



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

O Problema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^n

Francisco Ferreira do Nascimento Junior

Teresina - 2026

Francisco Ferreira do Nascimento Junior

Dissertação de Mestrado:

O Problema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^n

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa

Teresina - 2026



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

O Problema de Bernstein Estável em R^n

Francisco Ferreira do Nascimento Junior

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 27 de fevereiro de 2026.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa – Orientador

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista - UFPI



LUCIANO MARI
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MILANO
05.03.2026 09:41:11 GMT+01:00

Prof. Dr. Luciano Mari - UNIMI

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBI/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

N244p	<p>Nascimento Júnior, Francisco Ferreira. O problema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^n / Francisco Ferreira do Nascimento Júnior. -- 2026. 149 f. : il.</p> <p>Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí. Centro de Ciências da Natureza. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2026. “Orientador: Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa. ”</p> <p>1. Geometria Diferencial. 2. Estabilidade de Hipersuperfícies. 3. Funções Harmônicas. I. Pessoa, Leandro de Freitas. II. Título.</p> <p>CDD 516.36</p>
-------	---

Dedico este trabalho a Deus, meu Senhor, Jesus, meu salvador, e aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente e acima de tudo a Deus, por ser tudo em meu mundo e tornar tudo em meu mundo possível. Agradeço a Jesus Cristo, meu Senhor, que me deu forças e continuando dando para para lutar, mesmo quando não tenho vontade.

Agradeço a toda a minha família, em especial minha mãe Anelice, meu pai Francisco, minhas irmãs Aparecida e Luana e meu irmão Pedro Henrique por todo o apoio dado até então. Nasci em uma família com poucos recursos e cresci vendo meus pais dando o máximo de si para eu pudesse estudar e conquistar o que eles não puderam. Foram tantas as vezes que meus pais fizeram sacrifícios para que eu pudesse estudar, dia após dia, e chegasse aonde estou. Eu não tenho palavras para descrever o quanto sou grato a cada uma dessas pessoas, sem eles não seria possível chegar a lugar algum em minha vida.

Agradeço ao meu orientador Leandro de Freitas Pessoa primeiramente por ter me aceitado como aluno, mesmo não me conhecendo, e por toda a ajuda nesta jornada. Eu sou uma pessoa as vezes difícil de ensinar e dialogar, mesmo assim o professor sempre demonstrou paciência comigo e sempre demonstrou disponibilidade para me ajudar em qualquer dúvida. Obrigado por tudo.

Agradeço aos professores que me apoiaram a seguir o caminho da matemática desde o ensino fundamental, em especial gostaria de agradecer a Jackson de Oliveira e Werberty Ney. O primeiro foi responsável por me ensinar, orientar, motivar mesmo quando não tinha nenhuma obrigação formal com isso, mas acima de tudo por ser o grande amigo que Deus me permitiu conhecer. Também gostaria de agradecer a Werberty Ney, por ter acreditado em mim e me permitido chegar a lugares onde nunca sonharia que poderia ter chegado, seu apoio e seus longos conselhos (as vezes mais de três horas ouvindo brigas e conselhos) ainda continuam a me motivaram e a me tornar um homem melhor. Sem estas duas pessoas, seguramente eu não estaria aonde estou.

Agradeço aos professores do departamento de matemática, em especial aos professores Halyson Baltazar, Barnabé Pessoa, José Francisco, Gleison Nascimento, Mario Gomes, seja pelo apoio diário ou pelo tanto que me ensinaram. Gostaria de agradecer a professora Franciane Vieira, por ter me orientado ao longo da minha graduação e por ter me instruído ao mundo acadêmico. Gostaria de agradecer ao professor Cicero de Aquino, por ter me permitido assistir ao seu curso de geometria e, graças a sua didática maravilhosa, passei a gostar da área de geometria, a qual continuo estudando até hoje.

Agradeço aos meus amigos Elliel Mattias, Vinicius Melo, Pedro Henrique e Sayd Luz, que me acompanharam desde a graduação e tornaram-se grandes amigos que Deus me permitiu ter. Também agradeço a Ana Júlia, Gustavo Fernandes, Maiara Veras, Natália Lopes, Andreína Marcela, Maria Angelica, Ismael de Carvalho, Gean Lucas, Jeferson Brito, Ysadora Soares, amigos que conheci graças a matemática e que tornaram minha jornada melhor e muito mais divertida.

Agradeço (a CAPES e ao Instituto TIM em parceria com a OBMEP) pelo apoio financeiro.

“Nossas dúvidas são traidoras e nos fazem perder o que, com frequência, poderíamos ganhar, por simples medo de arriscar”.

William Shakespeare.

Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar as soluções conhecidas para o Problema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^n para hipersuperfícies 2-lados, com $3 \leq n \leq 6$. Para isso, estudamos as propriedades gerais das hipersuperfícies mínimas estáveis e os resultados clássicos relacionados ao problema. Além do resultado clássico para o caso de superfícies, apresentamos a resolução do problema por meio do método dos conjuntos de níveis de funções harmônicas, para $n = 4$, e as soluções dadas através do método de μ -bolhas para $3 \leq n \leq 6$. Para cada dimensão, analisamos o comportamento da estabilidade em conjunto com ferramentas clássicas e modernas da análise geométrica.

Palavras-chave: hipersuperfícies mínimas, estabilidade, teorema de Bernstein, conjuntos de níveis de funções harmônicas, método de μ -bolha.

Abstract

The objective of this dissertation is to present the known solutions to the Stable Bernstein Problem in \mathbb{R}^n for two-sided hypersurfaces, with $3 \leq n \leq 6$. To this end, we study the general properties of stable minimal hypersurfaces and the classical results related to the problem. In addition to the classical result for the case of surfaces, we present a resolution of the problem via the level-set method of harmonic functions for $n = 4$, as well as the solutions obtained through the μ -bubble method for $3 \leq n \leq 6$. For each dimension, we analyze the behavior of stability in conjunction with classical and modern tools from geometric analysis.

Keywords: minimal hypersurfaces, stability, Bernstein theorem, level sets of harmonic functions, μ -bubble method.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
1 Preliminares	5
1.1 Geometria das Subvariedades	5
1.2 Hipersuperfícies Mínimas Estáveis	10
1.2.1 Variações de Área	11
1.2.2 Propriedades das Hipersuperfícies Estáveis	20
1.3 Fins de Hipersuperfícies Mínimas Estáveis	26
1.4 Uma Desigualdade Isoperimétrica	29
1.5 Estabilidade para Hipersuperfícies com Crescimento Euclidiano	34
1.6 Conjuntos de Perímetro Finito	39
2 Superfícies Mínimas Estáveis em \mathbb{R}^3	43
2.1 Teorema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^3	43
2.2 Resultados Equivalentes	46
3 Hipersuperfícies Mínimas Estáveis em \mathbb{R}^4	49
3.1 Propriedades da Função de Green em Hipersuperfícies Mínimas	49
3.2 Aplicação da Fórmula de Stern-Bochner para Mínimas Estáveis	58
3.3 Uma Extensão da Fórmula de Monotonicidade de Munteanu-Wang	65
3.4 Resultado Principal	74

4	Hipersuperfícies Mínimas Estáveis em \mathbb{R}^4: Versão 2	77
4.1	O Método de μ -Bolhas	77
4.2	Uma Deformação Conforme e o Teorema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^4 . . .	86
5	Hipersuperfícies Mínimas Estáveis em \mathbb{R}^5	89
5.1	Propriedades da Curvatura Bi-Ricci Deformada	89
5.2	Método de μ -Bolhas para a Curvatura bi-Ricci Positiva	97
5.3	Estimativas Geométricas para μ -Bolhas	104
5.4	Teorema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^5	114
6	Hipersuperfícies Mínimas Estáveis em \mathbb{R}^6	116
6.1	Limitante Inferior Espectral para a Curvatura Bi-Ricci	116
6.2	Construção de μ -bolha	123
6.3	Problema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^6	129
A	Teoremas Importantes	131
	Referências Bibliográficas	134

Introdução

A teoria das hipersuperfícies mínimas no espaço Euclidiano ocupa um lugar central na Geometria Diferencial e na Análise Geométrica, surgindo naturalmente no estudo de problemas variacionais associados ao funcional área. Uma hipersuperfície imersa $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é dita ser mínima quando sua curvatura média é identicamente nula. No caso de hipersuperfícies em \mathbb{R}^{n+1} , se M é dada localmente como um gráfico de uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, para algum $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o fato de ser mínima é equivalente ao fato de u satisfazer a equação quasilinear elíptica das superfícies mínimas, dada por

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0. \quad (1)$$

Neste contexto, é natural se perguntar como se comportam (e se existem) gráficos da forma $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que satisfazem a equação (1). A primeira resposta para este problema foi dada por S. Bernstein em 1915, ao estabelecer que toda solução global da equação das superfícies mínimas (1) em \mathbb{R}^2 é necessariamente afim. Geometricamente, isso equivale a dizer que as únicas superfícies mínimas inteiras em \mathbb{R}^3 são os planos. Este resultado, juntamente com as tentativas de generalizá-lo, inaugurou uma extensa linha de pesquisa voltada à compreensão da rigidez geométrica de hipersuperfícies mínimas em dimensões mais altas. Por este motivo, a busca por uma generalização deste problema passou a ser conhecido como *Problema de Bernstein Clássico*.

A generalização do Problema de Bernstein para dimensões superiores consiste em perguntar se toda hipersuperfície mínima inteira em \mathbb{R}^n deve ser um hiperplano. Ao longo do século XX, diversos trabalhos mostraram que a resposta a essa questão depende de maneira essencial da dimensão do espaço ambiente. Para gráficos mínimos em \mathbb{R}^n , este problema foi resolvido por De Giorgi [21] em 1965 para $n = 4$, por F. J. Almgren [1] em 1966 para $n = 5$, e por L. Simon [45] em 1968 para $n \leq 7$, e um argumento

de regularidade interior permite estender a dimensão $n = 8$. Posteriormente, usando o método de Simons, De Giorgi, E. Giusti e E. Bombieri mostraram em [9] que o Problema de Bernstein é falso para $n > 8$, ao construir um cone mínimo estável não-planar.

Superfícies mínimas nasceram com o intuito de que, dada uma variação suave com bordo fixado, dentre todas as superfícies obtidas, ela seja a de menor área, daí o nome mínima. No entanto, nem toda hipersuperfície com curvatura média identicamente nula satisfaz esta definição de minimização de área para qualquer domínio da superfície. A classe específica de hipersuperfícies mínimas que minimizam sempre a área, estas são as *hipersuperfícies mínimas estáveis*, isto é, hipersuperfícies M tais que

$$\int_M |A|^2 \varphi^2 \, d\mu \leq \int_M |\nabla^M \varphi|^2 \, d\mu, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(M),$$

onde A denota a segunda forma fundamental de M , ∇^M é o gradiente associado à métrica Riemanniana induzida em M e $d\mu$ representa o elemento de volume de M . Essa desigualdade expressa a não negatividade do operador de Jacobi

$$L = \Delta^M + |A|^2,$$

e impõe restrições severas sobre o comportamento geométrico da hipersuperfície.

Em 1979 M. do Carmo e C. K. Peng mostraram em [13] um resultado análogo ao Teorema clássico de Bernstein: que toda superfície mínima estável orientável e completa deve ser um plano. Este resultado era um pouco mais geral que o de Bernstein pois não exige mais que a superfície seja um gráfico. Em 1980, D. Fischer-Colbrie e R. Schoen mostraram em [24] e Pogorelov em [38] (1981) obtiveram o mesmo resultado de forma independente. A tentativa de generalizar este resultado inaugurou uma nova classe de problemas, conhecido como o *Problema de Bernstein Estável*. Vários autores investigaram este problema e obtiveram resultados para casos específicos. Destacamos principalmente o seguinte célebre resultado

Teorema 1 (Schoen-Simon-Yau [41]). *Se $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 6$, é uma hipersuperfície mínima completa, estável, 2-lados e existe $V < \infty$ tal que*

$$\sup_{R>0} \frac{\text{Vol}(B_R(0) \cap \Sigma)}{R^{n-1}} \leq V, \quad (2)$$

então Σ é planar.

Iremos apresentar este resultado com mais detalhes na seção 1.5. Como pode ser visto no enunciado, este resultado impõe limitação para a dimensão do ambiente, o que causou uma aparente dificuldade inicial para a adaptação do método para hipersuperfícies em \mathbb{R}^6 . No entanto, existe um resultado recente, dado por C. Bellettini em [8], que generaliza este o resultado de Schoen-Simon-Yau para \mathbb{R}^6 com a hipótese adicional da imersão ser própria e que há crescimento de volume Euclidiano no infinito.

Uma vez que todo gráfico mínimo é estável, o contra-exemplo apresentado por Bombieri-De Giorgi-Giusti nos afirma que o problema de Bernstein estável é falso para dimensão $n \geq 9$. Mais que isso, o artigo original [9] apresenta uma hipersuperfície mínima estável 2-lados que não é um gráfico, limitando a possibilidade de validade do problema de Bernstein estável para $3 \leq n \leq 7$. Apesar de todos os esforços na direção de resolver o *Problema de Bernstein Estável* para hipersuperfícies mínimas de dimensão maior que 2, este problema ficou em aberto por várias décadas. Recentemente, O. Chodosh e C. Li [15] propuseram uma abordagem inovadora que resolveu o caso de dimensão $n = 4$, abrindo espaço para que novos desenvolvimentos fossem dados nesta teoria.

O objetivo principal desta dissertação é estudar o *Problema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^n* , para $3 \leq n \leq 6$, apresentando os principais resultados conhecidos e destacando o papel desempenhado pela estabilidade na obtenção de teoremas de rigidez em diferentes dimensões. Ressaltamos que até o presente momento o problema para a dimensão $n = 7$ encontra-se em aberto.

No Capítulo 1, são introduzidos conceitos fundamentais de geometria Riemanniana e de hipersuperfícies mínimas, com ênfase na definição de estabilidade e em suas consequências analíticas. Apresentaremos com mais detalhes um comportamento assintótico das hipersuperfícies mínimas estáveis de dimensão mais alta, assim como a prova do resultado de Schoen-Yau, acima citado. Também iremos apresentar uma generalização da clássica desigualdade isoperimétrica, proposta por S. Brendle em [10] que será útil ao longo do texto.

No Capítulo 2, trataremos de apresentar em detalhes a solução clássica, proposta por M. do Carmo e K. Peng em [13], para o *Problema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^3* . Mostraremos também um resultado equivalente ao Teorema de Bernstein que será importante para a solução do problema em \mathbb{R}^4 .

No capítulo 3, apresentaremos a primeira prova para o *Problema de Bernstein Estável* dada por O. Chodosh e C. Li em [15]. Estudaremos o comportamento das funções de Green em hipersuperfícies mínimas estáveis. Em seguida, encontraremos desigualdades para a energia de Dirichlet da função de Green nas superfícies de nível e para a segunda forma, de modo que juntamente com a equivalência obtida no capítulo anterior, estabelecem o *Problema de Bernstein Estável* em \mathbb{R}^4 .

Destacamos que, após a prova apresentada por Chodosh e Li, descrita no Capítulo 3, surgiram duas novas provas para o *Problema de Bernstein Estável* em \mathbb{R}^4 , uma proposta por G. Catino, P. Mastrolia e A. Roncoroni em [20] e outra por O. Chodosh e C. Li em [16]. Dedicaremos o Capítulo 4 a apresentar esta última. O motivo de apresentar esta solução é porque seu argumento é a base para a solução conhecida nas dimensões $n = 5, 6$. Neste capítulo, apresentaremos uma deformação conforme da métrica, chamada métrica de Gulliver-Lawson, e o método das μ -bolhas, fundamentais para as generalizações do *Problema de Bernstein Estável*.

No Capítulo 5, investigamos como o método das μ -bolhas apresentado no Capítulo 4 foi adaptado por O. Chodosh, C. Li, P. Minter e D. Stryker em [18] para resolver o *Problema de Bernstein Estável* em \mathbb{R}^5 . A principal diferença é a introdução da curvatura bi-Ricci ao método anterior e como esta afeta o fenômeno da estabilidade.

No Capítulo 6, apresentamos a prova proposta por L. Mazet em [34] para o *Problema de Bernstein Estável* em \mathbb{R}^6 a partir do método usado no Capítulo 5 e da introdução de uma generalização da curvatura bi-Ricci, chamada curvatura α -bi-Ricci, para $\alpha > 0$. Novamente o capítulo dedica-se a estudar como esta nova curvatura interfere na estabilidade.

Por fim, colocamos no Apêndice os resultados que destoam do contexto ou necessitam de mais preparação para serem introduzidos, a destacar a importante Desigualdade de Harnack.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as definições e resultados básicos sobre a geometria das imersões mínimas, a teoria das hipersuperfícies mínimas com suas propriedades clássicas e resultados de outros trabalhos que serão importantes para o presente texto, bem como para fixar as notações que serão usadas ao longo do texto. Daremos particular atenção aos resultados de Cao-Shen-Zhu em [12] sobre o estudo do comportamento assintótico de hipersuperfícies mínimas estáveis; de S. Brendle em [10] para obter uma nova desigualdade geométrica e de Schoen-Yau em [42] para estudar as hipersuperfícies mínimas de crescimento Euclidiano devido sua importância para o Texto. Também faremos uma breve apresentação aos conjuntos de perímetro finito. Admitimos que o leitor tenha familiaridade com conceitos básicos de Geometria Riemanniana, como a definição de variedades diferenciáveis e plano Tangente. Doravante, entendemos por função suave uma função que seja C^∞ no espaço onde esteja definida.

1.1 Geometria das Subvariedades

Considere Σ^k uma subvariedade Riemanniana (não excluindo a possibilidade de ter fronteira) de uma variedade Riemanniana n -dimensional V dotada da métrica g e da derivada ∇_V .¹

Dado um campo vetorial X em Σ , podemos escrever $X = X^T + X^\perp$, onde X^T e X^\perp são as componentes tangencial e normal de X , respectivamente. A derivada covariante ∇_V

¹Apesar de utilizarmos apenas o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n no decorrer do texto, iremos considerar o caso geral para uma revisão mais abrangente.

em M induz uma derivada covariante ∇_Σ em Σ , dada por:

$$\nabla_\Sigma X := (\nabla_{\mathbf{v}} X)^T.$$

Podemos então definir a *segunda forma fundamental* A_Σ de Σ da seguinte forma: Dados $X, Y \in T_x \Sigma$, então

$$A_\Sigma(X, Y) := (\nabla_X Y)^\perp.$$

Observe que

$$\sum_{l=1}^{n-k} g(A_\Sigma(X, Y), N_l) N_l = \sum_{l=1}^{n-k} g\left(\sum_X Y, N_l\right) N_l = - \sum_{l=1}^{n-k} g(Y, \nabla_X N_l) N_l,$$

onde $\{N_l\}$ é uma base ortonormal de campos vetoriais para o espaço normal a Σ em uma vizinhança de x .

Com isto, podemos definir o *vetor curvatura média* H em x por

$$H = \sum_{i=1}^k A_\Sigma(E_i, E_i), \quad (1.1)$$

onde E_i é uma base ortonormal para $T_x \Sigma$.

Observação 1. Sabemos que no caso onde $k = n - 1$ o espaço normal a Σ em x é gerado por um único vetor unitário, o vetor normal externo que, a menos de menção explícita do contrário, será denotado por \mathbf{v} . Então, por (1.1), \vec{H} é dado por

$$\vec{H}(x) = H(x)\mathbf{v}.$$

Nestas condições, chamamos $H(x)$ de *curvatura média* em x . Esta situação irá se repetir com frequência ao longo deste trabalho e não faremos distinção de notação entre o vetor curvatura média e a curvatura média, mas isto não deve gerar confusões.

Agora, considere $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Podemos definir o *gradiente* de f como o único campo vetorial $\nabla_\Sigma f$ em Σ que satisfaz

$$\langle \nabla_\Sigma f, X \rangle = X(f), \quad (1.2)$$

para todo campo vetorial X em Σ . Fixado um referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ em uma

vizinhança de $x \in \Sigma$, vale que

$$\nabla_{\Sigma} f = \sum_{j=1}^n E_j(f) E_j.$$

Além disso, podemos definir a *divergência* do campo X como

$$\operatorname{div}_{\Sigma} X := \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{E_i} X, E_i).$$

Defina o *operador de Laplace-Beltrami* ou *Laplaciano* Δ_{Σ} em Σ por

$$\Delta_{\Sigma} f := \operatorname{div}_{\Sigma} (\nabla_{\Sigma} f).$$

Por fim, defina o *Hessiano* da função f no vetor $v \in T_x M$ como

$$(D_{\Sigma}^2 f)_x(v) := \nabla_v \nabla f,$$

e, para campos de vetores X e Y em Σ , a *forma quadrática Hessiana* ou simplesmente *Hessiana* por

$$D_{\Sigma}^2 f(X, Y) := \langle D_{\Sigma}^2 f(X), Y \rangle$$

Para uma exposição mais detalhada e para a prova das afirmações acima, consulte [30].

Observação 2. *Sempre que estiver claro no contexto, iremos omitir o símbolo do ambiente nas aplicações acima definidas.*

Definição 1. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma base ortonormal para $T_p M$. Se R denota a curvatura escalar em M e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$, definimos:*

1. *A curvatura de Ricci por*

$$\operatorname{Ric}(e_1, e_2) := \sum_{i=2}^n R(e_1, e_i, e_i, e_1);$$

2. *A curvatura bi-Ricci por*

$$\operatorname{bi-Ric}(e_i, e_j) := \sum_{k=2}^n R(e_i, e_k, e_k, e_i) + \sum_{l=3}^n R(e_j, e_l, e_l, e_j);$$

3. *E a curvatura a-bi-Ricci por*

$$bi-Ric_a(e_i, e_j) := \sum_{k=2}^n R(e_i, e_k, e_k, e_i) + a \sum_{l=3}^n R(e_j, e_l, e_l, e_j)$$

Observe que estas definições dependem fortemente da métrica e , em geral, não há uma forma conhecida de relacionar os valores acima para métricas distintas, exceto para o caso específico onde uma métrica é *conforme* a outra. Devido a sua importância neste artigo, iremos agora explicá-la em mais detalhes.

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana n -dimensional. Uma outra métrica \tilde{g} é dita ser *conforme* à métrica g se existe uma função suave positiva $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{g} = fg$. Como a função f é positiva, é comum escrever $f(x) = e^{2h(x)}$, onde $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave.

Observação 3. *Como dito antes, as quantidades geométricas dependentes da métrica mudam de valor quando alterada a métrica. Então, se \tilde{g} é conforme a g , a menos de menção explícita do contrário, as quantidades geométricas referentes à métrica \tilde{g} terão o símbolo ' \sim '. Por exemplo, se Δ_M é o operador de Laplace-Beltrami referente a (M, g) , então $\tilde{\Delta}_M$ é o operador de Laplace-Beltrami referente a (M, \tilde{g}) .*

Seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal, com relação a métrica g , em um aberto $U \subset M$. Se $\tilde{g} = e^{2h}g$ é uma métrica conforme, então

$$\tilde{g}(e^{-h}E_i, e^{-h}E_j) = e^{-2h}\tilde{g}(E_i, E_j) = g(E_i, E_j) = \delta_{ij},$$

donde segue que $\{e^{-h}E_i, \dots, e^{-h}E_n\}$ é um referencial ortonormal para $U \subset M$, com relação à métrica \tilde{g} .

O próximo resultado nos mostra como é feita a relação de certas quantidades geométricas entre métricas conformes (veja capítulo 7 de [30]).

Proposição 1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $\tilde{g} = e^{2h}g$, com $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Então, para quaisquer campos vetoriais X, Y em M , e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, vale que*

$$(a) \quad \tilde{\nabla}_M f = e^{-2h}\nabla f;$$

$$(b) \quad \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(h)Y + Y(h)X - g(X, Y)\nabla_M h;$$

$$(c) \widetilde{\operatorname{div}}X = \operatorname{div}X + \mathfrak{n}X(\mathfrak{h}); e$$

$$(d) \widetilde{\Delta}f = e^{-2h}(\Delta f + (\mathfrak{n} - 2)g(\nabla f, \nabla h)).$$

Além disso, é possível relacionar as curvaturas com relação às métricas g e \tilde{g} .

Proposição 2 (Proposição 7.30, [30]). *Se R e \bar{R} denotam respectivamente as curvaturas escalares não-normalizadas de M com respeito às métricas g e $\bar{g} = e^{2h}g$, então*

$$e^{2h}\bar{R} = R - 2(\mathfrak{n} - 1)\Delta h - (\mathfrak{n} - 1)(\mathfrak{n} - 2)|\nabla h|^2.$$

Para uso futuro, mostraremos também como as distâncias intrínsecas se relacionam, em uma variedade conexa compacta, sob uma mudança conforme induzida por uma imersão (vide [16, Lema 6.2]).

Lema 1. *Sejam $N^k, k \leq 1$, uma variedade conexa compacta, possivelmente com bordo, e $r(x) := d_{\mathbb{R}^m}(0, x)$. Então*

1. *Considere uma imersão $N^k \hookrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ e $p, q \in N$ com $d_{\tilde{g}}(p, q) \leq D$, onde $\tilde{g} = r^{-2}g$ e g é a métrica induzida em N . Então $r(p) \leq e^D r(q)$.*
2. *Considere uma imersão $\varphi : N^k \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ com $0 \in \varphi(N)$ e sejam $p, q \in N \setminus \varphi^{-1}(0)$ com $d_{\tilde{g}}(p, q) \leq D$. Se $\bar{r}(x) = d_g(\varphi^{-1}(0), x)$ denota a distância intrínseca em N , então $\bar{r}(p) \leq e^D \bar{r}(q)$.*

Demonstração. Item 1.: escolha uma curva $\gamma : [0, L] \rightarrow N$, parametrizada pela velocidade \tilde{g} -unitária, conectando p e q , tal que $L \leq D + \epsilon$. Calculamos

$$\log r(q) - \log r(p) = \int_0^L \frac{d}{dt} \log r(\gamma(t)) dt = \int_0^L r(\gamma(t))^{-1} g(\nabla r, \gamma'(t)) dt.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e usando que $|\nabla r|_g \leq 1$,

$$\begin{aligned} \log r(q) - \log r(p) &\leq \int_0^L r(\gamma(t))^{-1} |\nabla r|_g |\gamma'(t)|_g dt \\ &\leq \int_0^L r(\gamma(t))^{-1} |\gamma'(t)|_g dt \\ &= \int_0^L |\gamma'(t)|_{\tilde{g}} dt \\ &= L \leq D + \epsilon. \end{aligned}$$

Então, $r(q) \leq e^{D+\epsilon} r(p)$. O resultado segue fazendo $\epsilon \rightarrow 0$.

Item 2.: comecemos notando que $|\nabla \bar{r}|_g = 1$ e $r(x) \leq \bar{r}(x)$ para qualquer $x \in N$. Então, como antes,

$$\begin{aligned} \log \bar{r}(q) - \log \bar{r}(p) &= \int_0^L \frac{d}{dt} \log \bar{r}(\gamma(t)) dt = \int_0^L r(\gamma(t))^{-1} g(\nabla \bar{r}, \gamma'(t)) dt \\ &\leq \int_0^L r(\gamma(t))^{-1} |\nabla \bar{r}|_g |\gamma'(t)|_g dt \\ &= \int_0^L r(\gamma(t))^{-1} |\gamma'(t)|_g dt = \int_0^L |\gamma'(t)|_{\bar{g}} dt = L. \end{aligned}$$

Isto completa a prova. □

1.2 Hipersuperfícies Mínimas Estáveis

Apresentaremos agora os principais objetos de estudo deste trabalho. Esta e as próximas duas seções são baseadas no Capítulo 1 de [19] e nos Capítulos 1, 2 e 8 de [14].

Suponha que $u : \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e considere seu gráfico

$$\text{Graph}_u = \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^n; x \in \Omega\}.$$

Então sua área é dada por

$$\text{Area}(\text{Graph}_u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2} = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$$

Aplicando isto a uma família a 1-parâmetro de gráficos $\text{Graph}_{u+t\nu}$, onde $\nu|_{\partial\Omega} = 0$, temos que

$$\text{Area}(\text{Graph}_{u+t\nu}) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla \nu|^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Area}(\text{Graph}_{u+t\nu}) &= \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla u, \nabla \nu \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \\ &= \int_{\Omega} \text{div} \left(\nu \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) - \int_{\Omega} \nu \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Divergência, $\int_{\Omega} \text{div} \nu = 0$, segue que se u é ponto crítico do funcional

área, então satisfaz a equação

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \right) = 0. \quad (1.3)$$

Esta equação é conhecida como *equação das superfícies mínimas* e foi descoberta por L. Euler e J. L. Lagrange no século XVIII com o intuito de encontrar uma superfície que minimizasse a sua área ao ser delimitada por uma curva fechada fixa no espaço (problema este que posteriormente veio a ser conhecido como o “Problema de Plateau”), daí o nome *mínima*. O gráfico de uma solução da equação das superfícies mínimas minimiza a área, mas apenas das superfícies delimitadas pelo cilindro gerado pela curva dada. De fato, usando o *método de calibração* é possível obter o seguinte resultado

Proposição 3 (Lema 1.1, [19]). *Se $\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a equação das superfícies mínimas (1.3) e $\Sigma \subset \Omega \times \mathbb{R}$ é qualquer outra superfície com $\partial \Sigma = \partial \operatorname{Graph}_{\mathbf{u}}$, então*

$$\operatorname{Area}(\operatorname{Graph}_{\mathbf{u}}) \leq \operatorname{Area}(\Sigma).$$

Como é natural, surgiu o questionamento se hipersuperfícies mínimas minimizam a área de classes de variações mais gerais, e este é o desenvolvimento que segue.

1.2.1 Variações de Área

Primeiramente, precisamos generalizar a discussão anterior que deu origem a equação das superfícies mínimas. Para isto, precisamos da seguinte definição. Seja $F : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{N}$ uma variação de Σ com suporte compacto e bordo fixo, i.e., $F = \operatorname{Id}$ fora de um conjunto compacto,

$$F(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x},$$

e para todo $\mathbf{x} \in \partial \Sigma$,

$$F(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}.$$

O campo vetorial $\frac{\partial F}{\partial t}$ restrito a Σ é chamado o *campo vetorial de variações*, ou simplesmente *campo de variações* de F .

Definição 2. *Sejam $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{N}^{n+1}$ uma subvariedade e F uma variação de Σ . Definimos o*

funcional área por

$$A(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} d\mu_t = \int_{\Omega} F^* d\mu_t, \quad (1.4)$$

onde $\Omega_t \equiv F(\Omega, t)$, $\Omega \subset \Sigma$, $d\mu_t$ é o elemento de volume em Ω_t e $*$ denota a operação de pullback.

Teorema 2 (Primeira Variação de Área). *Seja $F : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma variação de $\Sigma \subset M$ com campo variacional $F_t := \frac{\partial F}{\partial t}$. Suponha que Σ é orientável e compacta. Então*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\Omega_t) = - \int_{\Sigma} \langle X, H \rangle d\mu + \int_{\partial\Sigma} \langle F_t, \nu \rangle d\sigma,$$

onde ν é o campo normal externo ao bordo de Σ tangente a Σ , $d\mu$ é o elemento de volume de Σ e $d\sigma$ é o elemento de área de $\partial\Sigma$.

Demonstração. Seja (X_i) uma carta local sobre Σ , nesta carta, $g_{ij}(t) := g\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j}\right) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle$. Defina $\xi_t = \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))}$, onde g^{ij} é o (i,j) -elemento da matriz inversa de g . Então,

$$\begin{aligned} A(\Omega_t) &= \int_{\Sigma} d\mu_t = \int_{\Sigma} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0)) \det(g_{ij}(0))} dx \\ &= \int_{\Sigma} \xi_t \sqrt{\det(g_{ij}(0))} dx = \int_{\Sigma} \xi_t d\mu_0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left. \frac{d}{dt} A(t) \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} (\xi_t) \sqrt{\det(g^{ij}(0))} dx. \quad (1.5)$$

Agora, para qualquer $x \in \Sigma$, escolhamos uma carta em Σ de modo que $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ e $\sqrt{\det(g_{ij}(0))} = \sqrt{\det(g^{ij}(0))} = 1$. Com isto,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \xi_t &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij}(0))}} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(g_{ij}(0)) \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(g_{ij}(0)) = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_{ij}(t) \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle F_i, F_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_t} F_0, F_i \rangle = \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_t} F_0^T, F_i \rangle + \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_t} F_0^\perp, F_i \rangle \\ &= \text{div}_{\Sigma} F_0^T + \text{div}_{\Sigma} F_0^\perp = \text{div}_{\Sigma} F^T - \langle F_0, H \rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Substituindo (1.6) em (1.5) e usando o Teorema de Stokes, obtemos que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(t) = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} F_0^T - \langle F_0, H \rangle \, d\mu = \int_{\partial\Sigma} \langle F_0^T, \nu \rangle \, d\sigma - \int_{\Sigma} \langle F_0, \nu \rangle \, d\mu.$$

Como ν é tangente a Σ , podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(t) = \int_{\partial\Sigma} \langle F_0, \nu \rangle - \int_{\Sigma} \langle F_0, \nu \rangle \, d\mu,$$

como desejávamos. □

Corolário 1. *Nas condições do Teorema anterior, se F é uma variação com suporte compacto, vale que*

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(t) = - \int_{\Sigma} \langle F_0, \nu \rangle \, d\mu_0.$$

Primeiramente, observe que o Corolário acima mostra que a definição de hipersuperfície mínima dada no início deste capítulo coincide com a definição de mínima como solução da equação das superfícies mínimas (1.3). Além disso, podemos concluir que estas são pontos críticos do funcional área. Como pontos críticos não são necessariamente pontos de mínimo, precisamos calcular a segunda derivada do funcional área.

Suponha que $\Sigma^k \subset M^n$ é uma hipersuperfície mínima e, como antes, F é uma variação de Σ com suporte compacto. Sem perda de generalidade, podemos supor que F é uma variação normal de Σ , i.e.,

$$F_t^T \equiv 0.$$

Teorema 3 (Segunda Variação de Área). *Suponha que $\Sigma^k \subset M^n$ seja uma subvariedade mínima. Seja F um variação normal de Σ com suporte compacto e cujo campo variacional seja F_t , então*

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} A(\Omega_t) = - \int_{\Sigma} |\langle A(\cdot, \cdot), F_t \rangle|^2 + |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 - \operatorname{Ric}(F_t, F_t) \, d\mu_0.$$

Demonstração. Como na primeira variação, seja (X_i) um sistema de coordenadas locais, a princípio arbitrário, sobre Σ , e defina $g_{ij}(t) = g_{ij}(X_i, X_j) \equiv \langle X_i, X_j \rangle$ e $\xi_t = \sqrt{\det(g_{ij}(t))}$ $\sqrt{\det(\bar{g}^{ij}(t))}$. Então,

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} A(\Omega_t) = \int_{\Sigma} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \xi_t \sqrt{\det(g_{ij}(0))} = \int_{\Sigma} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \xi_t \, d\mu_0. \quad (1.7)$$

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{\det(\mathbf{g}_{ij}(t))} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g}_{ij}(t))}} \left(\frac{d}{dt} \det(\mathbf{g}_{ij}(t)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{g}_{ij}(t))}} \text{Tr}(\mathbf{g}'_{ij}(t) \mathbf{g}^{lm}(t)). \end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados por $\sqrt{\det(\mathbf{g}^{ij}(0))}$, obtemos que

$$2 \frac{d}{dt} \xi_t = \text{Tr}(\mathbf{g}'_{ij}(t) \mathbf{g}^{lm}(t)) \xi_t.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2}{dt^2} \xi_t &= \frac{d}{dt} \text{Tr}(\mathbf{g}'_{ij}(t) \mathbf{g}^{lm}(t)) \xi_t + \text{Tr}(\mathbf{g}'_{ij}(t) \mathbf{g}^{lm}(t)) \frac{d}{dt} \xi_t \\ &= \text{Tr}(\mathbf{g}''_{ij}(t) \mathbf{g}^{lm}(t) + \mathbf{g}_{ij}(t) (\mathbf{g}^{lm})'(t)) \xi_t + \text{Tr}(\mathbf{g}'_{ij}(t) \mathbf{g}^{lm}(t)) \frac{d}{dt} \xi_t. \end{aligned}$$

Por (1.6), temos que

$$2 \frac{d^2}{dt^2} \xi_t = \text{Tr}(\mathbf{g}''_{ij}(t) \mathbf{g}^{lm}(t) + \mathbf{g}_{ij}(t) (\mathbf{g}^{lm})'(t)) + \frac{1}{2} (\text{Tr}(\mathbf{g}'_{ij}(t) \mathbf{g}^{lm}(t)))^2 \xi_t. \quad (1.8)$$

Como antes, escolhemos um sistema de coordenadas (X_i) ortonormal em \mathbf{x} , de modo que $\mathbf{g}^{ij}(t) \mathbf{g}_{jk}(t) = \delta_{ij}$. Diferenciando esta relação, obtemos que $(\mathbf{g}^{ij})'(t) \mathbf{g}_{jk}(t) = -\mathbf{g}^{ij}(t) \mathbf{g}'_{jk}(t)$ e portanto, $(\mathbf{g}^{ij})'(0) = \delta_{ij} \mathbf{g}'_{jk}(0)$. Usando isto em (1.8), obtemos que

$$2 \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \xi_t = \text{Tr}(\mathbf{g}''_{ij}(0)) - \text{Tr}(\mathbf{g}'_{ij}(0) \mathbf{g}'_{lm}(0)) + \frac{1}{2} (\text{Tr}(\mathbf{g}'_{ij}(0)))^2. \quad (1.9)$$

Por outro lado, sabemos que $\nabla_{F_t} F_{x_i} - \nabla_{F_{x_i}} F_t = [F_t, F_{x_i}] = 0$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'_{ij}(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{g}(F_i, F_j) = F_t \mathbf{g}(F_i, F_j) \\ &= \mathbf{g}(\nabla_{F_t} F_i, F_j) + \mathbf{g}(F_i, \nabla) = \mathbf{g}(\nabla_{F_i} F_t, F_j) + \mathbf{g}(F_i, \nabla_{F_j} F_t) \\ &= F_i \mathbf{g}(F_t, F_j) - \mathbf{g}(F_t, \nabla_{F_i} F_j) + F_j \mathbf{g}(F_i, F_t) - \mathbf{g}(\nabla_{F_j} F_i, F_t) \\ &= -\mathbf{g}(F_t, (\nabla_{F_i} F_j)^N) - \mathbf{g}((\nabla_{F_j} F_i)^N, F_t) = -\mathbf{g}(F_t, \mathbf{A}_\Sigma(F_i, F_j)) \\ &= -\mathbf{g}(\mathbf{A}(F_j, F_i), F_t) - 2\mathbf{g}(F_t, \mathbf{A}(F_i, F_j)). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \text{Tr} (g'_{ij}(0)) &= \sum_{i=1}^k g'_{ii}(0) = \sum_{i=1}^k -2g (F_t, A_\Sigma(F_i, F_j)) \\ &= -2g \left(F_t, \sum_{i=1}^k A(F_i, F_j) \right) = -2g(F_t, H) = 0, \end{aligned}$$

pois Σ é mínima. Então podemos reescrever (1.8) como

$$2 \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \xi_t = \text{Tr} (g''_{ij}(0)) - \text{Tr} (g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)). \quad (1.11)$$

Agora, note que por (1.9)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k g(F_{itt}, F_i) &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_t} F_i, F_i) \\ &= \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_t} \nabla_{F_i} F_t - \nabla_{F_i} \nabla_{F_t} F_t - \nabla_{[F_t, F_i]} F_t, F_i) + \sum_{i=1}^k g(\nabla_{F_i} \nabla_{F_t} F_t, F_i) \\ &= \sum_{i=1}^k g (R_M(F_t, F_i)F_t, F_i) + \text{div}_\Sigma (F_{tt}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Tr} (g'_{ij}(0)) &= \sum_{i=1}^k g''_{ii}(0) = \sum_{i=1}^k 2g (F_{itt}, F_i) + 2g (F_{it}, F_{it}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^k g (R_M(F_t, F_i)F_t, F_i) + 2\text{div}_\Sigma(F_{tt}) + 2 \sum_{i=1}^k g (F_{it}, F_{it}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^k g (R_M(F_t, F_i)F_t, F_i) + 2\text{div}_\Sigma(F_{tt}) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^k g (F_{it}^T, F_{it}^T) + 2 \sum_{i=1}^k g (F_{it}^\perp, F_{it}^\perp). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Usando isto e o fato da variação ser normal, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k g(F_{it}^T, F_{it}^T) &= \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_i} F_i)^T, (\nabla_{F_i} F_i)^T) = \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_i} F_t)^T, (\nabla_{F_i} F_t)^T) \\
 &= \sum_{i=1}^k g\left(\sum_{j=1}^k g(\nabla_{F_i} F_t, F_j) F_j, \sum_{l=1}^k g(\nabla_{F_i} F_t, F_{xl}) F_{xl}\right) \\
 &= \sum_{i,j,l=1}^k g(\nabla_{F_i} F_t, F_j) g(\nabla_{F_i} F_t, F_l) g(F_j, F_l) \\
 &= \sum_{i,j,l=1}^k g(\nabla_{F_i} F_t, F_j) g(\nabla_{F_i} F_t, F_l) \delta_{jl} \\
 &= \sum_{i,j=1}^k g(\nabla_{F_i} F_t, F_j)^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^k (F_i g(F_t, F_j) - g(F_t, \nabla_{F_i} F_j))^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^k (g(F_t, \nabla_{F_i} F_j))^2 = \sum_{i,j=1}^k g\left(F_t, (\nabla_{F_i} F_j)^\perp\right)^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^k g(A_\Sigma(F_i, F_j), F_t)^2.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Agora, por (1.9), vale que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k g(F_{it}^\perp, F_{it}^\perp) &= \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_t} F_i)^\perp, (\nabla_{F_t} F_i)^\perp) \\
 &= \sum_{i=1}^k g((\nabla_{F_i} F_t)^\perp, (\nabla_{F_i} F_t)^\perp) \\
 &= \sum_{i=1}^k g\left|(\nabla_{F_i} F_t)^\perp\right|^2 \\
 &= \left|(\nabla_{\Sigma}^\perp F_t)^\perp\right|^2.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Substituindo (1.13) e (1.14), temos que

$$\begin{aligned} \text{Tr} (g''_{ij}(0)) &= 2\text{div}_\Sigma(F_{tt}) + 2 \sum_{i=1}^k g(\mathcal{R}_M(F_t, F_i)F_t, F_i) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^k g(\mathcal{A}_\Sigma(F_i, F_j), F_t)^2 + 2|\nabla_\Sigma^\perp F_t|^2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Usando (1.10),

$$\begin{aligned} \text{Tr} (g'_{ij}(0), g'_{lm}(0)) &= \sum_{i,j=1}^k g'_{ij}(0)g'_{ji}(0) = \sum_{i,j=1}^k (g'_{ij}(0))^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^k (-2g(\mathcal{A}_\Sigma(F_i, F_j), F_t))^2 = 4 \sum_{i,j=1}^k (g(\mathcal{A}_\Sigma(F_i, F_j), F_t))^2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Substituindo (1.15) e (1.16) em (1.11), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \xi_t &= - \sum_{i,j=1}^k (g(\mathcal{A}_\Sigma(F_i, F_j), F_t))^2 + |\nabla_\Sigma^\perp F_t|^2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^k g(\mathcal{R}_M(F_t, F_i)F_i, F_t) + \text{div}_\Sigma(F_{tt}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Substituindo (1.17) em (1.5),

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} A(t) &= - \sum_{i,j=1}^k \int_\Sigma \langle \mathcal{A}(F_i, F_j), F_0 \rangle^2 d\mu_0 \\ &\quad + \int_\Sigma |\nabla_\Sigma^\perp F_t|^2 d\mu_0 \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \int_\Sigma \langle \mathcal{R}_M(F_t, F_i)F_i, F_t \rangle d\mu_0, \end{aligned}$$

como desejávamos. □

Com isto, podemos finalmente definir:

Definição 3. Dizemos que uma hipersuperfície mínima $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ é estável se, para todas as variações F de Σ , com suporte compacto, tivermos $A''(0) \geq 0$.

Logo, hipersuperfícies mínimas estáveis são exatamente aquelas que se procurava desde

a definição de superfície mínimas, isto é, são as minimizantes de área sob uma variação suave arbitrária de superfícies.

