{M} \to M$ o recobrimento universal Riemanniano com o grupo das transformações de recobrimento Γ. Então, temos:*

(i) M é plana com uma alma $n-1$ dimensional se, e somente se, uma das condições a seguir ocorre:

(ii) Existe $G < \pi_1(M)$ finitamente gerado tal que $\mathrm{rank}(G) = n-1$;

(iii) Γ falha em ter crescimento de órbita polinomial de ordem $< n-1$. Isto é, existe uma sequência $r_i \to \infty$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(\tilde{x}, r_i))}{r_i^{n-1}} > 0 \textit{ para algum } \tilde{x} \in \widetilde{M}.$$

(iv) Γ tem crescimento da órbita máxima.

(v) M tem crescimento de volume linear e $\widetilde{M}$ tem crescimento de volume Euclideano.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Temos que M é plana e possui uma alma S^{n-1}, a qual é plana. Afirmamos que $\pi_1(S)$ é cristalográfico. Uma vez provado o afirmado, pelo Teorema 6, existe $G < \pi_1(S)$ subgrupo abeliano livre de torção, finitamente gerado com $\mathrm{rank}(G) = n-1$. Portanto, $\pi_1(S)$ tem subgrupo finitamente gerado de posto $n-1$. Logo, pelo Teorema 9.3 de [6], $\pi_1(M) \simeq \pi_1(S)$, donde $\pi_1(M)$ tem subgrupo finitamente gerado de posto $n-1$.

Agora, provemos a afirmação. Com efeito, note que $\pi_1(S) \simeq \Gamma$(vide Corolário 12.9 de [13]), e daí, mostraremos que Γ é discreto, pois assim, $\pi_1(S)$ também o é. De fato, suponha que Γ não seja discreto. Assim, existiria uma sequência $f_i \subset \Gamma$ tal que $f_i \to f \in \Gamma$ e $f_i \neq \mathrm{Id}$. Logo, para qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, existem infinitos f_i tais que

$f_i(K) \cap f(K) \neq \emptyset$, uma contradição, já que Γ age propriamente descontínua em M. Além disso, sendo $\pi : \pi^{-1}(S) \to S$ recobrimento universal, pela Proposição 4.3 do capítulo 8 de [8], temos que

$$S \simeq \pi^{-1}(S)/\pi_1(S) = \mathbb{R}^{n-1}/\pi_1(S).$$

Pela compacidade de S e a Proposição 1.9 de [25] temos que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n-1})/\pi_1(S)$ é compacto. Portando, $\pi_1(S)$ é cristalográfico, como queríamos.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Por hipótese, existe $G < \pi_1(M)$ finitamente gerado tal que $\mathrm{rank}(G) = n-1$. Pelo Teorema 1 de [18] temos que G tem crescimento polinomial e assim, pelo Teorema principal de [10], G é quase nilpotente e pela Proposição 12, G tem crescimento polinomial de ordem $\geqslant n-1$. Logo, pela Proposição 10, G tem crescimento de órbita polinomial de ordem $\geqslant n-1$ (vale destacar que podemos utilizar a Proposição 10, pois $\pi_1(M) \simeq \Gamma$). Por definição, isto implica (iv), o qual segue (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Assumindo (iii), temos pelo Teorema 9, que M é plana. Pela Proposição 13, Γ tem crescimento de órbita polinomial de ordem $\geqslant k$ e $\leqslant k$, onde k é a dimensão da alma S de M. Por (iii), não podemos ter crescimento de órbita polinomial de ordem $< n-1$, e assim, $k = n-1$. Portanto, segue (iv).

(iv) $\Leftrightarrow$ (v): Como $\pi : \widetilde{M} \to M$ é recobrimento universal, $\widetilde{M}$ é simplesmente conexo, ou seja, $\pi_1(\widetilde{M}) = \{[e]\}$ e assim, $\pi_*(\pi_1(\widetilde{M})) = \{[e]\}$ o qual é subgrupo normal de $\pi_1(M)$. Logo, $\pi : \widetilde{M} \to M$ é um recobrimento normal. Assumindo (iv), tem-se

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\#(D^\Gamma(\bar{x}_0, r))}{r^{n-1}} > 0,$$

o que implica em $\#(D^\Gamma(\bar{x}_0, r)) \geqslant cr^{n-1}$ para algum $c > 0$. Pelo Corolário 1.68 de [7], $\mathrm{Vol}(B_r(x_0)) \geqslant br$ para algum $b > 0$ (i.e., M tem crescimento de volume pelo menos linear). Por (3.2), $cbr^n \leqslant \mathrm{Vol}(B_{2r}(\bar{x}_0))$, donde, $\widetilde{M}$ tem crescimento de volume Euclideano. Assim, temos também que existe $a > 0$ tal que $\mathrm{Vol}(B_{2r}(\bar{x}_0)) \leqslant ar^n$ e novamente por (3.2),

$$\mathrm{Vol}(B_r(x_0)) \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(B_{2r}(\bar{x}_0))}{\#(D^\Gamma(\bar{x}_0, r))} \leqslant \frac{ar^n}{cr^{n-1}} =: Ar.$$

Ou seja, M tem crescimento de volume linear.