Agora, defina o operador auto-adjunto, conhecido como *operador de estabilidade*,

$$LX = \Delta_{\Sigma}^{\perp} X + \text{Tr}(\mathbf{R}_M(\cdot, X)\cdot) + \mathbf{B}(X), \quad (1.18)$$

para campos vetoriais normais X em Σ . Acima, \mathbf{B} é o *operador de Simon* definido por

$$\sum_{i,j=1}^k g(\mathbf{A}_{\Sigma}(E_i, E_j), X) \mathbf{A}(E_i, E_j)$$

Para hipersuperfícies com fibrado trivial (como o caso de hipersuperfícies em \mathbb{R}^n), o operador de estabilidade pode ser simplificado da seguinte forma: Se considerarmos $X = f\nu$, para uma função suave f dada, então

$$Lf = \Delta_{\Sigma} f + |\mathbf{A}_{\Sigma}|^2 + \text{Ric}_M(\nu, \nu)f,$$

onde Ric_M é o tensor de Ricci em M .

Observe que a segunda variação implica que se $\Sigma^k \subset M^n$ é uma subvariedade mínima, então a Hessiana do funcional área em Σ é dada por

$$- \int_{\Sigma} \langle \cdot, L(\cdot) \rangle.$$

Com isto, podemos dizer que Σ^k é estável se para qualquer variação F com suporte compacto, vale que

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Vol}(F(t)) = - \int_{\Sigma} \langle F_t, LF_t \rangle \geq 0.$$

Lema 2 (Desigualdade de Estabilidade, [19]). *Suponha que $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ é uma hipersuperfície mínima estável com fibrado normal trivial, então para toda função Lipschitziana f com suporte compacto*

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}_M(\nu, \nu) + |\mathbf{A}_{\Sigma}|^2) f^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^2.$$

Demonstração. Como Σ é estável,

$$0 \leq - \int_{\Sigma} f \mathbf{L} f = - \int_{\Sigma} (f \Delta_{\Sigma} f + |\mathbf{A}_{\Sigma}|^2 f^2 + \text{Ric}_{\Sigma}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) f^2).$$

Integrando por partes,

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}_{\mathbf{M}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + |\mathbf{A}_{\Sigma}|^2) f^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^2,$$

como desejávamos. □

Exemplo 1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a equação das superfícies mínimas, então u é estável.*

De fato, seja $\tilde{F}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\tilde{F}_t(x) = (x, u(x) + t)$ uma variação de Ω . Escolha $f_t : \Omega \rightarrow \Omega$ tal que $F_t = \tilde{F}_t \circ f_t$ é uma variação normal. Então, se $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ é um referencial ortonormal, vale que

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} F_t = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \tilde{F}_t \circ f_t = E_{n+1} + \tilde{F}'_0 \circ f'_0. \quad (1.19)$$

Como f'_0 é um campo vetorial em Ω , $\tilde{F}'_0 \circ f'_0$ é um campo vetorial tangente ao gráfico u . Então, podemos escolher f_t de modo que cancele com a componente tangencial de E_{n+1} , logo

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} F_t = E_{n+1}^{\perp} = \langle E_{n+1}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}. \quad (1.20)$$

Este processo produz uma variação F_t com campo de variações $f\mathbf{v}$ na origem. Isto implica que

$$0 = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} H_t = -\Delta f - |\mathbf{A}|^2 f, \quad (1.21)$$

e então $L_{\Sigma} f = 0$. Note que $\langle E_{n+1}, \mathbf{v} \rangle > 0$, então pelo Teorema de Barta (Proposição 5, que será apresentado mais adiante) isto implica que Graph_u é estável.

Como sabemos, toda hipersuperfície suave é localmente um gráfico, então toda hipersuperfície mínima é localmente estável. Neste ponto surge naturalmente a pergunta que motivou o Teorema de Bernstein clássico: existe alguma hipersuperfície mínima de \mathbb{R}^n , não planar, que é globalmente um gráfico (e portanto estável)? Esta pergunta constitui, como sabemos, o problema clássico de Bernstein, cuja resposta é negativa para $n = 3$, como foi provado por Bernstein em 1915; negativa para $4 \leq n \leq 8$ e positiva para $n \geq 9$,

por Bombieri-De Giorgi-Giusti em [9].

1.2.2 Propriedades das Hipersuperfícies Estáveis

Passaremos agora a estudar algumas das principais propriedades que derivam do conceito de estabilidade. Começemos com uma importante caracterização variacional para o primeiro autovalor associado ao operador de estabilidade de uma hipersuperfície mínima estável.

Lema 3 (Lema 1.34, [19]). *Sejam L o operador de estabilidade, $\Omega \subset \Sigma$ um domínio limitado e $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega, L)$ o primeiro autovalor associado a L . Então vale que*

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^2 - |A_{\Sigma}|^2 f^2 - \text{Ric}_{\mathcal{M}}(\nu, \nu) f^2}{\int_{\Sigma} f^2}; f \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}. \quad (1.22)$$

Além disso, se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo

$$\frac{\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} u|^2 - |A_{\Sigma}|^2 u^2 - \text{Ric}_{\mathcal{M}}(\nu, \nu) u^2}{\int_{\Sigma} u^2} = \lambda_1, \quad (1.23)$$

então u é suave e $Lu = -\lambda_1 u$.

Da Teoria Espectral, sabemos que associado o espectro do operador de estabilidade L_{Σ} é discreto e dado por uma sequência de autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow \infty$ e que $L_{\Sigma} f \geq 0$ se, e somente se, $\lambda_1 \geq 0$. Isto mostra que a estabilidade está diretamente conectada com o valor do primeiro autovalor do operador de estabilidade. Já o seguinte resultado mostra que a primeira autofunção não muda de sinal.

Lema 4 (Lema 1.35, [19]). *Se u é uma função suave em Ω que se anula em $\partial\Omega$ e $Lu = -\lambda_1 u$ onde $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega; L)$, então u não muda de sinal em Ω .*

Uma condição suficiente para garantir a estabilidade de uma hipersuperfície é dada no seguinte resultado.

Lema 5 ([7]). *Seja Σ uma hipersuperfície mínima com fibrado normal não-trivial, L o operador de estabilidade e $\Omega \subset \Sigma$ um domínio limitado. Se existe uma função positiva u em Ω com $Lu = 0$, então Ω é estável.*

Demonstração. Seja $q = |A_\Sigma|^2 + \text{Ric}_M(\nu, \nu)$, então $L = \Delta_\Sigma + q$. Como $u > 0$, podemos definir $w := \log u$ e calcular $\nabla w = u^{-1} \nabla u$,

$$\Delta_\Sigma w = \frac{\Delta_\Sigma u}{u} - |\nabla_\Sigma w|^2 = -q - |\nabla_\Sigma w|^2. \quad (1.24)$$

Seja $f \in C_c^\infty(\Omega)$. Multiplicando ambos os lados de (1.24) por f^2 e integrando, obtemos que

$$\int_\Omega f^2 q + f^2 |\nabla_\Sigma w|^2 = - \int_\Omega f^2 \Delta_\Sigma w.$$

Integrando por partes e usando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young,

$$- \int_\Omega f^2 \Delta_\Sigma w = \int_\Omega 2 \langle f \nabla_\Sigma f, \nabla_\Sigma w \rangle \leq \int_\Omega 2 |f \nabla_\Sigma f| |\nabla_\Sigma w| \leq \int_\Omega f^2 |\nabla_\Sigma w|^2 + \int_\Omega |\nabla_\Sigma f|^2.$$

Portanto,

$$\int_\Omega f^2 q \leq \int_\Omega |\nabla_\Sigma f|^2. \quad (1.25)$$

Como $fLf = f \nabla_\Sigma f + f^2 q = \frac{1}{2} \Delta_\Sigma f^2 - |\nabla_\Sigma f|^2 + f^2 q$, (1.25) implica que

$$- \int_\Omega fLf \geq 0,$$

como desejávamos. □

O seguinte clássico resultado, devido a Fischer-Colbrie D. e Schoen R. [24], estabelece uma importante equivalência entre estabilidade e existência de uma função positiva que anula o operador de estabilidade.

Proposição 4 ([24]). *Se Σ é uma hipersuperfície mínima completa não-compacta com fibrado normal trivial, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\lambda_1(\Omega, L) \geq 0$ para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \Sigma$;
- (b) $\lambda_1(\Omega, L) > 0$ para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \Sigma$;
- (c) Existe uma função positiva u tal que $Lu = 0$.

Demonstração. Pelo Lema 5 temos que o item (c) implica no item (a). Também claramente (b) implica (a). Agora, suponha que vale (a) e considere um domínio limitado

arbitrário $\Omega_0 \subset \Sigma$. Escolha outro domínio limitado $\Omega_1 \subset \Sigma$ suficientemente grande de modo que $\Omega_0 \subset \Omega_1$. Pelo Lema 3,

$$\lambda_1(\Omega_0; L) \geq \lambda_1(\Omega_1; L) \geq 0. \quad (1.26)$$

Seja u_0 a primeira autofunção para L em Ω_0 e defina

$$u(x) := \begin{cases} u_0(x), & \text{se } x \in \Omega_0, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Suponha que ocorre a igualdade em (1.26). Então $Lu_1 = -\lambda_1 u$ em Ω_1 e, pelo Lema 4, $u > 0$ em Ω_1 , mas isto é um absurdo, pois por definição u é identicamente nulo em $\Omega_1 \setminus \Omega_0$. Portanto $\lambda_1(\Omega; L) > 0$, estabelecendo que (a) e (b) são equivalentes.

Resta então estabelecer que (b) implica (c). Para isto, para cada $r > 0$, considere $B_r^\Sigma(\mathbf{p})$ a bola intrínseca aberta de raio r centrada em $\mathbf{p} \in \Sigma$. Como por hipótese $\lambda_1(B_r^\Sigma(\mathbf{p}); L) > 0$, segue da Alternativa de Fredholm (vide, por exemplo, [11, Teorema 6.6]) que existe uma única função v_r com

$$\begin{cases} Lv_r = -|A_\Sigma|^2 - \text{Ric}_M(v_r, v_r) & \text{em } B_r^\Sigma(\mathbf{p}), \\ v_r = 0, & \text{em } \partial B_r^\Sigma(\mathbf{p}). \end{cases}$$

Escrevendo $u_r = v_r + 1$ na equação acima obteremos

$$\begin{cases} Lu_r = 0, & \text{em } B_r^\Sigma(\mathbf{p}), \\ u_r = 1, & \text{em } \partial B_r^\Sigma(\mathbf{p}). \end{cases} \quad (1.27)$$

Suponha que $A := \{x \in B_r^\Sigma(\mathbf{p}); u_r(x) < 0\} \neq \emptyset$. Então, existe uma componente conexa C não-vazia de A . Por construção, $u_r < 0$ em C e $u_r = 0$ em ∂C , logo pelo Lema 4, $\lambda_1(\Omega; L) = 0$, um absurdo. Logo $u_r \geq 0$ em $B_r^\Sigma(\mathbf{p})$ e, pelo Princípio do Máximo, $u_r > 0$ em $B_r^\Sigma(\mathbf{p})$.

Agora, para $r > 0$, defina

$$w_r := (u_r(\mathbf{p}))^{-1} u_r$$

e observe que $Lw_r = 0$ e $w_r(\mathbf{p}) = 1$. Considere K um conjunto compacto com $K \subset B_{R_0}^\Sigma(\mathbf{p})$.

Como w_r é uma função positiva, segue da Desigualdade de Harnack (Proposição 32) que, para qualquer $r \geq 2R_0$,

$$\sup_K w_r \leq C_K.$$

Segue então das Estimativas Interior e de Fronteira de Schauder (consultar, por exemplo, [47]) que

$$\|w_r\|_{C^{2,\alpha}(K)} \leq C'_K.$$

Pelo Teorema de Ascoli-Arzelà, podemos tomar uma subsequência de w_r que converge $C^{2,\frac{\alpha}{2}}$ -uniformemente em conjuntos compactos para uma função w . Esta convergência garante que $Lw = 0$, $w \geq 0$ e $w(p) = 1$. Pela Desigualdade de Harnack (Proposição 32), isto implica que w é positiva, sendo portanto a função procurada. Isto completa a prova. \square

Lema 6 (Schoen-Yau, [42]). *Se $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ é uma hipersuperfície mínima 2-lados, então vale que*

$$R_g = 2\text{Ric}_g(\nu, \nu) + |II|^2 + R_\Sigma, \tag{1.28}$$

ao longo de Σ_s .

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal para $T_p\Sigma$. Então $\{e_1, \dots, e_n, \nu\}$ é uma base ortonormal para T_pM . Logo,

$$\begin{aligned} R_g &= \text{Ric}_g(\nu, \nu) + \sum_{i=1}^{n-1} \text{Ric}_g(e_i, e_i) \\ &= \text{Ric}_g(\nu, \nu) + \sum_{i=1}^{n-1} R_g(e_i, \nu, \nu, e_i) + \sum_{i,j=1}^{n-1} R_g(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ &= 2\text{Ric}_g(\nu, \nu) + \sum_{i,j=1}^{n-1} R_g(e_i, e_j, e_i, e_j) \end{aligned}$$

Isto por definição implica que

$$\begin{aligned}
 R_g &= 2\text{Ric}_g(\nu, \nu) + \sum_{i,j=1}^{n-1} g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_j - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{[e_i, e_j]} e_j, e_i) \\
 &= 2\text{Ric}_g(\nu, \nu) + \sum_{i,j=1}^{n-1} (\nabla_{e_i} (\nabla_{e_j}^\Sigma - \text{II}(e_j, e_j))\nu - \nabla_{e_j} (\nabla_{e_i}^\Sigma e_j + \text{II}(e_i, e_j)\nu) \\
 &\quad - (\nabla_{[e_i, e_j]}^\Sigma + \text{II}([e_i, e_j], e_j)), e_i)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 R_g &= 2\text{Ric}_g(\nu, \nu) - \sum_{i,j=1}^{n-1} g\left(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j}^\Sigma e_j - \nabla_{e_i} \nabla_{e_i}^\Sigma e_j - \nabla_{[e_i, e_j]}^\Sigma e_j, e_i\right) \\
 &= 2\text{Ric}_g(\nu, \nu) - \sum_{i,j=1}^{n-1} \text{II}(e_i, e_j)g(\nabla_{e_i} \nu, e_i) \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^{n-1} g\left(\nabla_{e_i}^\Sigma \nabla_{e_j}^\Sigma e_j - \nabla_{e_j}^\Sigma \nabla_{e_i}^\Sigma e_j - \nabla_{[e_i, e_j]}^\Sigma e_j, e_i\right) \\
 &= 2\text{Ric}_g(\nu, \nu) - \sum_{i,j=1}^{n-1} \text{II}(e_i, e_j)g(\nabla_{e_i} \nu, e_i) + R_\Sigma.
 \end{aligned}$$

Pela Compatibilidade da conexão,

$$g(\nabla_{e_i} \nu, e_i) = e_i g(\nu, e_i) - g(\nu, \nabla_{e_i} e_i) = -(\nabla_{e_i} e_i)^\top = -\text{II}(e_i, e_i).$$

Logo,

$$R_g = 2\text{Ric}_g(\nu, \nu) + \sum_{i,j=1}^{n-1} \text{II}(e_i, e_j)\text{II}(e_i, e_i) + R_\Sigma$$

□

Observação 4. *Observe que, analisando melhor a prova acima, é fácil ver que, para hipersuperfícies em geral, vale*

$$R_g = 2\text{Ric}_g(\nu, \nu) + |A_\Sigma|^2 + R_\Sigma - H, \quad (1.29)$$

onde H é a curvatura média de Σ .

Uma propriedade importante que hipersuperfícies mínimas possuem é que a propriedade de estabilidade pode ser passada para o recobrimento universal, de modo, sempre

que necessário e em condições favoráveis, é se de hipersuperfícies mínimas estáveis conexas podem ser

Proposição 5 (Barta, [7]). *Uma hipersuperfície mínima 2-lados $\Sigma \rightarrow (M^{n+1}, g)$ é estável se, e somente se, existe uma função $u \in C^\infty(\Sigma \setminus \partial\Sigma)$ com $u > 0$ em $\Sigma \setminus \partial\Sigma$, tal que $L_\Sigma u \leq 0$, onde $L_\Sigma := \Delta + |A_\Sigma|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)$ é o operador de estabilidade.*

Demonstração. Suponha que Σ é estável. Se Σ é compacta, notemos que a primeira autofunção de L_Σ satisfaz $L_\Sigma \varphi = -\lambda \varphi \leq 0$, pois $\lambda \geq 0$, $\varphi > 0$. Se Σ é não-compacta, escolha $p \in \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ uma exaustão por regiões compactas com fronteiras suaves de Σ . Fixe φ_i a primeira autofunção de L_Σ em Ω_i , normalizada de modo que $\varphi_i(p) = 1$. Note que a caracterização variacional do primeiro autovalor (Lema 3) nos dá

$$0 \leq \lambda(\Omega_{i+1}) \leq \frac{\int_\Sigma |\nabla \varphi_i|^2 - V \varphi_i^2}{\int_\Sigma \varphi_i^2} = -\frac{\int_\Sigma \varphi_i L_\Sigma \varphi_i}{\int_\Sigma \varphi_i^2} = \lambda(\Omega_i).$$

Logo, $\lambda(\Omega_i) \rightarrow \lambda_* \geq 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Então, para qualquer conjunto compacto fixado $K \subset \Sigma$, obtemos que φ_i satisfaz a EDP dada por $L_\Sigma \varphi_i + \lambda(\Omega_i) \varphi_i = 0$, com limitação uniforme dos coeficientes em K . Então, pela desigualdade de Harnack (Proposição 32), para $K' \Subset K$, temos

$$\sup_{K'} \varphi_i \leq C \inf_{K'} \varphi_i \leq C \varphi_i(p) = C.$$

Pela Teoria de Schauder (consultar [47]), obtemos que

$$\|\varphi_i\|_{C^{k,\alpha}(K'')} \leq C,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, onde $K'' \Subset K'$. Podemos então passar para a subsequência diagonal para obter $\varphi_i \rightarrow u$ em $C_{\text{loc}}^\infty(\Sigma)$ tal que

$$L_\Sigma u + \lambda_* u = 0.$$

Note que $u \geq 0$, $u(p) = 1$ e que pelo Princípio do Máximo, $u > 0$ em $\Sigma \setminus \partial\Sigma$.

Suponha agora que existe $u > 0$ em $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ com $L_\Sigma u \leq 0$. É suficiente mostrar que $\lambda(\Omega) \geq 0$ para qualquer $\Omega \Subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$ com bordo suave. Coloque $w := \log u$. Então,

$$\nabla w = \frac{\nabla u}{u} \quad \rightarrow \quad \Delta w = \frac{\Delta u}{u} - |\nabla w|^2 \leq -V - |\nabla w|^2.$$

Para $f \in C_c^\infty(\Omega)$, multiplique por f^2 e integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \nabla f^2 + |\nabla w|^2 f^2 &\leq \int_{\Sigma} \langle \nabla w, \nabla f^2 \rangle \\ &= \int_{\Sigma} 2|f| |\nabla w| |\nabla f| \\ &\leq \int_{\Sigma} |\nabla w|^2 f^2 + |\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Então, obtemos que

$$\int_{\Sigma} \nabla f^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla f|^2,$$

estabelecendo a estabilidade. □

Corolário 2. *Se $\Sigma^n \hookrightarrow (M^{n+1}, g)$ é uma hipersuperfície mínima estável 2-lados e $\pi : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ é o recobrimento universal de Σ , então $\tilde{\Sigma} \rightarrow (M, g)$ é uma hipersuperfície mínima estável.*

1.3 Fins de Hipersuperfícies Mínimas Estáveis

Nesta seção estudaremos o comportamento dos fins de uma hipersuperfície mínima. Intuitivamente, compreendemos um *fim* de uma variedade como um "pedaço da variedade que se estende ao infinito". Apesar da aparente generalidade e, por consequência, dificuldade em obter informações úteis, existe uma vasta gama de resultados profundos envolvendo o número e comportamento do fins de superfícies mínimas. Por exemplo, o clássico resultado devido a Schoen em [39] que afirma que o catenóide é a única superfície mínima em \mathbb{R}^3 com curvatura total finita e dois fins mergulhados. Devido a estes resultados, é natural tentar estudar os fins de hipersuperfícies mínimas. No entanto, em \mathbb{R}^n com $n \geq 4$, Cao-Shen-Zhu descobriram em [12] um resultado surpreendente: toda hipersuperfície mínima estável 2-lados em \mathbb{R}^n possui um único fim. Dedicaremos esta seção para apresentar este resultado.

Definição 4. *Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g) , dizemos que um conjunto E é um **fim com respeito a um subconjunto** $\Omega \subset M$, se este for uma componente conexa ilimitada de $M \setminus \Omega$. Se E for um fim para qualquer subconjunto compacto $\Omega \subset M$, então dizemos que E é um **fim**.*

Para isto, precisaremos do seguinte lema.

Lema 7 (Yau, [48]). *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima. Se $d_\Sigma(x, \partial\Sigma) > r$ para algum $x \in \Sigma$, então*

$$|B_r^\Sigma(x)| \geq |B_1(0)| r^n,$$

onde $B_1(0)$ é a bola Euclidiana n -dimensional de raio r centrada na origem.

Teorema 4 (Schoen-Yau, [42]). *Se $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima estável, 2-lados, completa, então não pode existir uma função harmônica u não constante em Σ com $|\nabla^\Sigma u| \in L^2(\Sigma)$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe uma tal função u e tome uma função teste $g \in C_c^\infty(\Sigma)$. Definindo $f = |\nabla^\Sigma u|g$ e substituindo na desigualdade de estabilidade, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Sigma |A_\Sigma|^2 |\nabla_\Sigma u|^2 g &\leq \int_\Sigma |\nabla^\Sigma f|^2 = \int_\Sigma |g \nabla^\Sigma |\nabla^\Sigma u| + |\nabla^\Sigma u| \nabla^\Sigma g|^2 \\ &= \int_\Sigma g^2 |g \nabla^\Sigma |\nabla^\Sigma u||^2 + 2g |\nabla^\Sigma u| \langle \nabla^\Sigma |\nabla^\Sigma u|, \nabla^\Sigma g \rangle + |\nabla^\Sigma u|^2 |\nabla^\Sigma g|^2 \\ &= \int_\Sigma g^2 |\nabla^\Sigma |\nabla^\Sigma u||^2 + \frac{1}{2} \langle \nabla^\Sigma |\nabla^\Sigma u|^2, \nabla^\Sigma g^2 \rangle + |\nabla^\Sigma u|^2 |\nabla^\Sigma g|^2. \end{aligned}$$

Integrando por partes, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Sigma |A_\Sigma|^2 |\nabla_\Sigma u|^2 g &\leq \int_\Sigma g^2 |\nabla^\Sigma |\nabla^\Sigma u||^2 - \frac{1}{2} g^2 \Delta_\Sigma |\nabla_\Sigma u|^2 + |\nabla^\Sigma u|^2 |\nabla^\Sigma g|^2 \\ &= \int_\Sigma |\nabla_\Sigma u| \Delta_\Sigma |\nabla_\Sigma u| + |\nabla_\Sigma u|^2 |\nabla^\Sigma g|^2. \end{aligned}$$

Usando a Fórmula de Bochner (lembrando que a curvatura de Ricci é nula em \mathbb{R}^n),

$$\int_\Sigma |A_\Sigma|^2 |\nabla_\Sigma u|^2 g \leq \int_\Sigma -\frac{1}{n-1} |\nabla^\Sigma |\nabla^\Sigma u||^2 + |A_\Sigma|^2 |\nabla^\Sigma u|^2 2g^2 + |\nabla^\Sigma u|^2 |\nabla^\Sigma g|^2.$$

Reorganizando,

$$\int_\Sigma \frac{1}{n-1} |\nabla^\Sigma |\nabla^\Sigma u||^2 g^2 \leq \int_\Sigma |\nabla^\Sigma u|^2 |\nabla^\Sigma g|^2.$$

Agora tome $R > 0$. Escolha g de tal modo que $g \equiv 1$ em $B_R^\Sigma(0)$ e $g \equiv 0$ fora de $B_{2R}^\Sigma(0)$.

Então $\nabla^\Sigma g \leq CR^{-1}$, para alguma constante $C > 0$. Logo,

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}^\Sigma(0)} \frac{1}{n-1} |\nabla^\Sigma |\nabla^\Sigma u||^2 \leq O(R^{-2}) \int_\Sigma |\nabla_\Sigma u|^2 = O(R^{-2}).$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$, obtemos que $|\nabla^\Sigma |\nabla^\Sigma \mathbf{u}| \equiv 0$, portanto $|\nabla^\Sigma \mathbf{u}|$ deve ser constante. Como \mathbf{u} é não-constante, o valor de $|\nabla^\Sigma \mathbf{u}|$ é não-nulo. Mas isto contradiz o Lema 7. \square

Podemos agora mostrar o resultado principal desta seção.

Teorema 5 (Cao-Shen-Zhu, [12]). *Seja M^m uma hipersuperfície mínima em \mathbb{R}^{m+1} , para $m \geq 3$. Se M é estável, então M possui um único fim.*

Demonstração. Suponha que o resultado seja falso. Então é possível escolher uma exaustão por conjuntos abertos pré-compactos (i.e., cujo fecho é um conjunto compacto) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ tal que $\Sigma \setminus \Omega_j$ tenha pelo menos duas componentes conexas ilimitadas, para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, é possível escrever $\Sigma \setminus \Omega_1 = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, onde E_1, E_2 são ilimitados e E_3 (que pode ser vazio) é a união de outras componentes com o conjunto $\partial_k \Omega_j = \partial \Omega_j \cap E_k$. Seja \mathbf{u}_j a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma \mathbf{u}_j(x) = 0, & x \in \Omega_j, \\ \mathbf{u}_j(x) = 1, & x \in \partial_1 \Omega_j, \\ \mathbf{u}_j(x) = 0, & x \in \partial_2 \Omega_j \cup \partial_3 \Omega_j. \end{cases} \quad (1.30)$$

Note que

$$\int_\Sigma |\nabla_\Sigma \mathbf{u}_{j+m}|^2 \leq \int_\Sigma |\nabla_\Sigma \mathbf{u}_j|^2,$$

para $m \geq 0$, pois \mathbf{u}_{j+m} minimiza a energia de Dirichlet para funções com mesmo dado de bordo. Como \mathbf{u}_j é harmônica em Ω_j , segue do Princípio do Máximo que $0 \leq \mathbf{u}_j \leq 1$. Então, a menos de uma subsequência, podemos assumir que \mathbf{u}_j converge para uma função harmônica $0 \leq \mathbf{u} \leq 1$ em Σ com energia de Dirichlet finita.

Agora, pelo Teorema 4, \mathbf{u} deve ser constante. Nos resta provar que isto não é possível. Para isto, defina $w := \mathbf{u}_j(1 - \mathbf{u}_j)$. Segue da Desigualdade de Michael-Simon-Sobolev (Proposição 31) que

$$\begin{aligned} \int_\Sigma (\mathbf{u}_j(1 - \mathbf{u}_j))^{\frac{2n}{n-2}} &\leq C \int_\Sigma (|\nabla_\Sigma w|)^{\frac{n}{n-2}} \\ &= C \left(2 \int_\Sigma (1 - \mathbf{u}_j)^2 |\nabla_\Sigma \mathbf{u}_j|^2 + \mathbf{u}_j^2 |\nabla_\Sigma \mathbf{u}_j|^2 \right)^{\frac{n}{n-2}} = \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

quando $j \rightarrow \infty$, pois \mathbf{u} tem energia de Dirichlet finita. Então, pelo Lema de Fatou,

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{u}(1 - \mathbf{u}))^{\frac{2n}{n-2}} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} (\mathbf{u}_j (1 - \mathbf{u}_j))^{\frac{2n}{n-2}} < \infty.$$

Pelo Lema 7, $|\mathbb{B}_r^{\Sigma}(x)| \geq \omega_n r^n$, sempre que $d_{\Sigma}(x, \partial\Omega_j) > r$. Então fazendo $r \rightarrow \infty$ (que é possível devido a infinitude de E_1 e E_2), devemos ter que os volumes de E_1 e E_2 são infinitos. Pelo Teorema 4 \mathbf{u} deve ser constante, então pelo princípio do máximo $\mathbf{u} \equiv 1$ ou $\mathbf{u} \equiv 0$. Assuma que $\mathbf{u} \equiv 1$ (caso contrário, tome $1 - \mathbf{u}$).

Escolha uma função de corte ϕ tal que $\phi \equiv 1$ em E_2 e $\phi \equiv 0$ fora de um compacto de Σ . Então, considerando $\phi \mathbf{u}_j$, vale pelo argumento anterior que

$$\int_{\Sigma} (\phi \mathbf{u}_j)^{\frac{2n}{n-2}} \leq C \left(2 \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \phi|^2 \mathbf{u}_j^2 + \phi^2 |\nabla_{\Sigma} \mathbf{u}_j|^2 \right)^{\frac{n}{n-2}} = \mathcal{O}(1). \quad (1.31)$$

Novamente fazendo $j \rightarrow \infty$ e aplicando o Lema de Fatou, obtemos que

$$\int_{\Sigma} \phi^{\frac{2n}{n-2}} < \infty.$$

Mas isto implica que E_2 tem volume finito, um absurdo. □

1.4 Uma Desigualdade Isoperimétrica

Esta seção dedica-se a estabelecer uma generalização para subvariedades mais gerais da Desigualdade Isoperimétrica, que é um resultado clássico e muito importante para a Geometria Diferencial. Este celebre resultado, devido a S. Brendle em [10] é fundamental para o que segue. Todos os resultados desta seção seguem do trabalho de [10].

No que segue \mathbb{B}^n denota a bola unitária em \mathbb{R}^n .

Teorema 6. *Seja Σ uma subvariedade compacta n -dimensional de \mathbb{R}^{n+m} (possivelmente com bordo), onde $m \geq 2$. Seja f uma função suave positiva em Σ . Então*

$$\int_{\Sigma} \sqrt{|\nabla^{\Sigma} f|^2 + f^2 |H|^2} + \int_{\partial\Sigma} f \geq n \left(\frac{(n+m)|\mathbb{B}^{n+m}|}{m|\mathbb{B}^m|} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\Sigma} f^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (1.32)$$

Primeiramente, suponha Σ conexa. Considere o problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\Sigma}(f\nabla_{\Sigma}u) = nf^{\frac{n}{n-1}} - \sqrt{|\nabla_{\Sigma}f|^2 + f^2|H|^2}, & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 1 & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (1.33)$$

Por [47, Teorema 6.30] existe uma função suave $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ que resolve o problema acima e $u \in C^{2,\lambda}(\Sigma)$ para $\gamma \in (0, 1)$.

Então, pelo Teorema da Divergência,

$$\int_{\Sigma} nf^{\frac{n}{n-1}} - \sqrt{|\nabla_{\Sigma}f|^2 + f^2|H|^2} = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(f\nabla_{\Sigma}u) = \int_{\partial\Sigma} f \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_{\partial\Sigma} f.$$

Agora, defina os conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega &:= \{x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma; |\nabla^{\Sigma}u(x)| < 1\}, \\ \mathbf{U} &:= \{(x, y) \in (\Sigma \setminus \partial\Sigma) \times (T_x^{\perp}\Sigma); |\nabla^{\Sigma}u(x)|^2 + |y|^2 < 1\}; \\ \mathbf{A} &:= \{(x, y) \in \mathbf{U}; D^2\Sigma u(x) - \langle A(x), y \rangle \geq 0\}. \end{aligned}$$

Além disso, defina o mapa $G : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ por

$$G(x, y) = \nabla^{\Sigma}u(x) + y.$$

Note que, como u é de classe $C^{2,\gamma}$, G é de classe $C^{1,\gamma}$ para cada $0 < \gamma < 1$. Como $\nabla_{\Sigma}u(x) \in T_x\Sigma$ e $y \in T_x^{\perp}\Sigma$ são ortogonais, obtemos que

$$|G(x, y)|^2 = |\nabla_{\Sigma}u(x)|^2 + |y|^2 < 1,$$

para todo $(x, y) \in \mathbf{U}$. Então valem os seguintes resultados.

Lema 8. *A imagem $G(\mathbf{A})$ é a bola aberta unitária B^{n+m} .*

Demonstração. Por definição, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{U} \subseteq \Omega$, logo $G(\mathbf{A}) \subseteq G(\mathbf{U}) \subseteq G(\Omega) \subseteq B^{n+m}$. Precisamos então provar a inclusão reversa. Fixe $v \in B^{n+m}$ e defina $w : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$w(x) := u(x) - \langle x, v \rangle$. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \langle \nabla^\Sigma w(x), v(x) \rangle &= \langle \nabla^\Sigma u(x), v(x) \rangle - \langle v, v(x) \rangle = |\nabla^\Sigma u(x)| |v(x)| - \langle v, v(x) \rangle \\ &= 1 - \langle v, v(x) \rangle > 0, \end{aligned}$$

para cada $x \in \partial\Sigma$. Como Σ é fechado, ela atinge seu mínimo no interior de Σ , seja $\bar{x} \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ este ponto. Pela suavidade de w , isto implica que $\nabla^\Sigma w(\bar{x}) = 0$. Isto implica que $v = \nabla^\Sigma u(\bar{x}) + \bar{y}$ para algum $\bar{y} \in T_{\bar{x}}^\perp \Sigma$. Consequentemente, $|\nabla^\Sigma u(\bar{x})|^2 + |\bar{y}|^2 = |v|^2 < 1$. Além disso, $D_\Sigma^2 w(\bar{x}) \geq 0$. Logo $D_\Sigma^2 u(\bar{x}) - \langle A_\Sigma(\bar{x}), v \rangle \geq 0$. Como

$$\langle A_\Sigma(\bar{x}), v \rangle = \langle A_\Sigma(\bar{x}), \nabla^\Sigma u(\bar{x}) + \bar{y} \rangle = \langle A_\Sigma(\bar{x}), \bar{y} \rangle,$$

concluimos que

$$D_\Sigma^2 u(\bar{x}) - \langle A_\Sigma(\bar{x}), \bar{y} \rangle \geq 0.$$

Portanto, $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ e $G(\bar{x}, \bar{y}) = v$, logo $B^{n+m} \in G(A)$. □

Lema 9. *A matriz Jacobiana de G é dada por*

$$\det dG(x, y) = \det (d_\Sigma^2 u(x) - \langle A_\Sigma(x), y \rangle),$$

para todo $(x, y) \in U$.

Demonstração. Fixe um ponto $(a, b) \in U$. Sejam $\{E_1, \dots, E_n\}$ uma base ortonormal para o espaço tangente $T_a \Sigma$ e (x_1, \dots, x_n) um sistema de coordenadas locais em Σ tal que $\frac{\partial}{\partial x_i} = E_i$ no ponto a . Além disso, seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ um referencial ortonormal local para o espaço normal $T^\perp \Sigma$. Então qualquer vetor normal y pode ser escrito da forma $y = \sum_{i=1}^m y_i v_i$. Com estas escolhas, $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ é um sistema de coordenadas locais no espaço total do fibrado normal $T^\perp \Sigma$. Podemos então calcular

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial G}{\partial x_i}(a, b), E_j \right\rangle &= \langle \bar{d}_{e_k}(\nabla^\Sigma u), E_j \rangle + \sum_{i=1}^m b_i \langle \bar{d}_{e_k} v_i, E_j \rangle \\ &= (D_\Sigma^2 u)(E_k, E_j) - \langle A(E_k, E_j), b \rangle, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que $\langle \mathbf{A}(E_k, E_j) \rangle = -\langle \bar{\mathbf{d}}_{e_i} \mathbf{v}_i, E_j \rangle$. Além disso,

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), E_j \right\rangle = \langle \mathbf{v}_i, E_j \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathbf{v}_l \right\rangle = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_l \rangle = \delta_{il}.$$

Com isto, obtemos que

$$\det d\mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\Sigma}^2 \mathbf{u}(\mathbf{a}) - \langle \mathbf{A}(\mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle & 0 \\ * & \text{Id} \end{pmatrix} = \det (\mathbf{D}_{\Sigma}^2 \mathbf{u}(\mathbf{a}) - \langle \mathbf{A}(\mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle).$$

□

Lema 10. *O determinante Jacobiano de \mathbf{G} satisfaz*

$$0 \leq \det \mathbf{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})^{\frac{n}{n-1}},$$

para todo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{A}$.

Demonstração. Considere um ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{A}$. Usando a definição de \mathbf{A} e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} -\langle \nabla^{\Sigma} f(\mathbf{x}), \nabla^{\Sigma} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle - f(\mathbf{x}) \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &\leq \langle \nabla^{\Sigma} f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x}), \nabla^{\Sigma} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{y} \rangle \\ &\leq |\nabla^{\Sigma} f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x})| |\nabla^{\Sigma} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{y}| \\ &\leq \sqrt{|\nabla^{\Sigma} f(\mathbf{x})|^2 + f(\mathbf{x})^2 |\mathbf{H}(\mathbf{x})|^2} \sqrt{|\nabla^{\Sigma} \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 + |\mathbf{y}|^2} \\ &\leq \sqrt{|\nabla^{\Sigma} f(\mathbf{x})|^2 + f(\mathbf{x})^2 |\mathbf{H}(\mathbf{x})|^2}. \end{aligned}$$

Como \mathbf{u} é solução de (1.33), $\text{div}_{\Sigma}(f\nabla^{\Sigma} \mathbf{u}) = n f^{\frac{n}{n-1}} - \sqrt{|\nabla^{\Sigma} f|^2 + f^2 |\mathbf{H}|^2}$, deduzimos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma} \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= f(\mathbf{x})^{-1} \text{div}_{\Sigma}(f\nabla^{\Sigma} \mathbf{u}) - f(\mathbf{x})^{-1} \langle \nabla^{\Sigma} f, \nabla^{\Sigma} \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \\ &= n f(\mathbf{x})^{\frac{1}{n-1}} - f(\mathbf{x})^{-1} \sqrt{|\nabla^{\Sigma} f(\mathbf{x})|^2 + f(\mathbf{x})^2 |\mathbf{H}(\mathbf{x})|^2} \\ &\quad - f(\mathbf{x}) \langle \nabla^{\Sigma} f, \nabla^{\Sigma} \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \\ &\leq n f(\mathbf{x})^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

□

Voltemos à prova do Teorema 6. Pelo Lema 8 temos que $\{\sigma^2 < |\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 < 1\} \subseteq$

$G(\Omega \times \{y \in T_x^\perp \Sigma; \sigma^2 < |G(x, y)|^2 < 1\})$. Então, pela Fórmula da Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned} |\mathbb{B}^{n+m}|(1 - \sigma) &= \int_{\{z \in \mathbb{R}^n; \sigma^2 < |z|^2 < 1\}} dz \leq \int_{G(\Omega \times \{y \in T_x^\perp \Sigma; \sigma^2 < |G(x, y)|^2 < 1\})} dz \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{\{y \in T_x^\perp \Sigma; \sigma^2 < |G(x, y)|^2 < 1\}} |\det DG(x, y)| I_\Lambda(x, y) dy \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Então pelo Lema 10,

$$|\mathbb{B}^{n+m}|(1 + \sigma^{n+m}) \leq \int_{\Omega} \left(\int_{\{y \in T_x^\perp \Sigma; \sigma^2 < |\nabla^\Sigma u(x)|^2 + |y|^2 < 1\}} f(x)^{\frac{n}{n-1}} \right) d\mu(x).$$

Fazendo uma mudança de variáveis e usando a fórmula da coarea,

$$\begin{aligned} \int_{\{y \in T_x^\perp \Sigma; \sigma^2 < |\nabla^\Sigma u(x)|^2 + |y|^2 < 1\}} 1 dy &= \int_{\{z \in T_x^\perp \Sigma; (\sigma^2 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2)_+^{\frac{1}{2}} < z < (1 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2)_+^{\frac{1}{2}}\}} |\det g'(z)| dz \\ &= |\mathbb{B}^m| \int_{\{z \in T_x^\perp \Sigma; (\sigma^2 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2)_+^{\frac{1}{2}} < z < (1 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2)_+^{\frac{1}{2}}\}} d\text{vol}(z) \\ &= |\mathbb{B}^m| \left(\left(1 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2\right)_+^{\frac{m}{2}} - \left(\sigma^2 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2\right)_+^{\frac{m}{2}} \right). \end{aligned}$$

Onde g é a mudança de coordenadas $|y|^2 \mapsto z$. Isto implica que

$$|\mathbb{B}^{n+m}|(1 + \sigma^{n+m}) \leq |\mathbb{B}^{n+m}| \int_{\Omega} \left(\left(1 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2\right)_+^{\frac{m}{2}} - \left(\sigma^2 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2\right)_+^{\frac{m}{2}} \right) f(x)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (1.34)$$

para todo $0 \leq \sigma < 1$. Como $m \geq 2$, segue do Teorema do Valor Médio que $b^{\frac{m}{2}} - a^{\frac{m}{2}} \leq \frac{m}{2}(b - a)$, para quaisquer $0 \leq a \leq b \leq 1$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \left(1 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2\right)_+^{\frac{m}{2}} - \left(\sigma^2 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2\right)_+^{\frac{m}{2}} &\leq \frac{m}{2} \left(\left(1 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2\right)_+ - \left(\sigma^2 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2\right)_+ \right) \\ &\leq \frac{m}{2}(1 - \sigma^2), \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$ e todo $0 \leq \sigma < 1$. Substituindo este resultado em (1.34), obtemos que

$$|\mathbb{B}^{n+m}|(1 + \sigma^{n+m}) \leq \frac{m}{2} |\mathbb{B}^m| (1 - \sigma^2) \int_{\Omega} f^{\frac{n}{n-1}},$$

para todo $0 \leq \sigma < 1$. Dividindo a desigualdade acima por $1 - \sigma$ e usando a identidade

$1 - \sigma^{n+m} = (1 - \sigma)(\sigma^{n+m-1} + \dots + \sigma + 1)$, obtemos

$$|\mathbb{B}^{m+n}| \left(\sum_{i=1}^{n+m} \sigma^{n+m-i} \right) \leq \frac{m}{2} |\mathbb{B}^m| (1 + \sigma) \int_{\Omega} f^{\frac{n}{n-2}}.$$

Fazendo $\sigma \rightarrow 1$, segue que

$$(n + m) |\mathbb{B}^{m+n}| \leq m |\mathbb{B}^m| \int_{\Omega} f^{\frac{n}{n-2}} \leq m |\mathbb{B}^m| \int_{\Sigma} f^{\frac{n}{n-2}}.$$

Combinando este resultado com (1.33), obtemos

$$\int_{\Sigma} \sqrt{|\nabla^{\Sigma} f|^2 + f^2 |H|^2} + \int_{\partial \Sigma} f = \int_{\Sigma} f^{\frac{n}{n-1}} \geq n \left(\frac{(n + m) |\mathbb{B}^{n+m}|}{m |\mathbb{B}^m|} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\Sigma} f^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}},$$

Como desejávamos.

Agora suponha que Σ é desconexa. Neste caso, a desigualdade acima se verifica para cada componente de Σ , então podemos somar todas as componentes. Como

$$a^{\frac{n-1}{n}} + b^{\frac{n-1}{n}} > a(a + b)^{-\frac{1}{n}} = (a + b)^{\frac{n-1}{n}}$$

para quaisquer $a, b > 0$, e $n \geq 3$, concluímos então

$$\int_{\Sigma} \sqrt{|\nabla^{\Sigma} f|^2 + f^2 |H|^2} + \int_{\partial \Sigma} f > n \left(\frac{(n + m) |\mathbb{B}^{n+m}|}{m |\mathbb{B}^m|} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\Sigma} f^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}},$$

completando a prova do Teorema 6.

Corolário 3. *Se Σ é uma imersão mínima compacta n -dimensional de \mathbb{R}^{n+2} , então satisfaz*

$$|\partial \Sigma| \leq n |\mathbb{B}^n|^{\frac{1}{n}} |\Sigma|^{\frac{n-1}{n}}.$$

1.5 Estabilidade para Hipersuperfícies com Crescimento Euclidiano

Uma das mais importantes contribuições para o estudo da estabilidade em hipersuperfícies mínimas foi feita por R. Schoen, L. Simon e S. T. Yau em [41], onde estudaram o comportamento de hipersuperfícies com crescimento Euclidiano. Nesta seção, iremos

apresentar os principais resultados deste artigo, que serão de fundamental importância para a continuação deste trabalho.

A principal inspiração para o resultado principal é a clássica identidade de Simons:

Teorema 7 (Simons, [45]). *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima. Então, a segunda forma fundamental satisfaz a identidade*

$$\frac{1}{2} \Delta_\Sigma |\mathcal{A}_\Sigma|^2 + |\mathcal{A}_\Sigma|^4 = |\nabla_\Sigma \mathcal{A}_\Sigma|^2$$

ao longo de Σ .

Começemos com a seguinte desigualdade, conhecida como Desigualdade de Simons:

Proposição 6. *Suponha que $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão mínima. Então*

$$|\nabla \mathcal{A}_\Sigma(\mathbf{x})|^2 \geq \left(1 + \frac{2}{n}\right) |\nabla |\mathcal{A}_\Sigma(\mathbf{x})||^2, \quad (1.35)$$

sempre que $\mathcal{A}_\Sigma(\mathbf{x}) \neq 0$.

Demonstração. Escolha um referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ paralelo e diagonalizante de \mathcal{A}_Σ em $\mathbf{p} \in \Sigma$. Então,

$$\nabla_{E_i} |\mathcal{A}_\Sigma|^2 = 2 \sum_{j,k=1}^n (\nabla_{E_i} \mathcal{A}_\Sigma)(E_j, E_k) \mathcal{A}_\Sigma(E_j, E_k) = 2 \sum_{j=1}^n (\nabla_{E_i} \mathcal{A}_\Sigma)(E_j, E_j) \mathcal{A}_\Sigma(E_j, E_j),$$

e pela desigualdade Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} 4 |\mathcal{A}_\Sigma|^2 |\nabla |\mathcal{A}_\Sigma||^2 &= \left| \nabla |\mathcal{A}_\Sigma|^2 \right|^2 = 4 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\nabla_{E_i} \mathcal{A}_\Sigma)(E_j, E_j) \mathcal{A}_\Sigma(E_j, E_j) \right)^2 \\ &\leq 4 \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^n (\nabla_{E_i} \mathcal{A}_\Sigma)(E_j, E_j)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \mathcal{A}_\Sigma(E_j, E_j)^2 \right) \right) \\ &= 4 |\mathcal{A}_\Sigma|^2 \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} \mathcal{A}_\Sigma)(E_j, E_j)^2. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
 |\nabla |A_\Sigma|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j)^2 \\
 &= \sum_{i \neq j} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j)^2 + \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_i, E_i)^2 \\
 &= \sum_{i \neq j} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq i} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j) \right)^2 \\
 &\leq \sum_{i \neq j} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j)^2 + (n-1) \sum_{j \neq i} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j)^2 \\
 &= n \sum_{i \neq j} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j)^2.
 \end{aligned}$$

Então, pelas equações de Codazzi,

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{2}{n}\right) |\nabla |A_\Sigma|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j)^2 + 2 \sum_{i \neq j} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j)^2 \\
 &= \sum_{i \neq j} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j)^2 + \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_i, E_i)^2 \\
 &\quad + 2 \sum_{i \neq j} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j)^2.
 \end{aligned}$$

Reorganizando,

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{2}{n}\right) |\nabla |A_\Sigma|^2 &\leq \sum_{i \neq j} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_j)^2 + \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_i, E_i)^2 \\
 &\quad + \sum_{i \neq j} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_i, E_j)^2 + \sum_{i \neq j} (\nabla_{E_i} A_\Sigma) (E_j, E_i)^2 \\
 &= |\nabla A_\Sigma|^2.
 \end{aligned}$$

□

A partir destes resultados, obtem-se o seguinte Teorema:

Teorema 8 (Shoen-Simon-Yau [41]). *Suponha que $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície mínima estável 2-lados. Para todo $p \in [2, 2 + \sqrt{\frac{2}{n-1}})$ e cada função ϕ Lipschitziana não-negativa, vale que*

$$\int_\Sigma |A|^{2p} \phi^{2p} \leq C(n, p) \int_\Sigma |\nabla \phi|^{2p}. \tag{1.36}$$

Demonstração. Se tomarmos $\eta = |\mathcal{A}|^{1+q}f$, $0 \leq q \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, na desigualdade de estabilidade, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} |\mathcal{A}|^{4+2q}f^2 &\leq \int_{\Sigma} |\nabla^{\Sigma}(|\mathcal{A}|^{1+q}f)|^2 = \int_{\Sigma} |f\nabla^{\Sigma}|\mathcal{A}|^{1+q} + |\mathcal{A}|^{1+q}\nabla^{\Sigma}f|^2 \\
 &= \int_{\Sigma} \langle f\nabla^{\Sigma}|\mathcal{A}|^{1+q} + |\mathcal{A}|^{1+q}\nabla^{\Sigma}f, f\nabla^{\Sigma}|\mathcal{A}|^{1+q} + |\mathcal{A}|^{1+q}\nabla^{\Sigma}f \rangle \\
 &= \int_{\Sigma} f^2 \langle \nabla^{\Sigma}|\mathcal{A}|^{1+q}, \nabla^{\Sigma}|\mathcal{A}|^{1+q} \rangle + 2f|\mathcal{A}|^{1+q} \langle \nabla^{\Sigma}|\mathcal{A}|^{1+q}, \nabla^{\Sigma}f \rangle \\
 &\quad + \int_{\Sigma} |\mathcal{A}|^{2+2q} \langle \nabla^{\Sigma}f, \nabla^{\Sigma}f \rangle \\
 &= (1+q)^2 \int_{\Sigma} f^2|\mathcal{A}|^{2q} |\nabla^{\Sigma}|\mathcal{A}|| + 2(1+q) \int_{\Sigma} f|\mathcal{A}|^{1+2q} \langle \nabla^{\Sigma}|\mathcal{A}|, \nabla^{\Sigma}f \rangle \\
 &\quad + \int_{\Sigma} |\mathcal{A}|^{2+2q} |\nabla^{\Sigma}f|^2. \tag{1.37}
 \end{aligned}$$

Agora, multiplicando a desigualdade de Simons (cf, [41])

$$|\mathcal{A}|\Delta|\mathcal{A}| + |\mathcal{A}|^4 \geq \frac{2}{n-1} |\nabla|\mathcal{A}||^2,$$

por $|\mathcal{A}|^{2q}f^2$ e integrando, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{n-1} \int_{\Sigma} |\nabla|\mathcal{A}||^2 |\mathcal{A}|^{2q}f^2 &\leq \int_{\Sigma} |\mathcal{A}|^{1+2q}f^2 \Delta|\mathcal{A}| + |\mathcal{A}|^{4+2q}f^2 \\
 &= \int_{\Sigma} |\mathcal{A}|^{4+2q}f^2 - 2 \int_{\Sigma} f|\mathcal{A}|^{1+2q} \langle \nabla f, \nabla|\mathcal{A}|| \rangle \\
 &\quad - (1+2q) \int_{\Sigma} f^2|\mathcal{A}|^{2q} |\nabla|\mathcal{A}||^2. \tag{1.38}
 \end{aligned}$$

Combinando (1.37) e (1.38), vale

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{n-1} \int_{\Sigma} |\nabla|\mathcal{A}||^2 |\mathcal{A}|^{2q}f^2 &\leq (1+q)^2 \int_{\Sigma} f^2|\mathcal{A}|^{2q} |\nabla^{\Sigma}|\mathcal{A}|| + \int_{\Sigma} |\mathcal{A}|^{2+2q} |\nabla^{\Sigma}f|^2 \\
 &\quad + 2(1+q) \int_{\Sigma} f|\mathcal{A}|^{1+2q} \langle \nabla^{\Sigma}|\mathcal{A}|, \nabla^{\Sigma}f \rangle \\
 &\quad - 2 \int_{\Sigma} f|\mathcal{A}|^{1+2q} \langle \nabla^{\Sigma}f, \nabla|\mathcal{A}|| \rangle \\
 &\quad - (1+2q) \int_{\Sigma} f^2|\mathcal{A}|^{2q} |\nabla^{\Sigma}|\mathcal{A}||^2.
 \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{n-1} - q^2\right) \int_{\Sigma} |A|^{2q} |\nabla|A||^2 f^2 &\leq \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 + 2q \int_{\Sigma} f |A|^{1+2q} \langle \nabla^{\Sigma} f, \nabla^{\Sigma} |A| \rangle \\ &\leq \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 + \epsilon q \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla^{\Sigma} |A||^2 \\ &\quad + \frac{q}{\epsilon} \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 |A|^{2+2q}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $2xy \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$, para qualquer $\epsilon > 0$. Então,

$$\left(\frac{2}{n-1} - q^2 - \epsilon q\right) \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla^{\Sigma} |A||^2 \leq \left(1 + \frac{q}{\epsilon}\right) \int_{\Sigma} |\nabla^{\Sigma} f|^2 |A|^{2+2q}. \quad (1.39)$$

Agora, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (1.37), iremos obter

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |A|^{4+2q} f^2 &\leq (1+q)^2 \int_{\Sigma} f^2 |\nabla^{\Sigma} |A||^2 |A|^{2q} + \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 \\ &\quad + 2(1+q) \int_{\Sigma} f |A|^{1+2q} |\nabla^{\Sigma} f| |\nabla^{\Sigma} |A||. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Substituindo (1.39) na equação acima,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |A|^{4+2q} f^2 &\leq 2(1+q)^2 \int_{\Sigma} f^2 |A|^{2q} |\nabla^{\Sigma} |A||^2 + 2 \int_{\Sigma} |A|^{2q+2} |\nabla f|^2 \\ &\leq \left(\frac{2(1+q)^2(1+\frac{q}{\epsilon})}{\frac{2}{n-1} - q^2 - \epsilon q} + 2\right) \int_{\Sigma} |A|^{2+2q} |\nabla^{\Sigma} f|^2. \end{aligned}$$

Se colocarmos $p = 2 + q$ e $f = \phi^p$, então $2 \leq p < 2 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ e aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\Sigma} |A|^{2p} \phi^{2p} \leq \int_{\Sigma} |A|^{2p-2} \phi^{2p-2} |\nabla^{\Sigma} \phi|^2 \leq c \left(\int_{\Sigma} |A|^{2p} \phi^{2q}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Sigma} |\nabla^{\Sigma} \phi|^{2p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

para algum $c \equiv c(n, p)$, como desejávamos. \square

Observação 5. *Existe a seguinte versão melhorada do Teorema 8, também conhecido como Teorema de Schoen-Simon-Yau (veja e.g. Teorema 8.16 de [14]).*

Teorema 9 (Schoen-Simon-Yau, [41]). *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima completa 2-lados. Então, para qualquer $\alpha \in [\frac{n-2}{n}, 1 + \sqrt{\frac{2}{n}})$ existe uma constante $C \equiv C(n, \alpha)$ tal*

que

$$\int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^{2\alpha+2} \leq C \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^{2\alpha+2}.$$

para qualquer $f \in C_c^{0,1}(\Sigma)$.

Provemos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 10 (Schoen-Simon-Yau [41]). *Se $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície mínima estável 2-lados, completa, $n \leq 6$, e existe $V < \infty$ tal que*

$$\sup_{R>0} \frac{\text{Vol}(B_R(0) \cap \Sigma)}{R^{n-1}} \leq V, \tag{1.41}$$

então Σ é planar.

Demonstração. Para cada $r > 0$, existe uma função de corte ϕ com $\phi|_{B_r(0)} \equiv 1$, $\phi|_{B_{2r}(0)} \equiv 0$ e tal que ϕ decai linearmente na direção radial no anel $B_{2r}(0) \setminus B_r(0)$. Combinando a limitação da norma L^p de $|A|^2$ do Teorema 8 para esta ϕ e

$$2p = 4 + \sqrt{\frac{7}{5}} < 4 + \sqrt{\frac{8}{n-1}},$$

com a limitação do volume (1.41), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0) \cap \Sigma} |A|^{4+\sqrt{\frac{7}{5}}} &\leq C(n, p) r^{-4-\sqrt{\frac{7}{5}}} \text{Vol}(B_{2r}(0) \cap \Sigma) \\ &\leq C(n, p) 2^{n-1} V r^{n-5-\sqrt{\frac{7}{5}}}. \end{aligned}$$

Como $n-5-\sqrt{\frac{7}{5}}$ constante, fazendo $r \rightarrow \infty$, obtemos que $|A|^2 \equiv 0$, como desejávamos. \square

1.6 Conjuntos de Perímetro Finito

Esta seção dedica-se a apresentação dos conjuntos de perímetro finito que serão importantes para o decorrer deste trabalho. Estes conjuntos possuem uma larga aplicação no estudo de subvariedades mínimas, a destacar a prova do Teorema clássico de Bernstein em \mathbb{R}^n para $n \leq 6$, dada por E. Bombieri, E. De Giorgi e E. Giusti em [9] e suas ligações com a Teoria Geométrica da Medida, uma área muito estudada atualmente. Devido a sua complexidade que se distancia do objetivo deste texto, iremos nos restringir a apresentar as definições e propriedades básicas.

Definição 5. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f \in L^1(\Omega)$. Defina*

$$\int_{\Omega} |Df| := \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div}(\mathbf{g}) \, dx; \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \text{ e } |\mathbf{g}(\mathbf{x})| \leq 1, \text{ para } \mathbf{x} \in \Omega \right\}.$$

Como estamos em \mathbb{R}^n , $\operatorname{div}(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$.

Exemplo 2. *Se $f \in C^1(\Omega)$, então por integração por partes,*

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div}(\mathbf{g}) \, dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \, dx,$$

para qualquer $\mathbf{g} \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, tal que

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx.$$

Mais geralmente, se $f \in W^{1,1}(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx$$

Definição 6. *Uma função $f \in L^1(\Omega)$ é dita ser de variação limitada em Ω se $\int_{\Omega} |Df| < \infty$. Definimos $BV(\Omega)$ como o espaço das funções em $L^1(\Omega)$ com variação limitada.*

Pelo Exemplo 2, temos que $W^{1,1}(\Omega) \subseteq BV(\Omega)$. O fato destes dois espaços não são iguais segue do seguinte exemplo.

Exemplo 3. *Suponha que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tem fronteira C^2 e considere χ_E a função característica de E . Se E for limitado, sabemos que $\chi_E \in L^1(\Omega)$. No entanto, é conhecido que $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$*

Suponha que $\mathbf{g} \in C_0^1(\Omega)$. Então, segue do Teorema da Divergência que

$$\int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div}(\mathbf{g}) = \int_E \operatorname{div}(\mathbf{g}) = \int_{\partial E} \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle.$$

Se $|\mathbf{g}(\mathbf{x})| \leq 1$, então segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\partial E} \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega) < \infty, \tag{1.42}$$

onde \mathcal{H}^{n-1} é a medida $(n-1)$ -dimensional de Lebesgue que em conjuntos regulares pode

ser identificado com a medida de volume usual, como pode ser visto na Proposição 30. A equação (1.42) mostra que $\chi \in \text{BV}(\Omega)$, logo não se pode ter $\text{BV}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$.

Por outro lado, observe que, como E tem fronteira C^2 , $\nu(x)$ é um campo vetorial com $|\nu(x)| = 1$, e pode ser extendido para um campo vetorial N em todo o \mathbb{R}^n , de modo que $N \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, com $|N(x)| = 1$ para todo x . Agora, se $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ e $|\eta| \leq 1$, vale que, escrevendo $h = \eta N$,

$$\int_E \text{div}(g) \, dx = \int_{\partial E} \eta \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

então

$$\int_\Omega |D\chi_E| \geq \sup \left\{ \int_{\partial E} g \, d\mathcal{H}^{n-1}; g \in C_0^\infty(\Omega), |g| \leq 1 \right\} \geq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega) \quad (1.43)$$

Combinando as equações (1.42) e (1.43), obtemos que

$$\int_\Omega |D\chi_E| = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega).$$

O exemplo acima mostra que, restrito ao \mathbb{R}^n , $\int_\Omega |D\chi_E|$ representa o perímetro de ∂E em Ω . Isto motiva a seguinte definição,

Definição 7. *Sejam E um conjunto de Borel e Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n . Defina o perímetro de E em Ω como*

$$P(E, \Omega) := \int_\Omega |D\chi_E| = \sup \left\{ \int_E \text{div}(g); g \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n), |g(x)| \leq 1 \right\}.$$

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, $P(E) = P(E; \mathbb{R}^n)$.

Se E for um conjunto de Borel localmente de perímetro finito, i.e., $P(E; \Omega) < \infty$ para qualquer conjunto aberto Ω , dizemos que E é um **conjunto de Caccioppoli**.

Existe uma vasta literatura e muitas aplicações acerca dos conjuntos de Caccioppoli (como já citamos, a prova geral do Teorema de Bernstein clássico é uma delas) que foge do escopo deste trabalho. Iremos nos restringir a apresentar as propriedades básicas que serão úteis neste trabalho.

Teorema 11 (Semicontinuidade Inferior, [25]). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$*

uma sequência de funções em $BV(\Omega)$ que converge em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ para uma função f . Então

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j|. \quad (1.44)$$

Demonstração. Seja $g \in C^1_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tal que $|g| \leq 1$. Então pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div}(g) \, dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_j \operatorname{div}(g) \, dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j|,$$

basta então tomar o supremo na relação acima para obter (1.44). \square

Capítulo 2

Superfícies Mínimas Estáveis em \mathbb{R}^3

Neste capítulo, apresentaremos a solução do Problema de Bernstein para superfícies mínimas estáveis em \mathbb{R}^3 descoberta por M. do Carmo e K. Peng em [13]. Além disso, apresentaremos um importante e clássico resultado, que pode ser encontrado em [14], que mostra uma rigidez de crescimento para hipersuperfícies mínimas e mostraremos que estes resultados são equivalentes.

2.1 Teorema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^3

Nesta seção provaremos a versão mais simples do Teorema de Bernstein estável, que depende apenas da estabilidade e suas propriedades. Esta também representa a origem do problema que motiva este texto.

Teorema 12 ([5]). *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima estável, 2-lados, conexa. Então $X(M) \subset \mathbb{R}^3$ é um plano.*

Demonstração. Pela Proposição 5 podemos assumir que M é simplesmente conexa. Pelo Teorema de Uniformização e a estrutura complexa dada por X , M deve ser conformemente equivalente ou a todo o plano complexo \mathbb{C} ou ao disco unitário $B = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, e a métrica induzida ds^2 em M é dada por $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2, \lambda \neq 0$. Analisemos cada caso:

Caso 1. Considere o caso do disco unitário B . Suponha que qualquer subdomínio relativo compacto $D \subset M$ é estável, então tem-se que

$$\int_M (u \Delta_M u - 2u^2 K) \leq 0, \quad (2.1)$$

para toda função suave por partes u de suporte compacto em M . Então

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \log \lambda, \quad dM = \lambda^2 dA, \quad \Delta_M = \frac{1}{\lambda^2} \Delta. \quad (2.2)$$

Logo podemos reescrever (2.1) como

$$\int_B (u \Delta u + u^2 \Delta \log \lambda^2) \leq 0. \quad (2.3)$$

Tomando $\varphi = \lambda^{-1}$ e substituindo u por φu em (2.3), obtemos que

$$3 \int_B |\nabla \varphi|^2 u^2 \leq \int_B \varphi^2 |\nabla u|^2 - 2 \int_B \varphi u (\nabla u \cdot \nabla \varphi). \quad (2.4)$$

Dado $\epsilon > 0$, seque da desigualdade de Hölder que

$$\int_M |\nabla_M \varphi|^2 u^2 \leq \beta \int_M \varphi^2 |\nabla_M u|^2. \quad (2.5)$$

Agora, escolha uma família de bolas geodésicas B_R de raio R que formam uma exaustão de M , fixe $\theta \in (0, 1)$ e defina a função contínua $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{cases} u(x) = 1, & x \in B_{\theta R}, \\ u(x) = \frac{R - d_M(p, x)}{R - \theta R}, & x \in B_R \setminus B_{\theta R}, \\ u(x) = 0, & x \in M \setminus B_R. \end{cases} \quad (2.6)$$

Por (2.5) obtemos que

$$\int_{B_R} |\nabla_M \varphi|^2 \leq \frac{\beta}{(1 - \theta)^2 R^2} \int_B \varphi^2 = \frac{\beta}{(1 - \theta)^2 R^2} \frac{\beta}{(1 - \theta)^2 R^2} \int_B = \frac{\pi \beta}{(1 - \theta)^2 R^2}.$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$, concluímos que $|\nabla \varphi| \equiv 0$, i.e., λ é constante, mas isto contradiz a completudeza de $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$. Logo M não pode ser conformemente equivalente a B .

Caso 2. Agora, considere o caso onde M é conformemente equivalente ao plano complexo \mathbb{C} . Tomando $\psi = \Delta \log \lambda^2$, podemos escrever (2.3) como

$$\int_{\mathbb{C}} \psi u^2 \leq \int_{\mathbb{C}} |\nabla u|^2. \quad (2.7)$$

Por um lado, se K não é identicamente nula, podemos escrever que $\Delta_M \log(-K) = 4K$. Isto implica que $\Delta \log \psi + \psi = 0$, então

$$\psi \Delta \psi + \psi^3 = |\nabla \psi|^2. \quad (2.8)$$

Substituindo u por ψu em (2.7), obtemos

$$\int_{\mathbb{C}} \psi^3 u^2 \leq \int_{\mathbb{C}} \psi^2 |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{C}} u^2 |\nabla \psi|^2 + \int_{\mathbb{C}} \psi u \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle. \quad (2.9)$$

Por outro lado, multiplicando (2.8) por u^2 , integrando sobre \mathbb{C} e adicionando o resultado em (2.9), iremos obter

$$\int_{\mathbb{C}} |\nabla \psi|^2 u^2 \leq \int_{\mathbb{C}} \psi^2 |\nabla u|^2. \quad (2.10)$$

Novamente pela desigualdade de Young, temos que $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2$, para todo $\epsilon > 0$. Substituindo este resultado em (2.9) e usando (2.10), obtemos

$$\psi^2 |\nabla u|^2 = u^2 \left(\psi^2 \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \right) \leq u^2 \left(\frac{\alpha^s}{s} \psi^{2s} + \frac{\alpha^{-t}}{t} \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right)^{2t} \right),$$

que vale para todo $\alpha > 0$ e todo $1 < s, t < \infty$, com $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$. Escolha $s = \frac{3}{2}, t = 3$ e α suficientemente pequeno de modo que $\frac{2}{3} \alpha^{\frac{3}{2}} \psi^3 \ll \frac{\alpha^{-3}}{3} \frac{|\nabla u|^6}{u^6}$ para obter que

$$\int_{\mathbb{C}} \psi^3 u^2 \leq \frac{\alpha^{-3}}{3} \int_{\mathbb{C}} \frac{|u|^6}{u^4}.$$

A expressão acima é válida para qualquer $u \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, a mesma deve valer para $u^3 \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Definindo $\beta_2 := \frac{\alpha^{-3}}{3}$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{C}} \psi^3 u^6 \leq \beta_3 \int_{\mathbb{C}} |\nabla u|^6, \quad (2.11)$$

para alguma constante β_3 . A desigualdade acima implica que, escolhendo a função u como em (2.6) na bola geodésica $B_R \subset \mathbb{C}$ de raio R , que $\psi^3 \equiv 0$, então $K \equiv 0$ e $X(M)$ deve ser um plano. Isto conclui a prova do teorema. \square

Munidos deste resultado, somos capazes de apresentar uma prova mais simples para o clássico Teorema de Bernstein:

Corolário 4. *Se $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave que satisfaz a equação das superfícies mínimas (1.3), então u é linear, i.e., $u(x, y) = ax + by + c$ para constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Como visto no Exemplo 1, devemos ter que Graph_u é uma superfície mínima estável. Então, pelo Teorema 12, Graph_u é planar, o que implica que u é linear. \square

2.2 Resultados Equivalentes

Uma consequência importante do Teorema 12 é que imersões mínimas orientáveis com bordo possuem curvatura Gaussiana estimada superiormente pela distância até o bordo. Este resultado foi provado originalmente por R. Schoen em [40] e a equivalência abaixo é um resultado bastante conhecido (consultar, por exemplo, [14]).

Teorema 13. *Para $n \geq 2$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *Qualquer imersão $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mínima estável, 2-lados conexa deve ser planar;*
- (b) *Existe uma constante $C > 0$ tal que qualquer imersão $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mínima estável 2-lados satisfaz*

$$|A_\Sigma(x)| d_\Sigma(x, \partial\Sigma) \leq C,$$

onde d_Σ é a distância intrínseca em Σ .

Para provar este resultado precisamos de uma noção de convergência de imersões conhecida como Convergência de Gromov-Hausdorff pontuada. Dizemos que uma sequência de imersões pontuadas $(X_k : \Sigma_k^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p_k)$ converge suavemente para uma imersão pontuada $(X_\infty : \Sigma_\infty^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p_\infty)$ se existir uma exaustão $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Sigma_\infty$ de Σ_∞ por conjuntos abertos conexos e difeomorfismos $\phi_k : \Omega_k \rightarrow \phi(\Omega_k) \subset \Sigma_k$ tal que

$$\|X_\infty - X_k \circ \phi_k\|_{C^k(\Omega_k)} \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$. Sobre esta noção é bastante conhecido o seguinte resultado (consultar, por exemplo, o capítulo 7 de [19])

Proposição 7. *Suponha que $(X_k : \Sigma_k^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p_k)$ é uma sequência de imersões mínimas com $|X_k(p_k)| \leq d \in (0, \infty)$, $\sup_{\Sigma_k} |A_\Sigma| \leq C$ e $d_{\Sigma_k}(p_\infty, \partial\Sigma_k) \geq R_k$, para uma sequência*

$\{\mathbb{R}_k\} \rightarrow \mathbb{R} \in (0, \infty]$. Então, a menos de uma subsequência, $(X_k : \Sigma_k \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{p}_k)$ converge, no sentido acima, para uma imersão mínima $(X_\infty : \Sigma_\infty \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{p}_\infty)$ com $|X_\infty(\mathbf{p}_\infty)| \leq d$, $\sup_{\Sigma_\infty} |A_{\Sigma_\infty}| \leq C$ e $d_{\Sigma_\infty}(\mathbf{p}_\infty, \partial\Sigma_\infty) \geq R$.

De posse deste resultado, somos capazes de demonstrar o Teorema 13

Demonstração do Teorema 13. Sabemos que não existem hipersuperfícies mínimas fechadas em \mathbb{R}^{n+1} . Então se vale (b) para $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ completa, então deve-se ter que $d_\Sigma(\mathbf{x}, \partial\Sigma) = \infty$. Então $A_\Sigma(\mathbf{x}) = 0$, isto implica que Σ deve ser planar.

Reciprocamente, suponha que vale (a) e que (b) não vale. Então existe uma sequência $\{\Sigma_k^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de imersões mínimas 2-lados tais que

$$\sup_{x \in \Sigma_k} |A_{\Sigma_k}(x)| d_{\Sigma_k}(x, \partial\Sigma_k) \rightarrow \infty.$$

Seja $\{\Omega_i^k\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma exaustão compacta de Σ_k tal que $\cup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i^k = \Sigma_k$. Então é possível escolher, para cada $k \in \mathbb{N}$ um $\Omega^k \subset \Sigma_k$ de modo a uma sequência $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de variedades compactas com bordo tais que

$$\sup_{x \in \Omega^k} |A_{\Omega^k}(x)| d_{\Omega^k}(x, \partial\Omega^k) \rightarrow \infty.$$

Como $|A_{\Omega^k}(x)| d_{\Omega^k}(x, \partial\Omega^k)$ é uma função contínua definida em um compacto, atinge seu máximo. A menos de uma translação, podemos supor que o máximo é atingido em $x = 0$. Defina $r_k := d_{\Omega^k}(0, \partial\Omega^k)$ e $s_k := |A_{\Omega^k}(0)|$ (note que $r_k s_k \rightarrow \infty$).

Agora, defina $\Omega'_k := s_k B_{r_k}^{\Omega^k}(0)$, onde $B_{r_k}^{\Omega^k}(0)$ é a bola intrínseca de Ω^k centrada na origem de raio r_k . Note que

$$|A_{\Omega'_k}|(0) = s_k^{-1} |A_{\Omega^k}|(0) = 1$$

e para qualquer $x \in \Omega'_k$, temos que

$$|A_{\Omega'_k}|(x) d_{\Omega'_k}(x, \partial\Omega'_k) \leq |A_{\Omega'_k}|(0) d_{\Omega'_k}(0, \partial\Omega'_k) = d_{\Omega'_k}(0, \partial\Omega'_k) = s_k r_k.$$

Para $x \in \Omega'_k$ com $d_{\Omega'_k}(0, x) \leq R$, temos que

$$|A_{\Omega'_k}|(x) \leq \frac{s_k r_k}{s_k r_k - R} \rightarrow 1.$$

Isto implica que Ω'_k tem curvatura uniformemente limitada em conjuntos compactos. Portanto, é possível escolher uma subsequência convergente de imersões $\{\Omega'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para uma imersão mínima estável $\Omega'_\infty \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Por construção, $|\mathbf{A}_{\Omega'_\infty}(0)| = 1$, então Ω'_∞ não é planar, o que contraria (a). \square

Capítulo 3

Hipersuperfícies Mínimas Estáveis em \mathbb{R}^4

3.1 Propriedades da Função de Green em Hipersuperfícies Mínimas

Nesta seção iremos apresentar algumas propriedades referentes à função de Green de hipersuperfícies mínimas estáveis, sobretudo com respeito aos seus conjuntos de nível.

Proposição 8 (Proposição 9, [15]). *Para $n > 2$, seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima estável, completa, 2-lados, simplesmente conexa com curvatura uniformemente limitada, $|A_M| \leq C$ para algum $C \in \mathbb{R}_+$. Então, para $p \in M$, existe $u \in C_{\text{loc}}^\infty(M \setminus \{p\})$ com as seguintes propriedades:*

- (a) $\Delta u = 0$ em $M \setminus \{p\}$;
- (b) $u > 0$ em $M \setminus \{p\}$ e $\inf u = 0$;
- (c) Valem as seguintes estimativas, para $x \rightarrow p$:

$$\begin{aligned}u(x) &= c_n(1 + o(1))d_M(x, p)^{2-n}, \\|\nabla u|(x) &= (n-2)c_n(1 + o(1))d_M(x, p)^{1-n} \\ \left\langle \nabla|\nabla u|, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle &= (n-1)(n-2)c_n(1 + o(1))d_M(x, p)^{-n};\end{aligned}$$

(d) Se K é um conjunto compacto contendo uma vizinhança aberta de p , então

$$\int_{M \setminus K} |\nabla u|^2 < \infty;$$

(e) $u(x) \rightarrow 0$ quando $d_M(x, p) \rightarrow \infty$;

(f) Para todo $s \in (0, \infty)$, o conjunto $\Omega_s := \{u \geq s\} \cup \{p\}$ é compacto; e

(g) Se $s \in (0, \infty)$ é um valor regular de u , então $\partial\Omega_s = u^{-1}(s) := \Sigma_s$ é uma hipersuperfície conexa fechada de M .

Demonstração. Se $M = \mathbb{R}^n$, então u é a função de Green usual de \mathbb{R}^n , donde segue todas as propriedades acima. Suponhamos que M seja não planar.

Considere uma exaustão $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset M$ pré-compacta de M , com $p \in \Omega_1$, e $\partial\Omega_i$ suave, para cada i . A função de Green de Dirichlet para Ω_i , $u_i = g^{\Omega_i}(p, x)$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u_i(x) = 0 & x \in \Omega_i \setminus \{p\}, \\ u_i(x) > 0 & x \in \Omega_i, \\ u_i(x) = 0 & x \in \partial\Omega_i. \end{cases} \quad (3.1)$$

Ademais, seu comportamento assintótico em torno de p garante que

$$\begin{aligned} u_i(x) &= c_n(1 + o(1))d_M(x, p)^{2-n}, \\ |\nabla u_i|(x) &= (n-2)c_n(1 + o(1))d_M(x, p)^{1-n}, \end{aligned}$$

e

$$\left\langle \nabla|\nabla u_i|, \frac{\nabla u_i}{|\nabla u_i|} \right\rangle = (n-1)(n-2)c_n(1 + o(1))d_m(x, p)^{-n},$$

quando $x \rightarrow p$, (veja [4, 32, 43]).

Afirmamos que $u_i(x) \leq u_j(x)$ para $i < j$ e $x \in \Omega_i \setminus \{p\}$. De fato, pelo comportamento assintótico das funções u_i em torno de p , dado $\delta > 0$, vale que $u_i(x) \leq (1 + \delta)u_j(x)$ para $x \in \partial B_\epsilon(p)$ para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno (dependente de δ). Como $0 = u_i(x) < u_j(x)$ para $x \in \partial\Omega_i$, obtemos, pelo Princípio do Máximo, que $u_i \leq (1 + \delta)u_j$ em $\Omega_i \setminus B_\epsilon(p)$. Fazendo $\delta, \epsilon \rightarrow 0$, verificamos a desigualdade $u_i(x) \leq u_j(x)$.

Agora, defina

$$\mu_i := \max_{x \in \partial\Omega_1} u_i(x). \quad (3.2)$$

De modo análogo ao que foi feito acima, podemos utilizar o comportamento assintótico de u_i e o Princípio do Máximo para concluir que

$$u_1 \leq u_i \leq u_1 + \mu_i \quad \text{em } \Omega_1 \setminus \{p\}. \quad (3.3)$$

Pelas propriedades da sequência $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, tem-se que $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência não-decrescente de números reais. Provemos que $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente.

De fato, deve-se ter que ou $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é superiormente limitada (e portanto vale a afirmação) ou deve possuir uma subsequência crescente ilimitada. Suponha então, sem perda de generalidade, que $\mu_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Pela Desigualdade de Harnack (Proposição 31, a sequência de funções harmônicas $\{\frac{1}{\mu_i} u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é localmente uniformemente limitada. Segue do Teorema de Ascoli-Arzelá que, a menos de passagem a uma subsequência, $\{\frac{1}{\mu_i} u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge em $C_{\text{loc}}^\infty(M \setminus \{p\})$ para alguma função harmônica não negativa $u \in C_{\text{loc}}^\infty(M \setminus \{p\})$.

Dividindo (3.3) por μ_i e fazendo $i \rightarrow \infty$, obtemos que $0 \leq u \leq 1$ em $\Omega_1 \setminus \{p\}$. Por outro lado, segue do Princípio do Máximo que

$$\max_{\Omega_i \setminus \Omega_1} u_i \in \partial(\Omega_i \setminus \Omega_1) = \partial\Omega_i \cup \partial\Omega_1,$$

e pela condição de Dirichlet de cada u_i , temos

$$\max_{\Omega_i \setminus \Omega_1} u_i = \max_{\partial\Omega_1} u_i = \mu_i. \quad (3.4)$$

Consequentemente, $u \leq 1$ em $M \setminus \Omega_1$ e, por conseguinte, $0 \leq u \leq 1$ em $M \setminus \{p\}$. Como o supremo é atingido em algum ponto de $\partial\Omega_1$, segue do Princípio do Máximo Forte que $u \equiv 1$ em $M \setminus \{p\}$.

Agora, considere a solução $f_i \in C^{0,1}(M) \cap C^\infty(\partial\overline{\Omega}_i)$ do problema

$$\begin{cases} \Delta f_i = 0 & \text{em } \Omega_i \setminus \Omega_1, \\ f_i = 1 & \text{em } \Omega_1, \\ f_i = 0 & \text{em } M \setminus \Omega_i. \end{cases}$$

A função $\frac{1}{\mu_i} \mathbf{u}_i - f_i$ é harmônica em $\Omega_i \setminus \Omega_1$ e satisfaz $\frac{1}{\mu_i} \mathbf{u}_i - f_i \leq 0$ em $\partial\Omega_i \setminus \Omega_1$. Pelo Princípio do Máximo, segue que $\frac{1}{\mu_i} \mathbf{u}_i - f_i \leq 0$ em $\Omega_i \setminus \Omega_1$. Ademais, $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções harmônicas, com $f_i \leq 1$ e, repetindo o argumento anterior, a menos de uma subsequência, converge para uma função harmônica f em $M \setminus \{\mathbf{p}\}$. Como $\frac{1}{\mu_i} \mathbf{u}_i \rightarrow 1$ quando $i \rightarrow +\infty$, segue que $f_i \rightarrow 1$ em $C_{\text{loc}}^0(M) \cap C_{\text{loc}}^\infty(M \setminus \Omega_1)$. Substituindo f_i na desigualdade de estabilidade e utilizando a primeira identidade de Green, obtemos:

$$\int_M |A_M|^2 f_i^2 \leq \int_M |\nabla f_i|^2 = \int_{\Omega_i \setminus \Omega_1} |\nabla f_i|^2 = - \int_{\partial(\Omega_i \setminus \Omega_1)} f_i D_\nu f_i,$$

donde segue que

$$\int_M |A_M|^2 f_i^2 \leq \int_{\partial\Omega_1} D_\nu f_i, \quad (3.5)$$

onde ν é o vetor normal unitário externo para Ω_1 . Fazendo $i \rightarrow \infty$, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\int_M |A_M|^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_M |A_M|^2 f_i^2 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_1} D_\nu f_i = 0,$$

um absurdo, pois M é por hipótese não-planar.

Utilizando a afirmação podemos assumir que $\mu_i \rightarrow \mu_\infty$. Daí, novamente podemos passar a uma subsequência e assumir que \mathbf{u}_i converge a uma função harmônica $\mathbf{u} \in C_{\text{loc}}^\infty(M \setminus \{\mathbf{p}\})$. Note que $\mathbf{u} > 0$ pelo Princípio do Máximo Forte e que, por (3.3) vale

$$\mathbf{u}_1 \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_1 + \mu_\infty.$$

A menos de uma translação da função \mathbf{u} , podemos assumir que $\inf \mathbf{u} = 0$ e concluir que valem propriedades (a), (b). Para provarmos (c), note que como $\mathbf{u} - \mathbf{u}_1$ é limitada próximo a \mathbf{p} , podemos estendê-la até o ponto \mathbf{p} (singularidade removível).

Passemos agora para a prova da propriedade (d). Considere a solução do seguinte

problema:

$$\begin{cases} \Delta w_i(x) = 0, & x \in \Omega_i \setminus \Omega_1, i \geq 2 \\ w_i(x) = 0, & x \in \partial\Omega_i, \\ w_i(x) = u, & x \in \partial\Omega_1, \\ w_1(x) = u, & x \in \Omega_1. \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo, $u_i \leq w_i \leq u$ em $\Omega_i \setminus \Omega_1$. Então, como $u_i \rightarrow u$ em $C_{\text{loc}}^\infty(M \setminus \{p\})$, tem-se que $w_i \rightarrow u$ em $C_{\text{loc}}^\infty(M \setminus \{p\})$. Ademais, podemos mostrar que

$$\int_{\Omega_i \setminus \Omega_1} |\nabla w_i|^2$$

é não crescente em i . De fato, para $j > i$ vale que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j \setminus \Omega_1} |\nabla w_j|^2 &= \int_{\partial(\Omega_j \setminus \Omega_1)} w_j \frac{\partial w_j}{\partial \eta} \\ &= \int_{\partial\Omega_1} u \frac{\partial w_j}{\partial \eta} \\ &= \int_{\partial(\Omega_i \setminus \Omega_1)} w_i \frac{\partial w_j}{\partial \eta} \\ &= \int_{\Omega_i \setminus \Omega_1} \langle \nabla w_i, \nabla w_j \rangle \\ &\leq \left(\int_{\Omega_j \setminus \Omega_1} |\nabla w_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_i \setminus \Omega_1} |\nabla w_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde segue a afirmação. O item (d) segue então por passagem ao limite.

Para a prova do item (e), note que no argumento anterior mostra-se que

$$\int_{\Omega_i \setminus \Omega_1} |\nabla w_i|^2 \leq C.$$

Tome $\phi \in C^\infty(M)$ tal que $\phi \equiv 0$ em Ω_2 e $\phi \equiv 1$ em $M \setminus \Omega_3$. Considere agora a função ϕw_i e note que $\phi w_i \in C_c^{0,1}(M)$. Pela desigualdade de Michael–Simon–Sobolev (cf. Teorema 33) segue que

$$\left(\int_M (\phi w_i)^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \int_M \phi^2 |\nabla w_i|^2 + w_i^2 |\nabla \phi|^2.$$

Pelo item (d) w_i possui energia de Dirichlet finita. Como $\nabla\phi$ possui suporte compacto e $w_i \rightarrow u$ em $C_{loc}^\infty(M \setminus \Omega_1)$, tem-se que

$$\int_{M \setminus \Omega_2} w_i^{\frac{2n}{n-2}} \leq C < \infty.$$

Utilizando o Lema de Fatou, podemos passar ao limite e obter

$$\int_{M \setminus \Omega_2} u^{\frac{2n}{n-2}} \leq C < \infty. \quad (3.6)$$

Por outro lado, como M possui curvatura limitada, pela desigualdade de Harnack (Proposição 30)

$$u(y) \geq C^{-1}u(x) \quad \forall y \in B_1(x).$$

Ademais, como cada bola $B_1(x)$ possui medida limitada inferiormente, se existisse uma sequência $x_j \rightarrow \infty$ com $u(x_j) \geq \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$ fixado, então teríamos uma contradição com (3.6).

O item (f) é uma aplicação direta dos itens (c) e (e). De fato, é fácil ver que Ω_s é limitado para $s > 0$, pois do contrário teríamos uma contradição com (e). Além disso, é fácil ver que Ω_s é fechado.

Por fim, provemos a propriedade (g): para um valor regular s , $\Omega_s = \{u \leq s\}$ é um compacto com fronteira suave e fechada $\Sigma_s = u^{-1}(s)$.

Afirmção: Seja $s \in (s_0, \infty)$ um valor regular de u . Então $M \setminus \Omega_s$ tem exatamente uma componente conexa e esta é ilimitada.

Prova da Afirmção. Suponha que a afirmação seja falsa. Se $M \setminus \Omega_s$ possuir uma componente conexa Γ limitada, então como $0 < u < s$ em Γ e $u = s$ em $\partial\Gamma$, u atinge seu mínimo no interior de Γ e pelo Princípio do Máximo, u é constante, um absurdo. Isto mostra que $M \setminus \Omega_s$ é desconexo, e portanto tem pelo menos dois fins, um absurdo pelo Teorema de Cao-Shen-Zhu (Corolário 5).

Para finalizar a prova de (g), suponha que Σ_s seja desconexo. Neste caso, temos duas opções: i) as componentes serão conectadas em $M \setminus \Omega_s$; ou ii) uma componente de Σ_s limita um conjunto pre-compacto $B \subset M \setminus \Omega_s$. O caso ii) não pode ocorrer pelo mesma aplicação do Princípio do Máximo que fizemos acima. No caso i), é possível conectar as duas componentes através de um caminho γ em $M \setminus \Omega_s$ (ver figura 3.1). Por outro lado, note que Ω_s também é conexa, pois do contrário poderíamos tomar uma das

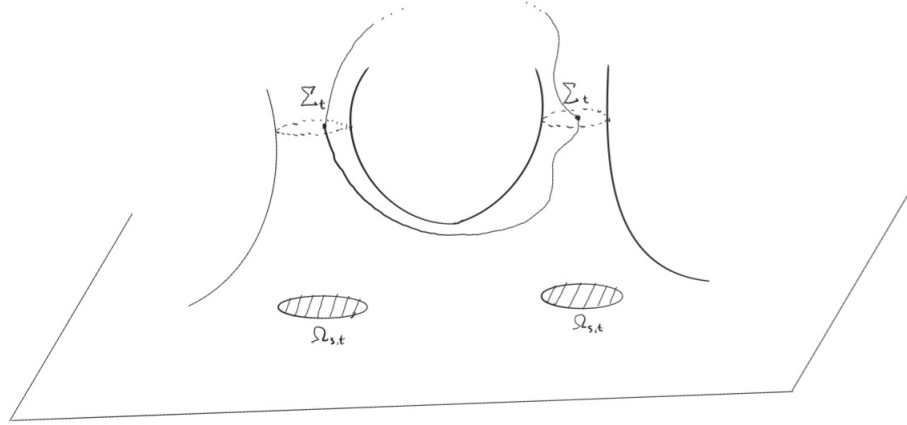


Figura 3.1: caminho em superfície de nível

componentes que não contém o polo e utilizar o Princípio do Máximo nesta componente. Logo, podemos conectar os pontos finais do caminho γ por um caminho em Ω_s e gerar um *loop* também denotado por γ . Ademais, é possível ajustar γ de tal sorte que ele intersecte uma componente de Σ_s transversalmente em apenas um ponto, o que contradiz a hipótese de que M é simplesmente conexa.

□

Para o que se segue, seja $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima estável, 2-lados, completa, não-compacta, simplesmente conexa com curvatura uniformemente limitada $|A_M| \leq K$. Fixe $p \in M$ e considere $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função de Green obtida a partir da Proposição 8. Seja \mathcal{R} o conjunto dos valores regulares de u e $\mathcal{S} := (0, \infty) \setminus \mathcal{R}$. Relembre também que

$$F(s) := \int_{\Sigma_s^*} |\nabla u|^2 \tag{3.7}$$

e

$$\mathcal{A}(s) := \int_{\Sigma_s^*} |A_M|^2 \tag{3.8}$$

para $s \in (0, \infty)$.