Reciprocamente, assumindo (v), temos que

$$\mathrm{Vol}(B_r(x_0)) \leqslant cr \text{ e } \mathrm{Vol}(B_r(\bar{x}_0)) \geqslant br^n \text{ para } a, b > 0.$$

Logo, por (3.1), segue que

$$\#(D^\Gamma(\bar{x}_0, 2r)) \geqslant \frac{\mathrm{Vol}(B_r(\bar{x}_0))}{\mathrm{Vol}(B_r(x_0))} \geqslant \frac{br^n}{cr} =: Cr^{n-1}.$$

Implicando que $\liminf_{r\to\infty} \dfrac{\#(D^{\Gamma}(\bar{x}_0, 2r))}{r^{n-1}} > 0$, ou seja, Γ tem crescimento da órbita máxima.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Assumindo (iv), podemos usar o Teorema 9, que nos assegura que M é plana. Usando novamente a hipótese que Γ tem crescimento de órbita polinomial de ordem $\geqslant n-1$, a Proposição 13 nos garante que toda alma de M tem dimensão $n-1$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] ANDERSON, Michael T. On the topology of complete manifolds of non-negative Ricci curvature. **Topology**, v. 29, n. 1, p. 41-55, 1990.

[2] BOCHNER, Salomon. **Vector fields and Ricci curvature**. 1946.

[3] BREDON, Glen E. **Topology and geometry**. Springer Science & Business Media, 2013.

[4] CHARLAP, Leonard S. **Bieberbach groups and flat manifolds**. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] CHEEGER, Jeff; GROMOLL, Detlef. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. **Journal of Differential Geometry**, v. 6, n. 1, p. 119-128, 1971.

[6] CHEEGER, Jeff; GROMOLL, Detlef. On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. **Annals of Mathematics**, v. 96, n. 3, p. 413-443, 1972.

[7] CHOW, Bennett; LU, Peng; NI, Lei. **Hamilton's Ricci flow**. American Mathematical Soc., 2006.

[8] DO CARMO, M. P.; RIEMANNIANA, Geometria. IMPA (Projeto Euclides), 3a. ediçao. **Rio de Janeiro**, v. 1, 2005.

[9] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. **Elementos de álgebra**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

[10] GROMOV, M.; TITS, J. **GROUPS OF POLYNOMIAL GROWTH AND EXPANDING MAPS**. APPENDIX. 1981.

[11] HATCHER, Allen. **Algebraic Topology**. 2001.

[12] KARGAPOLOV, Mikhail Ivanovich; MERZLJAKOV, Jurij Ivanovič. **Fundamentals of the Theory of Groups**. Berlin: Springer, 1979.

[13] LEE, John M. **Introduction to topological manifolds**. New York, NY: Springer New York, 2000.

[14] LEE, John M. Smooth manifolds. In: **Introduction to smooth manifolds**. New York, NY: Springer New York, 2003. p. 1-29.

[15] LEE, John M. **Introduction to Riemannian manifolds**. Cham: Springer, 2018.

[16] LI, Xinze. **Lecture Notes on Comparison Geometry**. 2023. Dissertação de Mestrado. University of Toronto (Canada).

[17] LIU, Gang. 3-manifolds with nonnegative Ricci curvature. **Inventiones mathematicae** , v. 193, n. 2, p. 367-375, 2013.

[18] MILNOR, John. A note on curvature and fundamental group. **Journal of Differential geometry**, v. 2, n. 1, p. 1-7, 1968.

[19] NABER, Aaron; ZHANG, Ruobing. Topology and ϵ–regularity theorems on collapsed manifolds with Ricci curvature bounds. **Geometry** & **Topology**, v. 20, n. 5, p. 2575-2664, 2016.

[20] NABONNAND, Philippe. Sur les variétés riemanniennes completesa courbure de Ricci positive. **CR Acad. Sci. Paris Sér. AB**, v. 291, n. 10, p. A591-A593, 1980.

[21] NETO, Antonio Caminha Muniz. Tópicos de geometria diferencial. **Sociedade Brasileira de Matemática**, 2014.

[22] PETERSEN, P. Riemannian geometry. **Graduate Texts in Mathematics/Springer-Verlarg**, 2006.

[23] SHARAFUTDINOV, Vladimir Al'tafovich. The Pogorelov-Klingenberg theorem for manifolds homeomorphic to Rn. **Siberian Mathematical Journal**, v. 18, n. 4, p. 649-657, 1977.

[24] SORMANI, Christina. On loops representing elements of the fundamental group of a complete manifold with nonnegative Ricci curvature. **Indiana University mathematics journal**, v. 50, n. 4, p. 1867-1883, 2001.

[25] SZCZEPAŃSKI, Andrzej. **Geometry of crystallographic groups**. 2012.

[26] YAU, Shing-Tung. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 25, n. 7, p. 659-670, 1976.

[27] YE, Zhu. Maximal first Betti number rigidity for open manifolds of nonnegative Ricci curvature. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 34, n. 4, p. 101, 2024.

[28] YIM, Jin-Whan. Distance nonincreasing retraction on a complete open manifold of nonnegative sectional curvature. **Annals of Global Analysis and Geometry**, v. 6, n. 2, p. 191-206, 1988.