Lema 11 (Lema 10, [15]). *O conjunto dos valores regulares \mathcal{R} é aberto e denso em $(0, \infty)$.*

Demonstração. Observe que o item (6) da Proposição 8 implica que $u : M \setminus \{p\} \rightarrow (0, \infty)$ é uma aplicação própria. Como $M \setminus \{p\}$ e $(0, \infty)$ são espaços Hausdorff, isto implica que \mathcal{R} é aberto, pois para cada ponto $y \in \mathcal{R}$, existe uma bola $B_\delta(x) \subset M$, com $u(x) = y$ e $\delta > 0$, tal que $u(B_\delta(x))$ é um aberto contido em \mathcal{R} . A densidade por sua vez segue do

clássico Lema de Sard. \square

Agora, para qualquer $s \in (0, \infty)$, defina

$$\Sigma_s^* := \{x \in M; u(x) = s \text{ e } |\nabla u|(x) > 0\} \quad (3.9)$$

Então Σ_s^* é uma hipersuperfície mínima de M . Pela Proposição 30, $\dim_{\text{Hau}}(\Sigma_s \setminus \Sigma_s^*) \leq n-2$. Em particular, se $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma_s^*) < \infty$ e, para qualquer função $f \in C_{\text{loc}}^\infty(M)$,

$$\int f d\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \Sigma_s = \int_{\Sigma_s^*} f,$$

onde no lado direito a integração é tomada com respeito a forma volume Riemanniana induzida em Σ_s^* .

Lema 12 (Lema 11, [15]). *Para $f \in C_{\text{loc}}^0(M \setminus \{p\})$, a função $t \mapsto \int_{\Sigma_t^*} f$ é contínua.*

Demonstração. Pela Proposição 30, é possível cobrir $\Sigma_s \setminus \Sigma_s^*$ por bolas $B_{r_i}(x_i)$ com $\sum_i r_i^{n-2+n} < \epsilon$ (uma vez que $\dim_{\text{Hau}}(\Sigma_s \setminus \Sigma_s^*) \leq n-2$) e $r_i \leq 1$. Portanto, $\Sigma_s \setminus \cup_i B_{r_i}(x_i)$ é regular, aberto pelo Lema 11 e possui normal vetor unitário externo bem definido. Logo a aplicação

$$\delta \mapsto \int_{\Sigma_{s+\delta} \setminus \cup_i B_{r_i}(x_i)} f$$

é contínua em $\delta = 0$. Além disso, segue da Proposição 30 que

$$\int_{\Sigma_{s+\delta} \setminus \cup_i B_{r_i}(x_i)} f \leq C \sum_i \mathcal{H}^{n-1}(B_{r_i}(x_i)) \leq C \sum_i r_i^{n-1} \leq C\epsilon,$$

onde C é uma constante que independe de δ . Combinando os resultados acima, obtemos o desejado. \square

Lema 13 (Lema 12, [15]). *A função $F(s)$ é localmente Lipschitziana em $(0, \infty)$.*

Demonstração. Fixe um subconjunto compacto $K \subset (0, \infty)$ e considere $s < t$ valores regulares de u com $s, t \in K$.

Considere a região $\Omega_{s,t} := u^{-1}([s, t])$, i.e., a região compreendida entre as superfícies de nível $u^{-1}(s)$ e $u^{-1}(t)$. Logo, $\Omega_{s,t}$ é uma região compacta de M com fronteira suave $\Sigma_s \cup \Sigma_t$, lembrando que $\Sigma_x := u^{-1}(x)$. Seja η o vetor normal externo de $\Omega_{s,t}$, i.e., $\eta = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$

para Σ_s e $\eta = -\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|}$ para Σ_t . Usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned} F(s) - F(t) &= \int_{\partial\Omega_{s,t}} \left\langle \nabla \mathbf{u}, |\nabla \mathbf{u}| \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right\rangle = \int_{\partial\Omega_{s,t}} \langle |\nabla \mathbf{u}| \nabla \mathbf{u}, \eta \rangle \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_{s,t}} \left\langle (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{\frac{1}{2}} \nabla \mathbf{u}, \eta \right\rangle \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_{s,t}} \operatorname{div} \left((|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{\frac{1}{2}} \nabla \mathbf{u} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pelas propriedades do divergente,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left((|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{\frac{1}{2}} \nabla \mathbf{u} \right) &= \left((|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{\frac{1}{2}} \right) \Delta \mathbf{u} + \left\langle \nabla (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{\frac{1}{2}}, \nabla \mathbf{u} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla |\nabla \mathbf{u}|^2, \nabla \mathbf{u} \right\rangle, \end{aligned}$$

pois u é harmônica. Substituindo este resultado em (3.10), obtemos

$$F(s) - F(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_{s,t}} \frac{1}{2} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{-\frac{1}{2}} \langle \nabla |\nabla \mathbf{u}|^2, \nabla \mathbf{u} \rangle. \quad (3.11)$$

Agora, pelas desigualdades de Kato e Cauchy-Schwarz e usando o fato que $(|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{\frac{1}{2}} \geq |\nabla \mathbf{u}|$, vale que

$$(|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{-\frac{1}{2}} \langle \nabla |\nabla \mathbf{u}|^2, \nabla \mathbf{u} \rangle \leq (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{-\frac{1}{2}} |\nabla |\nabla \mathbf{u}|^2| |\nabla \mathbf{u}| \leq |\nabla |\nabla \mathbf{u}|^2| \leq 2|\nabla \mathbf{u}| |D^2 \mathbf{u}|. \quad (3.12)$$

Então, integrando (3.12) e usando a fórmula da co-área, obtemos

$$|F(s) - F(t)| \leq \int_{\Omega_{s,t}} |\nabla \mathbf{u}| |D^2 \mathbf{u}| \leq C \int_s^t \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma_\tau) d\tau.$$

Pela Proposição 30, o volume de Σ_τ é uniformemente limitado por uma constante C_1 que depende da dimensão e da geometria local de $\Omega_{s,t}$. Então, escrevendo $C_2 = C \cdot C_1$, a desigualdade acima implica que

$$|F(s) - F(t)| \leq C_2(t - s). \quad (3.13)$$

Como $t > s$, obtemos o desejado. \square

3.2 Aplicação da Fórmula de Stern-Bochner para Mínimas Estáveis

Em [46] D. Stein mostrou uma forma de combinar a fórmula de Bochner com a Equação de Gauss para obter informações sobre a curvatura escalar a partir do comportamento de funções harmônicas na variedade. Nesta seção, usaremos este método no operador de estabilidade para obter estimativas para as aplicações \mathcal{A} e F , definidas em (3.7) e (3.8).

Iniciamos com a seguinte desigualdade integral.

Proposição 9 (Proposição 13, [15]). *Para qualquer função $\varphi \in C_c^{0,1}((0, \infty))$ vale que*

$$\int_0^\infty \varphi(s)^2 \mathcal{A}(s) ds \leq \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty \varphi(s)^2 ds + \frac{4}{3} \int_0^\infty \varphi'(s) F(s) ds. \quad (3.14)$$

Demonstração. Defina a seguinte aplicação

$$e_\delta := (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{\frac{1}{4}}.$$

Então,

$$\nabla e_\delta = \frac{1}{4} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{-\frac{3}{4}} \nabla |\nabla \mathbf{u}|^2 = \frac{1}{4} e_\delta^{-3} \nabla |\nabla \mathbf{u}|^2. \quad (3.15)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta e_\delta &= \frac{1}{4} e^{-3} \Delta |\nabla \mathbf{u}|^2 - \frac{3}{2} e_\delta^{-4} \langle \nabla e_\delta, \nabla |\Delta \mathbf{u}|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{4} e_\delta^{-3} \Delta |\nabla \mathbf{u}|^2 - \frac{3}{16} e_\delta^{-7} |\nabla |\nabla \mathbf{u}|^2|^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como \mathbf{u} é harmônica em $M \setminus \{\mathbf{p}\}$, vale a fórmula de Bochner:

$$\Delta e_\delta = \frac{1}{2} e_\delta^{-3} \left(|D^2 \mathbf{u}|^2 + \text{Ric}(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) - \frac{3}{8} e_\delta^{-7} |\nabla |\nabla \mathbf{u}|^2|^2 \right). \quad (3.17)$$

Agora, considere $\psi \in C_0^\infty(M \setminus \{\mathbf{p}\})$ e então tomando $f = e_\delta \psi$ na desigualdade de estabilidade obtemos,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{M}} |\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|^2 e_{\delta}^2 \psi^2 &\leq \int_{\mathcal{M}} |\nabla(e_{\delta}\psi)|^2 \\
 &= \int_{\mathcal{M}} e_{\delta}^2 |\nabla\psi|^2 + 2e_{\delta}\psi \langle \nabla\psi, \nabla e_{\delta} \rangle + \psi^2 |\nabla e_{\delta}|^2 \\
 &= \int_{\mathcal{M}} e_{\delta}^2 |\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2} \langle \nabla\psi^2, \nabla e_{\delta}^2 \rangle + \psi^2 |\nabla e_{\delta}|^2.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Tomando ψ de modo que $\psi \equiv 0$ em $\partial\mathcal{M}$, tem-se pela primeira identidade de Green,

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla\psi^2, \nabla e_{\delta}^2 \rangle + \psi^2 \Delta e_{\delta}^2 = \int_{\partial\mathcal{M}} \psi^2 \frac{\partial e_{\delta}^2}{\partial \nu} = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{M}} |\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|^2 e_{\delta}^2 f^2 &\leq \int_{\mathcal{M}} e_{\delta}^2 |\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2} \psi^2 \Delta e_{\delta}^2 + \psi^2 |\nabla e_{\delta}|^2 \\
 &= \int_{\mathcal{M}} e_{\delta}^2 |\nabla\psi|^2 - \psi^2 (e_{\delta} \Delta e_{\delta} + |\nabla e_{\delta}|^2) + \psi^2 |\nabla e_{\delta}|^2 \\
 &= \int_{\mathcal{M}} -e_{\delta} \psi^2 \Delta e_{\delta} + e_{\delta}^2 |\nabla\psi|^2.
 \end{aligned}$$

Substituindo (3.17) na equação acima, obtemos

$$\int_{\mathcal{M}} |\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|^2 e_{\delta}^{-2} \leq \int_{\mathcal{M}} -\frac{1}{2} e_{\delta}^{-2} \left(|D^2\mathbf{u}|^2 - \frac{3}{8} e_{\delta}^{-4} |\nabla|\nabla\mathbf{u}|^2|^2 + \text{Ric}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) \right) \psi^2 + e_{\delta}^2 |\nabla\mathbf{u}|^2.$$

Reorganizando,

$$\int_{\mathcal{M}} \left(|\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|^2 e_{\delta}^2 + \frac{1}{2} \left(|D^2\mathbf{u}|^2 - \frac{3}{8} e_{\delta}^{-4} |\nabla|\nabla\mathbf{u}|^2|^2 + \text{Ric}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) \right) \right) \psi^2 \leq \int_{\mathcal{M}} e_{\delta}^2 |\nabla\mathbf{u}|^2.$$

Pela equação de Gauss, $\text{Ric}_{\mathcal{M}} \leq -|\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|$. Além disso, pela desigualdade melhorada de Kato vale, pela definição de e_{δ} ,

$$\frac{3}{8} |\nabla|\nabla\mathbf{u}|^2|^2 \leq |\nabla\mathbf{u}|^2 |D^2\mathbf{u}|^2 \leq e_{\delta}^4 |D^2\mathbf{u}|^2.$$

Isto implica que

$$|\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|^2 e_{\delta}^{-2} + \frac{1}{2} e_{\delta}^{-2} \left(|D^2\mathbf{u}|^2 - \frac{3}{8} e_{\delta}^{-4} |\nabla|\nabla\mathbf{u}|^2|^2 + \text{Ric}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) \right) \geq 0. \tag{3.19}$$

Seja \mathfrak{B} um subconjunto aberto de $(0, \infty)$ contendo todos os valores singulares de \mathbf{u} , e $\mathfrak{U} := (0, \infty) \setminus \mathfrak{B}$. Então,

$$\int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{U})} \left(|\mathbf{A}_M|^2 e_\delta^{-2} + \frac{1}{2} e_\delta^{-2} \left(|\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|^2 - \frac{3}{8} e_\delta^{-4} |\nabla |\nabla \mathbf{u}|^2|^2 + \text{Ric}_M(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) \right) \right) \psi^2 \leq \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{U})} e_\delta^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 + \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{B})} e_\delta^2 |\nabla \psi|^2.$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, tem-se que $e_\delta \rightarrow |\nabla \mathbf{u}|^{\frac{1}{2}}$, logo, pelo clássico Lema de Fatou e (3.19), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{U})} \left(|\mathbf{A}_M|^2 |\nabla \mathbf{u}| + \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^{-1} \left(|\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|^2 - \frac{3}{8} |\nabla \mathbf{u}|^{-2} |\nabla |\nabla \mathbf{u}|^2|^2 + \text{Ric}_M(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) \right) \right) \psi^2 = \\ & \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{U})} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left(|\mathbf{A}_M|^2 e_\delta^2 + \frac{1}{2} e_\delta^{-2} \left(|\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|^2 - \frac{3}{8} e_\delta^{-4} |\nabla |\nabla \mathbf{u}|^2|^2 + \text{Ric}_M(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) \right) \right) \psi^2 \leq \\ & \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{U})} \left(|\mathbf{A}_M|^2 e_\delta^2 + \frac{1}{2} e_\delta^{-2} \left(|\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|^2 - \frac{3}{8} e_\delta^{-4} |\nabla |\nabla \mathbf{u}|^2|^2 + \text{Ric}_M(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) \right) \right) \psi^2 \leq \\ & \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{U})} e_\delta^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 + \int_{\mathfrak{B}} e_\delta^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 \right) = \\ & \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{U})} |\nabla \mathbf{u}| |\nabla \psi|^2 + \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{B})} |\nabla \mathbf{u}| |\nabla \psi|^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pela Fórmula da coarea, novamente tomando $\Sigma_s := \mathbf{u}^{-1}(s)$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{U}} \left(\int_{\Sigma_s} \left(|\mathbf{A}_M|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^{-2} \left(|\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|^2 - \frac{3}{2} |\nabla |\nabla \mathbf{u}|^2| + \text{Ric}_M(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) \right) \right) \psi^2 ds \right) \leq \\ & \int_{\mathfrak{U}} \left(\int_{\Sigma_s} |\nabla \psi|^2 \right) ds + \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{B})} |\nabla \mathbf{u}| |\nabla \psi|^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para $\varphi \in C_c^\infty((0, \infty))$, tome $\psi = \varphi(\mathbf{u})$, então

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{U}} \left(\int_{\Sigma_s} \left(|\mathbf{A}_M|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^{-2} \left(|\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|^2 - \frac{3}{2} |\nabla |\nabla \mathbf{u}|^2| + \text{Ric}_M(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) \right) \right) \psi^2 \right) ds \leq \\ & \int_{\mathfrak{U}} \varphi'(s)^2 \left(\int_{\Sigma_s} |\nabla \mathbf{u}|^2 \right) ds + \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{B})} \varphi'(s)^2 |\nabla \mathbf{u}|^3. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Se $s \in \mathfrak{U}$, como Σ_s é uma hipersuperfície imagem inversa de um valor regular, seu normal unitário externo é dado por $\mathbf{v} = \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|}$. Para hipersuperfícies vale que:

$$\mathbf{A}_{\Sigma_s} = |\nabla \mathbf{u}|^{-1} \mathbf{D}^2(\mathbf{u}|_{\Sigma_s}), \quad (3.23)$$

então,

$$|\nabla \mathbf{u}|^2 |\mathcal{A}_{\Sigma_s}|^2 = |\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|^2 - 2|\nabla |\nabla \mathbf{u}||^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{v})^2, \quad (3.24)$$

e como u é harmônica,

$$|\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{H}_{\Sigma_s}^2 = \mathbf{D}^2 \mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{v})^2. \quad (3.25)$$

Combinando estes resultados com a Proposição 6, obtemos que

$$\frac{1}{|\nabla \mathbf{u}|^2} \text{Ric}_{\mathcal{M}}(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = \text{Ric}_{\mathcal{M}} \left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|}, \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right) = -|\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|^2 - 2\mathbf{K}_{\Sigma_s} - |\mathcal{A}_{\Sigma_s}|^2 + \mathbf{H}_{\Sigma_s}^2,$$

o que implica

$$2\text{Ric}_{\mathcal{M}}(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = -\frac{1}{2}|\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|^2 - |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{K}_{\Sigma_s} - \frac{1}{2}|\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|^2 + |\nabla |\nabla \mathbf{u}||^2$$

ao longo de Σ_s . Então,

$$\int_{\mathcal{U}} \varphi(s)^2 \left(\int_{\Sigma_s} \frac{3}{4} |\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|^2 + \frac{1}{4} (|\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|^2 - |\nabla |\nabla \mathbf{u}||^2) \right) ds \leq$$

$$\int_{\mathcal{U}} \varphi(s)^2 \left(\int_{\Sigma_s} \frac{1}{2} \mathbf{K}_{\Sigma_s} \right) ds + \int_{\mathcal{U}} \varphi'(s)^2 \mathbf{F}(s) ds + \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathfrak{B})} \varphi'(s)^2 |\nabla \mathbf{u}|^3.$$

Pela definição de $\mathcal{A}(s)$ pelo item (g) da Proposição 8, para $s \in \mathfrak{R}$, Σ_s é conexa e pelo Teorema de Gauss-Bonnet, $\int_{\Sigma_s} \mathbf{K}_{\Sigma_s} \leq 4\pi$. Usando isto, a desigualdade de Kato e as definições de $\mathcal{A}(s)$, $\mathbf{F}(s)$, obtemos:

$$\int_{\mathcal{U}} \varphi(s)^2 \left(\int_{\Sigma_s} \frac{3}{4} |\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|^2 + \frac{1}{4} |\nabla \mathbf{u}|^{-2} (|\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|^2 - |\nabla |\nabla \mathbf{u}||^2) \right) ds \leq$$

$$\int_{\mathcal{U}} \varphi(s)^2 \left(\int_{\Sigma_s} \frac{1}{2} \mathbf{K}_{\Sigma_s} \right) ds + \int_{\mathcal{U}} \varphi'(s)^2 \mathbf{F}(s) ds + \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathcal{U})} \varphi'(s)^2 |\nabla \mathbf{u}|^3.$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{U}} \varphi(s)^2 \leq \frac{8\pi}{3} \int_{\mathcal{U}} \varphi(s)^2 ds + \frac{4}{3} \int_{\mathcal{U}} \varphi'(s)^2 \mathbf{F}(s) ds + \frac{4}{3} \int_{\mathbf{u}^{-1}(\mathcal{U})} \varphi'(s)^2 |\nabla \mathbf{u}|^3.$$

Como φ é de suporte compacto e Lipschitz, sua derivada é uniformemente limitada quase sempre, então $\varphi'(u)^2 |\nabla \mathbf{u}|^3$ é uniformemente limitada, logo $|\mathfrak{B} \cap \text{supp} \varphi| \rightarrow 0$ e concluímos

que

$$\int_0^\infty \varphi(s)^2 \mathcal{A}(s) \, ds \leq \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty \varphi'(s)^2 \, ds + \frac{4}{3} \int_0^\infty \varphi'(s)^2 F(s) \, ds.$$

Um argumento de aproximação padrão para φ completa a prova. \square

Agora é possível estabelecer o seguinte resultado:

Lema 14 (Lema 15, [15]). *Vale que $F(t) = \mathcal{O}(t)$ quando $t \rightarrow 0$.*

Demonstração. Novamente, defina $\Omega_{t,s} := \{x \in M; t \leq u(x) \leq s, s, t \in \mathcal{R}\}$ e observe que $\partial\Omega_{s,t} = \Sigma_t \cup \Sigma_s$. Integrando $\Delta u = 0$ e usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$0 = \int_{\Omega_{t,s}} \Delta u = \int_{\partial\Omega_{t,s}} \langle \nabla u, \eta \rangle = \int_{\Sigma_t} \langle \nabla u, \eta \rangle - \int_{\Sigma_s} \langle \nabla u, \eta \rangle,$$

pois o normal unitário externo tem sentidos opostos em Σ_t e Σ_s . Pela definição de η segue que

$$\int_{\Sigma_t} |\nabla u| = \int_{\Sigma_s} |\nabla u|.$$

Como $|\nabla u| \in C_{\text{loc}}^0(M \setminus \{p\})$ e $t, s \in \mathcal{R}$ são arbitrários, segue do Lema 12 que $t \mapsto \int_{\Sigma_t} |\nabla u|$ é constante. Como M tem por hipótese curvatura de Ricci uniformemente limitada, segue da Desigualdade de Harnack (Proposição 31) que

$$F(t) = \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 \leq C \int_{\Sigma_t} u |\nabla u|.$$

Como Σ_t é uma superfície de nível, vale

$$F(t) \leq \left(C \int_{\Sigma_t} |\nabla u| \right) t = C_1 t$$

isto implica que

$$F(t) = \mathcal{O}(t),$$

quando $t \rightarrow 0$, como desejávamos. \square

Como consequência obtemos o seguinte

Corolário 5 (Corolário 16, [15]). *Vale que*

$$\limsup_{t \searrow 0} \int_1^t \mathcal{A}(s) \, ds + t^2 \int_t^1 s^{-2} \mathcal{A}(s) \, ds \leq \mathcal{O}(s) + \frac{4}{3} \int_t^1 t^2 s^{-4} F(s) \, ds, \quad (3.26)$$

quando $t \rightarrow 0$.

Demonstração. Para $\epsilon \in (0, 1)$ e $l < t$, considere a função:

$$\varphi_\epsilon(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \in (0, \epsilon l), \\ 1 - \frac{\log s - \log l}{\log \epsilon}, & \text{se } s \in [\epsilon l, l), \\ 1, & \text{se } s \in [l, t), \\ ts^{-1}, & \text{se } s \in [t, 1), \\ t(2-s), & \text{se } s \in [1, 2), \\ 0, & \text{se } s \in [2, \infty). \end{cases} \quad (3.27)$$

Então vale que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_\epsilon(s)^2 ds &= \int_{\epsilon l}^l \left(1 - \frac{\log s - \log l}{\log \epsilon}\right)^2 ds + \int_l^t ds + \int_t^1 t^2 s^{-2} ds \\ &= \int_{\epsilon l}^l \left(1 - \frac{\log s - \log l}{\log \epsilon}\right)^2 ds - t^2 + 2t - l. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por outro lado,

$$\int_{\epsilon l}^l \left(1 - \frac{\log s - \log l}{\log \epsilon}\right)^2 ds = \frac{l}{\log^2 \epsilon} [\log^2 \epsilon + 2 \log \epsilon + 2(1 - \epsilon)].$$

Observe que, tomando ϵ suficientemente pequeno, $2 \log \epsilon + 2(1 - \epsilon) \leq 0$. Portanto,

$$\int_{\epsilon l}^l \left(1 - \frac{\log s - \log l}{\log \epsilon}\right)^2 ds \leq l. \quad (3.29)$$

Então, por (3.28) e (3.29),

$$\int_0^1 \varphi_\epsilon(s)^2 ds \leq -t^2 + 2t - \int_0^1 \varphi_\epsilon(s)^2 ds = \mathcal{O}(t).$$

Da Proposição 9, tem-se que

$$\int_0^\infty \varphi_\epsilon(s)^2 \mathcal{A}(s) ds \leq \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty \varphi_\epsilon(s)^2 ds + \frac{4}{3} \int_0^\infty \varphi'_\epsilon(s)^2 F(s) ds. \quad (3.30)$$

Analisemos cada fator da expressão acima:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi'_\epsilon(s)^2 F(s) \, ds &= \int_0^1 \varphi'_\epsilon(s)^2 F(s) \, ds + \int_t^1 \varphi'_\epsilon(s)^2 F(s) \, ds + \int_1^2 \varphi'_\epsilon(s)^2 F(s) \, ds \\ &= \mathcal{O}(|\log \epsilon|^{-1}) + \int_t^1 t^2 s^{-4} F(s) \, ds + \int_1^2 t^2 F(s) \, ds; \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi_\epsilon(s)^2 \mathcal{A}(s) \, ds &= \int_{\epsilon l}^l \varphi_\epsilon(s)^2 \mathcal{A}(s) \, ds + \int_l^t \varphi_\epsilon(s)^2 \mathcal{A}(s) \, ds + \int_t^1 \varphi_\epsilon(s)^2 \mathcal{A}(s) \, ds \\ &\quad + \int_1^2 \varphi_\epsilon(s)^2 \mathcal{A}(s) \, ds \\ &= \int_{\epsilon l}^l \left(1 - \frac{\log s - \log l}{\log \epsilon}\right)^2 \mathcal{A}(s) \, ds + \int_l^t \mathcal{A}(s) \, ds \\ &\quad + \int_t^1 t^2 s^{-2} \mathcal{A}(s) \, ds + \int_1^2 t^2 (2-s)^2 \mathcal{A}(s) \, ds; \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi_\epsilon(s)^2 \, ds &= \int_0^1 \varphi_\epsilon(s)^2 \, ds + \int_1^2 \varphi_\epsilon(s)^2 \, ds \\ &= \mathcal{O}(t) + \int_1^2 t^2 (2-s)^2 \, ds = \mathcal{O}(t), \end{aligned} \quad (3.33)$$

quando $t \rightarrow 0$. Substituindo (3.31)-(3.33) em (3.30), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\epsilon l}^l \left(1 - \frac{\log s - \log l}{\log \epsilon}\right)^2 \mathcal{A}(s) \, ds + \int_l^t \mathcal{A}(s) \, ds + \int_1^2 t^2 (2-s)^2 \mathcal{A}(s) \, ds \\ &\leq \mathcal{O}(t) + \mathcal{O}(|\log \epsilon|^{-1}) + \int_t^1 t^2 s^{-4} F(s) \, ds + \int_1^2 t^2 F(s) \, ds. \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, $\int_{\epsilon l}^\epsilon \left(1 - \frac{\log s - \log l}{\log \epsilon}\right) \mathcal{A}(s) \, ds \rightarrow 0$, $\mathcal{O}(|\log \epsilon|^{-1}) \rightarrow 0$. E como

$$\int_1^2 t^2 (2-s)^2 \mathcal{A}(s) \, ds \geq 0,$$

tem-se que

$$\int_l^t \mathcal{A}(s) \, ds + t^2 \int_t^1 s^{-2} \mathcal{A}(s) \, ds \leq \mathcal{O}(t) + \frac{4}{3} \int_t^1 t^2 F(s) \, ds + \frac{4}{3} \int_1^2 t^2 F(s) \, ds.$$

Por fim, tem-se que $\int_1^2 t^2 F(s) ds = o(t)$ quando $t \rightarrow 0$. Então, sob essa condição, vale que

$$\int_1^t \mathcal{A}(s) ds t^2 \int_t^1 s^{-2} \mathcal{A}(s) ds \leq \mathcal{O}(t) \frac{4}{3} \int_t^1 t^2 s^{-4} F(s) ds,$$

onde $\mathcal{O}(t)$ é limitado independente de $t > 0$. Isto completa a prova. \square

3.3 Uma Extensão da Fórmula de Monotonicidade de Munteanu-Wang

Considere $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão mínima estável, 2-lados, simplesmente conexa, completa com curvatura uniformemente limitada. Para $p \in M$ fixo, considere a função de Green $u \in C_{loc}^\infty(M \setminus \{p\})$ construída na Proposição 8. Defina, como antes,

Agora, considere a aplicação $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\lambda(x) := x + 1 - \sqrt{(x+1) \left(1 - \frac{1}{3}x\right)}. \quad (3.34)$$

Note que $\lambda([-1, 3]) \subset \mathbb{R}$. Além disso, vale que

Lema 15 (Lema 17, [15]). *Existe $x_0 \in (1, 2)$ tal que se $x \in (x_0, 2)$, então $x - \frac{3}{2}\lambda(x) + 1 > 0$.*

Prova. Por definição,

$$\lambda(2) = 2$$

$$\lambda'(x) = 1 - \frac{1}{3}(1-x) \left[(x+1) \left(1 - \frac{1}{3}x\right) \right]^{-\frac{1}{3}},$$

logo,

$$\lambda'(2) = \frac{4}{3}.$$

Então, a expansão de Taylor para λ perto de 2 é:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = \lambda(2) + \lambda'(2)(x-2) + \mathcal{O}((x-2)^2) \\ &= 2 + \frac{4}{3}(x-2) + \mathcal{O}((x-2)^2), \end{aligned}$$

logo,

$$x - \frac{3}{2}\lambda(x) + 1 = -(x-2) + \mathcal{O}((x-2)^2)$$

Obtendo o desejado. □

Proposição 10 (Proposição 18, [15]). *Existe uma constante $C > 0$ tal que, para $t \in (0, 1)$, vale que*

$$F(t) \leq Ct^3 + 4\pi t^2 + \frac{1}{4}t \liminf_{t \searrow 0} \int_t^t \mathcal{A}(s) ds + \int_t^1 s^{-2} \mathcal{A}(s) ds.$$

Demonstração. Considere $t \in \mathcal{R}$. Escreva $\mathbf{v} = \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|}$, o vetor unitário normal externo a $\Omega_s = \{\mathbf{u} \geq s\}$. A família $t \mapsto \Sigma_t$ tem velocidade normal $|\nabla \mathbf{u}|^{-1} \mathbf{v}$. Além disso, a curvatura média de Σ_s satisfaz

$$H = -|\nabla \mathbf{u}|^{-1} \langle \nabla |\nabla \mathbf{u}|, \mathbf{v} \rangle.$$

Logo,

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Sigma_t^*} |\nabla \mathbf{u}|^2 \right) = \int_{\Sigma_t^*} |\nabla \mathbf{u}|^{-1} \langle \nabla |\nabla \mathbf{u}|^2, \mathbf{v} \rangle + |\nabla \mathbf{u}|^{-1} H |\nabla \mathbf{u}|^2 = \int_{\Sigma_t} \langle \nabla |\nabla \mathbf{u}|, \mathbf{v} \rangle.$$

Fixe $\alpha \in (\alpha_0, 2)$ como no Lema 15, e escreva $\lambda \equiv \lambda(\alpha)$. Note que

$$\begin{aligned} t^{-\alpha} F'(t) + t^{-\alpha-1} F(t) &= t^{-\alpha} \int_{\Sigma_t} \langle \nabla |\nabla \mathbf{u}|, \mathbf{v} \rangle + \alpha t^{-\alpha-1} \int_{\Sigma_t} |\nabla \mathbf{u}|^2 \\ &= \int_{\Sigma_t} u^{-\alpha} \langle \nabla |\nabla \mathbf{u}|, \mathbf{v} \rangle + \alpha u^{-\alpha-1} |\nabla \mathbf{u}|^2 \\ &= \int_{\Sigma_t} u^{-\alpha} \langle \nabla |\nabla \mathbf{u}|, \mathbf{v} \rangle - |\nabla \mathbf{u}| \langle \nabla u^{-\alpha}, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Definindo

$$\mathbf{j}_\delta := (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \delta)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.35)$$

obtemos que

$$t^{-\alpha} F'(t) + \alpha t^{-\alpha-1} F(t) = \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\Sigma_t} u^{-\alpha} \langle \nabla \mathbf{j}_\delta, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{j}_\delta \langle \nabla u^{-\alpha}, \mathbf{v} \rangle.$$

Agora, se $0 < t < \tau \leq 1$, $t, \tau \in \mathcal{R}$, a segunda identidade de Green em $\Omega_{t,s} := \{t \leq \mathbf{u} \leq \tau\}$ implica que

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma_t} (u^{-\alpha} \langle \nabla \mathbf{j}_\delta, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{j}_\delta \langle \nabla u^{-\alpha}, \mathbf{v} \rangle) - \int_{\Sigma_\tau} (u^{-\alpha} \langle \nabla \mathbf{j}_\delta, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{j}_\delta \langle \nabla u^{-\alpha}, \mathbf{v} \rangle) = \\ &\int_{\Omega_t} u^{-\alpha} \Delta \mathbf{j}_\delta - \mathbf{j}_\delta \Delta u^{-\alpha} - \int_{\Omega_\tau} u^{-\alpha} \Delta \mathbf{j}_\delta - \mathbf{j}_\delta \Delta u^{-\alpha} = \int_{\Omega_{t,\tau}} u^{-\alpha} \Delta \mathbf{j}_\delta - \mathbf{j}_\delta \Delta u^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Como u é harmônica,

$$\Delta u^{-\alpha} = \alpha(\alpha + 1)u^{-(\alpha+2)}|\nabla u|^2 - \alpha u^{-(\alpha+1)}\Delta u = \alpha(\alpha + 1)u^{-(\alpha+2)}|\nabla u|^2. \quad (3.37)$$

Além disso, temos que

$$\nabla j_\delta = \frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + \delta)^{-\frac{1}{2}} \nabla |\nabla u|^2$$

e

$$\Delta j_\delta = -\frac{1}{4} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} j_\delta^{-1} \Delta |\nabla u|^2. \quad (3.38)$$

Aplicando a fórmula de Bochner em (3.37) e usando o fato que u é harmônica, obtemos

$$\Delta j_\delta = -\frac{1}{4} j_\delta^{-3} |\nabla u|^2 + j_\delta^{-1} (|D^2 u|^2 + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u)),$$

isto é,

$$\Delta j_\delta = j_\delta^{-1} \left(|D^2 u|^2 - \frac{1}{4} j_\delta^{-2} |\nabla u|^2 \right) + j_\delta^{-1} \text{Ric}(\nabla u, \nabla u). \quad (3.39)$$

Substituindo (3.37) e (3.39) em (3.36), obtem-se que

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_t} u^{-\alpha} \langle \nabla j_\delta, \nu \rangle - j_\delta \langle \nabla u^{-\alpha}, \nu \rangle - \int_{\Sigma_\tau} u^{-\alpha} \langle \nabla j_\delta, \nu \rangle - j_\delta \langle \nabla u^{-\alpha}, \nu \rangle = \\ & \int_{\Omega_{t,\tau}} u^{-\alpha} j_\delta^{-1} \left(|D^2 u|^2 - \frac{1}{4} j_\delta^{-2} |\nabla u|^2 + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \right) + j_\delta \alpha(\alpha + 1) u^{-(\alpha+2)} |\nabla u|^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Pela desigualdade de Kato melhorada, tem-se que

$$|D^2 u|^2 - \frac{1}{4} j_\delta^{-2} |\nabla |\nabla u|^2|^2 \geq 0. \quad (3.41)$$

Seja \mathfrak{B} um subconjunto aberto de $(0, \infty)$ contendo todos os valores singulares de u , e

$\mathcal{U} := (0, \infty) \setminus \mathfrak{B}$. Então, usando a fórmula da coarea em (3.40), obtem-se que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma_t} u^{-\alpha} \langle \nabla j_\delta, \nu \rangle - j_\delta \langle \nabla u^{-\alpha}, \nu \rangle - \int_{\Sigma_\tau} u^{-\alpha} \langle \nabla j_\delta, \nu \rangle - j_\delta \langle \nabla u^{-\alpha}, \nu \rangle = \\
 & - \int_{\Omega_{t,\tau} \cap u^{-1}(\mathcal{U})} u^{-\alpha} j_\delta^{-1} \left(|D^2 u|^2 - \frac{1}{4} j_\delta^{-2} |\nabla u|^2 + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \right) + j_\delta \alpha (\alpha + 1) u^{-(\alpha+2)} |\nabla u|^2 \\
 & + \int_{\Omega_{t,\tau} \cap u^{-1}(\mathfrak{B})} u^{-\alpha} j_\delta^{-1} \left(|D^2 u|^2 - \frac{1}{4} j_\delta^{-2} |\nabla u|^2 + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \right) + j_\delta \alpha (\alpha + 1) u^{-(\alpha+2)} |\nabla u|^2 \\
 & = - \int_{(t,\tau) \cap \mathcal{U}} \left(\int_{\Sigma_s} u^{-\alpha} j_\delta^{-1} \left(|D^2 u|^2 - \frac{1}{4} j_\delta^{-2} |\nabla u|^2 + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \right) |\nabla u|^{-1} \right) ds \\
 & \quad + \int_{(t,\tau) \cap \mathcal{U}} \left(\int_{\Sigma_s} j_\delta \alpha (\alpha + 1) u^{-(\alpha+2)} |\nabla u| \right) ds \\
 & \quad - \int_{\Omega_{t,\tau}} j_\delta \alpha (\alpha + 1) u^{-(\alpha+2)} |\nabla u|^2 - u^{-\alpha} j_\delta^{-1} \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \\
 & \quad - \int_{\Omega_{t,\tau} \cap u^{-1}(\mathfrak{B})} u^{-\alpha} j_\delta^{-1} \left(|D^2 u|^2 - \frac{1}{4} j_\delta^{-2} |\nabla u|^2 \right) \\
 & - \int_{(t,\tau) \cap \mathcal{U}} \left(\int_{\Sigma_s} u^{-\alpha} j_\delta^{-1} \left(|D^2 u|^2 - \frac{1}{4} j_\delta^{-2} |\nabla u|^2 + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \right) |\nabla u|^{-1} \right) ds \\
 & \quad + \int_{(t,\tau) \cap \mathcal{U}} \left(\int_{\Sigma_s} j_\delta \alpha (\alpha + 1) u^{-(\alpha+2)} |\nabla u| \right) ds \\
 & - \int_{\Omega_{t,\tau} \cap u^{-1}(\mathfrak{B})} j_\delta \alpha (\alpha + 1) u^{-(\alpha+2)} |\nabla u|^2 - u^{-(\alpha+1)} j_\delta^{-1} \text{Ric}(\nabla u, \nabla u).
 \end{aligned}$$

Como $\alpha(\alpha + 1)u^{-(\alpha+2)}j_\delta|\nabla u|^2 - u^{-\alpha-1}j_\delta^{-1}\text{Ric}(\nabla u, \nabla u)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega_{t,\tau})$ quando $\delta \rightarrow 0$, tem-se que $j_\delta \rightarrow |\nabla u|$ e então $|\mathfrak{B}| \rightarrow 0$ implica

$$\begin{aligned}
 & (t^{-\alpha}F'(t) + \alpha t^{-\alpha-1}F(t)) - (\tau^{-\alpha}F'(\tau) + \alpha \tau^{-\alpha-1}F(\tau)) \leq \\
 & - \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} u^{-\alpha} |\nabla u|^{-2} \text{Ric}_M(\nabla u, \nabla u) \right) ds \\
 & - \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} u^{-\alpha} |\nabla u|^{-2} \text{Ric}_M(\nabla u, \nabla u) \right) ds \\
 & + \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} \alpha(\alpha + 1) u^{-\alpha-2} |\nabla u|^2 \right) ds.
 \end{aligned}$$

Sabemos que, ao longo de $\Sigma_s, s \in \mathcal{R}$,

$$\text{Ric}_M(\nabla u, \nabla u) = -\frac{1}{2}|\nabla u|^2 |A_M|^2 - |\nabla u|^2 \mathbf{K}_{\Sigma_s} - \frac{1}{2}|D^2 u|^2 + |\nabla |\nabla u||^2.$$

$$|\nabla u|^{-2} \text{Ric}_M(\nabla u, \nabla u) = -\frac{1}{2}|A_M|^2 - \mathbf{K}_{\Sigma_s} + |\nabla u|^{-2} |\nabla |\nabla u||^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^{-2} |D^2 u|^2,$$

então, usando a equação acima e a desigualdade de Kato,

$$\begin{aligned}
 & (t^{-\alpha}F'(t) + \alpha t^{-\alpha-1}F(t)) - (\tau^{-\alpha}F'(\tau) + \alpha \tau^{-\alpha-1}F(\tau)) \leq \\
 & \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} u^{-\alpha} |\nabla u|^{-2} (|D^2 u|^2 - |\nabla |\nabla u||^2) \right) ds \\
 & - \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} -\frac{1}{2} u^{-\alpha} |\mathcal{A}_M|^2 - u^{-\alpha} \mathcal{K}_{\Sigma_s} + u^{-\alpha} |\nabla u|^{-2} |\nabla |\nabla u||^2 - \frac{1}{2} u^{-\alpha} |\nabla u|^{-2} |D^2 u|^2 \right) ds \\
 & \quad + \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} \alpha(\alpha+1) u^{-\alpha-2} |\nabla u|^2 \right) ds \\
 \leq & \frac{1}{2} \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} u^{-\alpha} |\mathcal{A}_M|^2 \right) ds + \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} u^{-\alpha} \mathcal{K}_{\Sigma_s} \right) ds - \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} u^{-\alpha} |\nabla u|^{-2} |\nabla |\nabla u||^2 \right) ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} u^{-\alpha} |\nabla u|^{-2} |D^2 u|^2 \right) ds + \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} \alpha(\alpha+1) u^{-\alpha-1} |\nabla u|^2 \right) ds.
 \end{aligned}$$

Como Σ_s é uma superfície de nível, u é constante ao longo de Σ_s . Portanto, a relação acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 & (t^{-\alpha}F'(t) + \alpha t^{-\alpha-1}F(t)) - (\tau^{-\alpha}F'(\tau) + \alpha \tau^{-\alpha-1}F(\tau)) \leq \\
 & \frac{1}{2} \int_t^\tau s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds + \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} \mathcal{K}_{\Sigma_s} \right) ds - \frac{1}{2} \int_t^\tau \left(\int_{\Sigma_s} |\nabla u|^{-2} |\nabla |\nabla u||^2 \right) ds \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_t^\tau \alpha(\alpha+1) s^{-\alpha-2} F(s) ds. \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet e a Proposição 8,

$$\int_t^\tau s^{-\alpha} \left(\int_{\Sigma_s} \mathcal{K}_{\Sigma_s} \right) ds \leq 4\pi \int_t^\tau s^{-\alpha} ds = \frac{1}{\alpha-1} 4\pi (t^{1-\alpha} - \tau^{1-\alpha}). \tag{3.43}$$

Além disso, pela desigualdade de Kato melhorada e a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{2}{3} |D^2 u|^2 \geq |\nabla |\nabla u||^2$$

implica que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma_s} |\nabla u|^{-2} |D^2 u|^2 & \geq \int_{\Sigma_s} \frac{3}{2} |\nabla u|^{-2} |\nabla |\nabla u||^2 \\
 & \geq \int_{\Sigma_s} \frac{3}{2} |\nabla u|^{-2} |\nabla |\nabla u||^2.
 \end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\Sigma_s} |\nabla \mathbf{u}|^{-2} |\mathbf{D}^2 \mathbf{u}|^2 \leq \frac{3}{2} \mathbf{F}(s)^{-1} \mathbf{F}'(s)^2, \quad (3.44)$$

para $s \in \mathcal{R}$. Substituindo (3.43) e (3.44) em (3.3), obtém-se

$$\begin{aligned} & (\mathbf{t}^{-\alpha} \mathbf{F}'(\mathbf{t}) + \alpha \mathbf{t}^{-\alpha-1} \mathbf{F}(\mathbf{t})) - (\tau^{-\alpha} \mathbf{F}'(\tau) + \alpha \tau^{-\alpha-1} \mathbf{F}(\tau)) \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{t}}^{\tau} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) \, ds + \\ & \frac{1}{\alpha-1} 4\pi (\mathbf{t}^{1-\alpha} - \tau^{1-\alpha}) + \int_{\mathbf{t}}^{\tau} \left(-\frac{3}{2} \lambda s^{-\alpha-1} \mathbf{F}'(s) + \left(\frac{3}{2} \lambda^2 + \alpha(\alpha+1) \right) s^{-\alpha-2} \mathbf{F}(s) \right) ds. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Agora, pela desigualdade de Young com $\epsilon > 0$,

$$2s^{-1} \mathbf{F}'(s) \mathbf{F}(s) \leq 2s^{-1} \epsilon \mathbf{F}'(s)^2 + (2\epsilon s)^{-1} \mathbf{F}(s)^2.$$

Tomando $\epsilon = \frac{s}{2\lambda(\alpha)}$, para α como no Lema 15, tem-se que

$$2s^{-1} \mathbf{F}'(s) \mathbf{F}(s) \leq \lambda^{-1} \mathbf{F}'(s)^2 + \lambda s^{-2} \mathbf{F}(s)^2.$$

Reorganizando,

$$\begin{aligned} -\lambda^{-1} \mathbf{F}'(s)^2 & \leq -2s^{-1} \mathbf{F}'(s) \mathbf{F}(s) + \lambda s^{-2} \mathbf{F}(s)^2 \\ -\frac{3}{4} s^{-\alpha} \mathbf{F}'(s)^2 \mathbf{F}(s)^{-1} & \leq -\frac{3}{2} s^{-\alpha-1} \lambda \mathbf{F}'(s) + \frac{3}{4} \lambda^2 s^{-\alpha-2} \mathbf{F}(s). \end{aligned}$$

Usando a relação acima em (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} & (\mathbf{t}^{-\alpha} \mathbf{F}'(\mathbf{t}) + \alpha \mathbf{t}^{-\alpha-1} \mathbf{F}(\mathbf{t})) - (\tau^{-\alpha} \mathbf{F}'(\tau) + \alpha \tau^{-\alpha-1} \mathbf{F}(\tau)) \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{t}}^{\tau} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) \, ds \\ & + \frac{4\pi}{\alpha-1} (\mathbf{t}^{1-\alpha} - \tau^{1-\alpha}) + \int_{\mathbf{t}}^{\tau} \left(-\frac{3}{2} s^{-\alpha-1} \lambda \mathbf{F}'(s) + \left(\frac{3}{4} \lambda^2 + \alpha(\alpha+1) \right) s^{-\alpha-2} \mathbf{F}(s) \right) ds. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Integrando por partes,

$$\int_{\mathbf{t}}^{\tau} -\frac{3}{2} s^{-\alpha-1} \lambda \mathbf{F}'(s) \, ds = -\frac{3}{2} \lambda s^{-\alpha-1} \mathbf{F}(s) \Big|_{s=\mathbf{t}}^{s=\tau} - \int_{\mathbf{t}}^{\tau} \frac{3}{2} \lambda (-\alpha_1) s^{-\alpha-2} \mathbf{F}(s) \, ds.$$

Sustituindo a expressão acima em (3.3),

$$\begin{aligned} & (t^{-\alpha}F'(t) + \alpha t^{-\alpha-1}F(t)) - (\tau^{-\alpha}F'(\tau) + \alpha \tau^{-\alpha-1}F(\tau)) \leq \\ & \frac{1}{2} \int_t^\tau s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) \, ds + \frac{4\pi}{\alpha-1} (t^{1-\alpha} \tau^{1-\alpha}) + \int_t^\tau \left(\frac{3}{4} \lambda^2 - \frac{3}{2} \lambda (\alpha+1) + \alpha(\alpha+1) \right) F(s) \, ds \\ & \quad - \frac{3}{2} \lambda \tau^{-\alpha-1} F(s) + \frac{3}{2} \lambda t^{-\alpha-1} F(t). \end{aligned}$$

Observe que λ foi escolhido de sorte que

$$\frac{3}{4} \lambda^2 - \frac{3}{2} \lambda (\alpha+1) + \alpha(\alpha+1) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} & (t^{-\alpha}F'(t) + \alpha t^{-\alpha-1}F(t)) - (\tau^{-\alpha}F'(\tau) + \alpha \tau^{-\alpha-1}F(\tau)) \leq \\ & \frac{1}{2} \int_t^\tau s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) \, ds + \frac{4\pi}{\alpha-1} (t^{1-\alpha} \tau^{1-\alpha}) - \frac{3}{2} \lambda \tau^{-\alpha-1} F(s) + \frac{3}{2} \lambda t^{-\alpha-1} F(t). \end{aligned}$$

Reorganizando,

$$\begin{aligned} & \left[t^{-\alpha}F'(t) + \left(\alpha - \frac{3}{2} \lambda \right) t^{-\alpha-1}F(t) \right] - \left[\tau^{-\alpha}F'(\tau) + \left(\alpha - \frac{3}{2} \lambda \right) \tau^{-\alpha-1}F(\tau) \right] \leq \\ & \quad \frac{1}{2} \int_t^\tau s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) \, ds + \frac{4\pi}{\alpha-1} (t^{1-\alpha} - \tau^{1-\alpha}) \leq \\ & \quad \frac{1}{2} \int_t^\tau s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) \, ds + \frac{4\pi}{\alpha-1} t^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

pois $\tau > 0$. Multiplicando a equação acima por $t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda}$ e reorganizando,

$$\left(t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} F(t) \right)' \leq C(\tau) t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} + \frac{4\pi}{\alpha-1} t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} + \frac{1}{2} t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} \int_t^\tau s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) \, ds, \quad (3.47)$$

onde

$$C(\tau) := \tau^{-\alpha}F'(\tau) + \left(\alpha - \frac{3}{2} \lambda \right) \tau^{-\alpha-1}F(\tau),$$

que é uniformemente limitada e positiva, pelo Lema 15 (observe que $\alpha - \frac{3}{2}\lambda > -1$). Pelo Lema 13, existem $l, t \in \mathcal{R}$, $l < t < \tau$, tais que F é Lipschitziana em $[l, t]$. Então, integrando

(3.47) neste intervalo,

$$\begin{aligned}
 t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} - l^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} &\leq C(\tau) \int_l^t \sigma^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} d\sigma + \int_l^t \frac{4\pi}{\alpha-1} \sigma^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} d\sigma \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_l^t \int_\sigma^\tau \sigma^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds d\sigma \\
 &= \frac{C}{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \left(t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} - l^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \right) \\
 &\quad + \frac{4\pi}{(\alpha-1)(\alpha-\frac{3}{2}\lambda+2)} \left(t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+2} - l^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_l^t \int_\sigma^\tau \sigma^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds d\sigma.
 \end{aligned}$$

Reorganizando,

$$\begin{aligned}
 t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} F(t) &\leq l^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} F(l) + \frac{C}{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} + \frac{4\pi}{(\alpha-1)(\alpha-\frac{3}{2}\lambda+2)} t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_l^t \int_\sigma^\tau \sigma^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds \\
 &\quad - \left(\frac{C}{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} l^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} + \frac{4\pi}{(\alpha-1)(\alpha-\frac{3}{2}\lambda+2)} l^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+2} \right).
 \end{aligned}$$

Como $\alpha \in (1, 2)$ e pelo Lema 15, a última expressão acima é positiva. Logo,

$$\begin{aligned}
 t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} F(t) &\leq l^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} F(l) + \frac{C}{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} + \frac{4\pi}{(\alpha-1)(\alpha-\frac{3}{2}\lambda+2)} t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_l^t \int_\sigma^\tau \sigma^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Agora, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
 \int_l^t \int_\sigma^\tau \sigma^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds d\sigma &= \int_l^t \int_l^s \sigma^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) d\sigma ds + \int_t^\tau \int_l^t \sigma^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) d\sigma ds \\
 &\leq \frac{1}{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \int_l^t s^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \mathcal{A}(s) ds + \frac{1}{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \int_t^\tau s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds.
 \end{aligned}$$

Como $s \in (0, 1)$, segue do Lema 15 que $s^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \leq 1$. Como $t < 1$, a estimativa acima pode ser reescrita como

$$\int_l^t \int_\sigma^\tau \sigma^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds d\sigma \leq \frac{1}{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \int_l^t \mathcal{A}(s) ds + \frac{1}{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \int_\sigma^\tau s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds. \tag{3.49}$$

Substituindo (3.49) em (3.48), obtem-se que

$$\begin{aligned} t^{\alpha - \frac{3}{2}\lambda} F(t) &\leq l^{\alpha - \frac{3}{2}\lambda} F(l) + \frac{C}{2\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 1} t^{2\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 1} + \frac{4\pi}{(\alpha - 1)(\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 2)} t^{\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 2} \\ &\quad + \frac{1}{2(2\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 1)} \int_l^t \mathcal{A}(s) \, ds + \frac{1}{2(2\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 1)} t^{2\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 1} \int_t^\tau s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) \, ds. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Agora, pelo Lema 14, existe $K > 0$ tal que

$$l^{\alpha - \frac{3}{2}\lambda} F(l) \leq K l^{\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 1}$$

isto implica que

$$l^{\alpha - \frac{3}{2}\lambda} F(l) = \mathcal{O}\left(l^{\alpha - \frac{3}{2}\lambda}\right), \quad (3.51)$$

quando $l \rightarrow 0$. Pelo Lema 15, isto implica que

$$l^{\alpha - \frac{3}{2}\lambda} F(l) = o(1),$$

quando $l \rightarrow 0$. Portanto, tomando o limite $l \searrow 0$ em (3.50), obtem-se que

$$\begin{aligned} t^{\alpha - \frac{3}{2}\lambda} F(t) &\leq \frac{C}{2\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 1} t^{2\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 1} + \frac{4\pi}{(\alpha - 1)(\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 2)} t^{\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 2} \\ &\quad + \frac{1}{2(2\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 1)} \left(\liminf_{l \searrow 0} \int_l^t \mathcal{A}(s) \, ds + t^{2\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 1} \int_t^\tau s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) \, ds \right). \end{aligned}$$

Como $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)$ é contínua em $\alpha = 2$ e $\lambda(2) = 2$, tomando o limite $\alpha \nearrow 2$, obtem-se que

$$t^{-1} F(t) \leq Ct^2 + 4\pi t + \frac{1}{4} \liminf_{l \searrow 0} \int_l^t \mathcal{A}(s) \, ds + \frac{1}{4} t^2 \int_t^\tau s^{-2} \mathcal{A}(s) \, ds.$$

Como $\tau \leq 1$, a afirmação é verdadeira. □

Corolário 6 (Corolário 20, [15]). *Vale que $F(t) = \mathcal{O}(t^2)$ quando $t \rightarrow 0$.*

Demonstração. Pela Proposição 10 e Corolário 5, obtem-se que

$$\begin{aligned} F(t) &\leq Ct^3 + 4\pi t^2 + \frac{1}{4} \liminf_{l \searrow 0} \int_l^t \mathcal{A}(s) \, ds + \frac{1}{4} t^3 \int_t^1 s^{-2} \mathcal{A}(s) \, ds \\ t \limsup_{l \searrow 0} \int_l^t \mathcal{A}(s) \, ds + t^3 \int_t^1 s^{-2} \mathcal{A}(s) \, ds &\leq \mathcal{O}(t^2) + \frac{4}{3} t^3 \int_t^1 s^{-4} F(s) \, ds. \end{aligned}$$

Logo

$$F(t) \leq \mathcal{O}(t^2) + \frac{4}{3}t^3 \int_t^1 s^{-4}F(s) ds, \quad (3.52)$$

quando $t \rightarrow 0$. Assuma por contradição que $\limsup_{t \searrow 0} F(t)t^{-2} = \infty$. Se isto ocorrer, então podemos escolher uma sequência $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$ tal que

$$F(t_j)t_j^{-2} = \max_{[t_j, 1]} F(s)s^{-2} \rightarrow \infty. \quad (3.53)$$

Usando (3.52) com t_j , obtem-se

$$\begin{aligned} F(t_j) &\leq \mathcal{O}(t_j^2) + \frac{1}{3}t_j^3 \int_{t_j}^1 s^{-2}(s^{-2}F(s)) ds \\ &\leq \mathcal{O}(t_j^2) + \frac{1}{3}t_j F(t) \int_{t_j}^1 s^{-2} ds \\ &= \mathcal{O}(t_j^2) + \frac{1}{3}t_j F(t_j)(1 - t_j). \end{aligned}$$

Reorganizando, obtem-se que

$$\left(1 - \frac{1}{3}t_j(1 - t_j)\right) F(t_j) \leq \mathcal{O}(t_j^2),$$

um absurdo, pois $(1 - \frac{1}{3}t_j(1 - t_j)) \rightarrow 1$ quando $j \rightarrow \infty$. Isto implica que $F(t) = \mathcal{O}(t^2)$, como queríamos. \square

3.4 Resultado Principal

Podemos finalmente demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 14 ([15]). *Se $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ é uma imersão mínima estável, conexa, 2-lados, completa, então $M = \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$.*

Sabemos pelo Teorema 13 que este resultado é equivalente ao seguinte teorema:

Teorema 15. *Seja $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão mínima estável e 2-lados. Então, existe uma constante $C < \infty$ tal que*

$$|A_M(p)|d_M(p, \partial M) \leq C. \quad (3.54)$$

Demonstração. Suponha que o resultado seja falso. Então, existem uma sequência de hipersuperfícies mínimas estáveis, 2-lados, $M_i \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ e uma sequência de pontos $p_i \in M_i$

tais que

$$|A_{M_i}(p_i)|d_{M_i}(p_i, \partial M_i) = R_i \rightarrow \infty, \quad (3.55)$$

onde d_M denota a distância intrínseca em M_i . Considerando um subconjunto apropriado de M_i , podemos assumir que M_i é compacto e suave até seu bordo. Isto nos permite assumir que p_i maximiza a função $x \mapsto |A_i(x)|d_{M_i}(x, \partial M_i)$. A menos de uma translação e de um reescalonamento da métrica, podemos assumir que $p_i = 0$ e $|A_i(0)| = 1$. Então, para quaisquer $r < R_i$ e $x \in M_i$ com $d_{M_i}(0, x) \leq r$, obtemos

$$|A_{M_i}(x)| \leq \frac{R_i}{d_{M_i}(x, \partial M_i)} \leq \frac{R_i}{R_i - r},$$

e então, para cada $r > 0$,

$$\sup_{d_{M_i}(x, 0) \leq r} |A_{M_i}(x)| \leq \frac{R_i}{R_i - r} \rightarrow 1.$$

Portanto, M_i converge subsequencialmente suavemente para uma imersão mínima estável, 2-lados, completa $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ com $|A_M(0)| = 1$ e $|A_M(x)| \leq 1$, para todo $x \in M$. Mostremos que uma imersão desta forma não pode existir.

Pelo Corolário 2, podemos assumir que M é simplesmente conexa. Considere a função de Green $u \in C_{\text{loc}}^\infty(M \setminus \{p\})$ como na Proposição 8, e como antes considere

$$F(t) := \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2,$$

onde $\Sigma_t = u^{-1}(t)$. Pelo Corolário 6, vale que $F(t) \leq Ct^2$, para todo $t \in (0, \infty)$ e algum $C \in \mathbb{R}$.

Considere $f = \varphi \circ u$ para uma função teste $\varphi \in C_c^{0,1}((0, \infty))$ e substitua na expressão acima. Então, pelo Teorema 8 e a fórmula da co-área,

$$\begin{aligned} \int_M |A_M|^3 \varphi(u)^3 &\leq C \int_M |\nabla(\varphi \circ u)|^3 = C \int_M \varphi'(u)^3 |\nabla u|^3 \\ &= C \int_0^\infty \left(\int_{\Sigma_s} \varphi'(u)^3 |\nabla u|^2 \right) ds = C \int_0^\infty \varphi'(s)^3 \left(\int_{\Sigma_s} |\nabla u|^2 \right) ds \\ &= C \int_0^\infty \varphi'(s)^3 F(s) ds \leq C \int_0^\infty \varphi'(s)^3 s^2 ds. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Para $\rho \gg 0$, escolha

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \rho^{-2}), \\ 2 + \frac{\log t}{\log \rho}, & t \in [\rho^{-2}, \rho^{-1}), \\ 1, & t \in [\rho^{-1}, \rho), \\ 2 - \frac{\log t}{\log \rho}, & t \in [\rho, \rho^2), \\ 0, & t \in [\rho^2, \infty). \end{cases}$$

Então $\varphi \in C_0^{0,1}(M \setminus \{p\})$, e por (3.56),

$$\int_M |\mathcal{A}_M|^3 \varphi(u)^3 \leq C \int_0^\infty \varphi'(s)^3 s^2 ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \int_{\{\rho^{-2} \leq u \leq \rho^{-1}\}} |\mathcal{A}_M|^3 \left(2 + \frac{\log s}{\log \rho}\right)^3 + \int_{\{\rho^{-1} \leq u \leq \rho\}} |\mathcal{A}_M|^3 + \int_{\{\rho \leq u \leq \rho^2\}} |\mathcal{A}_M|^3 \left(2 - \frac{\log s}{\log \rho}\right)^3 \\ & \leq C \int_{\rho^{-2}}^{\rho^{-1}} \frac{s^2}{s^3 \log^3 \rho} ds + C \int_{\rho}^{\rho^2} \frac{s^2}{s^3 \log^3 \rho} ds = \\ & \frac{C}{\log^3 \rho} (\log \rho^{-1} - \log \rho^{-2}) + \frac{C}{\log^3 \rho} (\log \rho^2 - \log \rho) = \frac{2C}{\log^2 \rho}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$2 + \frac{\log s}{\log \rho} \in \left[2 + \frac{\log \rho^{-2}}{\log \rho}, 2 + \frac{\log \rho^2}{\log \rho}\right] = [0, 4],$$

isto implica que $\int_{\{\rho^{-2} \leq u \leq \rho^{-1}\}} |\mathcal{A}_M|^3 \left(2 + \frac{\log s}{\log \rho}\right)^3 \geq 0$. Analogamente,

$$\int_{\{\rho \leq u \leq \rho^2\}} |\mathcal{A}_M|^3 \left(2 - \frac{\log s}{\log \rho}\right)^3 \geq 0.$$

Combinando estes resultados, obtemos

$$\int_{\{\rho^{-1} \leq u \leq \rho\}} |\mathcal{A}_M|^3 \leq \frac{2C}{\log^2 \rho}.$$

Fazendo $\rho \rightarrow \infty$, obtem-se que $\mathcal{A}_M \equiv 0$, um absurdo pois $|\mathcal{A}_M(0)| = 1$. Logo a sequência $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ não deve existir e a estimativa (3.54) é verdadeira. \square

Capítulo 4

Hipersuperfícies Mínimas Estáveis em \mathbb{R}^4 : Versão 2

Uma análise cuidadosa dos capítulos precedentes revela que as demonstrações ali apresentadas dependem de forma bastante significativa das propriedades do espaço ambiente, em particular da estrutura dos conjuntos simplesmente conexos em \mathbb{R}^2 e da equação de Gauss-Bonnet, o que dificulta a obtenção de generalizações para dimensões superiores. No entanto, em [16], O. Chodosh e C. Li estabeleceram uma nova demonstração do Teorema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^3 , baseada em um método que pode ser adaptado para dimensões maiores. Este capítulo dedica-se a apresentação desta solução. Vale mencionar também que, além das duas provas aqui apresentadas, existe uma terceira prova independente para o Problema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^4 , proposta por G. Catino, P. Mastrolia e A. Roncoroni em [20].

4.1 O Método de μ -Bolhas

Descreveremos agora o método de μ -bolhas. Para isto, se $n \leq 7$ considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana n -dimensional com bordo e assumamos que $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$, onde nenhum dos $\partial_{\pm} M$ é vazio. Fixe uma função suave $u > 0$ em M e uma função suave $h \rightarrow \pm\infty$ em $\partial_{\pm} M$ (ver figura 4.2). Escolha um conjunto Ω_0 de fronteira suave¹ $\partial\Omega_0 \subset \text{int}(M)$ e $\partial_+ M \subset \Omega_0$ (ver figura 4.1). Considere o seguinte funcional

¹Mais geralmente, um conjunto de perímetro finito, mas para nossos fins é suficiente que tenha fronteira suave.

$$\mathcal{A}(\Omega) := \int_{\partial^* \Omega} u \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\mathcal{M}} (\chi_{\Omega} - \chi_{\Omega_0}) hu \, d\mathcal{H}^n, \quad (4.1)$$

definido em conjuntos de perímetro finito. $\Omega \subset \mathcal{M}$ com $\Omega \Delta \Omega_0 := (\Omega \setminus \Omega_0) \cup (\Omega_0 \setminus \Omega) \Subset \text{int}(\mathcal{M})$. Um fato fundamental do método é que, nestas condições, sempre existe um minimizante para o funcional \mathcal{A} .

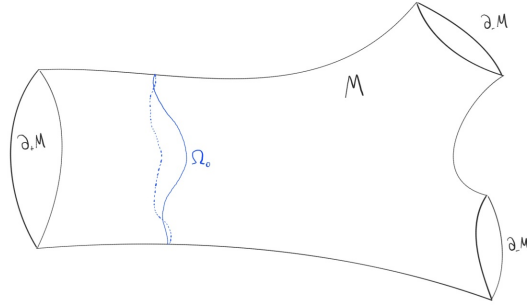


Figura 4.1: Esboço de \mathcal{M}

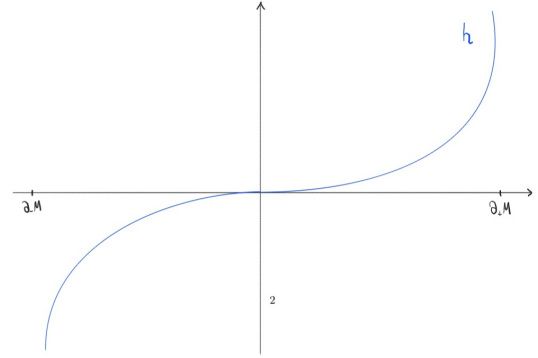


Figura 4.2: função h

Proposição 11 (Proposição 12, [17]). *Nas condições acima, sempre existe um minimizante Ω com fronteira suave para \mathcal{A} tal que $\Omega \Delta \Omega_0 \Subset \text{int}(\mathcal{M})$.*

Uma demonstração rigorosa do resultado acima pode ser encontrado em [49, Proposição 2.1]. Charamemos este conjunto minimizante de μ -bolha ou bolha de sabão generalizada para o funcional \mathcal{A} . Para entender as propriedades que esta minimizante possui, precisamos calcular as variações do funcional \mathcal{A} .

Lema 16 (Lema 13, [17]). *Se Ω_t é uma família a 1-parâmetro suave de regiões com $\Omega_0 = \Omega$ e campo de velocidades f em $t = 0$, então*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(\Omega_t) = \int_{\Sigma_t} (Hu + \langle \nabla_{\mathcal{M}} u, \nu \rangle - hu) f \, d\mathcal{H}^{n-1}, \quad (4.2)$$

onde H é a curvatura média de $\partial \Omega_t$ e ν é o normal unitário externo. Em particular, uma μ -bolha satisfaz

$$H = -u^{-1} \langle \nabla_{\mathcal{M}} u, \nu \rangle + h, \quad (4.3)$$

ao longo de $\partial \Omega$.

Demonstração. Seja $F : \Omega \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ uma variação de Ω , onde $F(\Omega, t) \equiv \Omega_t$ e

$V_t = \frac{\partial F}{\partial t}$ é seu campo de variações. Então, pela Definição 2,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\Omega_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{u} \circ F) (F^* d\mu_t) - \frac{d}{dt} \int_M (\chi_\Omega - \chi_{\Omega_0}) ((\mathbf{h}\mathbf{u}) \circ F) (F^* dx_t) \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{V}_t \rangle + \mathbf{u} (\operatorname{div}_{\partial\Omega_t} \mathbf{V}_t^T + H_t \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle) \\ &\quad - \int_{\Omega_t} \langle \nabla(\mathbf{h}\mathbf{u}), \mathbf{V}_t \rangle + \mathbf{h}\mathbf{u} \operatorname{div}_M \mathbf{V}_t. \end{aligned}$$

Acima, o gradiente é intrínseco a M , e omitiremos M na notação por simplicidade. Por outro lado, pelo Teorema da Divergência,

$$\int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{V}_t^T \rangle + \mathbf{u} \operatorname{div}_{\partial\Omega_t} \mathbf{V}_t^T = 0.$$

Então, usando novamente o Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\Omega_t) &= \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{V}_t^\perp \rangle + \mathbf{u} H_t \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle - \int_{\Omega_t} \operatorname{div}_M (\mathbf{h}\mathbf{u} \mathbf{V}_t) \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{V}_t^\perp \rangle + (\mathbf{u} H_t - \mathbf{h}\mathbf{u}) \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Portanto, tomando uma variação tal que $\mathbf{V}_0 = \psi \mathbf{v}$, para alguma $\psi \in C_c^\infty(M)$,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{A}(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \psi + (H - \mathbf{h}) \mathbf{u} \psi = \int_{\partial\Omega} (H\mathbf{u} + \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - \mathbf{h}\mathbf{u}) \psi.$$

Se Ω for uma μ -bolha, então é um ponto crítico para o funcional \mathcal{A} , logo a integral acima é nula para qualquer $\psi \in C_c^\infty(M)$. Isto implica que

$$H = -\mathbf{u} \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mathbf{h},$$

como desejávamos. □

Lema 17 (Lema 14, [17]). *Considere a μ -bolha Ω com $\partial\Omega = \Sigma$. Assuma que Ω_t é uma família a 1-parâmetro suave de regiões com $\Omega_0 = \Omega$ e campo de velocidades normal $\psi \mathbf{v}$ em $t = 0$. Então definindo $Q(\psi) := \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} (\mathcal{A}(\Omega_t)) \geq 0$, vale que*

$$\begin{aligned} Q(f) &\leq \int_\Sigma |\nabla_\Sigma f|^2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \left(R_M - 1 - R_\Sigma + |\mathring{A}_\Sigma|^2 \right) f \mathbf{u} + (\Delta_M \mathbf{u} - \Delta_\Sigma \mathbf{u}) f^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad - \int_\Sigma \frac{1}{2} \mathbf{u}^{-1} \langle \nabla_M \mathbf{u}, \mathbf{v}_\Sigma \rangle^2 f^2 + \frac{1}{2} (1 + \mathbf{h}^2 + 2 \langle \nabla_M \mathbf{h}, \mathbf{v}_\Sigma \rangle) f^2 \mathbf{u} d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Demonstração. Pela equação (4.4), temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{A}(\Omega_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{V}_t^\perp \rangle + (\mathbf{u}H_t - h\mathbf{u}) \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle \\
 &= \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla (\langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{V}_t^\perp \rangle + (\mathbf{u}H_t - h\mathbf{u}) \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle), \mathbf{V}_t \rangle \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega_t} (\langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{V}_t^\perp \rangle + (\mathbf{u}H_t - h\mathbf{u}) \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle) H_t \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle \\
 &= \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{V}_t^\perp \rangle, \mathbf{V}_t \rangle + H_t \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{V}_t \rangle \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle + \mathbf{u} \langle \nabla H_t, \mathbf{V}_t \rangle \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega_t} h \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{V}_t \rangle \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle + \mathbf{u} \langle \nabla h, \mathbf{V}_t \rangle \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega_t} H_t \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{V}_t^\perp \rangle \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle + \mathbf{u} H_t^2 \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle^2 - \mathbf{u} h H_t \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle^2.
 \end{aligned}$$

Onde usamos que $\langle \nabla \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{V}_t \rangle, \mathbf{V}_t \rangle = 0$, que segue direto da ortogonalidade. Novamente escolhendo uma variação tal que $\mathbf{V}_0 = \psi \mathbf{v}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \mathcal{A}(\Omega_t) &= \int_{\partial\Omega} \psi^2 D^2 \mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \psi \langle \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla(\psi \mathbf{v}) \rangle, \mathbf{v} \rangle + H \psi^2 \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \psi^2 \langle \nabla H, \mathbf{v} \rangle - h \psi^2 \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{u} \psi^2 \langle \nabla h, \mathbf{v} \rangle \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega} H \psi^2 \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mathbf{u} H^2 \psi^2 - \mathbf{u} h H \psi^2.
 \end{aligned}$$

Como Ω é uma μ -bolha, satisfaz a equação (4.3), logo

$$\begin{aligned}
 Q(\psi) &= \int_{\Sigma} \mathbf{u} \psi^2 \langle \nabla H, \mathbf{v} \rangle + H \psi^2 \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \psi^2 D^2 \mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\
 &\quad - \int_{\Sigma} \psi \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \psi \rangle + h \psi^2 \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mathbf{u} \psi^2 \langle \nabla h, \mathbf{v} \rangle.
 \end{aligned}$$

Usando que $\partial_t H_t = -\Delta F - (|A_{\Sigma_t}|^2 + \text{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{v}))F$, (vide, por exemplo, Proposição de [2]) e a Proposição 6, obtemos que (lembrando que $\Sigma = \partial\Omega$)

$$\begin{aligned}
 Q(\psi) &= \int_{\Sigma} \left(-\psi \mathbf{u} \Delta \psi - \frac{1}{2} (\mathcal{R}_M - 1 - \mathcal{R}_\Sigma + |\dot{A}_\Sigma|^2) \right) \psi^2 \mathbf{u} + H \psi^2 \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\
 &\quad + \int_{\Sigma} \psi^2 D^2 \mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \psi \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \psi \rangle - \psi^2 \langle \nabla(h\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle \\
 &= \int_{\Sigma} \left(|\nabla \psi|^2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\mathcal{R}_M - \mathcal{R}_\Sigma + |\dot{A}_\Sigma|^2) \right) \psi^2 \mathbf{u} - \frac{3}{4} H^2 \psi^2 \mathbf{u} \\
 &\quad + \int_{\Sigma} (\Delta_M \mathbf{u} - \Delta_\Sigma \mathbf{u}) \psi^2 - \mathbf{u} \psi^2 \langle \nabla h, \mathbf{v} \rangle - h \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.
 \end{aligned}$$

Agora, novamente por (4.3),

$$\frac{1}{2}H^2\psi^2\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{-1}\langle\nabla\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2\psi^2 - h\langle\nabla\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\psi^2 + \frac{1}{2}h^2\psi^2\mathbf{u},$$

o implica que

$$\begin{aligned} Q(\psi) \leq & \int_{\Sigma} \left(-\psi\mathbf{u}\Delta\psi - \frac{1}{2}(\mathbf{R}_M - 1 - \mathbf{R}_{\Sigma} + |\dot{\Lambda}_{\Sigma}|^2) \right) \psi^2\mathbf{u} + (\Delta_M\mathbf{u} - \Delta_{\Sigma}\mathbf{u})\psi^2 \\ & - \int_{\Sigma} \frac{1}{2}\mathbf{u}^{-1}\langle\nabla\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2\psi^2 + \frac{1}{2}(1 + h^2 + 2\langle\nabla h, \mathbf{v}\rangle)\psi^2\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Para completar a prova, basta observar que, como Ω é um ponto de mínimo, devemos ter $Q(\psi) \geq 0$. \square

Uma das principais vantagens deste método é que, uma vez localizada, é possível obter estimativas para algumas de suas quantidades geométricas, como diâmetro e volume, mesmo tendo poucas informações sobre a variedade onde ela está. Para isto, precisaremos do seguinte resultado técnico.

Lema 18 (Lema 16, [17]). *Para uma 2-variedade Riemanniana fechada (Σ^2, \mathbf{g}) , suponha que existe uma função suave $\mathbf{g} > 0$ tal que*

$$\Delta_{\Sigma}\lambda \leq -(\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_{\Sigma})\lambda + \frac{1}{2}\lambda^{-1}|\nabla_{\Sigma}\lambda|^2, \quad (4.5)$$

para algum $\mathbf{K}_0 \in (0, \infty)$. Então $\text{diam}_{\mathbf{g}}\Sigma \leq \sqrt{\frac{2}{\mathbf{K}_0}}\pi$.

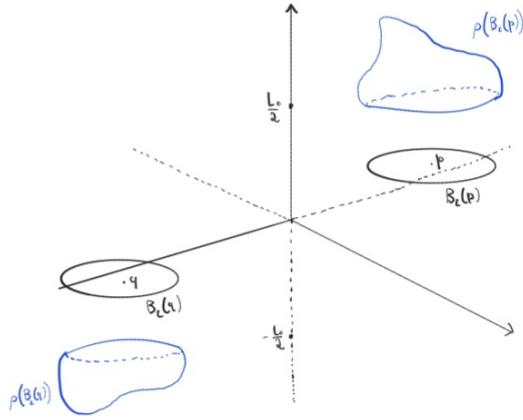
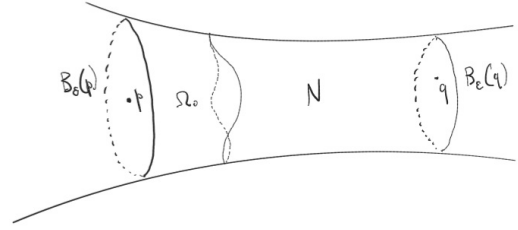
Demonstração. Por contradição, suponha que existam $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Sigma$ com

$$L := d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > L_0 := \sqrt{\frac{2}{\mathbf{K}_0}}\pi.$$

Então existe $\epsilon > 0$ e uma função suave

$$\rho : \Sigma \setminus (B_{\epsilon}(\mathbf{p}) \cup B_{\epsilon}(\mathbf{q})) \rightarrow \left(-\frac{L_0}{2}, \frac{L_0}{2} \right),$$

com $|\nabla\rho| \leq 1 - \epsilon$, $\rho \rightarrow -\frac{L_0}{2}$ em $\partial B_{\epsilon}(\mathbf{p})$ e $\rho \rightarrow \frac{L_0}{2}$ em $\partial B_{\epsilon}(\mathbf{q})$.


 Figura 4.3: Esboço de ρ

 Figura 4.4: Ω_0 em N

Seja N a região de Σ entre $B_\epsilon(p)$ e $B_\epsilon(q)$. Defina

$$h(x) = -2(1 - \epsilon) \frac{\pi}{L_0} \tan\left(\frac{\pi}{L_0} \rho(x)\right).$$

Pela suavidade de ρ , $h \in C^\infty(N \setminus (B_\epsilon(p) \cup B_\epsilon(q)))$, $h \rightarrow +\infty$ em $B_\epsilon(p)$, $h \rightarrow -\infty$ em $B_\epsilon(q)$, e vale que

$$\begin{aligned} K_0 + \frac{1}{2}h(x)^2 - |\nabla_\Sigma h|(x) &= K_0 + 2(1 - \epsilon)^2 \frac{\pi^2}{L_0^2} \tan^2\left(\frac{\pi}{L_0} \rho(x)\right) \\ &\quad - 2(1 - \epsilon) \frac{\pi}{L_0} \sec^2\left(\frac{\pi}{L_0} \rho(x)\right) |\nabla_\Sigma \rho(x)| \\ &\geq K_0 + 2(1 - \epsilon)^2 \frac{\pi^2}{L_0^2} \left[\tan^2\left(\frac{\pi}{L_0} \rho(x)\right) - \sec^2\left(\frac{\pi}{L_0} \rho(x)\right) \right] \\ &= K_0 - 2(1 - \epsilon)^2 \frac{\pi^2}{L_0^2} = K_0 - (1 - \epsilon)^2 K_0 > 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Agora, com a função h acima definida, considere, como antes, o funcional

$$A(\Omega) = \int_{\partial^* \Omega} g \, d\mathcal{H}^1 - \int_N (\chi_\Omega - \chi_{\Omega_0}) h g \, d\mathcal{H}^2,$$

onde Ω_0 é um conjunto de Caccioppoli com $B_\epsilon(p) \subset \Omega_0 \subset \Sigma \setminus B_\epsilon(q)$. Pela Proposição 11, existe uma μ -bolha Ω minimizante de A com fronteira $\partial\Omega$ suave. Pelo Lema 16, vale

que $k_\gamma = -g^{-1}\langle \nabla_\Sigma g, \nu_\gamma \rangle + h$, onde $\gamma = \partial\Omega$ e k_γ é a sua curvatura. Pelo Lema 17,

$$0 \leq \int_\gamma |\nabla_\gamma f|^2 \lambda - K_\Sigma f^2 \lambda - k_\gamma f^2 \lambda + (\Delta_\Sigma \lambda - \Delta_\gamma \lambda) f^2 d\mathcal{H}^1 \\ - \int_\gamma \langle \nabla_\Sigma \lambda, \nu_\gamma \rangle f^2 h + \langle \nabla_\Sigma h, \nu_\gamma \rangle d\mathcal{H}^1,$$

onde f é a variação de uma família a 1-parâmetro $\{\Omega_t\}$ com $\Omega_0 = \Omega$. Tomando $f = \lambda^{-\frac{1}{2}}$, obtemos

$$0 \leq \int_\gamma \left| \nabla_\gamma \lambda^{-\frac{1}{2}} \right|^2 \lambda - K_\Sigma + (\Delta_\Sigma \lambda - \Delta_\gamma \lambda) \lambda^{-1} - \langle \nabla_\Sigma \lambda, \nu_\gamma \rangle \lambda^{-1} h - \langle \nabla_\Sigma h, \nu_\gamma \rangle d\mathcal{H}^1 \\ \leq \int_\gamma \frac{1}{4} \left| \nabla_\gamma \lambda^{-\frac{1}{2}} \right|^2 \lambda^{-2} - K_\Sigma - \frac{1}{2} k_\gamma^2 + \lambda^{-1} (\Delta_\Sigma \lambda - \Delta_\gamma \lambda) - \lambda^{-1} h \langle \nabla_\Sigma \lambda, \nu_\gamma \rangle d\mathcal{H}^1 \\ - \int_\gamma \langle \nabla_\Sigma h, \nu_\gamma \rangle d\mathcal{H}^1.$$

Por um lado,

$$\frac{1}{2} k_\gamma^2 = \frac{1}{2} (h - \lambda^{-1} \langle \nabla_\Sigma \lambda, \nu_\gamma \rangle)^2 = \frac{1}{2} h^2 - \lambda^{-1} h \langle \nabla_\Sigma \lambda, \nu_\gamma \rangle + \frac{1}{2} \lambda^{-2} \langle \nabla_\Sigma \lambda, \nu_\gamma \rangle^2.$$

Portanto,

$$0 \leq \int_\gamma \frac{1}{4} \lambda^{-2} |\nabla_\Sigma \lambda|^2 - K_\Sigma - \frac{1}{2} h^2 + \lambda^{-1} h \langle \nabla_\Sigma \lambda, \nu_\gamma \rangle - \frac{1}{2} \lambda^{-2} \langle \nabla_\Sigma \lambda, \nu_\gamma \rangle^2 d\mathcal{H}^1 \\ - \int_\gamma \lambda^{-1} h \langle \nabla_\Sigma h, \nu_\gamma \rangle + \langle \nabla_\Sigma h, \nu_\gamma \rangle - \lambda^{-1} (\Delta_\Sigma \lambda - \Delta_\gamma \lambda) d\mathcal{H}^1 \\ = \int_\gamma \frac{1}{4} \lambda^{-2} |\nabla_\Sigma \lambda|^2 - K_\Sigma + \lambda^{-1} (\Delta_\Sigma \lambda - \Delta_\gamma \lambda) - \frac{1}{2} h^2 d\mathcal{H}^1 \\ - \int_\gamma \frac{1}{2} \lambda^{-2} \langle \nabla_\Sigma \lambda, \nu_\gamma \rangle^2 + \langle \nabla_\Sigma h, \nu_\gamma \rangle d\mathcal{H}^1.$$

Integrando por partes,

$$\int_\gamma \lambda^{-1} \Delta_\gamma \lambda d\mathcal{H}^1 = - \int_\gamma \langle \nabla_\gamma \lambda^{-1}, \nabla_\gamma \lambda \rangle d\mathcal{H}^1 = \int_\gamma \lambda^{-2} |\nabla_\gamma \lambda|^2 d\mathcal{H}^1.$$

Concluimos que

$$0 \leq \int_\gamma -\frac{3}{4} \lambda^{-2} |\nabla_\gamma \lambda|^2 - K_\Sigma + \lambda^{-1} \Delta_\Sigma \lambda - \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} \lambda^{-2} \langle \nabla_\Sigma \lambda, \nu_\gamma \rangle^2 - \langle \nabla_\Sigma h, \nu_\gamma \rangle d\mathcal{H}^1.$$

Agora, usando a hipótese (4.5),

$$0 \leq \int_{\gamma} -\frac{3}{4}\lambda^{-2} |\nabla_{\gamma}\lambda|^2 + \frac{1}{2}\lambda^{-2} |\nabla_{\Sigma}\lambda|^2 - \frac{1}{2}\lambda^{-2} \langle \nabla_{\Sigma}\lambda, \nu_{\gamma} \rangle^2 - K_0 - \frac{1}{2}h^2 - \langle \nabla_{\Sigma}h, \nu_{\gamma} \rangle d\mathcal{H}^1.$$

Por outro lado, $|\nabla_{\Sigma}\lambda|^2 = |\nabla_{\Sigma}\lambda + \langle \nabla_{\Sigma}\lambda, \nu_{\gamma} \rangle|^2 = |\nabla_{\Sigma}\lambda|^2 + \langle \nabla_{\Sigma}\lambda, \nu_{\gamma} \rangle^2$, então

$$0 \leq \int_{\gamma} -\frac{1}{4}\lambda^{-2} |\nabla_{\gamma}\lambda|^2 - K_0 - \frac{1}{2}h^2 - \langle \nabla_{\Sigma}h, \nu_{\gamma} \rangle d\mathcal{H}^1 < 0,$$

pois por (4.6), $K_0 + \frac{1}{2}h^2 + \langle \nabla_{\Sigma}h, \nu_{\gamma} \rangle > 0$, mas isto é um absurdo, completando a prova. \square

Somos finalmente capazes de estabelecer o principal resultado desta seção.

Proposição 12 (Lema 6.1, [16]). *Seja (N^3, g) uma variedade tridimensional com bordo compacto conexo satisfazendo*

$$\lambda_1 \left(-\Delta + \frac{1}{2}R_N \right) \geq \lambda, \quad (4.7)$$

para algum $\lambda > 0$. Suponha que existe $p \in N$ tal que $d_N(p, \partial N) \geq \frac{5\pi}{\sqrt{\lambda}}$. Então existe um aberto conexo Ω contendo ∂N , $\Omega \subset B_{\frac{5\pi}{\sqrt{\lambda}}}(\partial N)$, tal que cada componente conexa de $\partial\Omega \setminus \partial N$ é uma esfera bidimensional, com área máxima de $\frac{8\pi}{\lambda}$ e diâmetro menor ou igual a $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$.

Demonstração. Como N satisfaz (4.7), pela Proposição 4, existe $u \in C^\infty(N)$, $u > 0$ em $\text{int}(N)$, tal que

$$\Delta_N u \leq -\frac{1}{2}(2\lambda - R_N)u. \quad (4.8)$$

Tome $\varphi_0 \in C^\infty(N)$ uma suavização de $d_N(\cdot, \partial N)$, tal que $|\nabla\varphi_0| \leq 2$ e $\varphi_0 = 0$ em ∂N (veja [28]). Escolha $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $\epsilon, \frac{4}{\sqrt{\lambda}}\pi + 2\epsilon$ são valores regulares de φ_0 . Defina

$$\varphi := \frac{\varphi_0 - \epsilon}{\frac{4}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{\pi}} - \frac{\pi}{2},$$

$\Omega_1 := \{x \in N; -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$ e $\Omega_0 := \{x \in N; -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq 0\}$. Portanto, vale que

$$|\nabla_N \varphi| = \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{\pi}} |\nabla_N \varphi_0| \leq \frac{2\pi\sqrt{\lambda}}{4\pi + \epsilon\sqrt{\lambda}} < \frac{2\pi\sqrt{\lambda}}{4\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}.$$

Em Ω_1 , defina $h(x) := -\frac{1}{2} \tan(\varphi(x))$. Então,

$$\begin{aligned}
 \lambda + h^2 - 2|\nabla_N h| &= \lambda + \frac{1}{4} \tan^2(\varphi(x)) - \sec^2(\varphi(x)) |\nabla_N \varphi(x)| \\
 &\geq \lambda + \frac{1}{4} \tan^2(\varphi(x)) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \sec^2(\varphi(x)) \\
 &\geq \lambda + \frac{1}{4} \tan^2(\varphi(x)) - \frac{1}{4} \sec^2(\varphi(x)) \\
 &= \lambda - \frac{1}{4} > 0,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

para $\lambda > 1$. Com este h , definimos o funcional

$$\mathcal{A}(\bar{\Omega}) := \int_{\partial^* \bar{\Omega}} u \, d\mathcal{H}^2 - \int_{\mathbb{N}} (\chi_{\bar{\Omega}} - \chi_{\Omega_1}) h u \, d\mathcal{H}^3,$$

ao longo de conjuntos de Caccioppoli $\bar{\Omega}$ em Ω_1 com $\bar{\Omega} \Delta \Omega_0 \Subset \Omega_1$. Pela Proposição 11, existe um minimizante $\tilde{\Omega}$ de \mathcal{A} com bordo suave. Tome Ω como sendo a componente conexa de $\{x \in \mathbb{N}; 0 \leq \varphi_0(x) \leq \epsilon\} \cup \tilde{\Omega}$ que contém $\partial \mathbb{N}$. Por construção, $\Omega \subset B_{\frac{5\pi}{\sqrt{\lambda}}}(\partial \mathbb{N})$.

Agora, estabeleceremos as propriedades de Ω . Pelo Lema 17,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^2 u - \frac{1}{2} \left(R_M - 1 - R_{\Sigma} + |\mathring{A}_{\Sigma}|^2 \right) f^2 u + (\Delta_M u - \Delta_{\Sigma} u) f^2 \, d\mathcal{H}^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} u^{-1} \langle \nabla_M u, \nu \rangle f^2 + (1 + h^2 + 2\langle \nabla_M h, \nu \rangle) f^2 u \, d\mathcal{H}^2 \\
 &= \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^2 u - \frac{1}{2} (R_M - \lambda - 2K_{\Sigma}) f^2 u + (\Delta_M u - \Delta_{\Sigma} u) f^2 \, d\mathcal{H}^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} u^{-1} \langle \nabla_M u, \nu \rangle f^2 + (1 + h^2 + 2\langle \nabla_M h, \nu \rangle) f^2 u \, d\mathcal{H}^2.
 \end{aligned}$$

Onde usamos que em \mathbb{R}^3 , $R_{\Sigma} = K_{\Sigma}$, a curvatura Gaussiana de Σ . Então, considerando $f = g^{-\frac{1}{2}}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{\Sigma} \left| \nabla_{\Sigma} \left(g^{-\frac{1}{2}} \right) \right|^2 g - \left(\frac{1}{2} \lambda - K_{\Sigma} \right) - g^{-1} \Delta_{\Sigma} g + \frac{1}{2} g^{-2} |\nabla_{\Sigma} g|^2 \, d\mathcal{H}^2 \\
 &= \int_{\Sigma} \frac{3}{4} g^{-2} |\nabla_{\Sigma} g|^2 - \left(\frac{1}{2} \lambda - K_{\Sigma} \right) - g^{-1} \Delta_{\Sigma} g \, d\mathcal{H}^2.
 \end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\int_{\Sigma} g^{-1} \Delta_{\Sigma} g \, d\mathcal{H}^2 = - \int_{\Sigma} \langle \nabla_{\Sigma} (g^{-1}), \nabla_{\Sigma} g \rangle \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\Sigma} g^{-2} |\nabla_{\Sigma} g|^2 \, d\mathcal{H}^2.$$

Logo,

$$0 \leq \int_{\Sigma} -\frac{1}{4}g^{-2}|\nabla_{\Sigma}g|^2 - \left(\frac{1}{2}\lambda - \kappa_{\Sigma}\right) d\mathcal{H}^2.$$

Como $g^{-2}|\nabla_{\Sigma}g|^2 \geq 0$, isto implica que

$$\frac{1}{2}\lambda\mathcal{H}^2(\Sigma) = \int_{\Sigma} \frac{1}{2}\lambda d\mathcal{H}^2 \leq \int_{\Sigma} \kappa_{\Sigma} d\mathcal{H}^2 = 2\pi\chi(\Sigma),$$

pelo Teorema de Gauss-Bonnet. Logo Σ é uma esfera topológica e $\mathcal{H}^2(\Sigma) \leq \frac{8\pi}{\lambda}$. A limitação de diâmetro segue de [17, Lemas 16 e 18]. \square

4.2 Uma Deformação Conforme e o Teorema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^4

Podemos finalmente apresentar a prova alternativa para o Teorema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^4 .

Teorema 16 (Corolário 2.2, [16]). *Seja $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão mínima estável, 2-lados, completa, conexa. Então M é planar.*

Para resolver este problema, iremos primeiramente considerar a variedade $(M^3 \setminus \{0\}, \tilde{g})$, onde \tilde{g} é a métrica conforme $\tilde{g} := r^{-2}g$, onde r é a distância Euclidiana a origem em \mathbb{R}^4 . Pelo Teorema de Barta (Proposição 5) podemos assumir que M é simplesmente conexa. Como foi visto na Seção 1.1, para esta mudança,

$$|\nabla\varphi|_g^2 = r^{-2}\|\tilde{\nabla}\varphi\|_{\tilde{g}}^2 \quad \text{e} \quad d\mu = r^n d\tilde{\mu}. \quad (4.10)$$

Aplicando a Proposição 2, temos

$$r^{-2}\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + 2(n-1)\nabla\log(r) - (n-1)(n-2)|\nabla\log(r)|_g^2. \quad (4.11)$$

Se definirmos, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$Q(f) := \int_M |\tilde{\nabla}f|_{\tilde{g}}^2 + \left(\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{R}} - \alpha\right) f^2 d\tilde{\mu},$$

com $f \in C_0^1(M \setminus \{0\})$, então,

$$\begin{aligned}
 Q\left(r^{\frac{n-2}{2}}f\right) &= \int_{\mathcal{M}} \left| \tilde{\nabla}\left(r^{\frac{n-2}{2}}f\right) \right|_{\tilde{g}}^2 + \left(\frac{1}{2}\tilde{\mathcal{R}} - \mathfrak{a}\right) r^{n-2}f^2 \, d\tilde{\mu} \\
 &= \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|_g^2 + \frac{n-2}{2} \langle \nabla \log(r), \nabla(f^2) \rangle_g + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 r^{-2}f^2 |\nabla r|_g^2 \, d\mu \\
 &\quad + \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{1}{2}\tilde{\mathcal{R}} - \mathfrak{a}\right) r^{-2}f^2 \, d\mu.
 \end{aligned}$$

Integrando por partes, obtemos que

$$\begin{aligned}
 Q\left(r^{\frac{n-2}{2}}f\right) &= \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|_g^2 - \frac{n-2}{2}f^2\Delta(r) + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 r^{-2}f^2 |\nabla r|_g^2 \, d\mu \\
 &\quad + \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{1}{2}\tilde{\mathcal{R}} - \mathfrak{a}\right) r^{-2}f^2 \, d\mu \\
 &= \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|_g^2 - \frac{n-2}{2}f^2 \log(r) + \frac{(n-2)^2}{4}f^2 |\nabla \log(r)|_g^2 - \mathfrak{a}r^{-2}f^2 \, d\mu \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{R}f^2 + 2(n-1)f^2\Delta \log(r) - (n-1)(n-2)f^2 |\nabla \log(r)|_g^2 \, d\mu \\
 &= \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|_g^2 + \frac{1}{2}\mathcal{R}f^2 + \frac{n}{2}f^2\Delta \log(r) - \frac{n(n-2)}{4}f^2 |\nabla f|_g^2 - \mathfrak{a}r^{-2}f^2 \, d\mu \\
 &= \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|_g^2 + \frac{1}{2}\mathcal{R}f^2 + \left(\frac{n}{2}\left(\Delta \log(r) - \frac{n-2}{2}|\nabla \log(r)|_g^2\right) - \mathfrak{a}r^{-2}\right) f^2 \, d\mu.
 \end{aligned}$$

Agora, por (4.11), vale

$$-\Delta(r) + \frac{n-2}{2}|\nabla \log(r)|_g^2 = -\frac{n}{r^2} + \frac{n+2}{2} \frac{|\nabla r|_g^2}{r^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 Q\left(r^{\frac{n-2}{2}}f\right) &= \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|_g^2 \frac{1}{2}\mathcal{R}f^2 + \left(\frac{n}{2}\left(\frac{n}{r^2} - \frac{n+2}{2} \frac{|\nabla r|_g^2}{r^2}\right) + \mathfrak{a}r^{-2}\right) f^2 \, d\mu \\
 &= \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|_g^2 + \frac{1}{2}\mathcal{R}f^2 + \left(\frac{n}{2}\left(n - \frac{n+2}{2}|\nabla r|_g^2\right) - \mathfrak{a}\right) r^{-2}f^2 \, d\mu.
 \end{aligned}$$

Em pontos onde $|\nabla r|_g \geq 1$, temos que

$$Q\left(r^{\frac{n-2}{2}}f\right) \geq \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|_g^2 + \frac{1}{2}\mathcal{R}f^2 + \left(\frac{n(n-2)}{4} - \mathfrak{a}\right) f^2 \, d\mu.$$

Tomando traço da equação de Gauss, $|\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|_g^2 = -\mathcal{R}_g$. Então, segue da estabilidade de \mathcal{M}

que

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla f|_g^2 - |\mathcal{A}_{\mathcal{M}}|_g^2 f^2 \, d\mu \geq 0,$$

isto é,

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla f|_g^2 + \frac{1}{2} \mathcal{R} f^2 \, d\mu \geq 0$$

para toda $f \in C_0^1(\mathcal{M})$, pois $\mathcal{R} \leq 0$ para hipersuperfícies mínimas em \mathbb{R}^{n+1} . Em particular, escolhendo $\alpha = \frac{n(n-2)}{4}$, temos que $Q(f) \geq 0$ para qualquer $f \in C_0^1(\mathcal{M} \setminus \{0\})$. Pela Proposição 4, isto implica que existe $u \in C^\infty(\mathcal{M} \setminus \{0\})$, $u > 0$ no interior de $\mathcal{M} \setminus \{0\}$, tal que

$$\tilde{\Delta} u \leq -\frac{1}{2} \left(\frac{n(n-2)}{2} - \tilde{\mathcal{R}} \right) u. \quad (4.12)$$

Agora, considere $n = 3$ e fixe $\rho > 0$. Pelo Teorema de Cao-Shen-Zhu (Teorema 5) $\mathcal{M} \setminus B_{\mathcal{M}}(0, e^{\frac{10\pi}{\sqrt{3}}} \rho)$ tem uma única componente ilimitada, que chamaremos de E . Denote por $\tilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \setminus E$. Aplicando o processo de μ -bolha desenvolvido na Seção 4.1 (considerando $\Omega_0 = \tilde{\mathcal{M}}$, obtemos um conjunto M_0 (uma μ -bolha) tal que $d_{\tilde{g}}(\partial M_0, \partial \tilde{\mathcal{M}}) \leq \frac{10\pi}{\sqrt{3}}$, $|\partial M_0|_{\tilde{g}} \leq \frac{32\pi}{3}$ e $\text{diam}_{\tilde{g}}(\partial M_0) \leq \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$ (basta observar que, para $n = 3$, $\lambda = \frac{3}{2}$ e, pelas hipóteses topológicas de \mathcal{M} , ∂M_0 é conexo). Pelo Lema 1,

$$B_{\mathcal{M}}(0, \rho) \subset M_0 \subset B_{\mathcal{M}}\left(e^{\frac{10\pi}{\sqrt{3}}} \rho\right).$$

Isto implica que $\sup_{\partial M_0} r(x) \leq e^{\frac{10\pi}{\sqrt{3}}} \rho$. Portanto, pelo Teorema 6,

$$|B_{\mathcal{M}}(0, \rho)| \leq |M_0| \leq \frac{1}{6\sqrt{\pi}} |\partial M_0|_{\tilde{g}}^{\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{32\pi}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{32\pi}{\sqrt{3}}}}{6\sqrt{\pi}} \rho^3.$$

Logo, pelo Teorema 10, \mathcal{M} deve ser planar, como desejávamos. Isto completa a prova.

Capítulo 5

Hipersuperfícies Mínimas Estáveis em \mathbb{R}^5

A estratégia deste capítulo consiste em generalizar a demonstração do Teorema de Bernstein apresentada no capítulo anterior. Observando mais atentamente, nota-se que o método de μ -bolhas admite uma generalização relativamente direta para \mathbb{R}^5 . A principal dificuldade reside, entretanto, na obtenção das estimativas de volume e de diâmetro necessárias ao argumento. Tendo isso em vista, O. Chodosh, C. Li, P. Minter e D. Stryker utilizaram em [18] uma abordagem capaz de contornar essas limitações dimensionais por meio de uma ferramenta geométrica adicional, a *curvatura bi-Ricci* (definição 1).

O objetivo deste capítulo é apresentar detalhadamente essa demonstração e descrever como a curvatura bi-Ricci permite superar os obstáculos encontrados em dimensões mais elevadas. Todos os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [18].

5.1 Propriedades da Curvatura Bi-Ricci Deformada

Seja $F : M^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima estável 2-lados, completa. Seja g a métrica induzida em M . Seja r a distância Euclidiana para a origem 0 em \mathbb{R}^{n+1} . Considere a métrica conforme $\tilde{g} = r^{-2}g$ em $N = M \setminus F^{-1}(\{0\})$. Note que (N, \tilde{g}) é completa.

Proposição 13 (proposição 3.2, [18]). *Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com campo vetorial unitário externo ν . Então*

$$\text{Hess}^M r = r^{-1}g - r^{-1}dr \otimes dr - r^{-1}\langle \bar{x}, \nu \rangle A.$$

Demonstração. Vale que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3}.$$

Então, como $dr \otimes dr(e_i, e_j) = \langle \nabla r, e_i \rangle \langle \nabla r, e_j \rangle$, segue que

$$\text{Hess}^{\mathbb{R}^{n+1}} r = r^{-1} g_{\text{Euclidiana}} - r^{-1} dr \otimes dr. \quad (5.1)$$

Portanto, se X e Y são campos em M , vale que

$$\begin{aligned} \text{Hess}^M r(X, Y) &= \langle \nabla_X^M \nabla^M r, Y \rangle = \left\langle \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}} r, Y \right\rangle - \left\langle \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}} r \right)^\perp, Y \right\rangle \\ &= \text{Hess}^{\mathbb{R}^{n+1}} r(X, Y) - \left\langle \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\frac{\vec{x}}{r} \right)^\perp, Y \right\rangle \\ &= \text{Hess}^{\mathbb{R}^{n+1}} r(X, Y) + \left\langle \left(\frac{\vec{x}}{r} \right)^\perp, \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y \right\rangle \\ &= \text{Hess}^{\mathbb{R}^{n+1}} r(X, Y) + \left\langle \left(\frac{\vec{c}}{r} \right)^\perp, \left(\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y \right)^\perp \right\rangle. \end{aligned}$$

Então, por (5.1),

$$\text{Hess}^M r(X, Y) = r^{-1} g(X, Y) - r^{-1} (dr \otimes dr)(X, Y) - r^{-1} \langle \vec{x}, \nu \rangle A(X, Y),$$

como desejávamos. □

Agora, escreva $\phi = -\log r$, tal que $\tilde{g} = e^{2\phi} g$.

Proposição 14 (Proposição 3.3, [18]). *Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com campo vetorial normal unitário ν . Então,*

$$\text{Hess}^M(\log r) = r^{-2} g - 2r^{-2} dr \otimes dr - r^{-2} \langle \vec{x}, \nu \rangle A.$$

Demonstração. Para quaisquer $f > 0$, X e Y campos vetoriais, calculemos

$$\begin{aligned} \text{Hess}^M(\log f)(X, Y) &= \langle \nabla_X^M \nabla(\log f), Y \rangle = \left\langle \nabla_X^M \left(\frac{\nabla^M f}{f} \right), Y \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{f} \nabla_X^M \nabla^M f - \frac{1}{f^2} \nabla^M f, Y \right\rangle \\ &= f^{-1} \text{Hess}^M f(X, Y) - f^{-2} (df \otimes df)(X, Y). \end{aligned}$$

Então, pela Proposição 13,

$$\begin{aligned} \text{Hess}^M(\log f)(X, Y) &= r^{-1} \text{Hess}^M r(X, Y) - r^{-2} (dr \otimes dr)(X, Y) \\ &= r^{-2} g(X, Y) - r^{-2} (dr \otimes dr)(X, Y) - r^{-2} \langle \vec{x}, \nu \rangle A(X, Y) \\ &\quad - r^{-2} (dr \otimes dr)(X, Y) \\ &= r^{-2} g(X, Y) - 2r^{-2} (dr \otimes dr)(X, Y) - r^{-2} \langle \vec{x}, \nu \rangle A(X, Y), \end{aligned}$$

como desejávamos. □

Uma vez estabelecidas as propriedades acima para a métrica conforme \tilde{g} , iremos agora obter expressões para curvatura relativas a esta métrica. Primeiro, obteremos uma base ortonormal para $T_p M$ com respeito às métricas g e \tilde{g} . Seja $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma base ortonormal para $T_p M$ com respeito à métrica g . Então, $\{\tilde{e}_i := r e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é uma base ortonormal para $T_p M$ com respeito a métrica \tilde{g} , pois $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle_{\tilde{g}} = r^{-2} \langle r e_i, r e_j \rangle_g = \delta_{ij}$.

Agora, escreva os tensores de curvatura $R_{ijji} := R(e_i, e_j, e_j, e_i)$, $\tilde{R}_{ijji} := \tilde{R}(e_i, e_j, e_j, e_i)$ e $A_{ij} := A(e_i, e_j)$.

Proposição 15 (Proposição 3.4, [18]). *No referencial acima descrito, vale que*

$$r^2 R_{ijji} = \tilde{R}_{ijji} - 2 + |dr|^2 + (dr(e_i))^2 + (dr(e_j))^2 + \langle \vec{x}, \nu \rangle (A_{ii} + A_{jj}).$$

Demonstração. Definimos o tensor

$$T := \text{Hess}^M \phi - d\phi \otimes d\phi + \frac{1}{2} |d\phi|^2 g.$$

Como antes, escreva $T_{ij} := T(e_i, e_j)$. Pela Proposição 14, temos que

$$T = r^{-2} g + r^{-2} dr \otimes dr + \frac{1}{2} r^{-2} |dr|^2 g + r^{-2} \langle \vec{x}, \nu \rangle A. \quad (5.2)$$

Usando a Proposição 1, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ijji} &= \tilde{R}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_j, \tilde{e}_i) = \tilde{R}(re_i, re_j, re_j, re_i) = r^4 \tilde{R}(e_i, e_j, e_j, e_i) \\ &= r^2 (R_{ijji} - T_{ii} - T_{jj}) \\ &= r^2 R_{ijji} + 2 - |\mathbf{dr}|^2 - (\mathbf{dr}(e_i))^2 - (\mathbf{dr}(e_j))^2 - \langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v} \rangle (A_{ii} + A_{jj}),\end{aligned}$$

como desejávamos. □

Podemos agora usar a Proposição 15 para obter curvaturas bi-Ricci de (N, \tilde{g}) no caso onde a imersão é mínima.

Proposição 16 (Proposição 3.5, [18]). *Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima com campo vetorial normal unitário \mathbf{v} . Então temos*

$$\begin{aligned}r^2 \text{bi-Ric}(e_1, e_j) &= \widetilde{\text{bi-Ric}}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) - (4n - 6) + (2n - 1)|\mathbf{dr}|^2 \\ &\quad + (n - 3) (\mathbf{dr}(e_1))^2 + (\mathbf{dr}(e_2))^2 \\ &\quad + (n - 3) \langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v} \rangle (A_{11} + A_{22}).\end{aligned}$$

Demonstração. Pela Proposição 15,

$$\begin{aligned}r^2 \text{bi-Ric}(e_1, e_2) &= \sum_{i=2}^n r^2 R_{1i1i} + \sum_{j=3}^n R_{2jj2} \\ &= \sum_{i=2}^n [\tilde{R}_{1i1i} - 2 + |\mathbf{dr}|^2 + (\mathbf{dr}(e_1))^2 + (\mathbf{dr}(e_i))^2 \\ &\quad + \langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v} \rangle (A_{11} + A_{ii})] \\ &\quad + \sum_{j=3}^n [\tilde{R}_{2jj2} - 2 + |\mathbf{dr}|^2 + (\mathbf{dr}(e_2))^2 + (\mathbf{dr}(e_j))^2 \\ &\quad + \langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v} \rangle (A_{22} + A_{jj})].\end{aligned}$$

Reorganizando,

$$\begin{aligned}
 r^2 \text{bi-Ric}(e_1, e_2) &= \sum_{i=1}^n \tilde{R}_{1i1i} - 2(n-1) + (n-1)|dr|^2 + (n-1)dr(e_1)^2 \\
 &\quad + \sum_{i=2}^n dr(e_i)^2 + (n-1)\langle \vec{x}, \nu \rangle A_{11} + \sum_{i=2}^n \langle \vec{x}, \nu \rangle A_{ii} \\
 &\quad + \sum_{j=3}^n \tilde{R}_{2ii2} - 2(n-2) + (n-2)|dr|^2 + (n-2)dr(e_2)^2 \\
 &\quad + \sum_{j=3}^n dr(e_j)^2 + (n-2)\langle \vec{x}, \nu \rangle A_{22} + \sum_{j=3}^n \langle \vec{x}, \nu \rangle A_{jj}.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 r^2 \text{bi-Ric}(e_1, e_2) &= \widetilde{\text{bi-Ric}}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_j) - (4n-6) + (2n-3)|dr|^2 \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n dr(e_i)^2 + \sum_{j=1}^n dr(e_j)^2 + (n-3)(dr(e_1)^2 + dr(e_2)^2) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \nu \rangle A_{ii} + \sum_{j=1}^n \langle \vec{x}, \nu \rangle A_{jj} + (n-3)\langle \vec{x}, \nu \rangle (A_{11} + A_{22}) \\
 &= \widetilde{\text{bi-Ric}}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) - (4n-6) + (2n-3)|dr|^2 + 2|dr|^2 \\
 &\quad + (n-3)(dr(e_1)^2 + dr(e_2)^2) + 2\langle \vec{x}, \nu \rangle \text{Tr}(A) \\
 &\quad + (n-3)\langle \vec{x}, \nu \rangle (A_{11} + A_{22}) \\
 &= \widetilde{\text{bi-Ric}}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) - (4n-6) + (2n-3)|dr|^2 \\
 &\quad + (n-3)(dr(e_1)^2 + dr(e_2)^2) + (n-3)\langle \vec{x}, \nu \rangle (A_{11} + A_{22}),
 \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $\text{Tr}(A) = 0$ para hipersuperfícies mínimas. \square

Proposição 17 (Proposição 3.6, [18]). *Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima. Então,*

$$\text{bi-Ric}(e_1, e_2) = - \sum_{i=1}^n A_{1i}^2 - \sum_{j=2}^n A_{2j}^2 - A_{11}A_{22}.$$

Demonstração. Pela equação de Gauss,

$$\begin{aligned}
 \text{bi-Ric}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= \sum_{i=2}^n R_{1i1i} + \sum_{j=3}^n R_{2jj2} = \sum_{i=2}^n (A_{11}A_{ii} - A_{1i}^2) + \sum_{j=3}^n (A_{22}A_{jj} - A_{2j}^2) \\
 &= \sum_{i=1}^n A_{11}A_{ii} - \sum_{i=2}^n A_{22}A_{jj} - \sum_{j=3}^n A_{2j}^2 - A_{11}^2 - A_{11}A_{22} - A_{22}^2 \\
 &= A_{11}\text{Tr}(\mathbf{A}) - \sum_{i=1}^n A_{1i}^2 + A_{22}\text{Tr}(\mathbf{A}) - \sum_{j=2}^n A_{2j}^2 - A_{11}A_{22}.
 \end{aligned}$$

O resultado segue então novamente de $\text{Tr}(\mathbf{A}) = 0$. \square

Escolha uma base de vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 tal que $\widetilde{\text{bi-Ric}}(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}}$. Agora podemos limitar $|\mathbf{A}|^2$ em termos de $\tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}}$.

Proposição 18. *Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima com campo vetorial normal unitário \mathbf{v} . Para $n \leq 3$, temos*

$$r^2|\mathbf{A}|^2 \geq \frac{2}{n-2} \left((3n-3) - (2n-1)|\text{dr}|^2 - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}} \right).$$

Demonstração. Combinando as Proposições 16 e 17, obtemos que

$$\begin{aligned}
 &r^2 \left(\sum_{i=1}^n A_{1i}^2 + A_{11}A_{22} \right) + (n-3)\langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v} \rangle (A_{11} + A_{22}) \\
 &= (4n-6) - (2n-1)|\text{dr}|^2 - (n-3) \left(\text{dr}(\mathbf{e}_1)^2 + \text{dr}(\mathbf{e}_2)^2 \right) - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}}. \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

Usando que $\langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v} \rangle = r\text{dr}(\mathbf{v})$ e desigualdade de Young, obtemos que

$$|(n-3)\langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v} \rangle (A_{11} + A_{22})| \leq (n-3)\text{dr}(\mathbf{v})^2 + \frac{n-3}{4}r^2(A_{11} + A_{22})^2.$$

Combinando este resultado com (5.1) e o fato que $\text{dr}(\mathbf{e}_1)^2 + \text{dr}(\mathbf{e}_2)^2 + \text{dr}(\mathbf{v})^2 \leq 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
 &r^2 \left(\sum_{i=1}^n A_{1i}^2 + \sum_{j=2}^n A_{2j}^2 + A_{11}A_{22} + \frac{n-3}{4}(A_{11} + A_{22})^2 \right) \\
 &\quad (3n-3) - (2n-1)|\text{dr}|^2 - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}}. \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Agora, para $\sigma \in (0, 1)$ arbitrário, vale que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11}^2 + \mathcal{A}_{22}^2 + \mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{22} + \frac{\mathbf{n}-3}{4}(\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22})^2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{11}^2 + \mathcal{A}_{22}^2) + \frac{\mathbf{n}-1}{4}(\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22})^2 \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{11}^2 + \mathcal{A}_{22}^2) + \frac{\mathbf{n}-1}{4}\sigma(\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22})^2 + \frac{\mathbf{n}-1}{4}(1-\sigma)(\mathcal{A}_{33} + \dots + \mathcal{A}_{\mathbf{nn}})^2. \end{aligned}$$

Pois $\text{Tr}(\mathcal{A}_M) = 0$ logo

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{11}^2 + \mathcal{A}_{22}^2 + \mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{22} + \frac{\mathbf{n}-3}{4}(\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22})^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathbf{n}-1}{4}\sigma\right)(\mathcal{A}_{11}^2 + \mathcal{A}_{22}^2) + \frac{(\mathbf{n}-1)(\mathbf{n}-2)}{4}(1-\sigma)(\mathcal{A}_{33}^2 + \dots + \mathcal{A}_{\mathbf{nn}}^2) \end{aligned}$$

Tomando $\sigma = \frac{\mathbf{n}-3}{\mathbf{n}-1} \leq 1$, temos que

$$\mathcal{A}_{11}^2 + \mathcal{A}_{22}^2 + \mathcal{A}_{11} + \frac{\mathbf{n}-3}{4}(\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22})^2 \leq \frac{\mathbf{n}-2}{2}(\mathcal{A}_{11}^2 + \dots + \mathcal{A}_{\mathbf{nn}}^2).$$

Combinando a equação acima com (5.1), para $\mathbf{n} \geq 3$, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{n}-2}{2}r^2|\mathcal{A}_M|^2 &\geq r^2 \left(\frac{\mathbf{n}-2}{2} \sum_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{A}_{ii}^2 + \sum_{i=2}^{\mathbf{n}} \mathcal{A}_{1i}^2 + \sum_{j=3}^{\mathbf{n}} \mathcal{A}_{2j}^2 \right) \\ &\geq r^2 \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{A}_{1i}^2 + \sum_{j=2}^{\mathbf{n}} \mathcal{A}_{2j}^2 + \mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{22} + \frac{\mathbf{n}-3}{4}(\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22})^2 \right) \\ &\geq (3\mathbf{n}-3) - (2\mathbf{n}-1)|\mathbf{d}\mathbf{r}|^2 - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}}, \end{aligned}$$

como desejávamos. □

Proposição 19 (Proposição 3.10, [18]). *Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima. Para $3 \leq n \leq 5$, vale que*

$$\begin{aligned} r^2|\mathcal{A}_M|^2 - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} + \left(\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} - \frac{(\mathbf{n}-2)^n}{4} \right) |\mathbf{d}\mathbf{r}|^2 \\ \geq \frac{1}{\mathbf{n}-2} \left(\frac{(2-\mathbf{n})(\mathbf{n}^2-4\mathbf{n}-4)}{8} - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}} \right). \end{aligned}$$

Demonstração. Pela Proposição 18, temos

$$\begin{aligned} & r^2|\mathcal{A}|^2 - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} + \left(\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} - \frac{(\mathbf{n}-2)^2}{4} \right) |\mathbf{d}\mathbf{r}|^2 \\ \leq & \frac{2}{\mathbf{n}-2} \left((3\mathbf{n}-3) - (2\mathbf{n}-1) |\mathbf{d}\mathbf{r}|^2 - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}} \right) - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} + \left(\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} - \frac{(\mathbf{n}-2)^2}{4} \right) |\mathbf{d}\mathbf{r}|^2 \\ = & \frac{6(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}-2} - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} + \left(\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} - \frac{(\mathbf{n}-2)^2}{4} - \frac{2(2\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}-2} \right) |\mathbf{d}\mathbf{r}|^2 - \frac{2}{\mathbf{n}-2} \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}}. \end{aligned}$$

Note que o coeficiente de $|\mathbf{d}\mathbf{r}|^2$ do lado direito acima é negativo para $3 \leq \mathbf{n} \leq 5$, e usando que $|\mathbf{d}\mathbf{r}|^2 \leq 1$, concluímos que

$$\begin{aligned} & r^2|\mathcal{A}|^2 - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} + \left(\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} - \frac{(\mathbf{n}-2)^2}{4} \right) |\mathbf{d}\mathbf{r}|^2 \\ \frac{6(\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}-2} - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} - \frac{(\mathbf{n}-2)^2}{4} - \frac{2(2\mathbf{n}-1)}{\mathbf{n}-2} - \frac{2}{\mathbf{n}-2} \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}} \\ \leq & \left(\frac{2}{\mathbf{n}-2} \right) \left(3(\mathbf{n}-1) - \frac{(\mathbf{n}-2)^3}{4} - (2\mathbf{n}-1) - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}} \right) \\ = & \left(\frac{2}{\mathbf{n}-2} \right) \left(\frac{(2-\mathbf{n})(\mathbf{n}^2-4\mathbf{n}-4)}{8} - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}} \right), \end{aligned}$$

como desejado. □

Podemos então estabelecer a seguinte versão mais fraca de estabilidade.

Teorema 17 (Teorema 3.1, [18]). *Sejam $F : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima estável 2-lados, completa e $N = M \setminus \{0\}$ com a métrica conforme $\tilde{g} = r^{-2}g$. Então existe uma função suave V em N tal que*

$$V \leq 1 - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}}$$

e

$$\int_N |\tilde{\nabla} \varphi|_{\tilde{g}}^2 d\tilde{\mu} \geq \int_N V \varphi^2 d\tilde{\mu},$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(N)$.

Demonstração. Combinando as Proposições 18 e 19, obtemos que

$$\int_N |\tilde{\nabla} \varphi|_{\tilde{g}}^2 d\tilde{\mu} \leq \int_N \frac{1}{\mathbf{n}-2} \left(\frac{(2-\mathbf{n})(\mathbf{n}^2-4\mathbf{n}-4)}{8} - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}} \right) d\tilde{\mu},$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(N)$. Para $n = 4$, a desigualdade acima se torna

$$\int_N |\tilde{\nabla} \varphi|_{\tilde{g}}^2 d\tilde{\mu} \leq \int_N \frac{1}{2} (8 - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}}) \varphi^2 d\tilde{\mu},$$

e a função $V := \frac{1}{2}(8 - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}})$ é a procurada. \square

5.2 Método de μ -Bolhas para a Curvatura bi-Ricci Positiva

Suponha que (N^n, g_N) é uma variedade Riemanniana que admite uma função positiva V tal que

$$V \leq 1 - \lambda_{\text{bi-Ric}}(g_N)$$

e

$$\int_N |\nabla \varphi|^2 \leq \int_N V \varphi^2,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(N)$. Observa-se que esta condição se aplica para a métrica conforme em hipersuperfícies mínimas estáveis pelo Teorema 17. Pela Proposição 4, isto é equivalente à existência de uma função positiva u em N satisfazendo

$$-\Delta^N u = Vu \leq (1 - \lambda_{\text{bi-Ric}}(g_N)) u.$$

Seja w uma função positiva suave em N . Seja $\Omega \subset N$ um conjunto aberto com bordo suave (mais geralmente com perímetro finito, levando em consideração que pode ocorrer $\partial^* \Omega \subset \partial \Omega$). Seja ν o campo vetorial (mais geralmente, a medida teórica) normal unitário externo ao longo de $\partial \Omega$. Seja h uma função suave definida em uma vizinhança de $\partial \Omega$. Estudaremos os minimizantes do funcional curvatura média prescrita torcida

$$\mathcal{A}(\Omega) := \int_{\partial \Omega} w d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial} hw d\mathcal{H}^n.$$

Calculemos agora as variações de $\mathcal{A}(\Omega)$.

Proposição 20 (Proposição 4.3, [18]). *Seja $\{\Omega_t\}_{|t|<\epsilon}$ uma família suave de conjuntos*

abertos com bordo suave, onde $\Omega_0 = \Omega$ e o campo vetorial variacional é V_t . Então

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla^N w, V_t \rangle + w \langle \nu_t, V_t \rangle - wh \langle \nu_t, V_t \rangle d\mathcal{H}^{n-1},$$

onde ν_t denota o campo vetorial normal unitário externo ao longo de $\partial\Omega_t$ e H_t denota a curvatura média escalar de $\partial\Omega_t$ com respeito a ν_t . Então os pontos críticos para \mathcal{A} satisfazem

$$H = h - w^{-1} \langle \nabla^N w, \nu \rangle.$$

Demonstração. De modo análogo ao que foi feito no Lema 16, vale que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{A}(\Omega_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} (w \circ F_t) (F_t^* d\mu) - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} ((hw) \circ F_t) (F_t^* dx) \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla_N w, V_t \rangle + w (\operatorname{div}_{\partial\Omega_t} V_t^T + H_t \langle \nu_t, V_t \rangle) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad - \int_{\Omega_t} \langle \nabla_{\Omega} (hw), V_t \rangle + hw \operatorname{div}_{\Omega} V_t d\mathcal{H}^n \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla_N w, B_t^{\perp} \rangle + \operatorname{div}_{\partial\Omega_t} (wV_t^T) + wH_t \langle \nu_t, V_t \rangle d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad - \int_{\Omega_t} \operatorname{div}_{\Omega_t} (hwV_t) d\mathcal{H}^n. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Divergência,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla_N w, V_t^{\perp} \rangle + wH_t \langle \nu_t, V_t \rangle - hw \langle \nu_t, V_t \rangle d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (5.5)$$

Se Ω é um ponto crítico para \mathcal{A} , supondo $V_0 = f\nu$ para $f \in C_c^{\infty}(\Omega)$, vale que

$$\int_{\partial\Omega} (\langle \nabla_N w, \nu \rangle + wH - hw) f d\mathcal{H}^{n-1} = 0, \quad (5.6)$$

logo $H = h - \partial_t \log w$, como desejado. \square

Teorema 18 (Teorema 4.4, [18]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{N}^4$ um conjunto aberto com bordo suave que é um ponto crítico estável para \mathcal{A} com função peso $w = u$. Seja $\Sigma = \partial\Omega$. Seja γ a métrica induzida em Σ . Então existe um função suave $W \in C^{\infty}(\Sigma)$ tal que*

$$W \leq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \lambda_{Ric}(\gamma) \right)$$

e

$$\int_{\Sigma} |\nabla^{\Sigma} \varphi|^2 \leq \int_{\Sigma} W \varphi^2 + \frac{3}{8} \int_{\Sigma} (1 + h^2 - 2 |\nabla^N h|) \varphi^2,$$

para todo $\varphi \in C_c^{\infty}(\Sigma)$.

Demonstração. Pela equação (5.5), vale que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{A}(\Omega_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla_N w, V_t^{\perp} \rangle + w H_t \langle \nu_t, V_t \rangle - h w \langle \nu_t, V_t \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla_N (\langle \nabla_N w, V_t^{\perp} \rangle + w H_t \langle \nu_t, V_t \rangle - h w \langle \nu_t, V_t \rangle), V_t^{\perp} \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_t} (\langle \nabla_N w, V_t^{\perp} \rangle + w H_t \langle \nu_t, V_t \rangle - h w \langle \nu_t, V_t \rangle) H_t \langle \nu_t, V_t \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla_N \langle \nabla_N w, V_t^{\perp} \rangle, V_t^{\perp} \rangle + w \langle \nabla_N H_t, V_t^{\perp} \rangle \langle \nu_t, V_t \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_t} H_t \langle \nabla_N w, V_t^{\perp} \rangle \langle \nu_t, V_t \rangle - w \langle \nabla_N h, V_t^{\perp} \rangle \langle \nu_t, V_t \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_t} h \langle \nabla_N w, V_t^{\perp} \rangle \langle \nu_t, V_t \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_t} H_t \langle \nabla_N w, V_t^{\perp} \rangle \langle \nu_t, V_t \rangle + w H_t^2 \langle \nu_t, V_t \rangle^2 - h w H_t \langle \nu_t, V_t \rangle^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Suponha que Ω é um ponto crítico de \mathcal{A} . Então é possível escolher uma variação F de Ω tal que $D_t V_t = 0$ e $V_0 = f\nu$. Sob essas condições,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \mathcal{A}(\Omega_t) &= \int_{\Sigma} f^2 D_N^2 u(\nu, \nu) + w f^2 \partial_t H_t + H f^2 \langle \nabla_N w, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad - \int_{\Sigma} w f^2 \langle \nabla_N h, \nu \rangle + h f^2 \langle \nabla_N w, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \int_{\Sigma} H f^2 \langle \nabla_N w, \nu \rangle + w H^2 f^2 - h w H f^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Usando que Ω é uma μ -bolha e que $\partial_t H_t|_{t=0} = -\Delta_{\Sigma} f - (|A_{\Sigma}|^2 + \text{Ric}_{g_N}(\nu, \nu)f)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \mathcal{A}(\Omega_t) &= \int_{\Sigma} f^2 D_N^2 w(\nu, \nu) - f \langle \nabla_{\Sigma} w, \nabla_{\Sigma} f \rangle + f^2 \langle \nabla_N w, \nu \rangle H \\ &\quad - \int_{\Sigma} w (f \Delta_{\Sigma} f + (|A_{\Sigma}|^2 + \text{Ric}_{g_N}(\nu, \nu)) f^2) \\ &\quad - \int_{\Sigma} f^2 \langle \nabla_{\Sigma} w, \nu \rangle h + f^2 w \langle \nabla_N w, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Usando a relação

$$D_N^2 w(\nu, \nu) = \Delta_N w - \Delta_\Sigma w - \langle \nabla_N w, \nu \rangle H, \quad (5.7)$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \mathcal{A}(\Omega_t) &= \int_\Sigma f^2 (\Delta_N w - \Delta_\Sigma w - \langle \nabla_N w, \nu \rangle H) \\ &\quad + \int_\Sigma f^2 \langle \nabla_N w, \nu \rangle H - w (f \Delta_\Sigma f + (|A_\Sigma|^2 + \text{Ric}_{g_N}(\nu, \nu)) f^2) \\ &\quad - \int_\Sigma f^2 \langle \nabla_N w, \nu \rangle h + f^2 w \langle \nabla_N h, \nu \rangle. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_\Sigma -w f \Delta_\Sigma f &= \int_\Sigma w |\nabla_\Sigma f|^2 - \frac{1}{2} w \nabla_\Sigma f^2 = \int_\Sigma w |\nabla_\Sigma f|^2 + \frac{1}{2} \langle \nabla_N w, \nabla_\Sigma f^2 \rangle \\ &= \int_\Sigma w |\nabla_\Sigma f|^2 + f \langle \nabla_N w, \nabla_\Sigma f \rangle. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Substituindo (5.9) em (5.8), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \mathcal{A}(\Omega_t) &= \int_\Sigma (\Delta_N w - \Delta_\Sigma w) + w (|\nabla_\Sigma f|^2 - (|A_\Sigma|^2 + \text{Ric}_{g_N}(\nu, \nu)) f^2) \\ &\quad - \int_\Sigma f^2 \langle \nabla_N w, \nu \rangle h - \int_\Sigma f^2 w \langle \nabla_N h, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Como Ω é um ponto crítico estável para \mathcal{A} , devemos ter que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Sigma (\Delta_N w - \Delta_\Sigma w) + w (|\nabla_\Sigma f|^2 - (|A_\Sigma|^2 + \text{Ric}_{g_N}(\nu, \nu)) f^2) - \int_\Sigma f^2 \langle \nabla_N w, \nu \rangle h \\ &\quad - \int_\Sigma f^2 w \langle \nabla_N h, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_\Sigma |\nabla_\Sigma f|^2 - f \Delta_\Sigma w &\geq \int_\Sigma (-\Delta_N w + (|A_\Sigma|^2 + \text{Ric}_{g_N}(\nu, \nu)) w) f^2 \\ &\quad + \int_\Sigma (h \langle \nabla_N w, \nu \rangle + w \langle \nabla_N h, \nu \rangle) f^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Agora, considere $f = w^{-\frac{1}{2}} g$. Então,

$$\nabla_\Sigma f = w^{-\frac{1}{2}} \nabla_\Sigma g - \frac{1}{2} w^{-\frac{3}{2}} g \nabla_\Sigma w.$$

Logo,

$$w |\nabla_{\Sigma} f|^2 = |\nabla_{\Sigma} g|^2 - w^{-1} g \langle \nabla_{\Sigma} w, \nabla_{\Sigma} g \rangle + \frac{1}{4} w^{-2} g^2 |\nabla_{\Sigma} w|^2. \quad (5.11)$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} f^2 \Delta_{\Sigma} w &= \int_{\Sigma} g^2 w^{-1} \Delta_{\Sigma} w = \int_{\Sigma} g w^{-1} \Delta_{\Sigma} (g w) - g \Delta_{\Sigma} g - 2g w^{-1} \langle \nabla_{\Sigma} g, \nabla_{\Sigma} w \rangle \\ &= \int_{\Sigma} g^2 |\nabla_{\Sigma} \log w|^2 - 2g w^{-1} \langle \nabla_{\Sigma} g, \nabla_{\Sigma} w \rangle, \end{aligned}$$

e que, por (5.11), vale

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left(w |\nabla_{\Sigma} f|^2 - f^2 \Delta_{\Sigma} w \right) &= \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} g|^2 + \int_{\Sigma} g w^{-1} \langle \nabla_{\Sigma} g, \nabla_{\Sigma} w \rangle - g^2 |\nabla_{\Sigma} \log w|^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Sigma} w^{-2} g^2 |\nabla_{\Sigma} w|^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Pela Desigualdade de Young com $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} g w^{-1} \langle \nabla_{\Sigma} w, \nabla_{\Sigma} g \rangle &\leq \int_{\Sigma} g w^{-1} |\nabla_{\Sigma} g| |\nabla_{\Sigma} w| \leq \int_{\Sigma} \epsilon g^2 w^{-2} |\nabla_{\Sigma} w|^2 + \frac{1}{2\epsilon} |\nabla_{\Sigma} g|^2 \\ &= \int_{\Sigma} \epsilon g^2 |\nabla_{\Sigma} \log w|^2 + \frac{1}{2\epsilon} |\nabla_{\Sigma} g|^2. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (5.12),

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left(w |\nabla_{\Sigma} f|^2 - f^2 \Delta_{\Sigma} w \right) &\leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} g|^2 + \left(\frac{\epsilon}{2} - 1 \right) \int_{\Sigma} g^2 |\nabla_{\Sigma} \log w|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} g|^2 + \frac{1}{4} \int_{\Sigma} w^{-2} g^2 |\nabla_{\Sigma} w|^2. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = \frac{3}{2}$, obtemos

$$\int_{\Sigma} \left(w |\nabla_{\Sigma} f|^2 - f^2 \Delta_{\Sigma} w \right) \leq \frac{4}{3} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} g|^2.$$

Combinando este resultado com (5.10), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} g|^2 &\geq \int_{\Sigma} \left(-\frac{\Delta_{\mathbb{N}} w}{w} + |\mathbf{A}_{\Sigma}|^2 + \text{Ric}_{g_{\mathbb{N}}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \frac{1}{2} H^2 - \frac{1}{2} \right) g^2 \\ &\quad + \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} H^2 + h \partial_{\mathbf{v}} \log w + \partial_{\mathbf{v}} \log h \right) g^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Como Σ é um ponto crítico de \mathcal{A} , Pela Proposição 20,

$$H^2 = h^2 - 2h\partial_\nu \log w + (\partial_\nu \log w)^2 \geq h^2 - 2h\partial_\nu \log w.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \int_\Sigma |\nabla_\Sigma g|^2 &\geq \int_\Sigma \left(-\frac{\Delta_N w}{w} + |\mathcal{A}_\Sigma|^2 + \text{Ric}_{g_N}(\nu, \nu) - \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2} \right) g^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_\Sigma (1 + h^2 - 2|\nabla_N h|) g^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Agora, refinaremos a desigualdade no lado esquerdo de (5.14). Usando a Equação de Gauss, vale que

$$\begin{aligned} \text{Ric}_\gamma(e_1, e_1) &= \sum_{i=1}^{n-1} R_\gamma(e_1, e_i, e_i, e_1) = \sum_{i=1}^{n-1} (R_{g_N}(e_1, e_i, e_i, e_1) + A_{11}A_{ii} - A_{1i}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} R_{g_N}(e_1, e_i, e_i, e_1) + \sum_{j=1}^n R_{g_N}(\nu, e_j, e_j, \nu) - \sum_{j=1}^n R_{g_N}(\nu, e_j, e_j, \nu) \\ &\quad + A_{11} \sum_{i=1}^{n-1} A_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} A_{1i}^2 \\ &= \text{bi-Ric}_{g_N}(e_1, \nu) - \text{Ric}_{g_N}(\nu, \nu) + A_{11} \sum_{i=2}^{n-1} A_{ii} - \sum_{i=2}^{n-2} A_{1i}^2. \end{aligned}$$

Usando que $\text{Tr}(A) = H$ temos, para $\mu > 0$,

$$\begin{aligned} A_{11} \sum_{i=2}^{n-1} A_{ii} &= -A_{11}^2 + A_{11}H = -A_{11}^2 - H \sum_{i=2}^{n-1} A_{ii} + H \\ &\geq -A_{11}^2 - \frac{1}{2\mu} \left(\sum_{i=2}^{n-1} A_{ii} \right)^2 + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) H^2 \\ &\geq -A_{11}^2 - \frac{n-2}{2\mu} \sum_{i=2}^{n-1} A_{ii}^2 + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) H^2 \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} A_{11}^2 + \frac{6-n}{4} H^2, \end{aligned}$$

onde na última igualdade tomamos $\mu = \frac{n-2}{2}$. Escolha e_1 de modo que $\lambda_{\text{Ric}}(\gamma) = \text{Ric}_\gamma(e_1, e_1)$.

Logo,

$$|\mathcal{A}_\Sigma|^2 + \text{Ric}_{g_N}(\nu, \nu) \geq \lambda_{\text{bi-Ric}}(g_N) - \lambda_{\text{Ric}}(\gamma) + \frac{6-n}{4} H^2.$$

Tomando $n = 4$ e $w = u$, obtemos

$$-\frac{\Delta_N w}{w} + |A_\Sigma|^2 + \text{Ric}_{g_N}(v, v) - \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} - \lambda_{\text{Ric}}(\gamma).$$

Basta então tomar $W = \frac{3}{4} - \frac{\Delta_N w}{w} + |A_\Sigma|^2 + \text{Ric}_{g_N}(v, v) - \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}$, encontrando assim a função procurada. \square

Teorema 19 (Teorema 4.1, [18]). *Seja $X \subset \mathbb{N}^4$ um subconjunto aberto com fronteira suave $\partial X = \partial_+ X \sqcup \partial_- X$ para algumas hipersuperfícies suaves não-vazias $\partial_\pm X$. Suponha que $d_N(\partial_+ X, \partial_- X) \geq 10\pi$. Então existe um subconjunto relativamente aberto, conexo $\Omega \subset X$ com fronteira suave $\partial\Omega = \partial_- X \sqcup \Sigma$ tal que*

- (a) $\partial_- X \subset \Omega$;
- (b) $\Sigma \subset X \setminus \partial X$ é uma subvariedade fechada;
- (c) $\Omega \subset B_{10\pi}(\partial_- X)$; e
- (d) existe uma função suave $W \in C^\infty(\Sigma)$ tal que

$$W \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \lambda_{\text{Ric}}(\Sigma) \right)$$

e

$$\int_\Sigma |\nabla_\Sigma f|^2 \geq \int_\Sigma W f^2,$$

para toda $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Demonstração. Seja \tilde{d} uma suavização da função distância ao bordo $d_N(\partial_- X, \cdot)$ tal que $|\nabla_N \tilde{d}| \leq 2$ e $\tilde{d}|_{\partial_- X} \equiv 0$. Seja $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ tal que ϵ e $4\pi + 2\epsilon$ sejam valores regulares de \tilde{d} .

Defina

$$h_0 = \frac{\tilde{d} - \epsilon}{4 + \frac{\epsilon}{\pi}} - \frac{\pi}{2}.$$

Então $|\nabla_N h| = \frac{1}{4 + \frac{\epsilon}{\pi}} |\nabla_N \tilde{d}| \leq \frac{1}{2}$ e, pela suavidade de \tilde{d} , o conjunto $\Omega_1 := \{-\frac{\pi}{2} < h_0 < \frac{\pi}{2}\}$ tem fronteira suave e satisfaz $\Omega_1 \subset B_{10\pi}(\partial_- X)$. Em Ω_1 , defina

$$h := \tan(h_0).$$

Então

$$\nabla_N h = -(1 + \tan^2(h_0)) \nabla_N h_0 = -(1 + h^2) \nabla_N h_0,$$

e portanto,

$$2|\nabla_{\mathbf{N}}\mathbf{h}| = (1 + \mathbf{h}^2)|\nabla_{\mathbf{N}}\mathbf{h}| \leq 1 + \mathbf{h}^2. \quad (5.15)$$

Agora, com esta \mathbf{h} , defina o funcional

$$\mathcal{A}(\Omega) = \int_{\partial^*\Omega} u \, d\mathcal{H}^2 - \int_{\Omega} hu \, d\mathcal{H}^3,$$

ao longo de conjuntos de Caccioppoli tais que $\Omega \Delta \partial_- X \in \mathbf{N}$. Podemos tomar Ω como sendo a componente conexa de $\{\mathbf{x} \in \mathbf{N}; 0 \leq \tilde{\mathbf{d}} \leq \epsilon\} \cup \partial_- X$ que contem $\partial \mathbf{N}$, e deste modo, desconsideramos as componentes conexas de Ω disjunta de $\partial \mathbf{N}$. Por construção, Ω_0 satisfaz (a)-(c).

Pela Proposição 11, existe um aberto $\Omega_0 \subset \mathbf{N}^4$ minimizante de \mathcal{A} . Escrevendo $\Sigma = \partial\Omega_0$, segue do Teorema 19,

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^2 \geq \int_{\Sigma} W f^2,$$

para toda $f \in C_c^{\infty}(\Sigma)$, estabelecendo (d) como desejado. \square

5.3 Estimativas Geométricas para μ -Bolhas

O objetivo desta seção é obter estimativas superiores para o diâmetro e volume da μ -bolha construída no Teorema 19, similar ao que foi obtido no Lema 12. Especificamente, queremos provar o seguinte resultado.

Teorema 20 (Teorema 5.1, [18]). *Suponha que (Σ^3, γ) é uma 3-variedade conexa fechada que admite uma função suave W tal que, para uma constante $\alpha \in (0, 2]$, valem*

$$W \geq \alpha^{-1} (2 - \lambda_{\text{Ric}}(\gamma)) \quad (5.16)$$

e

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^2 \leq \int_{\Sigma} W f^2,$$

para toda $f \in C^{\infty}(\Sigma)$. Então

$$\text{diam}(\Sigma, \gamma) \leq \pi \quad \text{e} \quad \text{Vol}(\Sigma, \gamma) \leq 2\pi^2.$$

Antes de demonstrarmos este resultado iremos apresentar alguns resultados funda-

mentais.

Perfil Isoperimétrico

Seja θ a primeira autofunção positiva associada ao operador $-\Delta - W$. Então, para um conjunto aberto $\Omega \subset \Sigma$ com bordo suave, defina os funcionais volume e área ponderada por

$$\mathbf{a}(\Omega) := \int_{\partial\Omega} \theta^\alpha \, d\mathcal{H}_\gamma^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{v}(\Omega) := \int_{\Omega} \theta^\alpha \, d\mathcal{H}_\gamma^3,$$

onde θ é a primeira autofunção de $-\Delta - W$ com $\min \theta = 1$. Pela desigualdade 5.16 θ satisfaz

$$-\Delta\theta \geq \alpha^{-1} (2 - \lambda_{\text{Ric}}(\gamma)) \theta. \quad (5.17)$$

Definição 8. *O perfil isoperimétrico ponderado é definido como a função $I : (0, \mathbf{v}(\Sigma)) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$I(\mathbf{v}) := \inf\{\mathbf{a}(\Omega); \mathbf{v}(\Omega) = \mathbf{v}\}.$$

Pela compacidade de conjuntos de Caccioppoli, existe $\Omega \subset \Sigma$ que possui $I(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in (0, \mathbf{v}(\Sigma))$ (ver [37]).

Primeira e Segunda Variação

Como antes, considere $F : (-\epsilon, \epsilon) \times \Omega \rightarrow M$ uma variação de Ω , onde $F_t(\Omega) \equiv (t, \Omega) = \Omega_t$, tal que $\frac{\partial F_t}{\partial t}|_{t=0} = f\nu$, onde ν é o campo unitário normal externo a $\partial\Omega$ e $f \in C^\infty(\Omega)$.

Proposição 21 (Proposição 5.2, [18]). *Temos que*

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega_t} (H + \alpha\theta^{-1} \langle \nabla^\Sigma \theta, \nu \rangle) f \theta^\alpha \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega_t} f \theta^\alpha.$$

Demonstração. Pela Definição 2, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{a}(\Omega_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega_t} (\theta^\alpha \circ F_t) (F_t^* \, d\mu) \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \left\langle \nabla_\Sigma(\theta^\alpha), \frac{\partial F_t}{\partial t} \right\rangle + \theta^\alpha \left(\text{div}_\Sigma \left(\frac{\partial F_t}{\partial t} \right)^\top + H_t \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial t}, \nu_t \right\rangle \right) d\mathcal{H}^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha(\Omega_t) &= \int_{\partial\Omega} \left\langle \nabla_{\Sigma}(\theta^\alpha), \left(\frac{\partial F_t}{\partial t} \right)^\perp \right\rangle \Big|_{t=0} + \operatorname{div}_{\partial\Omega} \left(\theta^\alpha \left(\frac{\partial F_t}{\partial t} \right)^\top \right) + \theta^\alpha H f \, d\mathcal{H}^2 \\ &= \int_{\partial\Omega} \alpha \theta^{\alpha-1} f \langle \nabla_{\Sigma} \theta, \nu \rangle + \theta^\alpha H f \, d\mathcal{H}^2 \\ &= \int_{\partial\Omega} (\alpha \theta^{-1} \langle \nabla_{\Sigma} \theta, \nu \rangle + H) f \theta^\alpha \, d\mathcal{H}^2. \end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \nu(\Omega_t) &= \int_{\Omega_t} \left\langle \nabla_{\Sigma}(\theta^\alpha), \frac{\partial F_t}{\partial t} \right\rangle + \theta^\alpha \operatorname{div}_{\Omega} \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \right) \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}_{\Omega} \left(\theta^\alpha \frac{\partial F_t}{\partial t} \right) \, d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \theta^\alpha \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial t}, \nu_t \right\rangle \, d\mathcal{H}^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega} \theta^\alpha f \, d\mathcal{H}^2,$$

como desejávamos. \square

Proposição 22 (Proposição 5.3, [18]). *Temos que*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \alpha(\Omega_t) &= \int_{\partial\Omega} |\nabla_{\partial\Omega} f|^2 \theta^2 - (\operatorname{Ric}_{\Sigma}(\nu, \nu) + |A_{\partial\Omega}|^2) f^2 \theta^\alpha + \alpha (\Delta_{\Sigma} \theta - \Delta_{\partial\Omega} \theta) f^2 \theta^{\alpha-1} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \alpha(\alpha-1) \langle \nabla_{\Sigma} \theta, \nu \rangle^2 f^2 \theta^{\alpha-2} + H(H + \alpha \theta^{-1} \langle \nabla_{\Sigma} \theta, \nu \rangle) f^2 \theta^\alpha, \end{aligned}$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \nu(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega} (H + \alpha \theta^{-1} \langle \nabla_{\Sigma} \theta, \nu \rangle) f^2 \theta^\alpha.$$

Demonstração. Pela Proposição 21 temos que,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \nu(\Omega_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} (\theta^\alpha \langle \nu_t, \mathbf{V}_t \rangle) \circ F_t (F_t^* \, d\mu_t) \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle \theta^\alpha \langle \nu_t, \mathbf{V}_t \rangle, \mathbf{V}_t^\perp \rangle (F_t^* \, d\mu_t) + \theta^\alpha H_t \langle \nu_t, \mathbf{V}_t \rangle^2 \, d\mu_t \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \langle \nu_t, \mathbf{V}_t \rangle \langle \nabla \theta^\alpha, \mathbf{V}_t^\perp \rangle + \theta^\alpha \langle \nabla \langle \nu_t, \mathbf{V}_t \rangle, \mathbf{V}_t^\perp \rangle + \theta^\alpha H_t \langle \nu_t, \mathbf{V}_t \rangle^2. \end{aligned}$$

Portanto, escolhendo uma variação tal que $F_0 = f\nu$, para $f \in C_c^\infty(\Sigma)$,

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \nu(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega} \alpha f^2 \theta^{\alpha-1} \langle \nabla \theta, \nu \rangle + f^2 \theta^\alpha H.$$

De modo análogo, repetindo os argumentos do Teorema 18, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \mathbf{a}(\Omega_t) &= \int_{\partial\Omega} \left(-\Delta_{\partial\Omega} f - (\text{Ric}(\nu, \nu) + |\mathcal{A}_{\partial\Omega}|^2) f \right) f \theta^\alpha \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \alpha D_\Sigma^2 \theta(\nu, \nu) f^2 \theta^{\alpha-1} - \alpha \langle \nabla_{\partial\Omega} \theta, \nabla_{\partial\Omega} f \rangle f \theta^{\alpha-1} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \alpha H \langle \nabla_\Sigma \theta, \nu \rangle f^2 \theta^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1) \langle \nabla_\Sigma \theta, \nu \rangle f^2 \theta^{\alpha-1} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} H (H + \alpha \theta^{-1} \langle \nabla_\Sigma \theta, \nu \rangle) f^2 \theta^\alpha. \end{aligned}$$

Usando novamente a relação (5.7) e integrando por partes, obtemos a identidade procurada:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \mathbf{a}(\Omega_t) &= \int_{\partial\Omega} |\nabla_{\partial\Omega} f|^2 \theta^2 - (\text{Ric}_\Sigma(\nu, \nu) + |\mathcal{A}_{\partial\Omega}|^2) f^2 \theta^\alpha + \alpha (\Delta_\Sigma \theta - \Delta_{\partial\Omega} \theta) f^2 \theta^{\alpha-1} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \alpha(\alpha-1) \langle \nabla_\Sigma \theta, \nu \rangle^2 f^2 \theta^{\alpha-2} + H (H + \alpha \theta^{-1} \langle \nabla_\Sigma \theta, \nu \rangle) f^2 \theta^\alpha, \end{aligned}$$

□

Uma Desigualdade Diferencial no Sentido das Barreiras

Fixe $\nu_0 \in (0, \nu(\Sigma))$ e novamente considere uma família $\{\Omega_t\}_{|t|<\epsilon}$ suave de conjuntos abertos com fronteira suave com $\Omega_0 = \Omega$ cujo campo vetorial de variações em $t = 0$ é $\theta^{-\alpha} \nu$, onde ν é o campo vetorial normal unitário externo ao longo de $\partial\Omega$.

Note que $\mathbf{v}(t) := \mathbf{v}(\Omega_t)$ é uma função suave. Pela Proposição 22, temos que

$$\mathbf{v}'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbf{v}(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega} 1 = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) > 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existem um $\sigma > 0$ e uma função suave $\mathbf{t} : (\nu_0 - \sigma, \nu_0 + \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$, que é inversa local de \mathbf{v} , com $\mathbf{t}(\nu_0) = 0$.

Seja $\mathbf{u} : (\nu_0 - \epsilon, \nu_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{u}(\nu) = \mathbf{a}(\mathbf{t}(\nu))$. Note que $\mathbf{u}(\nu_0) = \mathbf{a}(0) = \mathcal{J}(\nu_0)$. Além disso, como $\mathbf{v}(\Omega_{\mathbf{t}(s)}) = \mathbf{v}(\mathbf{t}(s)) = s$, temos que $\mathbf{u}(s) \geq \mathcal{J}(s)$, $\forall s \in (\nu_0 - \sigma, \nu_0 + \sigma)$.

Proposição 23 (Proposição 5.4, [18]). *A função u satisfaz*

$$\frac{d}{dv}u(v_0) = - \left(2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dv}u(v_0)^2 \right) u(v_0)^{-1}.$$

Demonstração. Pelo Teorema da Função inversa,

$$\frac{d}{dv}t(s) = \frac{1}{\frac{dv}{dt}(t(s))}, \quad \text{portanto,} \quad \frac{d^2}{dt^2}t(v) = -\frac{\frac{d^2v}{dt^2}(t(s))}{\left(\frac{dv}{dt}(t(s))\right)^3}. \quad (5.18)$$

Pelas Proposições 22 e 23, vale por (5.18) que

$$\left. \frac{dt}{dv} \right|_{t=0}(v) = \left(\int_{\partial\Omega} 1 \right)^{-1} \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2t}{dv^2} \right|_{t=0} = - \left(\int_{\partial\Omega} 1 \right)^{-3} \cdot \int_{\partial\Omega} (H + \alpha\theta^{-1} \langle \nabla_{\Sigma}\theta, \nu \rangle) \theta^{-\alpha}. \quad (5.19)$$

Agora, é bem sabido que

$$\frac{d}{dv}a = \frac{d}{dt}a \cdot \frac{d}{dv}t$$

e

$$\frac{d^2}{dv^2}a = \frac{d^2}{dt^2}a \cdot \frac{d}{dv}t^2 + \frac{d}{dt}a \cdot \frac{d^2}{dv^2}t.$$

Por definição,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dv}(v) &= \frac{d}{dv}a(t(s)) = \frac{da}{dt}(t(v)) \cdot \frac{dt}{dv}(v) \quad \text{e} \\ \frac{d^2u}{dv^2}(v) &= \frac{d^2}{dv^2}a(t(v)) = \frac{d^2a}{dt^2}(t(v)) \left(\frac{dt}{dv}(v) \right)^2 + \frac{da}{dt}(t(v)) \cdot \frac{d^2t}{dv^2}(v). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Pela Proposição 21, com $f = \theta^\alpha$,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dv}(v_0) &= \frac{da}{dt}(t(v_0)) \cdot \frac{dt}{dv}(v_0) = \left(\int_{\partial\Omega} H + \alpha\theta^{-1} \langle \nabla_{\Sigma}\theta, \nu \rangle \right) \frac{dt}{dv}(v_0) \\ &= H + \alpha\theta^{-1} \langle \nabla_{\Sigma}\theta, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Novamente tomando θ como primeira autofunção de $-\Delta_{\Sigma} - W$ e usando as Proposições

21 e 22, com $f = \theta^{-\alpha}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\mathbf{v}^2}(\mathbf{v}_0) \left(\int_{\partial\Omega} 1 \right)^2 &= \left(\frac{d^2\mathbf{a}}{dt}(0) \left(\frac{d\mathbf{t}}{d\mathbf{v}}(\mathbf{v}_0) \right)^2 + \frac{d\mathbf{a}}{dt}(0) \cdot \frac{d^2\mathbf{t}}{d\mathbf{v}^2}(\mathbf{v}_0) \right) \left(\int_{\partial\Omega} 1 \right)^2 \\ &= \int_{\partial\Omega} |\nabla_{\partial\Omega}\theta^{-\alpha}|^2 \theta^\alpha - (\text{Ric}_\Sigma(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + |\mathbf{A}_{\partial\Omega}|^2) \theta^{-\alpha} \\ &\quad + \alpha(\Delta_\Sigma\theta - \Delta_{\partial\Omega}\theta) \theta^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1) \langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle^2 \theta^{-\alpha-2} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \text{H}(\text{H} + \alpha \langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle) \theta^{-\alpha} - (\text{H} + \alpha \langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle)^2 \theta^{-2}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema da Divergência e expandindo a expressão que está elevada ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\mathbf{v}^2}(\mathbf{v}_0) \left(\int_{\partial\Omega} 1 \right)^2 &= \int_{\partial\Omega} (\alpha\theta^{-1}\Delta_\Sigma\theta - \text{Ric}_\Sigma(\mathbf{v}, \mathbf{v})) \theta^{-\alpha} - \alpha|\nabla_{\partial\Omega}\theta|^2 \theta^{-\alpha-2} - |\mathbf{A}_{\partial\Omega}|^2 \theta^{-\alpha} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} -\alpha\text{H} \langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle \theta^{-\alpha-1} - \alpha \langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle^2 \theta^{-\alpha-2}. \end{aligned}$$

Por (5.17), temos que $\alpha(\theta^{-1}\Delta_\Sigma\theta) - \text{Ric}_\Sigma \leq -2$. Além disso, pela equação de Gauss, $|\mathbf{A}_{\partial\Omega}|^2 = \frac{1}{2}\text{H}^2$, e claramente $\alpha|\nabla_{\partial\Omega}\theta|^2 \theta^{-\alpha-2} \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\mathbf{v}^2}(\mathbf{v}_0) \left(\int_{\partial\Omega} 1 \right)^2 &\leq -2\theta^{-\alpha} - \frac{1}{2}\text{H}^2\theta^{-\alpha} - \alpha\text{H} \langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle \theta^{-\alpha-1} - \alpha \langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle^2 \theta^{-\alpha-2} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} -\frac{1}{2}\alpha^2 \langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle^2 \theta^{-\alpha-2} + \frac{1}{2}\alpha^2 \langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle^2 \theta^{-\alpha-2} \\ &= \int_{\partial\Omega} -\left(2 + \frac{1}{2}(\text{H} + \alpha\theta^{-1}\langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle)^2 \right) \theta^{-\alpha} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}\alpha(\alpha-2) \langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle^2 \theta^{-\alpha-2}. \end{aligned}$$

Como $\alpha \in (0, 2]$, $\frac{1}{2}\alpha(\alpha-2) \langle \nabla_\Sigma\theta, \mathbf{v} \rangle^2 \theta^{-\alpha-2} \geq 0$. Então, usando (5.19), obtemos que

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\mathbf{v}^2}(\mathbf{v}_0) \left(\int_{\partial\Omega} 1 \right)^2 \leq -\left(2 + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{v}}(\mathbf{v}_0)^2 \right) \int_{\partial\Omega} \theta^{-\alpha}.$$

Em particular, a expressão acima implica que $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{v}}(\mathbf{v}_0) \leq 0$. Pela Desigualdade de Hölder e (5.20),

$$\left(\int_{\partial\Omega} 1 \right)^2 \leq \int_{\partial\Omega} \theta^\alpha \cdot \int_{\partial\Omega} \theta^{-\alpha} = \mathbf{u}(\mathbf{v}_0) \int_{\partial\Omega} \theta^{-\alpha}.$$

Portanto, pelas últimas desigualdades acima,

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\mathbf{v}^2}(\mathbf{v}_0) \leq - \left(2 + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{v}}(\mathbf{v}_0)^2 \right) \mathbf{u}(\mathbf{v}_0)^{-1},$$

como desejávamos. □

Agora, defina $F(\mathbf{v}) := I(\mathbf{v})^{\frac{3}{2}}$. Pela Proposição 23, vale o seguinte resultado.

Proposição 24 (Proposição 5.5, [18]). *Para qualquer $\mathbf{v}_0 \in (0, \mathbf{V})$, existe uma função suave $\mathbf{U} : (\mathbf{v}_0 - \mathbf{a}, \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{R}$, para $\mathbf{a} > 0$, satisfazendo*

(a) $\mathbf{U}(\mathbf{v}_0) = F(\mathbf{v}_0)$;

(b) $\mathbf{U}(\mathbf{v}) \geq F(\mathbf{v})$, para todo $\mathbf{v} \in (\mathbf{v}_0 - \mathbf{a}, \mathbf{v}_0 + \mathbf{a})$ e

(c) $\mathbf{U}''(\mathbf{v}_0) \leq -3\mathbf{U}(\mathbf{v}_0)^{-\frac{1}{3}}$.

Demonstração. Considere a função \mathbf{u} definida anteriormente e considere $\mathbf{U}(\mathbf{v}) := \mathbf{u}(\mathbf{v})^{\frac{3}{2}}$. Portanto a alternativa (a), segue diretamente das definições de \mathbf{u} e F . A alternativa (b) foi verificada anteriormente.

Por fim, para a provar a alternativa (c), derive

$$\mathbf{U}'(\mathbf{v}) = \frac{3}{2} \mathbf{u}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) \mathbf{u}''(\mathbf{v}_0),$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{U}''(\mathbf{v}_0) &= \frac{3}{4} \mathbf{u}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{v}_0) \mathbf{u}'(\mathbf{v}_0)^2 + \frac{3}{2} \mathbf{u}(\mathbf{v}_0)^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}''(\mathbf{v}_0) \\ &\leq \frac{3}{4} \mathbf{u}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u}'(\mathbf{v}_0)^2 - 3\mathbf{u}(\mathbf{v}_0)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \mathbf{u}(\mathbf{v}_0)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u}'(\mathbf{v}_0)^2 = -3\mathbf{U}(\mathbf{v}_0)^{-\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

onde a desigualdade segue da Proposição 23. □

Proposição 25 (Proposição 5.6, [18]). *A aplicação I é contínua.*

Demonstração. Pela teoria de compacidade dos conjuntos de Caccioppoli (ver, por exemplo, [25]) e o Teorema 11, vale que

$$\liminf_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_0} I(\mathbf{v}) \geq I(\mathbf{v}_0).$$

Pela teoria de existência de barreiras feitas anteriormente para a função I em qualquer $\mathbf{v}_0 \in (0, V)$, vale que

$$\limsup_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_0} I(\mathbf{v}) \leq I(\mathbf{v}_0). \quad (5.21)$$

Combinando as equações anteriores, obtemos que I é contínua. \square

Solução de uma EDO

Estudaremos agora as soluções de equação diferencial ordinária

$$f''(\mathbf{y}) = -3f(\mathbf{y})^{-\frac{1}{3}} \quad (5.22)$$

Para isto, defina a função $g : [0, 1) \rightarrow [0, \frac{\pi}{4})$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^{\frac{2}{3}}}} dt.$$

Observe que g é um difeomorfismo. Tomando o mapa inverso $\mathbf{v} \mapsto g^{-1}(\frac{\pi}{4} - \mathbf{v})$, é possível estendê-lo para uma função suave $f_0 : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_0 = 1$ e $f_0''(\mathbf{x}) = -3f_0(\mathbf{x})^{-\frac{1}{3}}$. Para $z > 0$, defina $f_z : (-\frac{\pi}{4}z, \frac{\pi}{4}z) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathbf{v} \mapsto z^{\frac{3}{2}} f_0(z^{-1}\mathbf{v}). \quad (5.23)$$

Note que $f_z(\mathbf{v})$ resolve (5.22) com $f_z'(0) = 0$ e $f_z(0) = z^{\frac{3}{2}}$. Definimos $k(z) := \frac{\pi}{4}z$ e observe que $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \pm k(z)} f(\mathbf{v}) = 0$. Extenda f_z para todo o \mathbb{R} como zero fora de $(-\frac{\pi}{4}z, \frac{\pi}{4}z)$.

Podemos finalmente demonstrar o Teorema 20.

Demonstração do Teorema 20. Seja θ a primeira autofunção positiva associada ao operador $-\Delta - W$ considerada anteriormente. Então,

$$(-\Delta - W)\theta = \beta\theta, \quad \beta > 0.$$

Portanto, vale por hipótese,

$$-\Delta\theta = \beta\theta + W\theta \geq W\theta \geq \alpha^{-1}(2 - \lambda_{\text{Ric}}(\gamma))\theta.$$

Isto implica que

$$\text{Ric}_\gamma^{(\theta, \alpha)} = \text{Ric}_\gamma - \alpha (\theta^{-1} \Delta \theta) \gamma \geq \text{Ric}_\gamma + 2\gamma - \lambda_{\text{Ric}}(\gamma) \gamma \geq 2\gamma.$$

Como $\alpha \leq \frac{4}{3-1} = 2$, segue do Lema 20 que

$$\text{diam}(\Sigma, \gamma) \leq \sqrt{3-1} \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \pi.$$

Isto estabelece a limitação do diâmetro.

Agora, para a segunda parte, suponha por contradição que

$$v(\Sigma) = \int_\Sigma \theta^\alpha > 2\pi^2. \quad (5.24)$$

Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que, para $\mu = 4\pi + \delta$, vale que

$$F(v) \geq f_z(v - \beta(\mu)), \quad (5.25)$$

para todo $v \in (0, 2\pi^2)$. De fato, fixe $c \in (0, 1)$ e defina $f_{z,c}(v) = c^{\frac{3}{4}} f_z(v)$, onde f_z é solução de (5.23), temos que $f_{z,c}$ é solução da equação

$$f''(w) = -3cf^{-\frac{1}{3}}(w). \quad (5.26)$$

Suponha que existe v_0 tal que $f(v_0) = F(v_0)$ e $f(v) \leq F(v)$ para todo $v \in (v_0 - \epsilon, v_0 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, onde f é a solução de (5.22) (isto significa que f toca F por baixo). Tome U a função suave definida em uma vizinhança de v_0 , dada pela Proposição 24. Então a função suave f toca a função suave F por baixo e, como F é positiva e contínua (pela definição de I e a Proposição 25), para todo $c \in (0, 1)$, vale que

$$U''(v_0) \leq -3U(v_0)^{-\frac{1}{3}} = -3F(v_0)^{-\frac{1}{3}} < -3cF(v_0)^{-\frac{1}{3}} = -3cf(v_0)^{-\frac{1}{3}} = f''(v_0),$$

um absurdo, portanto não pode existir solução de (5.26) que toca $F(v)$ por baixo.

Agora, sejam $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequenos tais que $\frac{\pi}{2}z + \epsilon z < v(\Sigma)$ para $z \in (0, \mu)$, que é possível pois $v(\Sigma) > 2\pi = \beta(4\pi)$. Considere o gráfico da função

$$g_{z,c}(v) = f_{z,c}(v - \beta(z) - \epsilon z),$$

para $v \in [\epsilon z, 2\beta(z) + \epsilon z]$. Note que

$$\begin{aligned} g_{z,c}(\epsilon z) &= f_{z,c}(\epsilon z - \beta(z) - \epsilon z) = f_{z,c}(-\beta(z)) = g_{z,c}(2\beta(z) + \epsilon z) = 0 \\ &< \min\{F(\epsilon z), F(2\beta(z) + \epsilon z)\}. \end{aligned}$$

Além disso, $g_{z,c}$ converge uniformemente a zero quando $z \rightarrow 0$. Então, se $g_{z^*,c}(v^*) > F(v^*)$ para alguns v^* e z^* , então deve haver $z \in (0, z^*]$ tal que $g_{z,c}$ toca F por baixo, que é um absurdo pela afirmação anterior. Portanto, vale que $F \geq g_{z,c}$ para qualquer $z \in (0, \mu)$. Fazendo $z \rightarrow \mu$, e portanto $\epsilon \rightarrow 0$, provamos a afirmação para $f_{z,c}$. Basta então fazer $z \rightarrow 0$ para obter o resultado desejado.

Estudaremos agora o comportamento assintótico de F e $f_\mu(v - \beta(\mu))$ quando $v \rightarrow 0$. Como $f_\mu(-\beta(\mu)) = 0$, segue por definição que $f'_\mu(-\beta(\mu)) = 3\sqrt{\mu}$. Portanto,

$$f_\mu(v - \beta(\mu)) = 3v\sqrt{\mu} + o(v), \quad (5.27)$$

quando $v \rightarrow 0$.

Por outro lado, tome x_0 tal que $\theta(x_0) = \min \theta = 1$. Então, como em torno de x_0 o comportamento assintótico das bolas geodésicas é tal qual o de bolas Euclidianas, temos

$$v(B_r(x_0)) = \frac{4}{3}\pi r^3 + o(r^3) \quad \text{e} \quad a(B_r(x_0)) = 4\pi r^2 + o(r^2),$$

quando $r \rightarrow 0$. Daí, resolvendo em r a primeira igualdade,

$$r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} + o(v^{\frac{1}{3}})$$

e substituindo na segunda, obtemos

$$I(v) \leq (36\pi)^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} + o(v^{\frac{2}{3}}),$$

onde acima utilizamos a definição de $I(v)$. Então,

$$F(v) \leq (6\sqrt{\pi})v + o(v). \quad (5.28)$$

Combinando as relações (5.25), (5.27) e (5.28) implicam que $3v\sqrt{\mu} \leq 6\sqrt{\pi}v$, que é um

absurdo para $\delta > 0$. Portanto, como normalizamos de modo que $\min \theta = 1$, temos que

$$\text{Vol}(\Sigma, \gamma) \leq \int_{\Sigma} \theta^{\alpha} = v(\Sigma) \leq 2\pi^2,$$

completando a prova do Teorema. □

5.4 Teorema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^5

O objetivo desta seção é demonstrar o Teorema de Bernstein Estável para imersões mínimas em \mathbb{R}^5 . Sejam $F : M^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ uma hipersuperfície mínima estável 2-lados, simplesmente conexa, completa e g a métrica induzida em M . Como antes, em $N = M \setminus F^{-1}(\{0\})$, seja $\tilde{g} = r^{-2}g$, onde t é a distância Euclidiana a origem 0.

Combinando os Teoremas 17, 19 e 20 (com reescalamiento apropriado da métrica da μ -bolha) temos o seguinte resultado:

Lema 19 (Lema 6.1, [18]). *Seja $X \subset N$ um subconjunto fechado com bordo $\partial X = \partial_+ X \sqcup \partial_- X$. Suponha que $d_{\tilde{g}}(\partial_+ X, \partial_- X) \geq 10\pi$. Então existe um subconjunto relativamente aberto, conexo $\Omega \subset X$ com bordo suave $\partial \Omega = \partial_- X \cup \Sigma$ tal que*

1. $\partial_- X \subset \Omega$;
2. $\Sigma \subset X \setminus \partial X$ é uma hipersuperfície fechada;
3. $\Omega \subset B_{10\pi}(\partial_- X)$, e
4. Qualquer componente conexa Σ_0 de Σ tem diâmetro intrínseco de no máximo 2π e volume de no máximo $16\pi^2$.

Teorema 21 (Teorema 6.2, [18]). *Qualquer imersão mínima estável 2-lados, simplesmente conexa, completa $M^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ satisfaz*

$$\mathcal{H}^4(B_{\rho}(x_0) \cap M) \leq 8\pi^2 e^{44\pi} \rho^4,$$

para todo $\rho > 0$ e $x_0 \in M$.

Demonstração. A menos de um movimento rígido, suponha $0 \in F(M)$ e $F(x_0) = 0$. Dado $\rho > 0$, pelo Lema 19 (com $X = N \setminus B_{\rho}(x_0)$), existe um subconjunto relativamente aberto $\tilde{\Omega} \subset N \setminus B_{\rho}(x_0)$ tal que

1. $\partial B_\rho(x_0) \subset \tilde{\Omega}$;
2. $\tilde{\Omega} \subset \tilde{B}_{10\pi}(\partial B_\rho(x_0))$, e
3. Qualquer componente conexa de $\partial\tilde{\Omega} \setminus \partial B_\rho(x_0)$ é suave com volume (na métrica \tilde{g}) de no máximo $16\pi^2$.

Agora, usando o Lema 1, vale que

$$\tilde{\Omega} \subset \{x \in M; d_M(x, \partial B_\rho(x_0)) < \rho e^{10\pi}\} \subset B_{\rho e^{11\pi}}(x_0).$$

Por isso, qualquer componente conexa de $\partial\tilde{\Omega} \setminus \partial B_\rho(x_0)$ tem g -volume (volume na métrica g) de no máximo $16\pi^2 e^{33\pi} \rho^3$. Como M é simplesmente conexa, pelo Teorema 5, M tem um único fim, logo existe um conjunto pré-compacto aberto Ω contendo $B_\rho(x_0) \cup \tilde{\Omega}$ que tem exatamente uma componente conexa, o qual é uma das componentes de $\partial\tilde{\Omega} \setminus \partial B_\rho(x_0)$. Pelo Teorema 6, temos que

$$\mathcal{H}^4(B_\rho(x_0) \subset M) \leq (128\pi^2)^{-\frac{1}{3}} (16\pi^2)^{\frac{4}{3}} e^{44\pi} \rho^4,$$

Como desejávamos. □

Corolário 7 (Teorema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^5). *Seja $M^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ uma imersão mínima estável, 2-lados, conexa, completa. Então M é planar.*

Demonstração. Pela Proposição 5, podemos assumir que M é simplesmente conexa. Então pelo Teorema 21, temos que M possui crescimento Euclidiano. Então pelo Teorema 1.37 podemos concluir que M é planar. □

Capítulo 6

Hipersuperfícies Mínimas Estáveis em \mathbb{R}^6

Por fim, dedicaremos este capítulo a apresentação da prova do Problema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^6 , dada por L. Mazet em [34]. Este é o último caso que foi resolvido até o momento da redação deste texto. Esta solução é uma adaptação do que foi feito no Capítulo 5 fazendo uso de uma generalização da curvatura Bi-Ricci, chamada curvatura α -Bi-Ricci (ver definição 1).

6.1 Limitante Inferior Espectral para a Curvatura Bi-Ricci

Esta seção dedica-se à adaptação das propriedades da curvatura α -Bi-Ricci para hipersuperfícies mínimas estáveis, similar ao que foi feito na seção 5.1. Mas antes disso, precisaremos da seguinte observação.

Observação 6. *Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica positiva definida e $B \in \mathbb{R}^n$. Então a função $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^\perp A X + B^\perp X \in \mathbb{R}$ é limitada por baixo e seu mínimo é dado por $-\frac{1}{4}B^\perp A^{-1}B$.*

Seja $F : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima 2-lados, completa e g sua métrica induzida. Considere a métrica conforme de Gulliver-Lawson $\tilde{g} = r^{-2}g$ onde r é a função distância Euclidiana à origem 0. Note que se $F(p)=0$, \tilde{g} não está definida. Como antes, considere $N := M \setminus F^{-1}(0)$. Como sabemos, a métrica (\tilde{N}, \tilde{g}) é completa.

Denote por ν o normal unitário de M e por $|\mathrm{d}r|$ a norma da diferencial de r ao longo de M com respeito a métrica g . Seja $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma base ortonormal para a métrica g , logo $\tilde{e}_i := re_i$ é uma base ortonormal para \tilde{g} . Pela Proposição 2 as curvaturas seccionais de g e \tilde{g} são relacionadas por

$$\tilde{R}_{ijji} = r^2 R_{ijji} + 2 - |\mathrm{d}r|^2 - \mathrm{d}r(e_j)^2 - \langle p, \nu \rangle (A_{ii} + A_{jj}). \quad (6.1)$$

Munidos deste resultado, vale a

Proposição 26 (Proposição 3.1, [34]). *Vale que*

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{bi-Ric}}_\alpha(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) &= r^2 \text{bi-Ric}_\alpha(e_1, e_2) + 2(n-1 + \alpha(n-2)) - (n + \alpha(n-1))|\mathrm{d}r|^2 \\ &\quad - ((n-2 - \alpha)\mathrm{d}r(e_1)^2 + \alpha(n-3)\mathrm{d}r(e_2)^2) \\ &\quad - \langle p, \nu \rangle ((n-2 - \alpha)A_{11} + \alpha(n-3)A_{22}). \end{aligned}$$

Demonstração. Similar à Proposição 16, assumindo 6.1 e usando que $\mathrm{tr}(A) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{bi-Ric}}_\alpha(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) &= \sum_{i=2}^n \tilde{R}_{1i i 1} + \alpha \sum_{j=3}^n \tilde{R}_{2j j 2} \\ &= \sum_{i=2}^n r^2 R_{1i i 1} + 2 - |\mathrm{d}r|^2 - \mathrm{d}r(e_1)^2 - \mathrm{d}r(e_i)^2 - \langle p, \nu \rangle (A_{11} + A_{ii}) \\ &\quad + \sum_{j=3}^n (R_{2j j 2} + 2 - |\mathrm{d}r|^2 - \mathrm{d}r(e_2)^2 - \mathrm{d}r(e_j)^2 - \langle p, \nu \rangle (A_{22} + A_{jj})) \\ &= \sum_{i=2}^n r^2 R_{1i i 1} + \alpha \sum_{j=3}^n r^2 R_{2j j 2} + 2(n-1) + 2\alpha(n-2) - |\mathrm{d}r|^2(n-1) \\ &\quad - \alpha|\mathrm{d}r|^2(n-2) - \sum_{i=2}^n \mathrm{d}r(e_i)^2 - \sum_{j=3}^n \alpha \mathrm{d}r(e_j)^2 - \mathrm{d}r(e_1)^2(n-1) \\ &\quad - \alpha \mathrm{d}r(e_2)^2(n-2) - \langle p, \nu \rangle \sum_{i=2}^n A_{ii} - \alpha \langle p, \nu \rangle \sum_{j=3}^n A_{jj} \\ &\quad - \langle p, r \rangle A_{11}(n-1) - \alpha \langle p, \nu \rangle A_{22}(n-2) \\ &= \text{bi-Ric}_\alpha(e_1, e_2) + 2(n-1 + \alpha(n-2)) - (n + \alpha(n-1))|\mathrm{d}r|^2 \\ &\quad ((n-2 - \alpha)\mathrm{d}r(e_1)^2 + \alpha(n-3)\mathrm{d}r(e_2)^2) \\ &\quad - \langle p, \nu \rangle ((n-2 - \alpha)S_{11} + \alpha(n-3)A_{22}). \end{aligned}$$

□

Proposição 27 (Proposição 3.2, [34]). *Vale que*

$$bi-Ric_{\alpha}(e_1, e_2) = - \sum_{i=1}^n A_{1i}^2 - \alpha \sum_{j=2}^n A_{2j}^2 - \alpha A_{11} A_{22}.$$

Demonstração. Aplicando a equação de Gauss, de forma análoga à Proposição 17, vale que

$$\begin{aligned} bi-Ric_{\alpha}(e_1, e_2) &= \sum_{i=2}^n R_{1i1i} + \alpha \sum_{j=3}^n R_{2jj2} = \sum_{i=2}^n (A_{11}A_{ii} - A_{1i}^2) \alpha \sum_{j=3}^n (A_{22}A_{jj} - A_{2j}^2) \\ &= - \sum_{i=2}^n A_{1i}^2 + A_{11} \sum_{i=2}^n A_{ii} + \alpha A_{22} \sum_{j=3}^n A_{jj} - \alpha \sum_{j=3}^n A_{2j}^2 \\ &= - \sum_{i=2}^n A_{1i}^2 - A_{11}^2 - \alpha (A_{11}A_{22} + A_{22}^2) \alpha \sum_{j=3}^n A_{2j}^2 + (A_{11} + A_{22})\text{tr}(A). \end{aligned}$$

O resultado segue do fato que $\text{tr}(A) = 0$.

□

Proposição 28 (Proposição 3.3, [34]). *Seja $\alpha, \alpha > 0$ tal que $\alpha > \frac{1}{2}, 2\alpha \leq \alpha$ e*

$$W := \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \left(\alpha - \frac{n-2}{2n} (1 + 2\alpha) \right) - \frac{n-2}{2n} (1 - \alpha)^2 > 0.$$

Definamos

$$f := \frac{(n-2)^2}{8W} \left(\frac{n-2}{n} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \alpha \frac{n-4}{n-2} \right)^2 + (1 - \alpha)^2 \left(\alpha + \frac{n-2}{2n} - \frac{2}{n} \alpha \right) \right).$$

Então

$$\alpha r^2 |A|^2 + f (1 - |dr|^2) \leq -r^2 bi-Ric_{\alpha}(e_1, e_2) + \langle p, \nu \rangle ((n-2 - \alpha)A_{11} + \alpha(n-3)A_{22}).$$

Demonstração. Vale que

$$\begin{aligned}
 & -r^2 \text{bi-Ric}_\alpha(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle ((n-2-\alpha)\mathcal{A}_{11} + \alpha(n-3)\mathcal{A}_{22}) \\
 = & r^2 \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{A}_{1i}^2 + \alpha \sum_{j=2}^n \mathcal{A}_{2j}^2 + \alpha \mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{22} + \langle r^{-2}\mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle ((n-2-\alpha)\mathcal{A}_{11} + \alpha(n-3)\mathcal{A}_{22}) \right) \\
 = & r^2 \left(\mathcal{A}_{11}^2 + \alpha \mathcal{A}_{22}^2 + \alpha \mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{22} + \sum_{i=2}^n \mathcal{A}_{1i}^2 + \alpha \sum_{j=3}^n \mathcal{A}_{2j}^2 \right) \\
 & + r^2 \left(\left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle ((n-2-\alpha)\mathcal{A}_{11} + \alpha(n-3)\mathcal{A}_{22}) \right) \tag{6.2}
 \end{aligned}$$

A afirmação $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0$ implica que o vetor $\mathbf{A}_\Delta := (\mathbf{A}_{11}, \dots, \mathbf{A}_{nn})$ pertença ao subespaço $F_n := \{\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

Observe que os vetores $(n-2, n-2, -2, \dots, -2)$ e $(1, -1, 0, \dots, 0)$ são L.I. e estão em F_n , então é possível encontrar uma base ortonormal $\{\mathbf{E}_i\}_{1 \leq i \leq n-3}$ de F_{n-3} (por meio do processo de ortonormalização) de modo que $\{\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_{n-3}, (n-2, n-2, -2, \dots, -2), (1, -1, 0, \dots, 0)\}$ seja uma base de F_n . Então podemos escrever

$$\mathbf{A}_\Delta = \sum_{i=1}^{n-3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{E}_i \end{bmatrix} x_i + \frac{1}{\sqrt{2n(n-2)}} \begin{bmatrix} n-2 \\ n-2 \\ -2 \\ \vdots \\ -2 \end{bmatrix} z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} z_2.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{A}_{11}^2 + \alpha \mathcal{A}_{22}^2 + \alpha \mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{22} + \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle ((n-2-\alpha)\mathcal{A}_{11} + \alpha(n-3)\mathcal{A}_{22}) \\
 = & \left(\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{2n}} z_1 + \frac{z_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{2n}} z_1 - \frac{z_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \alpha \left(\frac{n-2}{2n} z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 \right) \\
 + & \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle \left((n-2-\alpha) \left(\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{2n}} z_1 + \frac{z_2}{\sqrt{2}} \right) \alpha(n-3) \left(\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{2n}} z_1 - \frac{z_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \\
 = & \left(\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{2n}} z_1 + \frac{z_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{2n}} z_1 - \frac{z_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \alpha \left(\frac{n-2}{2n} z_1^2 - \frac{z_2^2}{2} \right) \\
 & + \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle \left(\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{2n}} (n-2 + \alpha(n-4)) z_1 + \frac{n-2}{\sqrt{2}} (1-\alpha) z_2 \right).
 \end{aligned}$$

Reorganizando,

$$\begin{aligned}
 & A_{11}^2 + \alpha A_{22}^2 + \alpha A_{11}A_{22} + \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle ((n-2-\alpha)A_{11} + \alpha(n-3)A_{22}) \\
 &= \frac{n-2}{2n}z_1^2 + \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}z_1z_2 + \frac{z_2^2}{2} + \alpha \frac{n-2}{2n}z_1^2 - \alpha \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}z_1z_2 + \frac{\alpha}{2}z_2^2 + \alpha \frac{n-2}{2n}z_1^2 \\
 &\quad - \frac{\alpha}{2}z_2^2 + \frac{n-2}{\sqrt{2}} \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle \left(\sqrt{\frac{n-2}{n}} \left(1 + \alpha \frac{n-4}{n-2} \right) z_1 + (1-\alpha)z_2 \right) \\
 &\quad = \frac{n-2}{2n}(1+2\alpha)z_1^2 + \sqrt{\frac{n-2}{n}}(1-\alpha)z_1z_2 + \frac{1}{2}z_2^2 \\
 &\quad + \frac{n-2}{\sqrt{2}} \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle \left(\sqrt{\frac{n-2}{n}} \left(1 + \alpha \frac{n-4}{n-2} \right) z_1 + (1-\alpha)z_2 \right). \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

Agora, para $\alpha > 0$, estamos interessados no mínimo (se existir) de

$$\begin{aligned}
 & \alpha(z_1^2 + z_2^2) - \frac{n-2}{2n}(1+2\alpha)z_1^2 - \sqrt{\frac{n-2}{n}}(1-\alpha)z_1z_2 - \frac{1}{2}z_2^2 \\
 & + \frac{n-2}{\sqrt{2}} \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle \left(\sqrt{\frac{n-2}{n}} \left(1 + \alpha \frac{n-4}{n-2} \right) z_1 + (1-\alpha)z_2 \right).
 \end{aligned}$$

A expressão acima é uma forma quadrática, cuja matriz é

$$\begin{pmatrix} \alpha - \frac{n-2}{2n}(1+2\alpha) & -\sqrt{\frac{n-2}{4n}}(1-\alpha) \\ -\sqrt{\frac{n-2}{4n}}(1-\alpha) & \alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Observe que todas as entradas da matriz acima são positivas, e portanto a matriz acima é positiva definida, se $\alpha > \frac{1}{2}$ e seu determinante é $W > 0$, por hipótese.

Se este for o caso, pela observação 6 com o vetor $\mathbf{B} = -\frac{n-2}{\sqrt{2}} \langle r^{-2}\mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle \left(\sqrt{\frac{n-2}{n}} \left(1 + \alpha \frac{n-4}{n-2} \right), 1 - \alpha \right)$, a quantidade em (6.1) é limitada inferiormente por

$$\begin{aligned}
 & - \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle \frac{(n-2)^2}{8W} \left(\frac{n-2}{n} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \alpha \frac{n-4}{n-2} \right)^2 + \frac{n-2}{n} (1-\alpha)^2 \left(1 + \alpha \frac{n-4}{n-2} \right) \right) \\
 & \quad - \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle \frac{(n-2)^2}{8W} \left(\left(\alpha - \frac{n-2}{2n}(1+2\alpha) \right) (1-\alpha)^2 \right) \\
 &= - \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle \frac{(n-2)^2}{8W} \left(\frac{n-2}{n} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \alpha \frac{n-4}{n-2} \right)^2 + (1-\alpha)^2 \left(\alpha + \frac{n-2}{2n} - \frac{2}{n}\alpha \right) \right) \\
 & \quad = - \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle^2 f.
 \end{aligned}$$

Como $\langle r^{-2}\mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle = (1 - |\mathbf{dr}|^2)$, provamos que

$$\begin{aligned} & \alpha(z_1^2 + z_2^2) - \frac{n-2}{2n}(1+2\alpha)z_1^2 - \sqrt{\frac{n-2}{n}}(1-\alpha)z_1z_2 - \frac{1}{2}z_2^2 \\ & - \frac{n-2}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{n-2}{n}} \left(1 + \alpha \frac{n-4}{n-2} \right) z_1 + (1-\alpha)z_2 \right) \leq -(1-|\mathbf{dr}|^2)f, \end{aligned}$$

multiplicando por -1 e reorganizando,

$$\begin{aligned} \alpha(z_1^2 + z_2^2) + \frac{f}{r^2}(1-|\mathbf{dr}|^2) & \leq \frac{n-2}{2n}(1+2\alpha)z_1^2 + \sqrt{\frac{n-2}{n}}(1-\alpha)z_1z_2 + \frac{1}{2}z_2^2 \\ & + \frac{n-2}{\sqrt{2}} \langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \rangle \left(\sqrt{\frac{n-2}{n}} \left(1 + \alpha \frac{n-4}{n-2} \right) z_1 + (1-\alpha)z_2 \right). \end{aligned}$$

Combinando isto com (6.1) e (6.1), se $2\alpha > \alpha$, vale que

$$\begin{aligned} \alpha|\mathbf{A}|^2 + \frac{f}{r^2}(1-|\mathbf{dr}|^2) & \leq \alpha \left(|\mathbf{A}_\Delta|^2 + \sum_{i \neq j} \mathbf{A}_{ij}^2 \right) + \frac{f}{r^2}(1-|\mathbf{dr}|^2) \\ & \leq \mathbf{A}_{11}^2 + \alpha \mathbf{A}_{22}^2 + \alpha \mathbf{A}_{22} + \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle ((n-2\alpha)\mathbf{A}_{11} + \alpha(n-3)\mathbf{A}_{22}) \\ & \quad + \alpha \sum_{i \neq j} \mathbf{A}_{ij}^2 \\ & \leq \mathbf{A}_{11}^2 + \alpha \mathbf{A}_{22}^2 + \alpha \mathbf{A}_{11} \mathbf{A}_{22} + \sum_{i=2}^n \mathbf{A}_{1i}^2 + \alpha \sum_{j=3}^n \mathbf{A}_{2j}^2 \\ & \quad + \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle ((n-2-\alpha)\mathbf{A}_{11} + \alpha(n-3)\mathbf{A}_{22}) \\ & \leq -\text{bi-Ric}_\alpha(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{v} \right\rangle ((n-2-\alpha)\mathbf{A}_{11} + \alpha(n-3)\mathbf{A}_{22}), \end{aligned}$$

como desejado. □

Teorema 22 (Teorema 3.1, [34]). *Seja $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima estável, 2-lados. Suponha $n = 5$ e considere $\alpha = \frac{11}{10}$, $\alpha = \frac{40}{43}$ e $\delta = \frac{3}{10}$. Então existe uma função suave V tal que*

$$V \geq \delta - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}_\alpha}$$

e

$$\int_N |\nabla \varphi|_{\tilde{g}}^2 \, dv_{\tilde{g}} \geq \int_N \frac{1}{\alpha} V \varphi^2 \, dv_{\tilde{g}}, \tag{6.4}$$

para qualquer $\varphi \in C_c^1(N)$.

Demonstração. Suponha que a base é escolhida de tal modo que $\tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}_\alpha} = \widetilde{\text{bi-Ric}_\alpha}(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$.

Por (6.1), sabemos que

$$\int_{\mathbf{N}} |\nabla \varphi|^2 \, dv_{\tilde{g}} \geq \int_{\mathbf{N}} \left(r^2 |\mathbf{A}|^2 - \frac{n(n-2)}{2} + \frac{n^2-4}{4} |\mathbf{dr}|^2 \right) \varphi^2 \, dv_{\tilde{g}}, \quad (6.5)$$

para qualquer $\varphi \in C_c^1(\mathbf{N})$. Sob as hipóteses da Proposição 28, $\alpha \geq 1$ (tal que $n-2-\alpha \leq \alpha(n-3)$), vale que

$$\begin{aligned} & \alpha \left(r^2 |\mathbf{A}|^2 - \frac{n(n-2)}{2} + \frac{n^2+4}{4} |\mathbf{dr}|^2 \right) \\ & \geq -r^2 \text{bi-Ric}_\alpha(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle ((n-2\alpha)\mathbf{A}_{11} + \alpha(n-3)\mathbf{A}_{22}) - f(1-|\mathbf{dr}|^2) \\ & \quad - \alpha \frac{n(n-2)}{2} + \alpha \frac{n^2-4}{4} |\mathbf{dr}|^2. \end{aligned}$$

Usando a Proposição 26, obtemos que

$$\begin{aligned} & \alpha \left(r^2 |\mathbf{A}|^2 - \frac{n(n-2)}{2} + \frac{n^2+4}{4} |\mathbf{dr}|^2 \right) \\ & \geq -\widetilde{\text{bi-Ric}}_\alpha(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2) + 2(n-1+\alpha(n-2)) - (n+\alpha(n-1))|\mathbf{dr}|^2 \\ & - ((n-2-\alpha)\mathbf{dr}(\mathbf{e}_1)^2 + \alpha(n-3)\mathbf{dr}(\mathbf{e}_2)^2) - f(1-|\mathbf{dr}|^2) - \alpha \left(\frac{n(n-2)}{2} + \alpha \frac{n^2+4}{4} |\mathbf{dr}|^2 \right) \\ & \geq C(|\mathbf{dr}|^2) - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}_\alpha}, \end{aligned}$$

onde

$$C(t) := 2(n-1+\alpha(n-2)) - (2n-2+\alpha(n-2))t - f(1-t) + \alpha \left(\frac{n^2-4}{4} - \frac{n(n-2)}{2} \right),$$

observe que C é uma função afim, portanto $0 \leq |\mathbf{dr}|^2 \leq 1$ implica que $C(|\mathbf{dr}|^2) \geq \min\{C(0), C(1)\}$. Mas,

$$C(0) = 2(n-1+\alpha(n-2)) - f - \alpha \frac{n(n-2)}{2},$$

e

$$\begin{aligned} C(1) &= 2(n-1+\alpha(n-2)) - (2n-2+\alpha(n-2)) - \alpha \frac{n(n-2)}{2} + \alpha \frac{n^2-4}{4} \\ &= \alpha(n-2) - \alpha \frac{(n-2)^2}{4} = (n-2) \left(\alpha - \alpha \frac{n-2}{4} \right). \end{aligned}$$

Se considerarmos $\mathbf{a} = \frac{11}{10}$ e $\alpha = \frac{40}{43}$, temos que $\mathbf{a} > \frac{1}{2}$, $2\mathbf{a} \geq \alpha$, $\alpha \leq 1$ e $W = \frac{26697}{184900} > 0$.
Usando estes valores, obtemos que

$$C(0) = \frac{731975}{1530628} \simeq 0.47, \quad C(1) = \frac{543}{1730} \simeq 0.31.$$

Então, escolhendo $\delta = \frac{3}{10} \leq \min\{C(0), C(1)\}$, temos

$$V = \mathbf{a} \left(r^2 |A|^2 - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{2} + \frac{\mathbf{n}^2 + 4}{4} |dr|^2 \right) \geq \delta - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}_\alpha}.$$

Pela estimativa (6.5), temos que (6.4) é verdadeiro, como queríamos. \square

6.2 Construção de μ -bolha

Considere $(\mathbb{N}^n, \tilde{g})$ com a métrica \tilde{g} Lawson-Gulliver. Como estabelecido na seção anterior, existe uma função suave \tilde{V} em N tal que

$$\tilde{V} \geq \delta - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}_\alpha}$$

e

$$\int_{\mathbb{N}} |\tilde{\nabla} \varphi|_{\tilde{g}}^2 d\tilde{\mu} \geq \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{\mathbf{a}} \tilde{V} \varphi^2 d\tilde{\mu}, \quad (6.6)$$

para toda $\varphi \in C_c^1(\mathbb{N})$. Queremos estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 23 (Teorema 4.1, [34]). *Assuma que (\mathbb{N}, \tilde{g}) com $\mathbf{n} = 5$, $\mathbf{a} = \frac{11}{10}$, $\alpha = \frac{40}{43}$ e $\delta = \frac{3}{10}$. Seja Ω_0 um domínio em \mathbb{N} tal que $\mathbb{N} \setminus \mathbb{B}_{10\pi}(\Omega_0) \neq \emptyset$. Então existe um domínio Ω_* tal que*

(a) $\Omega_0 \subset \Omega_* \subset \mathbb{B}_{10\pi}(\Omega_0)$ e

(b) Existe uma função suave V em $\Sigma = \partial\Omega_*$ tal que

$$V \geq \frac{\delta}{2} - \alpha \lambda^\Sigma$$

e

$$\frac{4}{4-\mathbf{a}} \int_{\Sigma} |\nabla_\Sigma f|^2 d\mu \geq \int_{\Sigma} V f^2 d\mu, \quad (6.7)$$

para qualquer $f \in C^1(\Sigma)$ onde $d\mu$ é a forma volume induzida por g .

Repetindo o argumento da Seção 5.2, precisamos construir uma μ -bolha. Seja Ω_1 um domínio em \mathbb{N} tal que $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \subset B_{100\pi}(\Omega_0)$. Seja $h : \Omega_1 \setminus \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $\lim_{p \rightarrow \partial\Omega_0} h(p) = +\infty$ e $\lim_{p \rightarrow \partial\Omega_1} h(p) = -\infty$. Escolha um domínio Γ com $\Omega_0 \Subset \Gamma \Subset \Omega_1$.

Defina

$$\mathcal{A}(\Omega) = \int_{\partial^*\Omega} w^\alpha - \int_{\mathbb{N}} (\chi_\Omega - \chi_\Gamma) h w^\alpha,$$

sob conjuntos de perímetro finito Ω tais que $\Omega_0 \Subset \Omega \Subset \Omega_1$. Pela Proposição 11, existe um minimizante Ω para \mathcal{A} . Defina $\Sigma := \partial\Omega$.

Como feito no Capítulo 5, a desigualdade (6.6) equivale a existência de uma função positiva w em \mathbb{N} tal que

$$-\alpha \tilde{\Delta} w = \tilde{V} w \geq (\delta - \tilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}_\alpha}) w. \quad (6.8)$$

Denote por $k = n-1$ a dimensão de Σ e por ν o normal unitário exterior a Σ . Repetindo o processo do capítulo anterior, considere Ω_0 um domínio em \mathbb{N} tal que $\Omega_+ \Subset \Omega_-$ podemos calcular a primeira variação de área:

Se $V_t := \frac{\partial F_t}{\partial t}$, com $V_0 = f\nu$, então como já visto anteriormente,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(\Omega_t) = \int_{\partial^*\Omega_t} \langle \nabla_{\partial^*\Omega_t} (w^\alpha), V_t^\perp \rangle + \text{div}_{\partial\Omega_t} (w^\alpha V_t^T) + (H_t - h) w^\alpha \langle \nu_t, V_t \rangle d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{A}(\Omega_t) &= \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma, \nu \rangle \alpha w^{\alpha-1} f + (H - h) w^\alpha f d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_\Sigma (\alpha \partial_t \log w + H - h) w^\alpha f d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Se Ω é uma μ -bolha, deve-se ter que

$$H = h - \alpha \partial_t \log w. \quad (6.9)$$

Então, se Ω é uma μ -bolha, por cálculos análogos ao que foi feito no Lema 17, vale que

$$0 \leq \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \mathcal{A}(\Omega_t) = \int_{\Sigma} w^\alpha \left(-f \Delta_{\Sigma} f - \left(|A_{\Sigma}|^2 + \widetilde{\text{Ric}}(\nu, \nu) \right) f^2 - \alpha w^{-2} \langle \nabla_{\Sigma} w, \nu \rangle^2 f^2 \right) + \int -\Sigma \alpha w^{-1} \widetilde{D}^2 w(\nu, \nu) f^2 - \alpha w^{-1} \langle \widetilde{\nabla} w, \nabla f \rangle f - \partial_{\nu} h f^2.$$

Usando que $\text{div}(w^\alpha f \nabla f) = \alpha w^{\alpha-1} f \langle \nabla w, \nabla f \rangle + w^\alpha |\nabla f|^2 + w^\alpha f \Delta f$ na desigualdade acima, obtemos que

$$0 \leq \int_{\Sigma} -\text{div}(w^\alpha f \nabla f) + w^\alpha \left(|\nabla f|^2 - \left(|A_{\Sigma}|^2 + \widetilde{\text{Ric}}(\nu, \nu) \right) f^2 - \alpha w^{-2} \langle \nabla w, \nu \rangle^2 f^2 \right) + \int_{\Sigma} \alpha w^{\alpha-1} \widetilde{D}^2 w(\nu, \nu) f^2 - \langle \nabla h, \nu \rangle f^2.$$

Agora, usando que $\widetilde{D}^2 w(\nu, \nu) = \widetilde{\Delta} w - \Delta w - H \langle \nabla w, \nu \rangle$, obtemos que

$$0 \leq \int_{\Sigma} w^\alpha \left(|\nabla f|^2 - \left(|A_{\Sigma}|^2 + \widetilde{\text{Ric}}(\nu, \nu) \right) f^2 - \alpha w^{-2} \langle \nabla w, \nu \rangle^2 f^2 \right) + \int_{\Sigma} \alpha w^{-1} \left(\widetilde{\Delta} w - \Delta w - H \langle \nabla w, \nu \rangle \right) f^2 - f^2 \partial_{\nu} h. \quad (6.10)$$

Para $f = w^{-\frac{\alpha}{2}} g$, temos que $\nabla f = w^{-\frac{\alpha}{2}} \nabla g - \frac{\alpha}{2} w^{-\frac{\alpha}{2}-1} f \nabla w$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} w^\alpha (|\nabla f|^2 - \alpha w^{-1} \Delta w f^2) &= \int_{\Sigma} w^\alpha (\langle \nabla f, \nabla f \rangle - \alpha w^{-1} \Delta w f^2) \\ &= \int_{\Sigma} w^\alpha \left(w^{-\alpha} |\nabla g|^2 - \alpha g w^{-\alpha-1} \langle \nabla g, \nabla w \rangle + \frac{\alpha^2}{4} w^{-\alpha-2} g^2 |\nabla w|^2 \right) \\ &\quad - \int_{\Sigma} \alpha w^{\alpha-1} f^2 \Delta w \\ &= \int_{\Sigma} |\nabla g|^2 - \alpha w^{-1} g \langle \nabla g, \nabla w \rangle + \frac{\alpha^2}{4} w^{-2} g^2 |\nabla w|^2 - \alpha w^{-1} g^2 \Delta w. \end{aligned}$$

Usando as propriedades do divergente, $\text{div}(g^2 w^{-1} \nabla w) = 2g w^{-1} \langle \nabla g, \nabla w \rangle - g^2 w^{-2} |\nabla w|^2 + g^2 w^{-1} \Delta w$, logo

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} w^\alpha (|\nabla f|^2 - \alpha w^{-1} f^2 \Delta w) &= \int_{\Sigma} |\nabla g|^2 - \alpha \text{div}(g^2 w^{-1} \nabla w) + \alpha w^{-1} g \langle \nabla w, \nabla g \rangle \\ &\quad - \int_{\Sigma} \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{4} \right) g^2 w^{-2} |\nabla w|^2 \\ &= \int_{\Sigma} |\nabla g|^2 - \alpha w^{-1} g \langle \nabla w, \nabla g \rangle - \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{4} \right) g^2 w^{-2} |\nabla w|^2. \end{aligned}$$

Agora, pela Desigualdade de Young com $\epsilon > 0$,

$$w^{-1}g\langle \nabla w, \nabla g \rangle \leq |\nabla w|w^{-1}g|\nabla g| \leq \epsilon|\nabla g|^2 + \frac{1}{4\epsilon}w^{-2}g^2|\nabla g|^2.$$

Então, escolhendo $\epsilon = \frac{1}{4-a}$,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} w^a (|\nabla f|^2 - aw^{-1}f^2\Delta w) &\leq \int_{\Sigma} |\nabla g|^2 + \frac{1}{4-a}|\nabla w|^2 + \frac{4-a}{4}w^{-2}g^2|\nabla g|^2 \\ &\quad - \int_{\Sigma} \left(a - \frac{a^2}{4}\right) g^2 w^{-2} |\nabla g|^2 \\ &= \frac{4}{4-a} \int_{\Sigma} |\nabla g|^2. \end{aligned}$$

Por (6.10), obtemos que

$$\begin{aligned} &\frac{4}{4-a} \int_{\Sigma} |\nabla g|^2 \geq \int_{\Sigma} w^a (|\nabla f|^2 - aw^{-1}f^2\Delta w) \\ &\geq \int_{\Sigma} w^a \left((|A_{\Sigma}|^2 + \widetilde{\text{Ric}}(\nu, \nu)) + aw^{-2}\langle \nabla w, \nu \rangle^2 - aw^{-1}(\widetilde{\Delta}w - H\langle \nabla w, \nu \rangle) - \partial_{\nu}h \right) f^2 \\ &= \int_{\Sigma} \left(|A_{\Sigma}|^2 + \widetilde{\text{Ric}}(\nu, \nu) + aw^{-2}\langle \nabla w, \nu \rangle^2 - aw^{-1}(\widetilde{\Delta}w - H\partial_{\nu}w) - \partial_{\nu}h \right) g^2. \end{aligned}$$

Agora por (6.8),

$$\begin{aligned} &\frac{4}{4-a} \int_{\Sigma} |\nabla g|^2 \geq \int_{\Sigma} w^a (|\nabla f|^2 - aw^{-1}f^2\Delta w) \\ &\geq \int_{\Sigma} \left(|A_{\Sigma}|^2 + \widetilde{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \delta - \widetilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}_{\alpha}} + aw^{-2}(\partial_{\nu}w)^2 + aH\partial_{\nu}(\log w) + a\partial_{\nu}h \right) g^2. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de Σ . Usando a equação de Gauss,

$$\begin{aligned} \alpha \text{Ric}_{\Sigma}(e_1, e_2) &= \alpha \sum_{j=2}^k R_{1jj1}^{\Sigma} = \alpha \sum_{j=2}^k \left(\widetilde{R}_{1jj1} + B_{11}B_{jj} - B_{1j}^2 \right) \\ &= \widetilde{\text{Ric}}_{\alpha}(\nu, e_1) - \widetilde{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \alpha \sum_{j=2}^k (B_{11}B_{jj} - B_{1j}^2). \end{aligned}$$

Escolha o referencial de tal modo que $\text{Ric}_{\Sigma}(e_1, e_2) = \lambda_{\text{Ric}}^{\Sigma}$, temos

$$\widetilde{\text{Ric}}(\nu, \nu) - \widetilde{\lambda}_{\text{bi-Ric}_{\alpha}} \geq \widetilde{\text{Ric}}(\nu, \nu) - \widetilde{\text{bi-Ric}}_{\alpha}(\nu, e_1) = -\alpha\lambda_{\text{Ric}}^{\Sigma} + \alpha \sum_{j=2}^k (A_{11}A_{jj} - A_{1j}^2).$$

Usando esta desigualdade em (6.2) e que $\text{tr}(\mathbf{A}) = H$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{4}{4-\alpha} \int_{\Sigma} |\nabla g|^2 &\geq \int_{\Sigma} g^2 \left((\lambda_{\text{Ric}}^{\Sigma})^2 - \alpha \lambda_{\text{Ric}}^{\Sigma} + \alpha \sum_{j=2}^k (A_{11} A_{jj} - A_{1j}^2) + \delta + \alpha w^{-2} \langle \nabla w, \nu \rangle^2 \right) \\ &\quad + \int_{\Sigma} g (\alpha H \partial_{\nu} \log w + \alpha \langle \nabla h, \nu \rangle) \\ &= \int_{\Sigma} g^2 \left(\delta - \alpha \lambda_{\text{Ric}}^{\Sigma} + |A_{\Sigma}|^2 + \alpha H A_{11} - \alpha \sum_{j=1}^k A_{1j}^2 + \alpha (\partial_{\nu} \log w)^2 \right) \\ &\quad + \int_{\Sigma} g^2 (\alpha H_{\Sigma} \partial_{\nu} \log w + \alpha \langle \nabla h, \nu \rangle). \end{aligned}$$

Agora, usando (6.9), temos que

$$\begin{aligned} Q &:= |A_{\Sigma}|^2 + \alpha H_{\Sigma} A_{11}^{\Sigma} - \alpha \sum_{j=1}^k (A_{1j}^{\Sigma})^2 + \alpha (\partial_{\nu} \log w)^2 + \alpha H \partial_{\nu} \log w \\ &= |A_{\Sigma}|^2 + \alpha H_{\Sigma} A_{11}^{\Sigma} - \alpha \sum_{j=1}^k (A_{1j}^{\Sigma})^2 + \frac{1}{\alpha} (H - h)^2 + H(h - H). \end{aligned}$$

Denote por Φ a parte sem traço de A_{Σ} e seja $\Phi_{\Delta} := (\Phi_{11}, \dots, \Phi_{kk}) \in F_k$. Então, para $\alpha \leq 2$, temos

$$Q \geq \frac{1}{k} H^2 + |\Phi_{\Delta}|^2 + \frac{\alpha}{k} H^2 + \alpha H \Phi_{11} - \alpha \left(\frac{1}{k} H + \Phi_{11} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} (H - h)^2 + H(h - H).$$

Novamente, podemos escrever uma decomposição de Φ_{Δ} em uma base ortonormal de F_k

$$\Phi_{\Delta} = \sum_{i=1}^{k-2} \begin{pmatrix} 0 \\ E_i \end{pmatrix} x_i + \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} \begin{pmatrix} k-1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} z,$$

onde $\{E_i\}_{1 \leq i \leq k-2}$ é uma base ortonormal de F_{k-1} . Então temos que

$$\begin{aligned}
 Q &\geq \frac{1}{k}H^2 + |\Phi_\Delta|^2 + \frac{\alpha}{K}H^2 + \alpha H \sqrt{\frac{k-1}{k}}z - \alpha \left(\frac{1}{K}H + \sqrt{\frac{k-1}{k}}z \right)^2 + \frac{1}{a}(H-h)^2 \\
 &\quad + H(h-H) \\
 &\geq \left(\frac{1}{k} + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k^2} + \frac{1}{a} - 1 \right) H^2 + \left(1 - \alpha \frac{k-1}{k} \right) z^2 + \frac{1}{a}h^2 + \alpha \sqrt{\frac{k-1}{k}} \left(1 - \frac{2}{k} \right) Hz \\
 &\quad + \left(1 - \frac{2}{a} \right) Hh.
 \end{aligned}$$

Observe que a expressão à direita é uma forma quadrática em (H, z, h) , cuja matriz associada é

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k^2} + \frac{1}{a} - 1 & \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k}} \left(1 - \frac{2}{k} \right) & \frac{1}{2} - \frac{1}{a} \\ \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k}} \left(1 - \frac{2}{k} \right) & 1 - \alpha \frac{k-1}{k} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix},$$

que é positiva definida se $1 - \alpha \frac{k-1}{k} > 0$ e $\det(G) > 0$. Para $k = 4$, $a = \frac{11}{10}$, $\alpha = \frac{40}{43}$, temos que

$$1 - \alpha \frac{k-1}{k} = \frac{13}{43} > 0$$

e

$$\det \left(G - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{22} \end{pmatrix} \right) \simeq \det \begin{pmatrix} 0,33 & 0,20 & -0,40 \\ 0,20 & 0,30 & 0 \\ -40 & 0,20 & 0,86 \end{pmatrix} \simeq 0,0001 > 0.$$

Então $k \geq \frac{1}{22}h^2$. Finalmente, com estes valores, temos que

$$\frac{4}{4-a} \int_\Sigma |\nabla_\Sigma g|^2 \geq \int_\Sigma g^2 \left(\frac{\delta}{2} - \alpha \lambda^\Sigma \right) + g^2 \left(\frac{\delta}{2} + \frac{1}{22}h^2 + \alpha \partial_\nu h \right).$$

Podemos finalmente provar o teorema principal da seção.

Demonstração do Teorema 23. Precisamos escolher um domínio Ω_1 e a função h . Seja $\tilde{d} : N \setminus \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma suavização da função distância ao bordo $d_{\tilde{g}}(\cdot, \partial\Omega_0)$ tal que

$$\frac{1}{2}d_{\tilde{g}} \leq \tilde{d} \leq 2d_{\tilde{g}} \quad \text{e} \quad |\tilde{\nabla} \tilde{d}|_{\tilde{g}} \leq 2.$$

Seja $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente para que $(1 + \epsilon)11\pi\sqrt{\frac{88}{15}}$ seja um valor regular de \tilde{d} . Defina $\Omega_1 = \Omega_0 \cup \{\tilde{d} \leq (1 + \epsilon)11\pi\sqrt{\frac{88}{15}}\}$. Então, em Ω_1 , $d_{\tilde{g}} \leq 2(1 + \epsilon)11\pi\sqrt{\frac{88}{15}} \leq 100\pi$, portanto $\Omega_1 \subset \bar{B}_{100\pi}(\Omega_0)$.

Em $\{0 < \tilde{d} < (1 + \epsilon)11\pi\sqrt{\frac{88}{15}}\}$, defina a função h definida por $h = k \circ \frac{\tilde{d}}{1 + \epsilon}$, onde

$$k(t) := -\sqrt{\frac{33}{10}} \tan\left(\frac{1}{11}\sqrt{\frac{15}{88}}t - \frac{\pi}{2}\right),$$

para $t \in (0, 11\pi\sqrt{\frac{88}{15}})$. Pela natureza da função tangente, $\lim_{p \rightarrow \partial\Omega_0} h(p) = +\infty$ e $\lim_{p \rightarrow \partial\Omega_1} h(p) = -\infty$. Note que k é solução da equação $-k' = \frac{5}{242}k^2 + \frac{3}{44}$, então

$$|\partial_\nu h| = \alpha k' \left| \frac{\tilde{d}(p)}{1 + \epsilon} \right| \left| \frac{\tilde{d}'(p)}{1 + \epsilon} \right| \leq \frac{2\alpha}{1 + \epsilon} \left(\frac{3}{44} + \frac{5}{242}h^2 \right) \leq \frac{3}{20} + \frac{1}{22}h^2 = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{22}h^2$$

Então, pela construção anterior,

$$\frac{4}{4 - \alpha} \int_\Sigma |\nabla f|^2 \geq \int_\Sigma f^2 \left(\frac{\delta}{2} - \alpha\lambda^\Sigma \right),$$

como desejávamos. □

6.3 Problema de Bernstein Estável em \mathbb{R}^6

Podemos finalmente provar o Teorema de Bernstein em \mathbb{R}^6 , o último resultado deste trabalho.

Proposição 29. *Seja $F : M^5 \hookrightarrow \mathbb{R}^6$ uma hipersuperfície mínima estável, 2-lados, completa, conexa. Então $F(M) \subset \mathbb{R}^6$ é planar.*

Demonstração. A menos de uma translação, suponha que existe $p_0 \in M$ tal que $F(p_0) = 0$. Seja Ω_+ um domínio compacto suave em M tal que $B_\rho \subset \Omega_+ \subset B_{2\rho}$, onde B_ρ é a bola geodésica de raio ρ em M , e tal que $0 \notin F(\partial\Omega_+)$. Considere a métrica conforme de Gulliver-Lawson $\tilde{g} := r^{-2}g$. Pelos Teoremas 22 e 23, existe um domínio $\tilde{\Omega}$ em M tal que $\Omega_+ \subset \tilde{\Omega} \subset B_{100\pi}(\Omega_+)$ e $\partial\tilde{\Omega}$ satisfaz a limitação (6.7) para a métrica \tilde{g} .

Pelo Teorema 5, M tem um único fim. Então podemos considerar Γ a componente conexa de $\tilde{\Omega}$ que contém B_ρ . Pelo Corolário 2 podemos assumir que M é simplesmente conexa, então a componente conexa ilimitada de $M \setminus \Gamma$ tem uma única componente de

bordo Σ_0 . Seja $\tilde{\Gamma}$ a componente conexa de $M \setminus \Sigma_0$. Por construção, temos que $B_\rho \subset \tilde{\Gamma}$ e $\partial\tilde{\Gamma} \subset B_{100\pi}(B_{2\rho})$.

Pelo Lema 1 temos que a distância Euclidiana em $B_{100\pi}(B_{2\rho})$ é limitada por $2\rho e^{100\pi}$. Então, usando a limitação (6.4), temos que $\frac{4}{(4-a)\alpha} = \frac{43}{29} < \frac{3}{2} = \frac{k-1}{k-2}$, então aplicando a Proposição 34 para a métrica \tilde{g} e obtemos que

$$\text{Vol}_{\tilde{g}}(\Sigma_0) \leq \left(\frac{\delta}{6\alpha}\right)^{-2} \text{Vol}(S^4) = \left(\frac{800}{43}\right)^2 \text{Vol}(S^4).$$

Voltando para a métrica Euclidiana,

$$\text{Vol}(\Sigma_0) \leq \left(\frac{800}{43}\right)^2 \text{Vol}(S^4) 16e^{400\pi} \rho^4$$

Então, aplicando o Teorema 6, obtemos que

$$\text{Vol}_g(B_\rho) \leq \text{Vol}_g(\tilde{\Gamma}) \leq \text{Vol}(B^5) \left(\frac{800}{43}\right)^{\frac{5}{2}} 32e^{500\pi} \rho^5.$$

Logo pelo Teorema 10 M deve ser planar. □

Apêndice A

Teoremas Importantes

O objetivo desta seção é apresentar os resultados ao longo do texto, indicando suas referências.

Proposição 30 ([33], [29]). *Fixe um subconjunto compacto K de uma variedade Riemanniana n -dimensional (M^n, g) . Se u é uma função harmônica em (M, g) , então*

$$\mathcal{H}^{n-1}(B_\rho(x) \cap \{u = s\}) \leq C\rho^{n-1}$$

para qualquer $s \in \mathbb{R}$, $x \in K$, $\rho \leq \rho_0 \equiv \rho_0(M, g, K, u)$. Adisso,

$$\dim_{\text{Hau}}(\{u = s; |\nabla u| = 0\}) \leq n - 2$$

para qualquer $s \in \mathbb{R}$.

Proposição 31 ([43]). *Suponha que (M^n, g) é uma variedade Riemanniana n -dimensional completa e u é uma função harmônica positiva em $B_r(x)$. Se $\text{Ric}_M \geq -K^2$ em $B_r(x)$, então*

$$|\nabla u|(x) \leq C(r^{-1} + K)u(x),$$

para $C \equiv C(n)$.

Proposição 32 ([43]). *Seja M uma variedade Riemanniana completa com $\text{Ric}_M \geq -(n-1)K$, para alguma constante $K \geq 0$. Suponha que u é uma função harmônica positiva definida em uma bola geodésica $B_a \subset M$. Então existe uma constante C dependente de*

n, a e C tal que

$$\sup_{x \in B_{\frac{a}{2}}} u(x) \leq C \inf_{x \in B_{\frac{a}{2}}} u(x).$$

Proposição 33 ([36]). *Para $n > 2$, suponha que $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ é uma imersão mínima completa. Então para qualquer $w \in C_c^{0,1}(M)$, vale que*

$$\left(\int_M w^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \int_M |\nabla w|^2,$$

para qualquer $C \equiv C(n)$.

Proposição 34 (Antonelli-Xu, [3]). *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana suave compacta n -dimensional com $n \geq 3$ e $0 \leq \gamma \leq \frac{n-1}{n-2}$, $\lambda > 0$. Denote por $\text{Ric}(x) := \inf\{\text{Ric}_x(v, v); v \in T_x M, |v| = 1\}$ o ínfimo dos autovalores do tensor de Ricci. Suponha que existe uma função positiva $u \in C^\infty(M)$ tal que*

$$\gamma \Delta u \leq u \text{Ric} - (n-1)\lambda u. \tag{A.1}$$

Seja \widetilde{M} o recobrimento universal de M , dotada da métrica pullback. Então vale que:

1. *Vale a limitação de diâmetro*

$$\text{diam}(\widetilde{M}) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\max u}{\min u} \right)^{\frac{n-3}{n-1}\gamma}. \tag{A.2}$$

2. *Vale a limitação de volume*

$$\text{Vol}(\widetilde{M}) \leq \lambda^{-\frac{n}{2}} \text{Vol}(\mathbb{S}^n). \tag{A.3}$$

Além disso, se ocorrer a igualdade em (A.3), então qualquer função u que satisfaça (A.1) deve ser constante e \widetilde{M} é isométrica a uma esfera de raio $\lambda^{-\frac{1}{2}}$.

Definição 9. *Seja (N, h) uma variedade n -dimensional com métrica h . Para uma função positiva suave f em N e uma constante positiva s , definimos o tensor de Ricci conforme de N associado com o fator conforme f e a altura h como*

$$\text{Ric}^{(f,s)} := \text{Ric} - s(f^{-1}\nabla f)h.$$

Iremos fazer uso também do seguinte resultado:

Lema 20 ([44]). *Assuma que para um fator f e um peso $s < \frac{4}{n-1}$ ($s \leq 2$ se $n = 3$), com uma constante positiva k , vale que*

$$\text{Ric}^{f,s}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq k.$$

Então N é compacta e tem grupo fundamental finito. Além disso, tem-se

$$\text{diam}(N, h) \leq \sqrt{n-1 + \frac{(n-3)^2}{\frac{4}{s} - n + 1} \frac{\pi}{\sqrt{k}}} \quad \text{se } s < \frac{4}{n-1},$$

e

$$\text{diam}(N, h) \leq \sqrt{2} \frac{\pi}{\sqrt{k}} \quad \text{se } n = 3 \text{ e } s \leq 2.$$

Referências Bibliográficas

- [1] ALMGREN Jr, F. J. *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem.* Ann. of Math. v. 84, n. 2, p. 277-292, 1966.
- [2] AMBROZIO, L. C. *Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds.* Journal of Geometric Analysis, v. 25, n. 2, p. 1001–1017, 2015.
- [3] ANTONELLI, G.; XU, K. *New spectral Bishop–Gromov and Bonnet–Myers theorems and applications to isoperimetry.* arXiv:2405.08918, 2024.
- [4] AUBIN, T. *Nonlinear Analysis on Manifolds: Monge-Ampère Equations.* Springer, 2012.
- [5] BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A. G. *Stability of hypersurfaces with constant r -mean curvature.* Annals of Global Analysis and Geometry, v. 15, p. 277–297, 1997.
- [6] BARBOSA, J. L.; DO CARMO, M. *On the size of a stable minimal surface in \mathbb{R}^3 .* American Journal of Mathematics, p. 515–528, 1976.
- [7] BARTA, J. *Sur la vibration fondamentale d'une membrane.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, v. 204, p. 472–473, 1937.
- [8] BELLETTINI, C. *Extensions of schoen–simon–yau and schoen–simon theorems via iteration á la de giorgi.* Inventiones mathematicae 240.1 (2025): 1-34.
- [9] BOMBERRI, E.; DE GIORGI, E.; GIUSTI, E. *Minimal cones and the Bernstein problem.* Ennio De Giorgi, p. 291–, 1969.
- [10] BRENDLE, S. *The isoperimetric inequality for a minimal submanifold in Euclidean space.* Journal of the American Mathematical Society, v. 34, n. 2, p. 595–603, 2021.

- [11] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [12] CAO, H. D.; SHEN, Y.; ZHU, S. *The structure of stable minimal hypersurfaces in \mathbb{R}^n* . arXiv:dg-ga/9709001, 1997.
- [13] CARMO, M. do; PENG, C. K. *Stable complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 are planes*. In: *Selected Papers of Manfredo P. do Carmo*. Springer, 2012. p. 163–166.
- [14] CHODOSH, O. *Stable minimal surfaces and positive scalar curvature*. Lecture Notes for Math 258, Stanford University, 2021.
- [15] CHODOSH, O.; LI, C. *Stable minimal hypersurfaces in \mathbb{R}^4* . *Acta Mathematica*, v. 233, n. 1, p. 1–31, 2024.
- [16] CHODOSH, O.; LI, C. *Stable anisotropic minimal hypersurfaces*. *Forum of Mathematics, Pi*, v. 11, e3.
- [17] CHODOSH, O.; LI, C. *Generalized soap bubbles and the topology of manifolds with positive scalar curvature*. *Annals of Mathematics*, v. 199, n. 2, p. 707–740, 2024.
- [18] CHODOSH, O.; LI, C.; MINTER, P.; STRYKER, D. *Stable minimal hypersurfaces in \mathbb{R}^5* . arXiv:2401.01492.
- [19] COLDING, T.; MINICOZZI, W. *A Course in Minimal Surfaces*. AMS, 2011.
- [20] CATINO, G.; MASTROLIA, P.; RONCORONI, A. *Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces*. *Geometric and Functional Analysis*, v. 34, n. 1, p. 1-18, 2024.
- [21] DE GIORGI, E. *Una estensione del teorema di Bernstein*. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche*, v. 19, n. 1, p. 79-85, 1965.
- [22] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. IMPA, 2005.
- [23] FAKHI, S.; PACARD, F. *Existence result for minimal hypersurfaces with a prescribed finite number of planar ends*. *Manuscripta Mathematica*, v. 103, n. 4, p. 465–512, 2000.
- [24] FISCHER-COLBRIE, D.; SCHOEN, R. *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 33, n. 2, p. 199–211, 1980.

- [25] GIUSTI, E.; WILLIAMS, G. H. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Birkhäuser, 1984.
- [26] GROMOV, M. *Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures*. In: *Functional Analysis on the Eve of the 21st Century*. Birkhäuser, 1996. p. 1–213.
- [27] GULLIVER, R.; LAWSON Jr., H. B. *The structure of stable minimal hypersurfaces near a singularity*. Proc. Symp. Pure Math., v. 44, 1986.
- [28] GREENE, R. E.; WU, H. *Function Theory on Manifolds Which Possess a Pole*. Springer, 2006.
- [29] HARDT, R.; SIMON, L. *Nodal sets for solutions of elliptic equations*. Journal of Differential Geometry, v. 30, n. 2, p. 505–522, 1989.
- [30] LEE, J. M. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Springer, 2018.
- [31] LI, P. *Lectures on Harmonic Functions*. UCI, 2024.
- [32] LI, P. *Geometric Analysis*. Cambridge University Press, 2012.
- [33] LIN, F. H. *Nodal sets of solutions of elliptic and parabolic equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 44, n. 3, p. 287–308, 1991.
- [34] MAZET, L. *Stable minimal hypersurfaces in \mathbb{R}^6* . arXiv:2405.14676, 2024.
- [35] MEEKS III, W. H. *Proofs of some classical theorems in minimal surface theory*. Indiana University Mathematics Journal, p. 1031–1045, 2005.
- [36] MICHAEL, J. H.; SIMON, L. M. *Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of \mathbb{R}^n* . Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 26, p. 361–379, 1973.
- [37] MORGAN, F. *Regularity of isoperimetric hypersurfaces in Riemannian manifolds*. Transactions of the American Mathematical Society, v. 355, n. 12, p. 5041–5052, 2003.
- [38] POGORELOV, A. V. *On the stability of minimal surfaces*. Doklady Akademii Nauk, v. 260, n. 2, 1981.

- [39] SCHOEN, R. *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*. Journal of Differential Geometry, v. 18, n. 4, p. 791–809, 1983.
- [40] SCHOEN, R. *Estimates for stable minimal surfaces in three-dimensional manifolds*. Seminar on Minimal Submanifolds, Princeton University Press, 1984.
- [41] SCHOEN, R.; SIMON, L.; YAU, S. T. *Curvature estimates for minimal hypersurfaces*. 1975.
- [42] SCHOEN, R.; YAU, S. T. *Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with non-negative Ricci curvature*. Commentarii Mathematici Helvetici, v. 51, n. 1, p. 333–341, 1976.
- [43] SCHOEN, R.; YAU, S. T. *Lectures on Differential Geometry*. International Press, 2010.
- [44] SHEN, Y.; YE, R. *On the geometry and topology of manifolds of positive bi-Ricci curvature*. arXiv:9708014, 1997.
- [45] SIMONS, J. *Minimal varieties in Riemannian manifolds*. Annals of Mathematics, v. 88, n. 1, p. 62–105, 1968.
- [46] STERN, D. L. *Scalar curvature and harmonic maps to S^1* . Journal of Differential Geometry, v. 122, n. 2, p. 259–269, 2022.
- [47] TRUDINGER, N.; GILBARG, D. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1998.
- [48] YAU, S. T. *Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold*. Annales de l'École Normale Supérieure, v. 8, n. 4, 1975.
- [49] ZHU, J. *Width estimate and doubly warped product*. Transactions of the American Mathematical Society, v. 374, n. 2, p. 1497–1511, 2021.